

Aspectos matemáticos en las obras de Escher

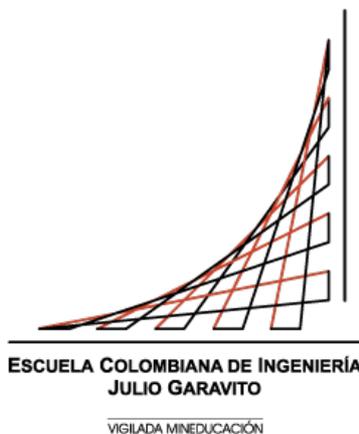
Trabajo de grado

Autor:

María José Cañon Moreno

Dirigido por:

PhD. Julián Andrés
Agredo Echeverry



Programa de Matemáticas
ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

MAYO DE 2021

Resumen

En este trabajo se estudian algunos de los aspectos matemáticos más relevantes de dos obras de M. C. Escher, una pintura y una xilografía (“División” y “Superficie Esférica con Peces”, respectivamente). Entre estos aspectos, encontramos funciones conformes, homomorfismos de grupos, transformaciones de Möbius, espirales loxodrómicas y logarítmicas, diferentes tipos de proyecciones, entre otros. Nuestro estudio va enfocado a encontrar cuadrículas rectas (ya sea que posean homotecias, o que sean teselados) que se relacionen, de manera conforme, con las imágenes o figuras presentes en las obras trabajadas.

Abstract

In this paper we study some of the most important mathematical aspects of two M. C. Escher’s artworks, a painting and a woodcut (“Division” and “Sphere Surface with Fishes”, respectively). Among these aspects, we find conformal functions, group homomorphisms, Möbius transformations, loxodromic and logarithmic spirals, different types of projections, among others. Our study is focused on finding straight grids (whether they have homothecies, or are tessellations) that are related, in a conformally way, with the images or figures present in the artworks worked.

Índice

Resumen/Abstract	I
Contexto biográfico	III
Introducción	V
1. Preliminares	1
2. Funciones conformes	2
3. Espirales loxodrómicas y logarítmicas	3
4. División	5
4.1. Características	5
4.2. Construcción cuadrículas	9
4.3. Simetrías entre las cuadrículas	13
4.4. Función entre las cuadrículas	14
4.4.1. Cálculo de la función	14
4.4.2. Cálculo de los valores α y γ	16
4.5. Comparación entre la cuadrícula propuesta y la cuadrícula de Escher	17
5. Superficie esférica	17
5.1. Proyección ortográfica (e inversa)	17
5.2. Proyección estereográfica	18
5.3. Rotación esfera	21
Conclusiones	23
Bibliografía	24

Contexto biográfico

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), más conocido como M.C. Escher, fue un artista holandés del siglo XX. Es considerado uno de los más grandes artistas gráficos de dicho siglo y es principalmente recordado por plasmar en sus obras: figuras imposibles, ilusiones ópticas y mundos imaginarios. Es tal vez debido a este carácter matemático, presente en sus obras, que Escher también se ha convertido en uno de los artistas más populares en los entornos científicos, especialmente matemáticos e informáticos.

Curiosamente, sus conocimientos matemáticos siempre fueron muy limitados. Muchas de las conclusiones gráficas y matemáticas a las que llegó, y que le permitirían realizar algunos de sus trabajos, tuvo que descubrirlas por sí mismo. Maurits asistió tanto a la escuela primaria como al bachillerato en Arnhem entre 1912 y 1918 donde no destacó en muchas materias; para él, la escuela era una pesadilla, excepto por las clases de dibujo. Como tantos otros grandes artistas, era zurdo. Mostró un interés temprano tanto por la música como por la carpintería. Se opinaba que poseía una mente matemática pero nunca sobresalió en la materia, durante sus años escolares la trataba con considerable desasosiego. Incluso escribió:

“Durante el bachillerato en Arnhem salí muy mal en aritmética y álgebra porque tenía, y aún tengo, gran dificultad con la abstracción de números y letras. Cuando, más adelante, en estereometría [geometría de los sólidos], se apeló a mi imaginación, las cosas mejoraron un poco pero en la escuela nunca salí bien en esa materia. Pero nuestro camino por la vida puede dar giros extraños”.

(M. C. Escher)

En 1919 empezó sus estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, los cuales abandonó para pasar a convertirse en discípulo de Samuel de Mesquita con quien adquirió conocimientos básicos de dibujo y xilografía. Entre 1922 y 1935 vivió en Italia donde realizó bocetos y grabados de temas paisajistas. Debido al clima político de Italia, pasó algunos años en Suiza, país que le resultó muy desagradable y poco inspirador. También visitó dos veces la Alhambra, en donde contempló detalles decorativos fundados en patrones matemáticos, los cuales tuvieron una profunda influencia en su obra, especialmente en la relacionada con la partición regular del plano y el uso de patrones que rellenan el horror vacui (espacio vacío) del espacio sin dejar ningún hueco. En 1941 abandona los temas paisajistas y se centra en su propia mente, debido al mal tiempo de Bélgica.

Hasta 1951 dependía económicamente de sus padres. A partir de entonces comenzó a vender sus grabados. Generalmente hacía copias de las litografías y grabados por encargo, diseñaba sellos, portadas de libros, y algunas esculturas en marfil y madera. En 1970 se traslada a la Casa Rosa Spier de Laren, al norte de los Países Bajos, donde los artistas podían tener estudio propio. Murió dos años más tarde, en Hilversum, el 27 de marzo de 1972 a la edad de 73 años, y fue enterrado en el cementerio de Baarn.

Cabe resaltar que muchas de sus obras guardan ciertas similitudes entre sí debido a la recurrencia de los temas tratados (las figuras imposibles, las metamorfosis, perspectivas, ciclos, entre otros), por esta razón, éstas son fácilmente reconocibles para el observador interesado. Podemos ver un retrato del artista en la Figura 1.



Figura 1: Retrato de Maurits Cornelis Escher

Introducción

Como se ha mencionado previamente, las obras de Escher cuentan con algunos aspectos matemáticos que pueden ser estudiados, lo cual realizaremos a continuación para dos de estas obras. La primera de estas será la pintura “División” (originalmente Deling), presentada en la Figura 2; en ésta podemos notar cierto patrón que, de alguna manera, nos sugiere que la pintura ha sido realizada sobre alguna grilla o una cuadrícula.

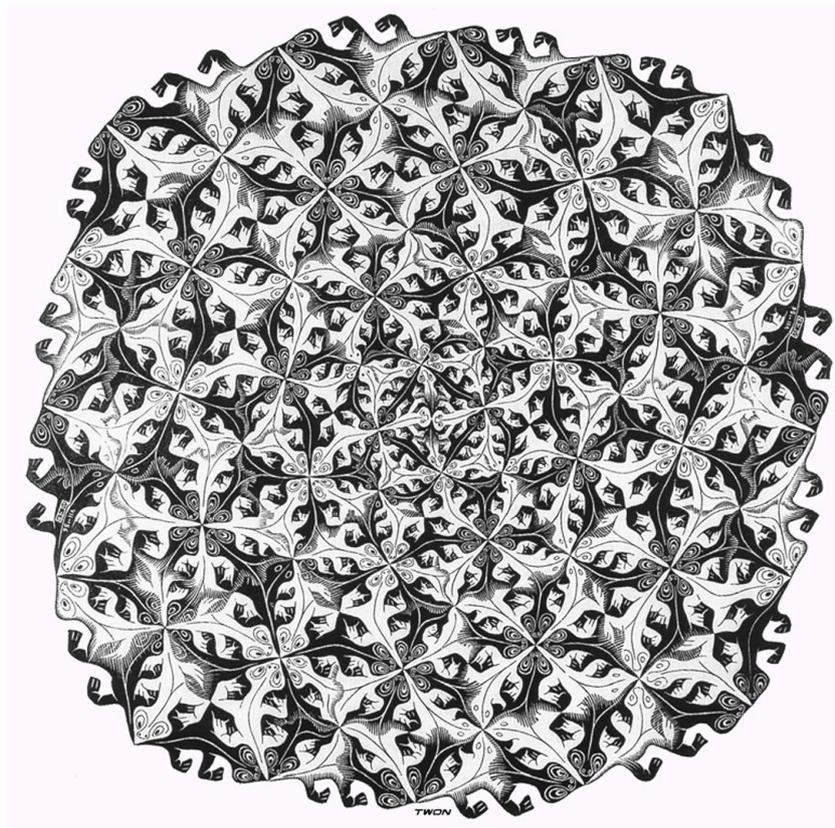


Figura 2: División (Deling). Maurits Cornelis Escher, 1956.

Siguiendo este orden de ideas, es natural preguntarnos cuál será la cuadrícula sobre la cual se ha realizado la pintura y si existe una forma general de representarla. Más específicamente, buscaremos una aplicación conforme mediante la cual podamos representar la cuadrícula que hay detrás de esta imagen. En la Figura 3 podemos ver un dibujo de la cuadrícula mencionada, realizado por el mismo Escher, la cual es simétrica cada 90° .

En segundo lugar, tenemos la xilografía “Superficie Esférica con Peces”, presentada en la Figura 4. Esta obra, a simple vista, pareciera ser una figura tridimensional plasmada de manera bidimensional, lo cual podríamos confirmar, simplemente, leyendo el título de la misma. Para este segundo caso, buscaremos mostrar que, en efecto, se trata de la perspectiva de una figura tridimensional (esfera) y que además existe una aplicación conforme entre un teselado contenido en el plano y la imagen de la xilografía vista sobre la esfera.

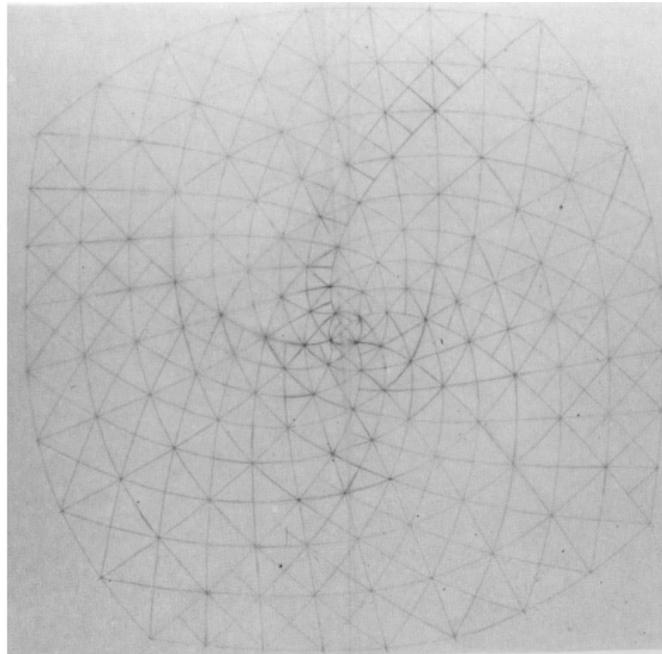


Figura 3: Cuadrícula de Escher



Figura 4: Superficie Esférica con Peces. Maurits Cornelis Escher, 1958.

1. Preliminares

Para poder estudiar las obras mencionadas, necesitaremos tener en cuenta algunos conceptos que se expondrán a continuación en caso de no ser recordados (o nunca haber sido tratados) por el lector. Para la primer obra (División), necesitaremos saber lo que es un grupo y algunas propiedades de las aplicaciones que podemos encontrar entre estos, para esto, contamos con las siguientes definiciones y el primer teorema de isomorfía¹.

Definición. Un *grupo* (G, \cdot) es un sistema formado por un conjunto G y una ley de composición interna (\cdot) sobre G tal que:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, cualesquiera que sean $a, b, c \in G$.
2. Existe $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
3. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Al e que satisface la propiedad (2.) lo llamaremos el *elemento neutro* de G y al a^{-1} que cumple la propiedad (3.) lo llamaremos el *inverso* de a .

Definición. Sean (G, \cdot) y $(G', *)$ grupos, con e' el elemento neutro de G' , y sea $f : G \mapsto G'$ una aplicación, llamaremos *kernel* (o *núcleo*) de f al conjunto

$$\ker(f) = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G : f(x) = e'\}.$$

Definición. Sean (G, \cdot) y $(G', *)$ grupos. Una aplicación $f : G \mapsto G'$ tal que $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ se denomina un *homomorfismo* de G en G' .

Definición. Sean (G, \cdot) y H un subgrupo de G , llamaremos a $\gamma_H : G \rightarrow G/H$, dado por $\gamma_H(\alpha) = \alpha H$, el *homomorfismo canónico* de G en G/H .

Teorema (Primer teorema de isomorfía). Sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo con kernel K y sea $\gamma_K : G \rightarrow G/K$. Entonces existe un único homomorfismo biyectivo $\mu : G/K \rightarrow f(G)$ tal que $f(x) = \mu(\gamma_K(x))$ para cada $x \in G$.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & f(G) \\
 \gamma_K \downarrow & \nearrow \mu & \\
 G/K & &
 \end{array}
 \tag{1}$$

Para la segunda obra (Superficie Esférica con Peces), deberemos realizar una rotación a una esfera, esto lo lograremos mediante una transformación de Möbius, la cual se define a continuación.

Definición. Llamaremos *transformación de Möbius* (o *transformación lineal fraccional*) a una función compleja de la forma

$$w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

en donde a, b, c, d son constantes complejas tales que $ad - bc \neq 0$.²

¹Tomados de [1], páginas 37-38, 125, 129, 139, 307.

²Tomada de [2], página 63.

Toda transformación de Möbius es composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones. En particular, las transformaciones que corresponden exclusivamente a las rotaciones de la esfera Riemanniana (la cual se verá en la sección 5) están dadas de la forma

$$M(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}.$$

Nota. Las transformaciones de Möbius forman un grupo con la operación composición. Es decir, (\mathcal{M}, \circ) , con

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc \neq 0 \right\},$$

es un grupo.³

Adicionalmente, en el estudio de ambas obras, estaremos utilizando la función logaritmo complejo y algunas de sus propiedades, las cuales serán expuestas a continuación.⁴

Definición. Dado $z \neq 0$ en los números complejos, si la representación polar de z es $re^{i\theta}$, donde $-\pi < \theta \leq \pi$, definimos la función *logaritmo* como una función multivaluada, dada por:

$$\log(z) = \ln(r) + i(\theta + 2\pi m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Similarmente, podemos definir la función univaluada *logaritmo principal* como

$$\text{Log}(z) = \ln(r) + i\theta,$$

la cual tendrá inversa e^w , tomando el dominio de w como $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$.

Propiedades de la función logaritmo.

- Si tomamos una circunferencia centrada en el origen, digamos $|z| = r_0$, y calculamos su imagen mediante la función logaritmo, el resultado será la recta vertical $\text{Re}(w) = \ln(r_0)$.
- Si tomamos un rayo desde el origen, digamos $\theta = \theta_0$, y calculamos su imagen mediante la función logaritmo, el resultado será el conjunto de rectas horizontales $\text{Im}(w) = \theta_0 + 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Si tomáramos el valor principal de logaritmo, obtendríamos únicamente la recta $\text{Im}(w) = \theta_0$.

Cuando empleemos esta función en la primera de las obras estudiadas, tendremos que a pesar de utilizar la función de logaritmo multivaluada, el espacio en el cual estaremos trabajando será cociente y, por ende, podríamos considerarlo simplemente como un logaritmo univaluado.

Por otro lado, en la segunda obra trabajaremos con el logaritmo principal, obteniendo un resultado únicamente en la franja $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$, pero que sin embargo, podremos extender a todo el plano, pues en este caso estaremos trabajando con un teselado que puede extenderse infinitamente.

2. Funciones conformes

Primero veamos qué significa que una función sea conforme y qué requisitos serían suficientes para decir que una función lo es.

³Tomada de [3], página 200.

⁴Tomadas de [2], páginas 21-23.

Definición. Sea $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$, una curva parametrizada suave en $z_0 = \gamma(0)$. Nos referiremos a

$$\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} = x'(0) + iy'(0)$$

como el *vector tangente* a la curva γ en z_0 . Definiremos el *ángulo entre dos curvas* en z_0 como el ángulo entre sus vectores tangentes en z_0 .

Definición. Diremos que una función es *conforme* si esta preserva ángulos. Más precisamente, diremos que una función suave $g(z)$, con valores en los complejos, es conforme en z_0 si para cualesquiera dos curvas γ_0 y γ_1 que pasen por z_0 y tengan vectores tangentes no nulos en dicho punto, se tiene que las curvas $g \circ \gamma_0$ y $g \circ \gamma_1$ tienen vectores tangentes no nulos en $g(z_0)$ y el ángulo orientado entre $(g \circ \gamma_0)'(z_0)$ y $(g \circ \gamma_1)'(z_0)$ coincide con el ángulo orientado entre $\gamma_0'(z_0)$ y $\gamma_1'(z_0)$.

Teorema. Si $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ es analítica en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 .⁵

Nota. Las funciones conformes no preservan sólo los ángulos, sino también la estructura aritmética.

Nota. Nótese que si f es una transformación de Möbius, dada por $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces su derivada será de la forma:

$$M'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

con lo cual, por el teorema inmediatamente anterior, tendremos que toda transformación de Möbius es conforme.

3. Espirales loxodrómicas y logarítmicas

Situándonos en un plano, diremos que las *espirales logarítmicas* son aquellas curvas que intersecan a cada radio (rayo desde el origen) en un ángulo constante, digamos α . Como la función logaritmo compleja transforma circunferencias centradas en el origen en rectas verticales y rayos radiales en rectas horizontales, tendremos que las espirales logarítmicas pueden caracterizarse, únicamente, porque al aplicarles la función logaritmo complejo, sus imágenes son líneas rectas, tal y como se observa en la Figura 5. Por lo tanto, si tenemos una recta $y = mx + b$, podemos parametrizar su respectiva espiral logarítmica como sigue:

- En primer lugar, como la pendiente de la recta es m , tendremos que su vector director puede ser escrito como $(1, m)$ (o como $1 + im$).
- Ahora, como la recta pasa por el punto $(0, b)$ (o ib), podemos parametrizarla como

$$z(t) = (1 + im)t + ib = t + i(mt + b).$$

- Como para pasar de esta recta a la espiral logarítmica asociada debemos utilizar la función exponencial, tendremos que esta espiral puede ser parametrizada como

$$w(t) = e^{z(t)} = e^{t+i(mt+b)} = e^t e^{i(mt+b)}.$$

Así, $\theta = \arg(w(t)) = mt + b$, y $r = |w(t)| = e^t$, donde $t = \frac{\theta - b}{m}$. Es decir,

$$r = e^{\frac{\theta - b}{m}} = e^{\frac{\theta}{m}} e^{-\frac{b}{m}} = A e^{\frac{\theta}{m}},$$

donde $A = e^{-\frac{b}{m}}$.

⁵Éstas definiciones y teoremas son tomadas de [2], páginas 58-59.

Adicionalmente, como la función logaritmo es conforme, tendremos que la recta $z(t)$ cortará cada recta horizontal en un ángulo α , es decir, $\tan(\alpha) = m$.

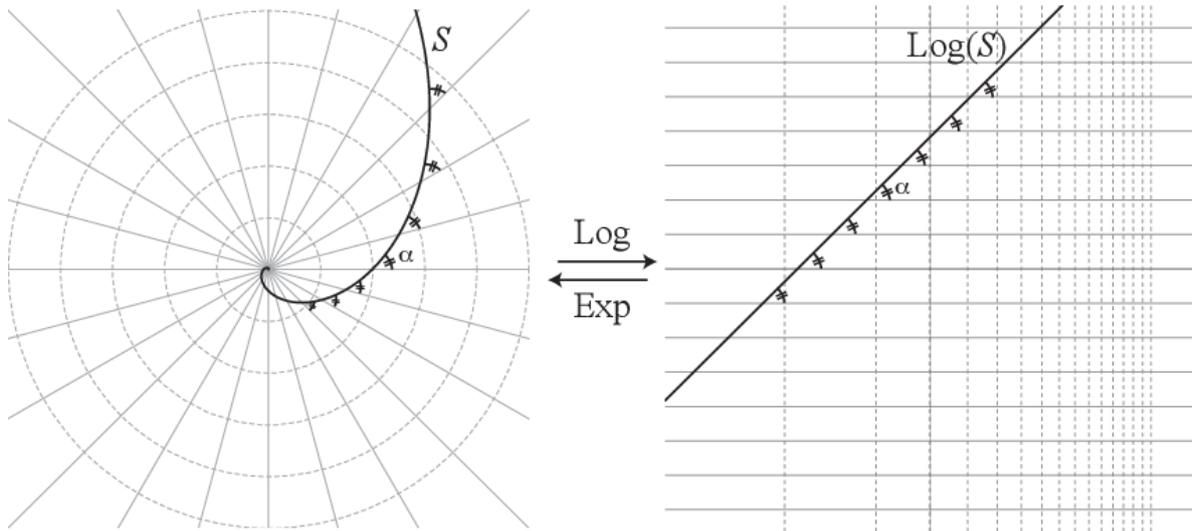


Figura 5: Espiral logarítmica (imagen tomada de [6], página 30).

Análogamente, si nos situamos en una esfera, tendremos que las *espirales loxodrómicas* son aquellas que forman un ángulo constante con cada longitud (o meridiano) de la esfera, tal y como se observa en la Figura 6, en la cual dicho ángulo también se ha tomado como α .

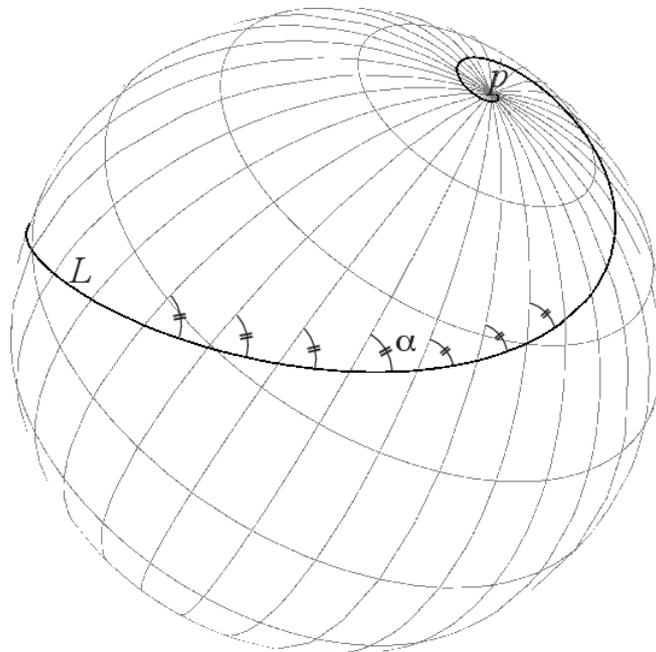


Figura 6: Espiral loxodrómica (imagen tomada de [6], página 31).

4. División

4.1. Características

Si tomamos la parte superior de la pintura, tal como en la Figura 7, podemos observar que a partir del lagarto ubicado en la parte derecha, obtenemos dos lagartos (parte izquierda de la figura). Similarmente, si tomamos el lagarto señalado en la Figura 8, podemos realizar el mismo proceso a la parte izquierda de la pintura. Esto se muestra en la Figura 9 (la cual ha sido rotada 90° en el sentido de las manecillas del reloj). Nuevamente, podemos tomar el lagarto de la esquina superior izquierda de esta figura y realizar el mismo proceso, pero lo que obtendremos será un resultado idéntico al de la Figura 7. De esta manera, podemos continuar alrededor de la pintura, obteniendo entonces, una expansión circular (es decir, al ir avanzando en círculos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, iremos viendo un aumento en la cantidad de lagartos).



Figura 7: Lado superior de la pintura División (imagen tomada de [5], página 7).



Figura 8: Lado superior de la pintura División

En toda la figura, podemos notar que al acercarnos al centro, va disminuyendo el tamaño de los lagartos, excepto en el centro mismo, es decir, en los lagartos que observamos en la Figura 10.

Si pensamos en esta pintura sin el centro, obtendremos la imagen de la Figura 11, en la cual hemos trazado algunas curvas de color rojo que encierran una cuarta parte de la pintura, estas curvas han sido tomadas de la cuadrícula de Escher, la cual al ser simétrica cada 90° , nos permite extender estas curvas



Figura 9: Lado izquierdo de la pintura División (rotado 90° en el sentido de las manecillas del reloj)



Figura 10: Centro de la pintura División

a la totalidad de la pintura.

A su vez, el interior de estas curvas puede ser subdividido como se muestra en la Figura 12, el trozo de cuadrícula resultante lo podemos ver por fuera de la pintura como en la Figura 13. Como hemos mencionado previamente, esta subdivisión se muestra en una cuarta parte de la pintura, pero se puede aplicar a esta en su totalidad. Además, al aplicarla a toda la pintura, obtendremos que los lados de los cuadrados al costado derecho de esta subdivisión van a coincidir con los lados de los triángulos de la siguiente, mientras que los lados de los triángulos al costado izquierdo de esta subdivisión coincidirán con los lados de los cuadrados de la anterior, tal como se observa en la Figura 14.

Por lo tanto, si vamos a relacionar la cuadrícula de Escher con alguna otra cuadrícula, lo lógico será buscar una que esté compuesta por cuadrados y por triángulos, cuyos lados coincidan de manera similar a la cuadrícula de Escher. Esta cuadrícula se verá explícitamente más adelante.

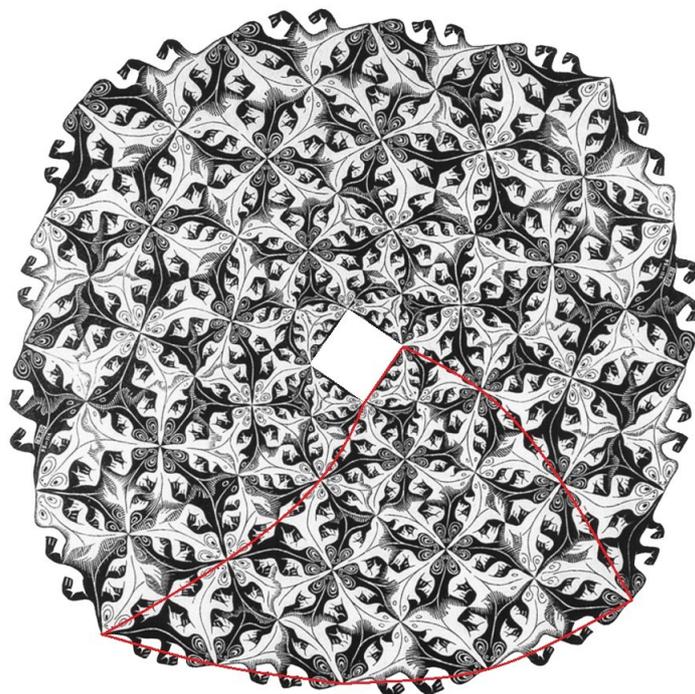


Figura 11: División sin el centro

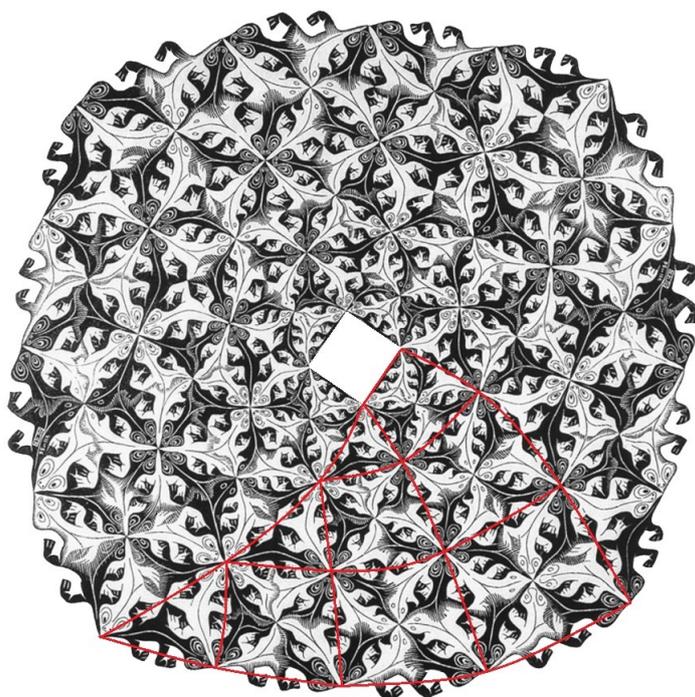


Figura 12: División sin el centro

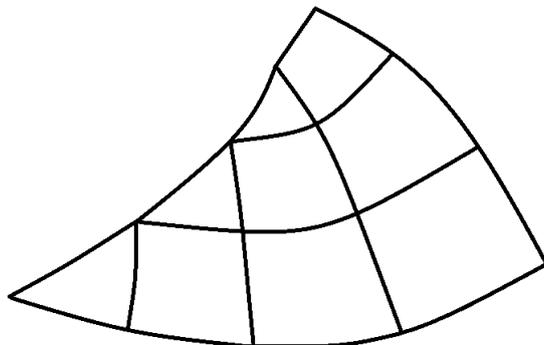


Figura 13: Trozo cuadrícula de Escher

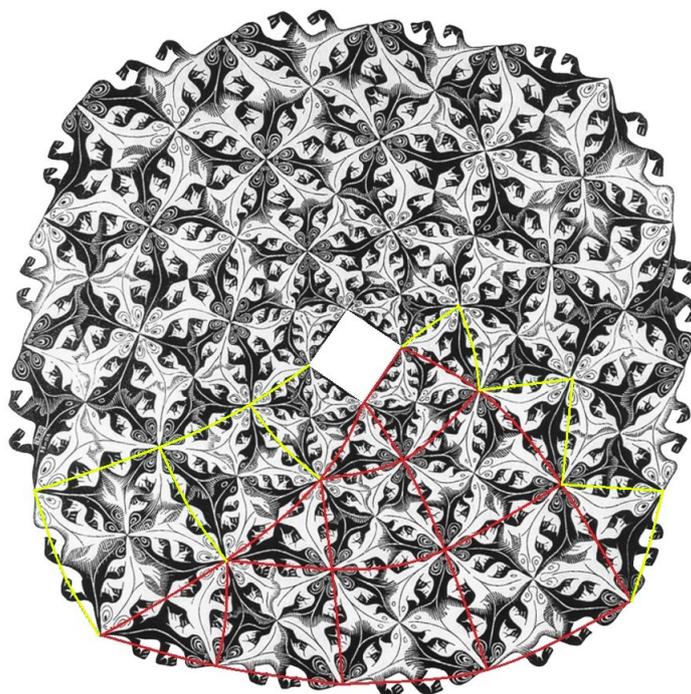


Figura 14: División sin el centro

4.2. Construcción cuadrículas

Ahora bien, para ver si la cuadrícula de Escher es inducida por una función conforme, buscaremos una cuadrícula recta a la cual, al aplicarle una función conforme, nos de como resultado la cuadrícula de Escher. Esta cuadrícula recta debe cumplir algunos requisitos que ya han sido mencionados previamente, y es que debe estar compuesta por cuadrados y por triángulos de manera que, cada cierta cantidad, los lados de los cuadrados coincidan con los lados de los triángulos. Cada trozo de la cuadrícula debe estar dado como en la Figura 15 y debe unirse con los demás trozos como en la Figura 16. Esta cuadrícula puede extenderse infinitamente, dando como resultado la cuadrícula recta de la Figura 17.

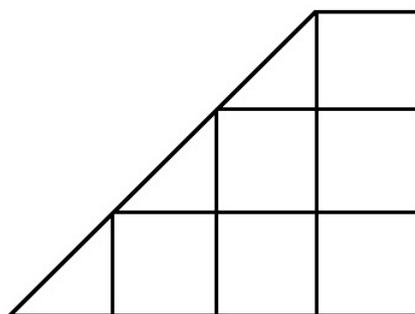


Figura 15: Trozo cuadrícula recta

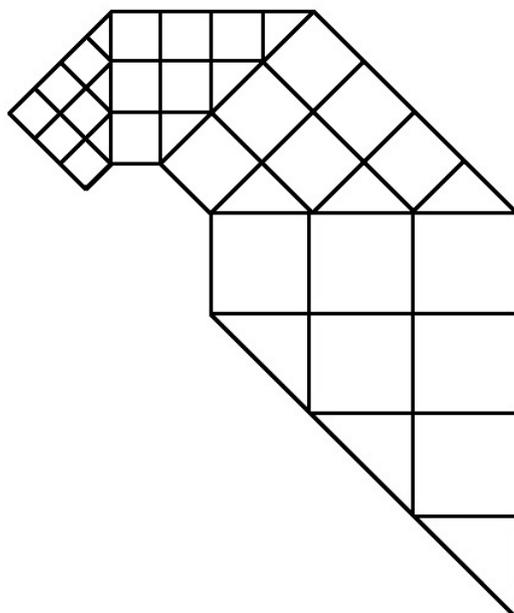


Figura 16: Cuadrícula recta

Tanto la cuadrícula recta como la cuadrícula de Escher se muestran en la Figura 17. Cabe resaltar que la cuadrícula recta es simétrica cada 180° .

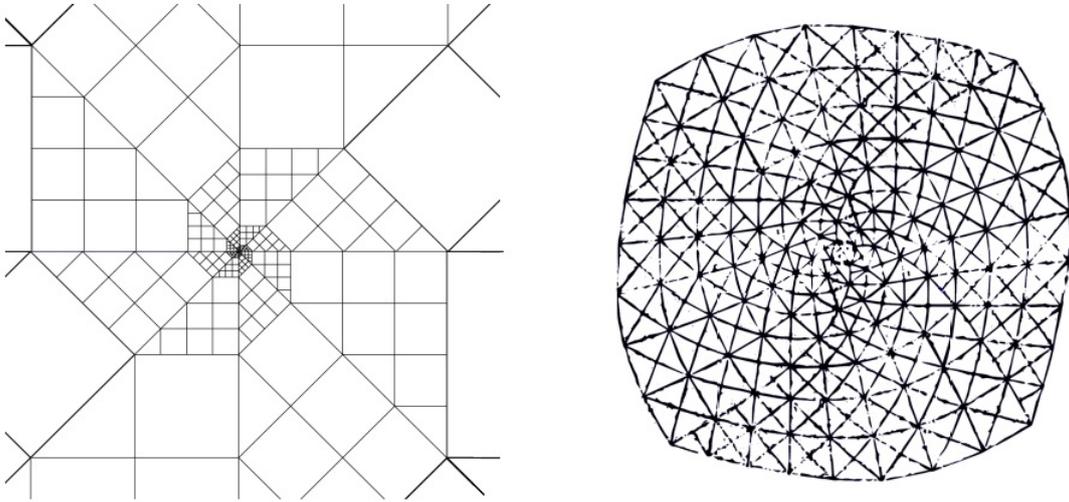


Figura 17: Cuadrícula recta vs Cuadrícula de Escher

La región en el interior de las líneas naranjas de la cuadrícula recta (Figura 18) serán correspondientes con la región interior a las curvas naranjas de la cuadrícula de Escher. Similarmente, obtenemos el mismo resultado para las regiones encerradas en amarillo de la Figura 19. Continuando con este proceso, tendremos las correspondencias de la Figura 20.

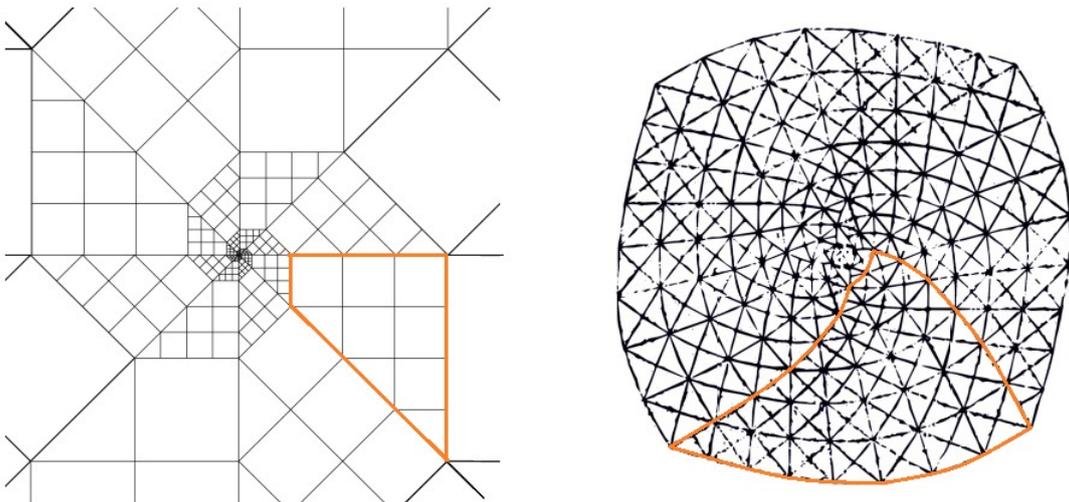


Figura 18: Regiones correspondientes entre la cuadrícula recta y la de Escher

Si desearamos continuar con este proceso, llegaríamos a que la región de la cuadrícula recta, encerrada

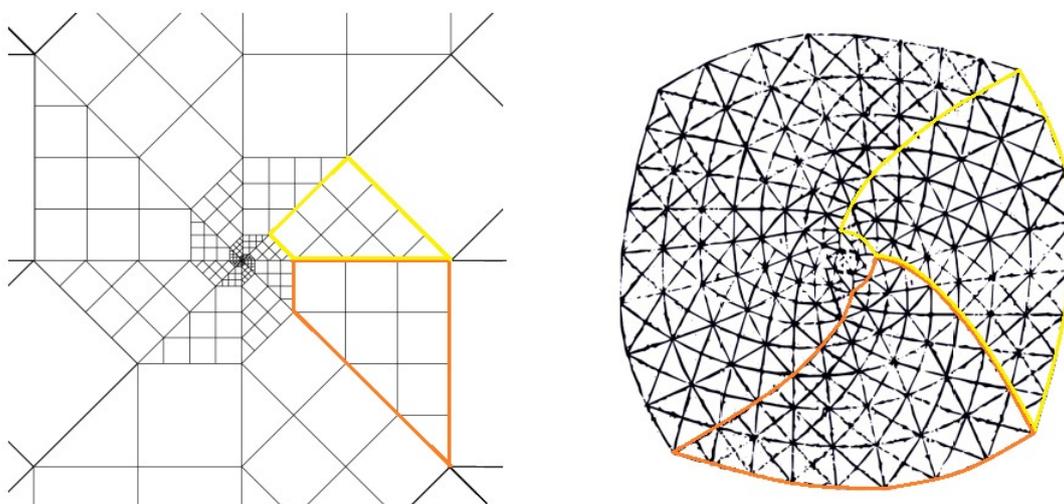


Figura 19: Regiones correspondientes entre la cuadrícula recta y la de Escher

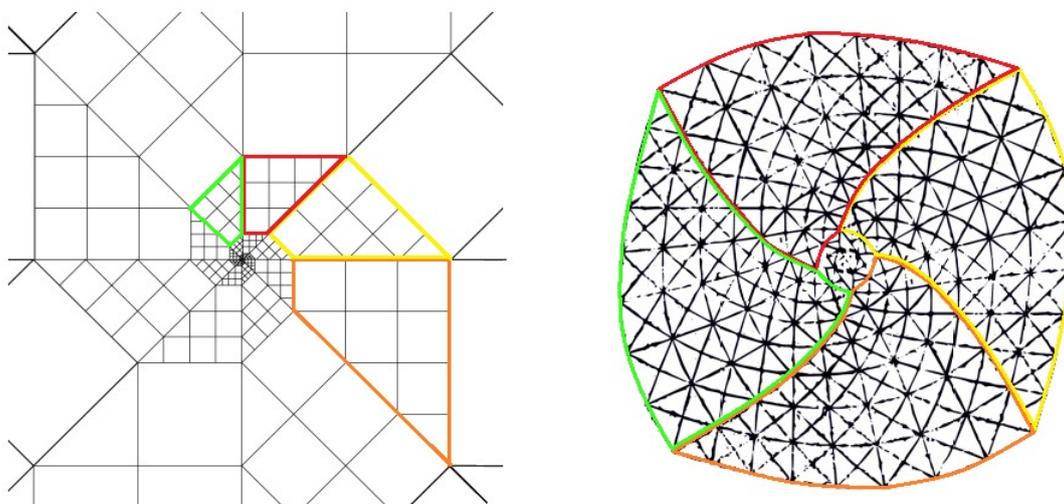


Figura 20: Regiones correspondientes entre la cuadrícula recta y la de Escher

por azul celeste de la Figura 21, debería ser correspondiente con la región encerrada por naranja en la cuadrícula de Escher de la misma figura. Sin embargo, esta región ya tenía una correspondencia con la región naranja de la cuadrícula recta. Por lo tanto, podríamos decir que las regiones celeste y anaranjada de la cuadrícula recta presentan una simetría.

Más aún, como sabemos que la cuadrícula recta es simétrica cada 180° , tendremos que la región azul

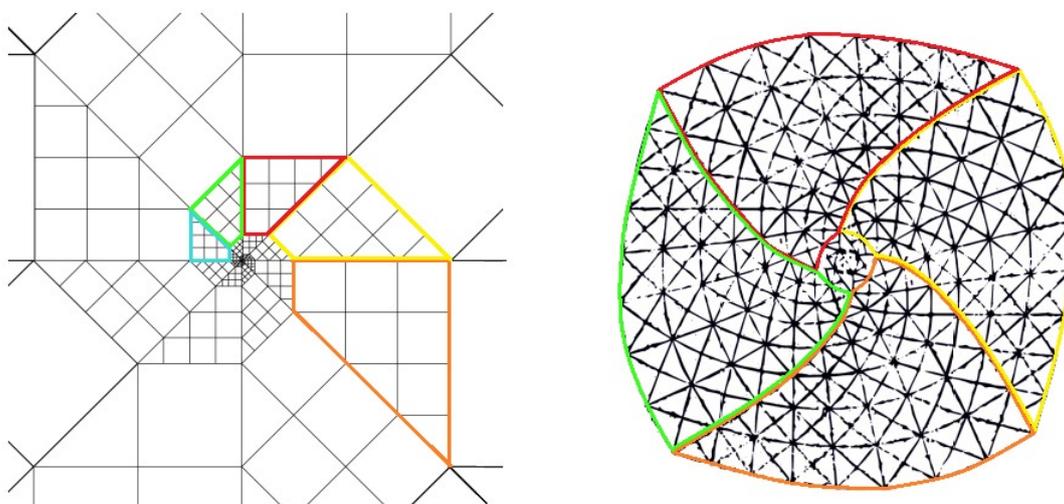


Figura 21: Regiones correspondientes entre la cuadrícula recta y la de Escher

celeste será simétrica con la región azul oscura de la Figura 22, y por ende, las tres regiones subrayadas en esta figura serán simétricas.

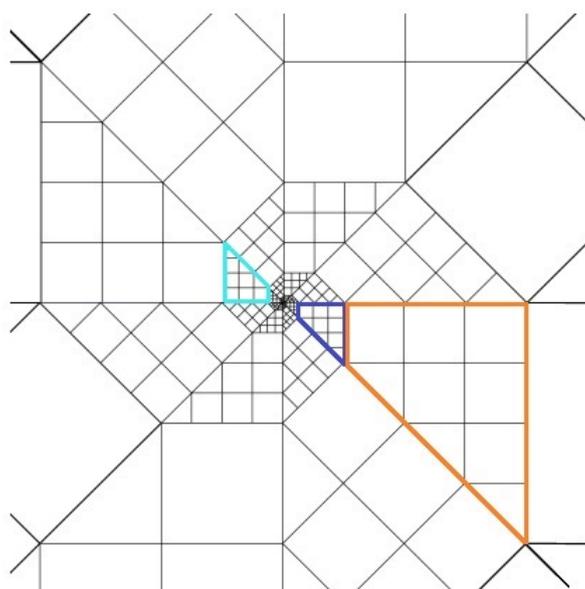


Figura 22: Regiones simétricas de la cuadrícula recta

Aunque la región azul oscura sea, por lo mencionado anteriormente, simétrica con una región corres-

pendiente a la región anaranjada de la cuadrícula de Escher, esta en realidad corresponde con la región azul de la misma (Figura 23).

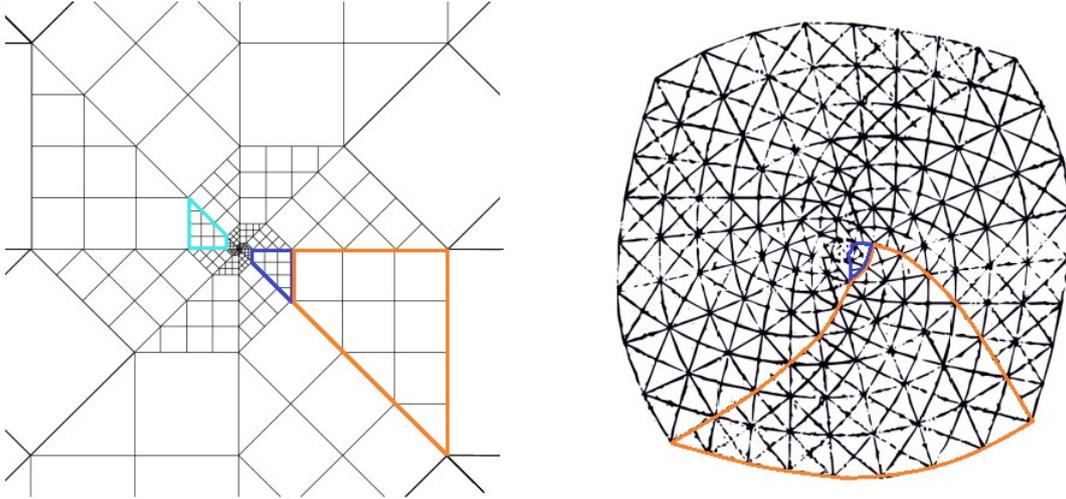


Figura 23: Regiones correspondientes entre la cuadrícula recta y la de Escher

De esta manera, si suponemos que existe una función conforme h entre ambas cuadrículas, podemos establecer ciertas simetrías entre ellas y entre sus regiones correspondientes, mediante rotaciones, homotecias y la función h .

4.3. Simetrías entre las cuadrículas

Como hemos mencionado previamente, la cuadrícula de Escher es simétrica cada 90° . Por lo tanto, si la rotamos 90° en el sentido de las manecillas del reloj, deberíamos obtener una cuadrícula congruente con la original. Para obtener esta rotación, ubicamos la cuadrícula en el plano complejo, con el cero en el centro de la cuadrícula y la multiplicamos por el número $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, el cual es la representación polar de $-i$. Si nos ubicamos en la Figura 21, lo que obtendremos al realizar este proceso, será pasar de la región verde a la roja, de la roja a la amarilla, de la amarilla a la naranja y de la naranja a la verde. Debido a las correspondencias que establecimos entre las dos cuadrículas, lo que tendríamos para la cuadrícula recta es que sus regiones señaladas en esta misma figura, deben ser simétricas.

Para pasar de una región a otra en la cuadrícula recta de la Figura 21 (en el siguiente orden: Azul \rightarrow verde \rightarrow rojo \rightarrow amarillo \rightarrow naranja), lo que se está llevando a cabo es una rotación de 45° en el sentido de las manecillas del reloj y una homotecia de $\sqrt{2}$, es decir, para pasar de una región a otra (en el orden mencionado), lo que haremos es ubicar la cuadrícula recta sobre el plano complejo con el cero en el centro de la cuadrícula y multiplicar cada valor por $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, el cual es la representación polar de $1 - i$. Con esto, tendremos una simetría de $1 - i$ en la cuadrícula recta, correspondiente a una simetría de $-i$ en la cuadrícula de Escher.

Similarmente, como tenemos que las regiones azul oscura y naranja de la cuadrícula recta en la Figura 23 son simétricas, entonces habrá una simetría en esta cuadrícula correspondiente a una homotecia de 4 (la cual se utiliza para pasar de la región azul a la región naranja). Esto se verá reflejado en la cuadrícula

de Escher en una rotación y una homotecia que puede ser representada como una multiplicación por algún escalar complejo γ . Con lo cual, tendremos una simetría de 4 en la cuadrícula recta, correspondiente a una simetría de algún $\gamma \in \mathbb{C}$ en la cuadrícula de Escher.

Si queremos estudiar la función que nos permite pasar de una cuadrícula a otra, basta con hacerlo en las regiones encerradas por color naranja de la Figura 23, pues tanto en la cuadrícula recta como en la de Escher, el plano pinchado puede ser completamente cubierto por regiones similares a estas, tales que, cada dos regiones distintas tendrán interiores disjuntos. Obtendremos entonces particiones de la cuadrícula recta y a la cuadrícula de Escher, las cuales representaremos por $\mathbb{C}^*/\langle 1-i, 4 \rangle$ y $\mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle$, respectivamente, donde los conjuntos $\langle 1-i, 4 \rangle$ y $\langle -i, \gamma \rangle$ serán, respectivamente, los generados por $1-i$ y 4 , y por $-i$ y γ , es decir

$$\langle 1-i, 4 \rangle = \{(1-i)^n(4)^m : n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad \langle -i, \gamma \rangle = \{(-i)^n(\gamma)^m : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

4.4. Función entre las cuadrículas

Definición. Llamaremos *látice* en \mathbb{C} (o en \mathbb{R}^2) al grupo aditivo:

$$\Lambda = \{nv_1 + mv_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

donde $\{v_1, v_2\}$ es una base para \mathbb{R}^2 .

Resultado. Sean Λ_1 y Λ_2 látices en \mathbb{C} . Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es tal que $\alpha\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, entonces la multiplicación por el escalar α , dada por

$$\overline{\phi_\alpha} : \mathbb{C}/\Lambda_1 \mapsto \mathbb{C}/\Lambda_2, \quad \overline{\phi_\alpha}(z) = \alpha z \pmod{\Lambda_2}$$

es un homomorfismo holomorfo⁶. Además, son las únicas funciones holomorfas de \mathbb{C}/Λ_1 en \mathbb{C}/Λ_2 que envían a 0 en 0.

Teorema. Sean Λ_1 y Λ_2 látices en \mathbb{C} . Entonces la asociación:

$$\begin{array}{ccc} \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2\} & \rightarrow & \{\text{funciones holomorfas } \overline{\phi} : \mathbb{C}/\Lambda_1 \mapsto \mathbb{C}/\Lambda_2 \text{ con } \overline{\phi}(0) = 0\} \\ \alpha & \mapsto & \overline{\phi_\alpha} \end{array}$$

es una biyección.⁷

4.4.1. Cálculo de la función

Como los conjuntos $\mathbb{C}/\langle 1-i, 4 \rangle$ y $\mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle$ son grupos multiplicativos y lo mencionado anteriormente se aplica a grupos aditivos, buscaremos látices Λ_1 y Λ_2 tales que el diagrama (2) conmute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Lambda_1 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}/\Lambda_2 \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{C}^*/\langle 1-i, 4 \rangle & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle \end{array} \quad (2)$$

⁶Llamaremos *holomorfas* a las funciones que sean diferenciables en el sentido complejo.

⁷Resultado y Teorema tomados de [4], página 171.

Como estamos pasando de grupos multiplicativos a grupos aditivos, lo más natural es pensar en la función exponencial. Consideremos la siguiente función: $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi_3} \mathbb{C}^*/\langle 1-i, 4 \rangle$, vista explícitamente como la siguiente asignación $z \mapsto e^z \mapsto [e^z]_3 = e^z \pmod{\langle 1-i, 4 \rangle}$ ⁸.

Además, como $\log(1-i) = \ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ y $\log(4) = \ln(4) + 2k'\pi i$, para k y k' arbitrarios, particularmente tendremos que $\ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}$ y $\ln(4)$ son elementos de $\langle \log(1-i), \log(4) \rangle$, luego

$$2\pi i = 2(\ln(4)) - 8(\ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}) \in \langle \log(1-i), \log(4) \rangle.$$

Esto implica que para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $2k\pi i \in \langle \log(1-i), \log(4) \rangle$.

Podemos calcular el kernel de $\varphi = \pi_3 \circ \exp$ como sigue:

$$\begin{aligned} & z \in \ker(\varphi) \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Definición de kernel} \rangle \\ & \varphi(z) = [1]_3 \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Definición de } \varphi \rangle \\ & [e^z]_3 = [1]_3 \\ \Leftrightarrow & \langle [a]_3 = [b]_3 \text{ sii } ab^{-1} \in \langle 1-i, 4 \rangle \rangle \\ & e^z(1^{-1}) \in \langle 1-i, 4 \rangle \\ \Leftrightarrow & \langle 1^{-1} = 1 \rangle \\ & e^z \in \langle 1-i, 4 \rangle \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Definición del generado de un conjunto multiplicativo} \rangle \\ & e^z = (1-i)^n(4)^m, \text{ para algunos } m, n \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Aplicando logaritmo (multivaluado)} \rangle \\ & z = \log((1-i)^n(4)^m) + 2k\pi i, \text{ para algunos } m, n, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Propiedades del logaritmo} \rangle \\ & z = \log(1-i)^n + \log(4)^m + 2k\pi i, \text{ para algunos } m, n, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Propiedades del logaritmo} \rangle \\ & z = n \log(1-i) + m \log(4) + 2k\pi i, \text{ para algunos } m, n, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Definición del generado de un conjunto aditivo} \rangle \\ & z - 2k\pi i \in \langle \log(1-i), \log(4) \rangle, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \langle \text{Para todo } k \in \mathbb{Z}, \text{ se tiene que } 2k\pi i \in \langle \log(1-i), \log(4) \rangle \rangle \\ & z \in \langle \log(1-i), \log(4) \rangle \end{aligned}$$

Luego, $\ker(\varphi) = \langle \log(1-i), \log(4) \rangle$, a este conjunto, lo denotaremos por Λ_1 . Así, tendremos que

$$\Lambda_1 = \{n \log(1-i) + m \log(4) : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

que corresponde con nuestra definición de látice. Por el primer teorema de isomorfía, existirá un único homomorfismo $\mu : \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle 1-i, 4 \rangle$, biyectivo, tal que $\varphi = \mu \circ \gamma_{\Lambda_1}$.

⁸El módulo lo que hará es pasar de un punto arbitrario de la cuadrícula a su equivalente de la región encerrada por color naranja de la Figura 23. Todos los módulos calculados pueden entenderse de manera similar.

Similarmente, consideramos la función $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \xrightarrow{\pi_4} \mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle$, dada por $z \mapsto e^z \mapsto [e^z]_4 = e^z \pmod{\langle -i, \gamma \rangle}$, como $\log(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = -i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$, para $k \in \mathbb{Z}$ arbitrario, particularmente $-i\frac{\pi}{2}$ será un elemento de $\langle -i, \gamma \rangle$, y así

$$2\pi i = -4(-i\frac{\pi}{2}) \in \langle -i, \gamma \rangle.$$

Por ende, todos los $2k\pi i \in \langle -i, \gamma \rangle$, donde $k \in \mathbb{Z}$. Podemos calcular el kernel de la función $\psi = \pi_4 \circ \exp$ análogo a como calculamos $\ker(\varphi)$, y obtendremos que

$$\Lambda_2 = \ker(\psi) = \{n \log(-i) + m \log(\gamma) : n, m \in \mathbb{Z}\},$$

para algún $\gamma = a + bi$ ($a \neq 0$, ya que γ y $-i$ deben ser linealmente independientes). Así, existirá un único homomorfismo $\nu : \mathbb{C}/\Lambda_2 \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle$, biyectivo, tal que $\psi = \nu \circ \gamma_{\Lambda_2}$. Obtenemos así que el diagrama (3) conmuta. En este caso, la función ϕ_α no será más que la multiplicación por un número complejo α . En este diagrama, las flechas con doble punta representarán funciones sobreyectivas y las flechas con cola y doble punta, las funciones biyectivas. Más aún, como μ y ν son biyecciones, para que h esté bien definida y sea una biyección, basta con encontrar un α tal que ϕ_α esté bien definida y sea una biyección, este valor será hallado en la siguiente sección.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}/\Lambda_1 & \xrightarrow{\overline{\phi_\alpha}} & \mathbb{C}/\Lambda_2 \\
 \uparrow \pi_1 & & \uparrow \pi_2 \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\
 \mathbb{C}^* & & \mathbb{C}^* \\
 \downarrow \pi_3 & & \downarrow \pi_4 \\
 \mathbb{C}^*/\langle 1-i, 4 \rangle & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^*/\langle -i, \gamma \rangle
 \end{array} \tag{3}$$

La función h estaría entonces dada por $h = \nu \circ \overline{\phi_\alpha} \circ \mu^{-1} = \exp \circ \overline{\phi_\alpha} \circ \log$, es decir,

$$h(z) = \exp(\alpha(\log(z))) = z^\alpha.$$

4.4.2. Cálculo de los valores α y γ

Como $\exp(\alpha \log(1-i)) = h(1-i) = -i = \exp(-i\frac{\pi}{2})$, entonces

$$\alpha \log(1-i) = -i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que como $\alpha \log(1-i) = \log(-i)$, tendremos que $\alpha\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, con lo que $\overline{\phi_\alpha}$ estará bien definida, y por ende, h también. Si definimos

$$\alpha_k := \frac{-i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i}{\log(1-i)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

entonces todas las α_k satisfacen las condiciones del Resultado mencionado al inicio de la sección 6. Veamos algunos de los valores posibles para $\alpha_k \log(1 - i)$:

$$\begin{aligned}\alpha_0 \log(1 - i) &= -i\frac{\pi}{2} \\ \alpha_1 \log(1 - i) &= -i\frac{\pi}{2} + 2\pi i = i\frac{3\pi}{2} \\ \alpha_2 \log(1 - i) &= -i\frac{\pi}{2} + 4\pi i = i\frac{7\pi}{2} \\ \alpha_{-1} \log(1 - i) &= -i\frac{\pi}{2} - 2\pi i = -i\frac{5\pi}{2} \\ \alpha_{-2} \log(1 - i) &= -i\frac{\pi}{2} - 4\pi i = -i\frac{9\pi}{2}\end{aligned}$$

Como hemos mencionado, en la Figura 20, la región anaranjada de la cuadrícula recta es enviada en la región anaranjada de la cuadrícula de Escher. Por lo tanto, la magnitud del ángulo debe ser de $\pi/2$, pues de lo contrario, estas regiones no coincidirían. Así, necesariamente $k = 0$ y $\alpha = \alpha_0$ estará dado por:

$$\alpha = \frac{-i\frac{\pi}{2}}{\log(1 - i)} = \frac{-i\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\log(2) - i\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi i}{\pi i - 2\log(2)},$$

Además, como $h(4) = \gamma$, tendremos que

$$\gamma = 4^\alpha = 4^{\frac{2\pi i}{\pi i - 2\log(2)}} \approx 5,294 - 8,698i \approx 10,1828e^{-1,024i}.$$

4.5. Comparación entre la cuadrícula propuesta y la cuadrícula de Escher

En el artículo [5], se realiza una comparación (visual) entre la cuadrícula que dibujó Escher y la cuadrícula que se obtendría mediante la cuadrícula recta propuesta y la función conforme h . Esta comparación se puede observar en la Figura 24, donde la cuadrícula propuesta está dibujada con rojo y la cuadrícula de Escher está dibujada con azul. Mediante la figura, es claro que estas dos cuadrículas no coinciden por completo. No obstante, son lo suficientemente cercanas para creer que, si bien Escher no lo hizo de manera rigurosa, la cuadrícula puede ser inducida mediante una función compleja conforme.

En el artículo mencionado, se calcula el valor de γ mediante el programa Adobe Fotoshop CC 2018, y nos queda que

$$\gamma \approx 8,31e^{-0,895i}.$$

Como el valor encontrado en la sección anterior fue de

$$\gamma = 4^\alpha = 4^{\frac{2\pi i}{\pi i - 2\log(2)}} \approx 5,294 - 8,698i \approx 10,1828e^{-1,024i},$$

tendremos que el valor de $|\gamma|$ difiere en un 18,4%, mientras que el valor de $\arg(\gamma)$ difiere en un 12,6%.

5. Superficie esférica

5.1. Proyección ortográfica (e inversa)

Como queremos probar que esta obra no es más que una perspectiva bidimensional de una figura tridimensional, nuestro primer paso a realizar será pasar del plano en que la tenemos ubicada al espacio, es decir, pasaremos de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 . Para esto, aplicamos una función r que será introducida a continuación.

Si se tiene una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 , entonces esta puede ser proyectada en \mathbb{R}^2 de la siguiente manera:

$$R(x, y, z) = (x, y).$$

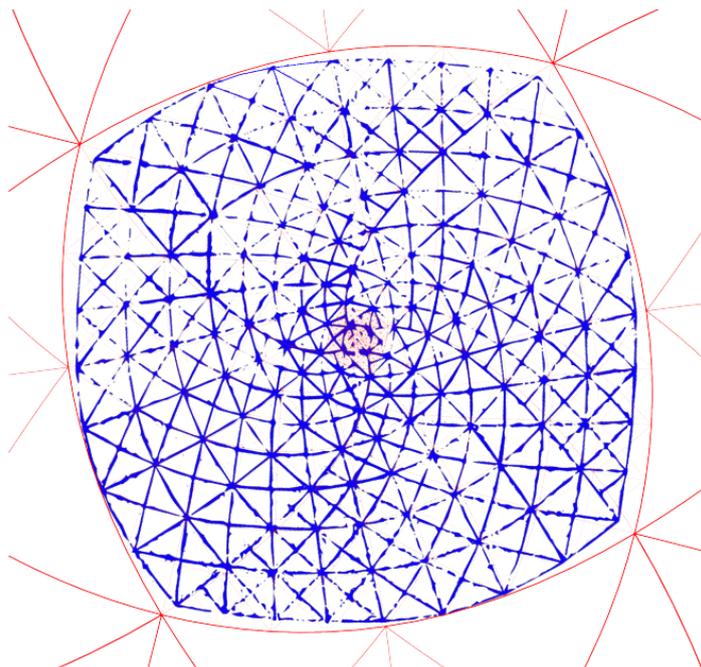


Figura 24: Comparación entre la cuadrícula propuesta (roja) y la cuadrícula de Escher (azul), tomada de [5], página 25.

Esta función R es conocida como la *proyección ortográfica*. En particular, si esta superficie fuera la parte superior (ubicada por encima en el plano xy) de la esfera unitaria, es decir,

$${}^+S_3^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\},$$

tendríamos que R es una biyección entre ${}^+S_3^1$ y el círculo unitario $S_2^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Por lo tanto, existirá $r : S_2^1 \rightarrow {}^+S_3^1$, biyectiva, de tal manera que $(R|_{{}^+S_3^1})^{-1} = r$. A esta función r la llamaremos la *proyección ortográfica inversa*.

Para pasar de la imagen bidimensional de Escher (ubicada en un círculo) a una imagen tridimensional (ubicada en una esfera), utilizaremos la proyección ortográfica inversa.

5.2. Proyección estereográfica

Una vez tengamos la xilografía de Escher como una figura tridimensional, buscaremos una cadena de funciones conformes que nos lleven desde esta figura hasta un teselado contenido en el plano xy . Para esto, lo primero que debemos hacer es encontrar la forma de volver desde la esfera, hasta el plano, de manera conforme. Esto lo podemos hacer mediante una proyección diferente, la cual se llama proyección estereográfica y será introducida a continuación.

Sea $Q = (X, Y, Z)$ un punto de la esfera unitaria $S_3^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$, trazamos un rayo desde el polo sur $(0, 0, -1)$, que pase por Q . Al extender este rayo, obtenemos una recta, cuyo vector director va del polo sur a Q , es decir, el vector director es $(X, Y, Z) - (0, 0, -1) = (X, Y, Z + 1)$, y así, la recta tomará la forma

$$\rho(t) = (0, 0, -1) + t(X, Y, Z + 1) = (tX, tY, -1 + t(Z + 1)).$$

Si $Q \neq (0, 0, -1)$, la recta ρ pasará por el plano xy por algún punto $P(X, Y, Z) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, el cual también podremos denotar como $x + iy \in \mathbb{C}$. Si la recta ρ únicamente toca a S_3^1 en $Q = (0, 0, -1)$, diremos que ρ pasa por $P = \infty$ y de esta forma tendremos el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La ubicación de P dependerá de la ubicación que tomemos para Q , como sigue:

- Si $Q = Q_1$ se encuentra por debajo del plano xy , como en la Figura 25, la recta ρ cortará el plano xy en un punto P_1 exterior a S_2^1 .
- Si $Q = P_2$ se encuentra en el plano xy , como en la Figura 26, la recta ρ cortará el plano xy en dicho punto, el cual estará en el borde de S_2^1 .
- Si $Q = Q_3$ se encuentra por encima del plano xy , como en la Figura 27, la recta ρ cortará el plano xy en un punto P_3 interior a S_2^1 .

Nos enfocaremos en el segundo y tercer caso, ya que son los que nos permiten pasar de $+S_3^1$ a S_2^1 (de manera biyectiva). Sin embargo, teniendo en cuenta que mediante el total de los casos logramos una biyección entre S_3^1 y el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$, podemos tomar a la esfera unitaria como el conjunto de los números complejos extendidos, y la conoceremos como la *esfera de Riemann* (o *esfera Riemanniana*).

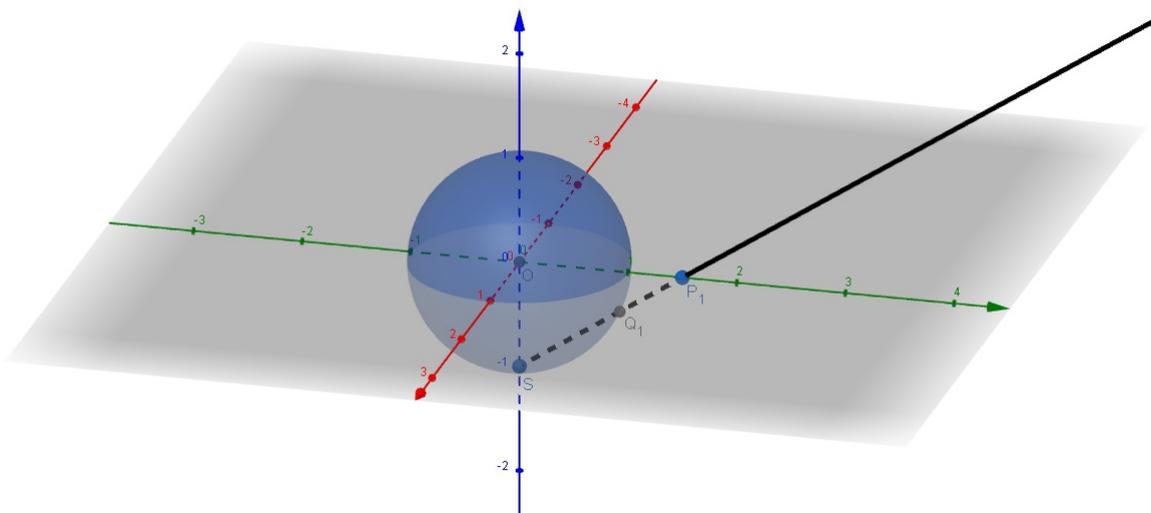


Figura 25: Proyección estereográfica en el exterior de S_2^1

Proposición. La proyección estereográfica $P|_{S_3^1 \setminus S} : S_3^1 \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme.

Demostración. Sea $p \neq S$ en S_3^1 , y sean γ_1, γ_2 dos curvas contenidas en S_3^1 que pasan por p . Llamaremos γ'_1 y γ'_2 a los vectores tangentes a γ_1 y γ_2 , respectivamente. Podemos, entonces, encontrar dos planos Π_1 y Π_2 tales que Π_i contiene al polo S y al vector γ'_i , para $i = 1, 2$.

Cada plano Π_i cortará a la esfera S_3^1 en una circunferencia C_i que pasa por p y por S . Más aún, C_i es tangente a γ_i en p . Por lo tanto, $P(C_i)$ es tangente a $P(\gamma_i)$ en $q = P(p)$. Además, los vectores tangentes a $P(\gamma_i)$ están en Π_i . Por lo tanto, los ángulos de la siguiente lista serán todos iguales:

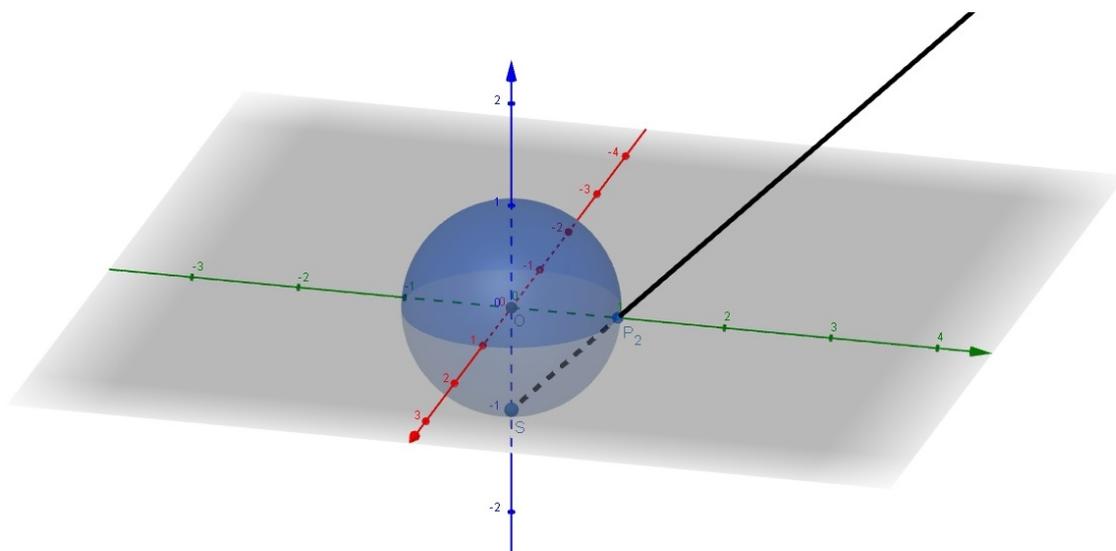


Figura 26: Proyección estereográfica en el borde de S_2^1

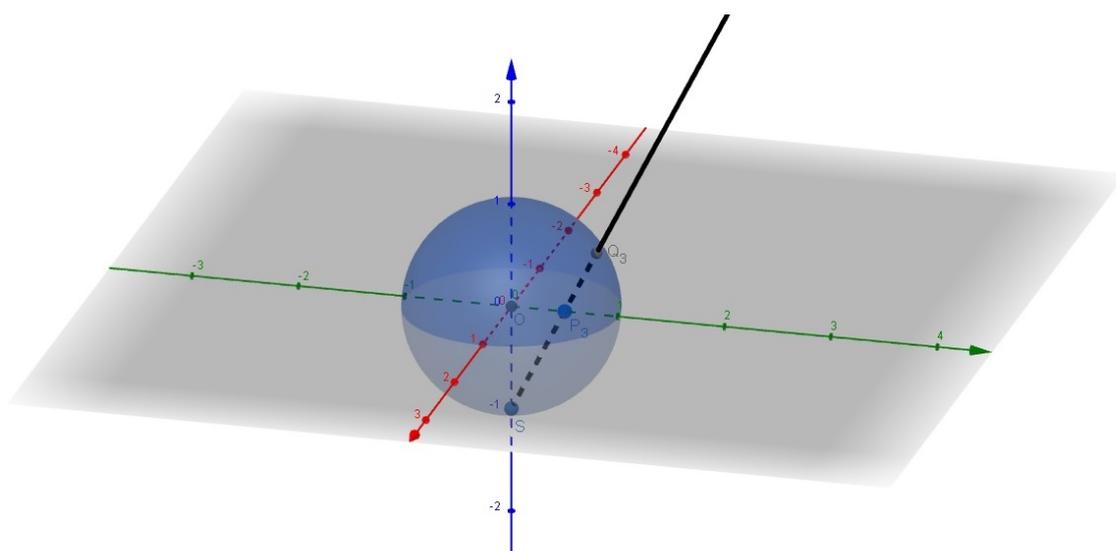


Figura 27: Proyección estereográfica en el interior de S_2^1

- ángulo entre γ_1 y γ_2
- ángulo entre C_1 y C_2 en p
- ángulo entre C_1 y C_2 en S
- ángulo entre $P(C_1)$ y $p(C_2)$ en q
- ángulo entre $P(\gamma_1)$ y $p(\gamma_2)$ en q

Con lo que $P|_{S_3^1 \setminus S}$ será conforme.

□

Adicionalmente, tenemos que la proyección estereográfica envía longitudes (o meridianos) en rectas radiales de S_2^1 y latitudes (o paralelos) en circunferencias centradas en el origen de S_2^1 . Por lo tanto, como la proyección estereográfica es conforme, si tenemos una espiral loxodrómica⁹ en la esfera de Riemann, tendremos (mediante la proyección estereográfica) una espiral logarítmica en el plano complejo.

5.3. Rotación esfera

Sea $u \in \mathbb{C}$ el punto de la Figura 28 (c) hacia el cual convergen las espirales, buscaremos trasladar este punto a 0, lo cual será equivalente a rotar la esfera de la Figura 28 (b) de forma tal que el centro de las espirales coincida con el polo norte (por la segunda nota de la sección “Funciones conformes”). Para esto, necesitamos una transformación de Möbius de la forma

$$M(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

tal que $M(u) = 0$.

Como $M(u) = \frac{au+b}{-bu+\bar{a}} = 0$, tendremos que $au + b = 0$, es decir, $b = -au$. De esta forma, tendremos que

$$M(z) = \frac{az - au}{\bar{a}\bar{u}z + \bar{a}} = \frac{a(z - u)}{\bar{a}(\bar{u}z + 1)} = \frac{z - u}{\bar{u}z + \bar{1}}.$$

Así, tras haber aplicado la función M , tendremos espirales logarítmicas centradas en el origen y para llegar al teselado que estamos buscando sólo nos faltaría pasar de estas espirales, a rectas en el plano, mediante la función logaritmo.

Por lo tanto, tenemos la cadena de funciones de la Figura 28, donde se llega de (b) a (e) de manera conforme; pues ya hemos visto que la proyección estereográfica, las transformaciones de Möbius y la función logaritmo complejo (P , M y Log , respectivamente) son conformes. Sin embargo, si iniciamos con la imagen bidimensional (a) de la misma Figura, no llegamos al mismo resultado, pues la proyección ortográfica r no es conforme.

Aún así, como estamos buscando ver que la xilografía es una perspectiva de una figura tridimensional, en lugar de una bidimensional, es suficiente con ver que $Log \circ M \circ P$ es conforme, algo que ya hemos logrado. En la Figura 28, vemos la cadena de funciones que se han aplicado para llegar a este resultado.

Hemos visto entonces, que no sólo la pintura “División”, sino también la xilografía “Superficie Esférica con Peces” pueden construirse mediante la aplicación de una función conforme a una cuadrícula recta, con la diferencia de que en la xilografía se pasa conformemente de un sector del plano a una semiesfera, mientras que en la pintura se pasa conformemente del plano al plano.

⁹ Siguiendo un proceso similar al utilizado a lo largo de [7], podemos observar que las espirales obtenidas a partir de la proyección ortográfica inversa son loxodrómicas.

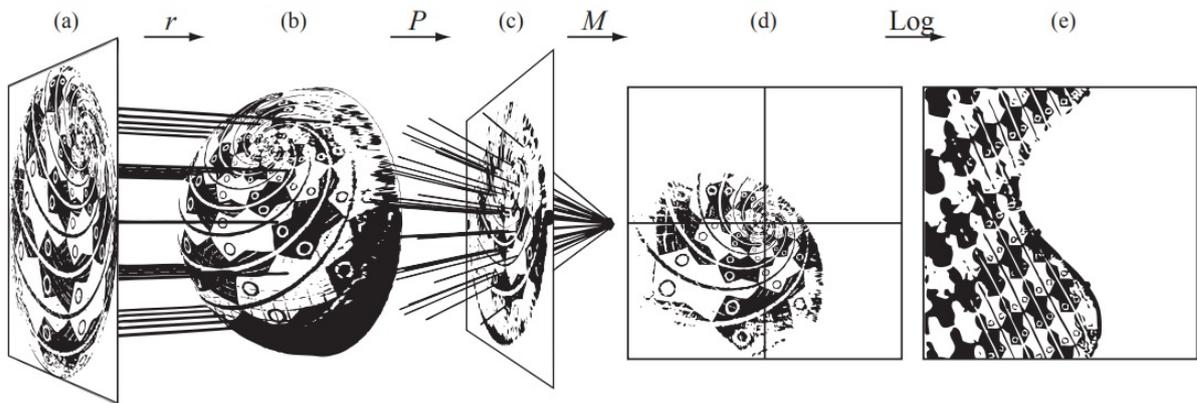


Figura 28: Cadena de funciones entre xilografía “Superficie Esférica con Peces” y teselado en el plano (imagen tomada de [6], página 41).

Conclusiones

- Mediante este trabajo, se ha podido observar que existe una fuerte conexión entre las simetrías y las estructuras matemáticas, más precisamente, hemos visto que el lenguaje matemático puede describir las simetrías existentes en diferentes entornos, como en la naturaleza o, en este caso, en las obras de arte.
- En el desarrollo del trabajo, vimos algunos aspectos de las funciones conformes, como el hecho de que pueden ser halladas de maneras completamente diferentes, ya que para cada una de las dos obras estudiadas, se utilizó un proceso distinto.
- Un dato a resaltar sobre el artista es que, a pesar de nunca haber realizado estudios formales en matemáticas, sus trabajos están completamente impregnados de estas, lo que nos permite estudiar sus obras desde esta área, lo cual hicimos en el presente trabajo para dos de sus muchas obras.
- Una de las cuestiones que queda abierta es saber qué tan ligadas están las obras de Escher con estructuras fractales, en particular, saber si es posible diseñar un algoritmo que reproduzca alguna de sus obras y si es posible simular computacionalmente la construcción de alguna de sus obras bajo algunas condiciones iniciales dadas.

Referencias

- [1] Fraleigh, John B. A First Course in Abstract Algebra. Seventh Edition, 2003.
- [2] Gamelin, T. Complex Analysis. Springer, New York, 2001.
- [3] Rodríguez, R.; Kra, I. & Gilman, J. Complex Analysis: In the Spirit of Lipman Bers, Second Edition. Springer, New York, 2012.
- [4] Joseph H. Silverman. The Arithmetic of Elliptic Curves. Springer, New York, 1986.
- [5] R. A. Berger, The Conformal Grid behind Escher's Division. Bachelor thesis, Leiden University Mathematical Institute, 2019.
- [6] Marcotte, J. & Salomone, M. Loxodromic Spirals in M. C. Escher's Sphere Surface. Journal of Humanistic Mathematics, 2014.
- [7] Burgiel, H. & Salomone, M. Logarithmic Spirals and Projective Geometry in M.C. Escher's "Path of Life III". Journal of Humanistic Mathematics, 2012.
- [8] Stereographic Projection. College of the Holy Cross, Spring 2013.