

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/31754481>

Análisis de estructuras / J. Uribe Escamilla.

Book · July 2002

Source: OAI

CITATIONS

0

READS

34,141

1 author:



Jairo Uribe Escamilla

Escuela Colombiana de Ingeniería

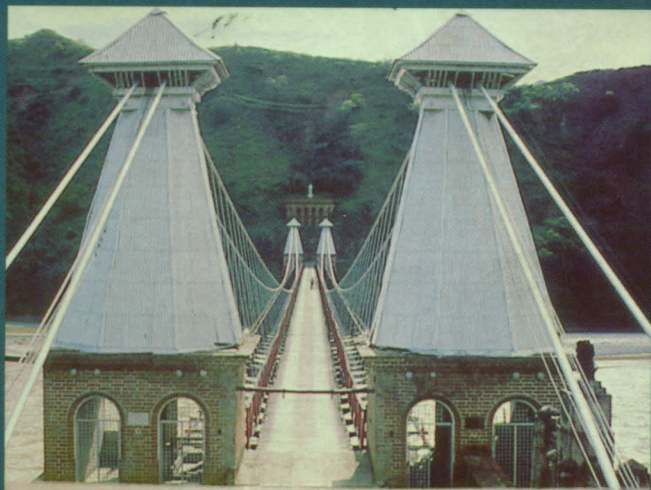
4 PUBLICATIONS 15 CITATIONS

SEE PROFILE

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Jairo Uribe Escamilla

2ª Edición



ECOE
EDICIONES

*EDITORIAL
ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA*

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Esta es la segunda edición, revisada y actualizada, de una obra que trata los fundamentos de la teoría de estructuras y los métodos, tanto tradicionales como modernos, para el análisis de todo tipo de estructuras reticulares. Hace énfasis en los conceptos fundamentales de la ingeniería estructural y en el estudio de los procedimientos más adecuados para cada tipo de problema. Gran parte del libro está dedicada al análisis matricial, que constituye la herramienta más apropiada para el análisis de estructuras utilizando computadores.

La obra, además de ser texto para los cursos de análisis de estructuras de pregrado y referencia en los de postgrado, es un libro útil para los ingenieros interesados en actualizarse en las técnicas modernas del análisis y en el uso de computadores en estructuras. Con este fin se incluyen apéndices sobre álgebra matricial y un disco con programas para resolver con computador las estructuras más comunes por métodos clásicos y matriciales; entre ellos está como ayuda didáctica el sistema ANALEST, en ambiente Windows, desarrollado por el autor para analizar estructuras reticulares.

Análisis de estructuras le mereció al autor, en 1992, el Premio Diódoro Sánchez que otorga anualmente la Sociedad Colombiana de Ingenieros al colombiano que haya publicado, en el año inmediatamente anterior, el mejor libro sobre asuntos técnicos, económicos e históricos referentes a la Ingeniería Nacional.

ECOE
EDICIONES

EDITORIAL
ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA

ISBN 958-8060-14-1



9 789588 406014

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Jairo Uribe Escamilla

Ganador del premio Diódoro Sánchez 1992
otorgado por la Sociedad Colombiana de Ingenieros





Avenida 13 No. 205-59 (Autopista Norte kilómetro 13, costado occidental)
Fax: 6762655 • Bogotá
editor@escuelaing.edu.co



Calle 32 No. 17-22
Fax: 3201377 • Bogotá
ecoe@col1.telecom.com.co

Análisis de estructuras

Primera edición: 1991
Segunda impresión: 1992
Tercera impresión revisada: 1993
Segunda edición: julio de 2000
Primera reimpresión: junio de 2002

- © Jairo Uribe Escamilla
- © Escuela Colombiana de Ingeniería, para la presente edición
- © Ecoe Ediciones, para la presente edición

Dirección editorial, diseño y armada electrónica

Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería
Telefax: 6762655 • editor@escuelaing.edu.co

Diseño de portada

María Clemencia Afanador Caycedo

Fotomecánica

Litho Servis

Impresión

Quebecor World Bogotá S.A.

ISBN 958-8060-14-1

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita de la Escuela Colombiana de Ingeniería.

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

A quienes despertaron en mí el entusiasmo
por la Ingeniería Estructural:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Luis Guillermo Aycardi
Antonio María Gómez
Guillermo González Zuleta
Enrique Kerpel
Alberto Ortiz
Jorge Álvaro Sánchez
Alejandro Sandino
Joaquín Spinel

UNIVERSIDAD DE CORNELL

Peter P. Bijlaard
Harry D. Conway
Gordon P. Fisher
Richard H. Gallagher
Peter Gergely
William McGuire
Arthur H. Nilson
Hubert Rüschi
Richard N. White
George Winter

CONTENIDO

Prólogo (primera edición)	xix
Prólogo a la segunda edición	xxi
CAPÍTULO 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES	1
1.1 Objeto de la ingeniería estructural	3
1.2 Tipos de fallas	4
1.3 Desarrollo de un proyecto	5
1.3.1 Planeamiento general	6
1.3.2 Diseño preliminar	6
1.3.3 Evaluación de alternativas	6
1.3.4 Diseño final	6
1.3.5 Construcción	7
1.4 Tipos de estructuras, de elementos y de apoyo	8
1.4.1 Estructuras	8
1.4.2 Elementos	9
1.4.3 Apoyos	10
1.5 Estabilidad y determinación	11
1.5.1 Estabilidad y determinación externas	11
1.5.2 Estabilidad y determinación internas	14
1.5.3 Estabilidad y determinación totales	17
1.5.4 Indeterminación cinemática	18
1.6 Comparación de estructuras	19
1.7 Clasificación de las fuerzas que actúan en una estructura	20
1.8 Estados de carga considerados en el diseño	22
1.9 Códigos de construcción	25
1.10 Métodos de diseño	26
1.10.1 Diseño para esfuerzos admisibles	26
1.10.2 Diseño a la resistencia última	27
1.10.3 Diseño para estados límites	28

1.11	Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98	38
1.11.1	Título A – Requisitos generales de diseño y construcción sismo resistente	38
1.11.2	Título B – Cargas	49
	Referencias	57
CAPÍTULO 2. MÉTODOS DE ANÁLISIS		61
2.1	División general	63
2.2	Principio de superposición. Teorías elástica, plástica y de deflexión	63
2.3	Cálculo de fuerzas y deflexiones en estructuras estáticamente determinadas	66
2.4	Análisis de estructuras indeterminadas	67
	Referencias	67
CAPÍTULO 3. TEORÍA DE ESTRUCTURAS		71
3.1	Recuento histórico	73
3.2	Principio de los desplazamientos virtuales	77
3.3	Principio del trabajo virtual	80
3.4	Teorema de Maxwell de las deflexiones recíprocas	81
3.5	Teorema recíproco de Maxwell y Betti	83
3.6	Teorema de Castigliano	85
	Referencias	89
CAPÍTULO 4. CÁLCULO DE DEFLEXIONES		91
4.1	Método del trabajo real	93
4.2	Aplicación del teorema de Castigliano	97
4.3	Método del trabajo virtual	107
4.3.1	Deflexiones resultantes de deformaciones axiales	108
4.3.2	Deflexiones debidas a flexión	109
4.3.3	Deflexiones por corte y torsión	110
4.4	Método de la doble integración	116
4.4.1	Fundamentos	116
4.4.2	Cálculo directo de la ecuación de la elástica de vigas indeterminadas	122
4.5	Método del área de momentos	127
4.6	Método de la viga conjugada	142
	Ejercicios	153
	Referencias	158

CAPÍTULO 5. ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS Y MÉTODO DE ÁNGULOS DE GIRO Y DEFLEXIÓN		159
5.1	Ecuación de los tres momentos	161
5.1.1	Teoría	161
5.1.2	Programación del método de la ecuación de los tres momentos	177
5.2	Método de "ángulos de giro y deflexión"	178
5.2.1	Teoría	178
5.2.2	Programación del método de ángulos de giro y deflexión	190
	Ejercicios	191
	Referencias	194
 CAPÍTULO 6. MÉTODO DE LA DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS O MÉTODOS DE CROSS		 195
6.1	Introducción	197
6.2	Convención de signos para los momentos	197
6.3	Conceptos fundamentales: rigidez absoluta y coeficiente de distribución	198
6.4	Rigidez absoluta de elementos prismáticos	200
6.5	Coeficiente de transmisión	202
6.6	Momentos debidos a desplazamientos de los extremos del elemento	202
6.7	Momentos de empotramiento	203
6.8	Procedimiento para estructuras cuyos nudos no se desplazan	204
6.9	Simplificación por extremos articulados en estructuras sin desplazamiento	212
6.10	Simplificaciones por simetría y antisimetría	218
6.11	Estructuras con desplazamiento: método tradicional	222
6.12	Método alterno aplicable a pórticos ortogonales con desplazamiento	251
6.13	Programación del método de Cross alterno	269
	Ejercicios	269
	Referencias	271
 CAPÍTULO 7. MÉTODO DE KANI		 273
7.1	Introducción	275
7.2	Ventajas del método de Kani	275
7.3	Caso de estructuras sin desplazamiento	276
7.4	Estructuras sin desplazamiento con extremos articulados	279
7.5	Pórticos con nudos desplazables en sentido horizontal: cargas horizontales únicamente en los nudos	282
7.6	Pórticos con desplazamiento horizontal de los nudos y columnas articuladas en la base	297
7.7	Programación del método de Kani aplicado a pórticos ortogonales	300

Ejercicios	300
Referencias	301
CAPÍTULO 8. MÉTODO DE TAKABEYA	303
8.1 Introducción	305
8.2 Estructuras sin desplazamiento	305
8.3 Simplificación por extremo articulado	307
8.4 Estructuras con desplazamientos: sin cargas horizontales o con cargas horizontales aplicadas en los nudos	313
8.5 Pórticos con desplazamiento y columnas articuladas en la base	326
8.6 Programación del método de Takabeya aplicado a pórticos ortogonales	329
8.7 Efecto P- Δ	329
Ejercicios	330
Referencias	331
CAPÍTULO 9. MÉTODOS APROXIMADOS	333
9.1 Introducción	335
9.2 Análisis aproximado de vigas	335
9.3 Análisis aproximado de pórticos ortogonales	337
9.3.1 Método del portal	337
9.3.2 Método de la estructura en voladizo	348
9.4 Método de Newmark	355
9.4.1 Cálculo de fuerzas de corte y momentos en elementos sometidos a cargas concentradas	358
9.4.2 Cálculo de fuerzas de corte y momentos en elementos sometidos a cargas distribuidas	361
9.4.3 Cálculo de giros y deflexiones de vigas	363
9.4.4 Cálculo de rigideces absolutas, coeficientes de transmisión y momentos de empotramiento	365
9.4.5 Evaluación de la matriz de rigidez de miembros acartelados	374
9.4.6 Programación del método de Newmark aplicado a elementos acartelados	375
Ejercicios	376
Referencias	377
CAPÍTULO 10. LÍNEAS DE INFLUENCIA	379
10.1 Introducción	381
10.2 Definición	381
10.3 Utilidad	382

10.4	Principio de Müller-Breslau	382
10.5	Líneas de influencia de vigas determinadas	382
10.6	Líneas de influencia de vigas indeterminadas	393
10.7	Líneas de influencia de armaduras	400
10.8	Líneas de influencia de pórticos	404
	Ejercicios	408
	Referencias	410
CAPÍTULO II. ANÁLISIS MATRICIAL		411
11.1	Reseña histórica	413
11.2	Conceptos generales	414
11.3	Matriz de rigidez de un resorte elástico	417
11.4	Ensamblaje de resortes	419
11.5	Obtención de la matriz de rigidez por superposición	421
11.6	Matriz de fuerzas internas	422
11.7	Sistemas de coordenadas	425
11.8	Solución general por el método de los desplazamientos	426
11.9	Matriz de rigidez de una barra prismática sometida a tensión o compresión simple	428
11.10	Matriz de rigidez de un elemento de cercha plana	429
11.11	Matriz de fuerzas internas de un elemento de cercha plana	432
11.12	Matriz de rigidez de un elemento de cercha espacial	441
11.13	Matriz de fuerzas internas de un elemento de cercha espacial	443
11.14	Comentarios sobre inestabilidad e indeterminación	454
11.15	Defectos de fabricación y esfuerzos térmicos en armaduras	457
11.16	Matriz de rigidez de un elemento prismático sometido en sus extremos a flexión y corte	463
11.17	Vigas con cargas repartidas	478
11.18	Matriz de rigidez de un elemento prismático sometido en sus extremos a fuerza axial, flexión y corte	488
11.19	Evaluación directa de la matriz de rigidez de una columna prismática, vertical, referida al sistema de ejes generales o de la estructura	491
11.20	Matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano, arbitrariamente orientado	515
11.21	Cálculo de las fuerzas internas en un elemento de pórtico plano arbitrariamente orientado	520
11.22	Matriz de rigidez de un elemento prismático sometido a torsión y su aplicación al análisis de parrillas	537
11.23	Matriz de rigidez de un elemento de parrilla	540
11.24	Elemento de parrilla arbitrariamente orientado	553
11.25	Matriz de rigidez, referida a coordenadas locales, de un elemento de pórtico plano en el espacio	567

11.26	Matrices de rigidez, referidas a coordenadas generales, de elementos orientados en la dirección de los ejes Y y Z de la estructura	567
11.27	Matriz de rigidez de un elemento de pórtico, arbitrariamente orientado en el espacio, referida a coordenadas generales	585
11.28	Programación de los métodos matriciales para todo tipo de estructuras reticulares con miembros prismáticos	586
	Ejercicios	587
	Referencias	591
CAPÍTULO 12. TEMAS ESPECIALES DE ANÁLISIS MATRICIAL		593
12.1	Generalidades	595
12.2	Condensación	595
12.3	Grados de libertad considerados despreciables	597
12.4	Ecuaciones de relación entre desplazamientos	598
	12.4.1 Generalidades	598
	12.4.2 Simplificaciones por simetría y antisimetría	600
	12.4.3 Pórticos espaciales con entrepisos de diafragmas rígidos	625
12.5	Subestructuración	625
12.6	Apoyos con ejes diferentes de los estructurales	635
12.7	Reanálisis de la estructura	641
12.8	Método de la matriz de transferencia	641
12.9	Simplificaciones para pórticos y parrillas ortogonales	642
12.10	Vigas con miembros acartelados	642
12.11	Problemas especiales	643
12.12	Algunos programas comerciales de uso común en América Latina	644
	12.12.1 Desarrollo histórico	644
	12.12.2 Stress	645
	12.12.3 CAL-91	645
	12.12.4 GT-Strudl	646
	12.12.5 Etabs	647
	12.12.6 Sap2000	647
	12.12.7 Combat	648
	12.12.8 RCBE	648
	12.12.9 STAAD/Pro	649
	Referencias	649
APÉNDICES		653
Apéndice A	Amenaza sísmica en Colombia	655
Apéndice B	Cargas mínimas y amenaza eólica en Colombia	659
Apéndice C	Álgebra matricial	665

CONTENIDO DEL DISCO ADJUNTO

Programa	Propósito
Cross.exe	Análisis de vigas continuas por la ecuación de los tres momentos
Cross.exe	Análisis de pórticos ortogonales por el método de Cross, modificado por Gennaro
Codimo.exe	Evaluar constantes de cálculo y matrices de rigidez de elementos acartelados por el método de Newmark
Lineas1.exe	Calcular líneas de influencia de una viga de dos luces
Analest.exe	Análisis por el método matricial de los desplazamientos de las siguientes clases de estructuras reticulares <ul style="list-style-type: none">• Armaduras en un plano• Armaduras en el espacio• Pórticos en un plano• Pórticos en el espacio• Parrillas en un plano

PRÓLOGO (PRIMERA EDICIÓN)

El presente libro es el resultado de la generosa acogida que han tenido las conferencias *Análisis de estructuras: métodos tradicionales* y *Análisis matricial de estructuras*, publicadas por el autor en años anteriores. Al reunir las en un solo texto se actualizó el Capítulo 1 para incorporar algunas provisiones del Código Colombiano de Construcciones Sismo Resistentes, se agregaron dos nuevos capítulos sobre métodos aproximados de análisis y líneas de influencia y se adicionó un apéndice con varios programas de computador.

Como lo manifestó en el prólogo a dichas conferencias, el autor no pretende ser original en su presentación. En la imposibilidad de dar referencia exacta de la fuente original de los diversos temas tratados, optó por dar al final de cada capítulo una lista de la bibliografía consultada, y por dedicar el libro a quienes le inculcaron el gusto por las estructuras.

El libro fue escrito para facilitar al estudiante el entendimiento del comportamiento de las estructuras reticulares y el aprendizaje de las técnicas de análisis tradicionales y modernas. Se hace énfasis en los conceptos fundamentales de la ingeniería estructural y en el estudio de los métodos más apropiados para cada tipo de problema. Más de la cuarta parte del libro está dedicada al análisis matricial, que constituye hoy en día la herramienta más apropiada para el análisis de estructuras utilizando computadoras digitales.

En la Universidad de los Andes este texto se cubre en un curso semestral de cuatro horas semanales, seleccionando naturalmente el énfasis que se les da a algunos temas, especialmente en los de procesos iterativos: Cross, Kani y Takabeya. El curso se complementa con dos horas semanales de laboratorio.

El autor espera que el libro sea también útil para los ingenieros que deseen actualizarse en las técnicas modernas de análisis y en el uso de computadoras en estructuras. Con este fin se incluye un apéndice sobre álgebra matricial y programas para resolver con computadora, o calculadora programable, las estructuras más comunes por métodos clásicos y matriciales.

En cuanto a la convención de signos el autor procuró unificarla, hasta donde creyó posible, para hacerla compatible con las convenciones matemáticas más utilizadas y con las empleadas en las técnicas modernas de análisis que usan computadora digital.


Consciente de las múltiples deficiencias que una obra de esta naturaleza presenta al salir por primera vez a la luz, agradece de antemano la benevolencia de sus lectores y les encarece se sirvan llamarle la atención sobre los errores y puntos oscuros que encuentren, con el ánimo de corregirlos en futuras ediciones.

Finalmente desea agradecer a la Universidad de los Andes por haber decidido publicar estas notas en la colección con que celebró sus 40 años y al Departamento de Ingeniería Civil por su generosa colaboración.

La esposa del autor, Isabel, no sólo le brindó continuo apoyo moral sino además participó activamente en la edición del manuscrito de las notas originales. A ella se debe más que a nadie el que un sueño se haya convertido en realidad.

JAIRO URIBE ESCAMILLA
Bogotá, D.E., enero de 1991

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

 a entusiasta acogida que tuvo la primera edición de este texto y sus dos reimpressiones, actualmente agotadas, y la insistencia de amigos profesores de análisis estructural para que se volviera a imprimir motivaron al autor para sacar a la luz esta segunda edición. A ello lo movió también el aprecio manifestado por muchos de sus alumnos y lectores, que lo consideraron útil. A todos ellos el autor les expresa su profundo reconocimiento.

Esta edición contiene esencialmente el mismo material de la anterior pero el primer capítulo se actualizó con base en las NORMAS COLOMBIANAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCION SISMO RESISTENTE, NSR-98. Por otra parte y en cumplimiento de dichas Normas, todos los problemas se trabajaron en el Sistema Internacional de Unidades de Medida, SI.

Los capítulos 7 y 8, que tratan los métodos de Kani y Takabeya se redujeron a lo esencial por considerar que su importancia se ha visto reducida con los avances en computación electrónica. En cambio se amplió el espacio dedicado al análisis matricial introduciendo el capítulo 12 que cubre algunos temas especiales del mismo, utilizados en los programas de mayor uso hoy en día en la práctica del diseño estructural.

En lugar de los listados de programas de la primera edición se optó por incluir un disco con la versión en Quick Basic y en Visual Basic de algunos de ellos, gracias a César Augusto Niño Fajardo, quien la hizo a partir de los programas originales, mientras adelantaba su especialización en estructuras en la Escuela Colombiana de Ingeniería. También se incluye el sistema ANALEST, desarrollado como ayuda didáctica por el autor, para analizar todo tipo de estructuras reticulares. La versión en ambiente Windows fue posible por la colaboración del ingeniero Carlos Fernando Ariza Moreno, antiguo alumno suyo en el programa de maestría en estructuras de la Universidad de los Andes y hoy en día catedrático en la Escuela Colombiana de Ingeniería. Para él va un especial agradecimiento.

En la presente edición colaboraron además los ingenieros Sandra Patricia Aguilar Cardona y Pedro Julio Maldonado Hernández, igualmente catedráticos de la Escuela, en la conversión al sistema SI de algunos problemas. Nicolás Sáenz Ulloa, también mientras

cursaba su especialización en estructuras, participó en la revisión de los nuevos originales y en la conversión al sistema SI del resto de problemas. A todos ellos sinceros agradecimientos, lo mismo que a las señoras Carolina Laguna Ramírez y Kelly Tovar Sánchez por la transcripción de los originales a medio magnético, a las señoras Gloria Inés Bautista Garzón por la elaboración de las figuras y María Clemencia Afanador Caycedo por el diseño de la carátula, y al señor Jorge Cañas Sepúlveda por la diagramación.

Finalmente, el autor expresa su especial reconocimiento al doctor Carlos Alzate Giraldo, gerente de Ecoe Ediciones, artífice principal de la amplia divulgación de las ediciones anteriores y a la doctora Jimena Lemoine Garzón, directora del Centro Editorial de la Escuela Colombiana de Ingeniería, por su permanente apoyo e interés en que esta edición se hiciese realidad.

JAIRO URIBE ESCAMILLA
Bogotá, D.C., junio de 2000

CAPÍTULO 1

Conceptos fundamentales

1.1 OBJETO DE LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

La Ingeniería estructural tiene por objeto el diseño de estructuras. Toda estructura se construye con un propósito definido que constituye su función. Ésta puede ser encerrar un espacio, contener o retener un material, transmitir cargas al terreno, o muchas otras (referencia 1.1).

Al diseñarlas se establecen ciertos objetivos que se refieren a aspectos de seguridad, funcionalidad y economía. Además es importante considerar su aspecto desde el punto de vista de la estética (referencias 1.2 y 1.3).

El código modelo CEB-FIP (referencia 1.4) define el objeto del diseño estructural así:

El objetivo del proyecto es llegar a probabilidades aceptables para que la obra estudiada no resulte impropia a su destino en el transcurso de un período dado, considerado como período de referencia, habida cuenta de su duración de vida prevista.

En consecuencia, todas las estructuras o elementos estructurales deben concebirse y calcularse de forma que resistan, con un grado de seguridad apropiado, todas las cargas y deformaciones susceptibles de intervenir durante su construcción y explotación; que se comporten de manera satisfactoria durante su uso normal; y que presenten una durabilidad conveniente durante su existencia.

Para alcanzar este objetivo, hay que fundar el método de concepción y de cálculo sobre teorías científicas, datos experimentales y la experiencia adquirida anteriormente en la práctica de los proyectos, sobre la base de interpretaciones estadísticas en la medida de lo posible. Además la seguridad, la aptitud para el servicio y la durabilidad no son simplemente función de los cálculos, sino que dependen también del control ejercido durante la fabricación y de la vigilancia en obra, de la limitación a un nivel conveniente de las imperfecciones inevitables y, en fin, de la cualificación y competencia de todo el personal implicado.

Se admite también implícitamente que se cuida de las condiciones de explotación de la obra durante su duración de vida prevista.

Conviene destacar acá que la expresión *probabilidades aceptables* implica que se debe dar adecuada consideración a las condiciones técnicas y socioeconómicas existentes en un momento dado en el lugar de aplicación. Esto exige estudios multidisciplinarios que hasta

el momento no se han hecho en Colombia. Por otra parte, las duraciones asignadas al período de referencia y a la vida útil de las diversas categorías de estructuras intervienen en la elección de su nivel de seguridad.

Obsérvese que la responsabilidad de cumplir el objetivo no se le asigna únicamente al calculista sino también a los fabricantes, al constructor, a la interventoría y a los encargados de asegurar su mantenimiento, y que las condiciones reales de utilización de la estructura no se aparten sensiblemente de las especificaciones en el proyecto.

Para poder cumplir dicho objetivo se requiere conocer las leyes que relacionan las cargas aplicadas con las fuerzas internas desarrolladas en los cuerpos que las resisten y, además, las que rigen el comportamiento de los materiales cuando se someten a esfuerzos. Unas y otras fueron objeto de los cursos de Mecánica de sólidos y por eso figuran como prerrequisitos indispensables para poder acometer el análisis y diseño de cualquier estructura.

Se recordará que en el primero de dichos cursos se estudiaron las condiciones de equilibrio estático y se emplearon para encontrar las reacciones y fuerzas internas en estructuras simples, a saber: armaduras, marcos, cables y vigas. Sólo se consideraron aquellas estructuras en que las condiciones de equilibrio eran suficientes para encontrar todas las reacciones de los apoyos y fuerzas internas de los elementos y que, en consecuencia, fueron clasificadas como *estáticamente determinadas*.

Se vio también que aquellas estructuras *estáticamente indeterminadas*, por presentar más incógnitas que ecuaciones de equilibrio, podían resolverse mediante el planteamiento de ecuaciones adicionales obtenidas a partir de condiciones de compatibilidad de las deformaciones experimentadas por sus miembros. Esto obligó a considerar el cuerpo con su naturaleza real de sólido deformable, aplicando las relaciones pertinentes entre cargas y deformaciones encontradas experimentalmente en los laboratorios de resistencia de materiales. Tales relaciones se vieron en el segundo curso de Mecánica de sólidos, junto con algunas leyes y métodos de Teoría estructural aplicables a los casos más simples.

Los cursos de Análisis de estructuras hacen uso de los conocimientos anteriores y los extienden para poder cubrir los casos más complicados de ocurrencia frecuente en el ejercicio profesional de la Ingeniería civil. Dichos cursos son complementados con otros que se refieren al diseño, ya sea en hormigón, madera o acero. El alumno no debe perder de vista que su fin al estudiar esta materia es diseñar estructuras que se puedan construir y que el análisis es sólo un medio para lograrlo. No por eso debe menospreciarlo sino, por el contrario, mantener en la mente la expresión del profesor Fernández Casado (referencia 1.5) que ha servido de preámbulo a este libro.

1.2 TIPOS DE FALLAS

Cuando una estructura deja de cumplir su función de manera adecuada, se dice que ha fallado. Al hablar de falla es preciso aclarar dicho concepto, pues es sabido que las hay de diferentes tipos. En general, se pueden clasificar así:

1. Falla por deformación elástica excesiva.
2. Falla por deformación permanente.

3. Falla por separación parcial.
4. Falla por separación total.

La falla por deformación elástica tiene que ver con el funcionamiento de la estructura. Puede causar al usuario miedo de utilizarla; piénsese, por ejemplo, en el temor de muchos a cruzar puentes colgantes que oscilan considerablemente, o a caminar sobre redes o placas muy delgadas. También puede ocasionar problemas constructivos como rotura de vidrios, grietas en los cielos rasos y desajustes de puertas y ventanas. En el caso de piezas de maquinaria puede causar roces que aceleran el desgaste, e incluso puede impedir totalmente el funcionamiento de la máquina. Además, hay ocasiones en que dicha deformación excesiva origina esfuerzos secundarios que ocasionan fallas más graves.

El segundo tipo de falla es la deformación permanente, que se presenta cuando el material se ha sometido a un esfuerzo superior a su límite elástico. En máquinas, dichas deformaciones impiden su funcionamiento normal la mayoría de las veces. Lo mismo puede ocurrir en las estructuras propias de la Ingeniería civil, haciendo necesaria su reparación. Sin embargo, el efecto más notorio para un lego en la materia tiene que ver con el aspecto estético que presenta. Piénsese, si no, en las abolladuras causadas en los choques automovilísticos.

La falla por separación parcial, como su nombre lo indica, se refiere a que en algunas partes del elemento estructural el material presenta separaciones considerablemente mayores que las normales entre partículas. Se dice, entonces, que se han presentado fisuras o grietas. Las primeras son, en muchos casos, imposibles de evitar en algunos materiales como el hormigón y pueden tener importancia o no, dependiendo del fin de la estructura. Si se las descuida, sin embargo, pueden adquirir una gravedad que inicialmente no era muy obvia. Por ejemplo, estructuras de hormigón reforzado localizadas en zonas costeras o en ambientes industriales corrosivos han fallado por la reducción en el área del acero de refuerzo, producida por la oxidación que facilitan las grietas.

El último tipo de falla, y el más grave desde el punto de vista de la seguridad, es la falla por separación total o colapso de la estructura. Al producirse ocasiona perjuicios económicos considerables y aun pérdida de vidas. Por esta razón sólo es permitida en el laboratorio, pues conocer el comportamiento estructural hasta la rotura incide en la formulación de las normas de diseño. Es claro que un material o estructura que falla de un modo súbito o explosivo, requiere mayor margen de seguridad que cuando el tipo de falla permite tomar a tiempo medidas correctivas.

1.3 DESARROLLO DE UN PROYECTO

En el desarrollo de un proyecto de Ingeniería que involucre estructuras se pueden distinguir cinco etapas, a saber: planeamiento general, diseño preliminar, evaluación de alternativas, diseño final y construcción.

1.3.1 Planeamiento general

El planeamiento general comienza con la concepción de la obra y el establecimiento de sus objetivos y criterios generales de diseño. En esta etapa se estudia la forma de financiarla y se selecciona el personal técnico requerido para llevarla a cabo.

1.3.2 Diseño preliminar

Con base en los objetivos y criterios anteriores, se procede entonces al diseño preliminar de las alternativas que parezcan más apropiadas al caso en estudio. Se trata de crear diferentes sistemas estructurales, de evaluar las cargas aproximadas que actuarían sobre ellos y de hacer un predimensionamiento de los miembros que permita estimar su costo. No se debe perder de vista en ningún momento la posibilidad de realizarlas con los recursos locales disponibles para la construcción.

Como se verá más adelante, un inconveniente de las estructuras indeterminadas es que las fuerzas que se presentan en ellas dependen del tamaño de los miembros, el cual a su vez es función de las fuerzas internas. Por esta razón, el análisis definitivo encierra en mayor o menor grado un proceso iterativo que comienza con el *predimensionamiento*, o asignación previa de dimensiones, de los miembros. El predimensionamiento se puede hacer basándose en la experiencia, o mediante métodos aproximados que convierten la estructura indeterminada en estáticamente determinada.

De lo anterior se desprende que la creatividad, preparación y experiencia del ingeniero proyectista son de importancia fundamental en esta etapa del proceso. Las alternativas que él deje de considerar muy posiblemente serán ignoradas por completo y su enfoque del problema puede definitivamente encauzar el proyecto en determinada dirección.

1.3.3 Evaluación de alternativas

Simultáneamente con el diseño preliminar se suele ir efectuando la evaluación de las diferentes alternativas. Algunas de ellas pueden rechazarse rápidamente por obvias razones, técnicas o económicas, pero normalmente quedarán unas pocas con costo aparentemente igual, ya que el análisis aproximado mencionado con anterioridad no permite discriminaciones por sumas relativamente menores. En tal caso, la decisión se suele tomar considerando otros factores que pueden ser sociales, estéticos o personales.

1.3.4 Diseño final

Una vez escogido el sistema estructural se procede a efectuar el diseño definitivo de los miembros de la estructura. Si ésta es estáticamente determinada, el proceso se reduce a evaluar exactamente las cargas, sin olvidar los que se presenten en el proceso constructivo a pesar de su carácter temporal, y a partir de ellas las fuerzas internas que deben resistir los diferentes elementos. Basta entonces dimensionar éstos para que los esfuerzos resultantes no sobrepasen los valores admisibles o últimos, según sea el caso.

Si la estructura, en cambio, es estáticamente indeterminada, se hace necesario el proceso iterativo antes mencionado. Partiendo de las dimensiones establecidas en el diseño preliminar, se hace ahora el análisis exacto del sistema, recurriendo en ocasiones al computador.

Una vez determinadas las fuerzas axiales, flectoras, cortantes y torsoras a que haya lugar, se procede entonces, si se trata de una estructura metálica, a evaluar los diferentes esfuerzos en los miembros de la estructura y a compararlos con los valores límites establecidos. Cuando los esfuerzos calculados están por debajo de dichos límites, pero suficientemente próximos a ellos como para creer que no hay desperdicio, el predimensionamiento se considera adecuado y se pasa al estudio de las conexiones y demás detalles constructivos. Pero si éste no es el caso, ya sea por exceso o por defecto, se pueden utilizar las fuerzas encontradas para hacer un nuevo dimensionamiento y repetir el análisis, hasta llegar a una concordancia aceptable entre los esfuerzos calculados y los estipulados.

Si la estructura es de hormigón armado, conocidas las fuerzas internas se procede a averiguar si las secciones de concreto son suficientes para resistirlas y, en caso afirmativo, se calcula a continuación la cantidad de refuerzo que requieren dichos miembros. Cuando tales cantidades están dentro de los límites que la práctica recomienda como económicos y de los establecidos por los códigos, se considera que el predimensionamiento fue adecuado y se elaboran los planos que muestran la disposición o *despiece* de dicha armadura.

1.3.5 Construcción

La última etapa del proceso se refiere a la construcción, con la cual se convierte en realidad lo que inicialmente sólo estaba en la mente del proyectista. Especial cuidado debe prestarse aquí a que la obra se haga tal como está estipulada en los planos y especificaciones. Cualquier desviación del proceso constructivo considerado por el calculista, que pueda afectar el estado inicial de cargas de la estructura, debe ser consultada con éste. Nunca podrá insistirse demasiado en el hecho de que las estructuras se comportan según como están construidas y no como están calculadas, a menos que las hipótesis de cálculo se ajusten a la realidad.

Al poner en servicio la obra culmina el esfuerzo de los gestores, proyectistas y constructores. En obras monumentales o de interés público, generalmente los primeros reciben la mayor parte del reconocimiento, mientras que proyectistas y constructores pronto pasan al olvido. Quizás la mayor recompensa para muchos de ellos está en saberse realizadores de la filosofía del constructor, interpretada así por Ruskin (referencia 1.3):

Toda acción humana resulta honrada, agraciada y verdaderamente magnífica cuando se hace considerando las cosas que están por venir... En consecuencia, cuando construyamos, hagámoslo pensando que será para siempre. No edifiquemos para el provecho y el uso actual solamente. Hagamos tales obras que nuestros descendientes nos lo agradezcan y consideremos, a medida que ponemos piedra sobre piedra, que llegará el día en que esas piedras serán sagradas porque nuestras manos las tocaron, y que la posteridad pueda decir con orgullo, al ver nuestra labor y la esencia que en ella forjamos: Mirad aquí el legado de quienes nos precedieron.

1.4 TIPOS DE ESTRUCTURAS, DE ELEMENTOS Y DE APOYO

1.4.1 Estructuras

De manera similar a como se hará con las fuerzas, las estructuras pueden clasificarse desde varios puntos de vista.

Según su destino, por ejemplo, podría hablarse de estructuras para vivienda, para servicios educativos y hospitalarios, para transporte, para contener líquidos o sólidos, para espectáculos públicos, para industrias, para comunicaciones, para transmisión de fluido eléctrico, etcétera.

Según su sistema estructural, se habla en cambio de estructuras reticulares, de estructuras laminares, de estructuras masivas y de estructuras especiales. Es el tipo de clasificación que interesa en los cursos elementales de análisis y estas conferencias cubrirán las estructuras del primer tipo, o sea las reticulares.

En tal grupo están comprendidas aquellas estructuras formadas primordialmente por elementos en los que una de sus dimensiones es bastante mayor que las otras dos, y que están contenidos en un plano o en el espacio. Se subdividen, a su vez, en armaduras y pórticos o marcos.

Las armaduras están formadas por elementos, generalmente prismáticos, dispuestos de tal manera que el área encerrada dentro de la estructura queda subdividida en figuras geométricas, por lo general triángulos que se pueden considerar unidos mediante articulaciones sin fricción y con cargas aplicadas en dichas uniones o nudos. Por esta razón sus elementos se verán sometidos únicamente a fuerzas axiales de tensión o compresión. Claro está que aquellos elementos con cargas intermedias sufrirán además una flexión, que en muchos casos no puede ignorarse. El peso propio es una de tales cargas, pero como las armaduras se hacen generalmente de acero, su incidencia en los esfuerzos es de un orden tal que, considerándolo aplicado en los nudos, el error cometido carece de importancia. La imposibilidad de que en la realidad se cumplan exactamente las hipótesis del análisis hace que se produzcan otros esfuerzos, denominados *esfuerzos secundarios*, que pueden tener o no importancia, dependiendo de la estructura y de las circunstancias. En nuestro medio se suele dar el nombre de *cercha* a una armadura empleada como estructura de cubierta.

Se acostumbra llamar pórtico o marco a una estructura reticular cuya estabilidad, concepto que será definido más adelante, y capacidad portante dependen en parte de la habilidad de una o más de sus uniones para resistir momentos (referencia 1.6). Sus elementos constitutivos están sometidos usualmente a fuerzas axiales y cortantes, y a momentos flectores; en ocasiones experimentan también torsión.

Las estructuras laminares están formadas de elementos que se caracterizan por tener una de sus dimensiones, el espesor, considerablemente menor que las otras dos. Tales elementos pueden ser planos, o curvos, como en las cáscaras.

En las estructuras masivas se tiene un continuo, que se puede idealizar mediante elementos cuyas tres dimensiones no difieren en cantidades apreciables. Tal es el caso de los muros de contención y de algunas presas y, a otra escala, de muchos elementos de máquinas.

Las estructuras especiales son todas aquellas que no caben en las clasificaciones anteriores o que están constituidas por una combinación de varias de ellas. Aquí estarían las estructuras colgantes, los arcos, las estructuras inflables, etcétera.

Finalmente, y desde el punto de vista del análisis, las estructuras se dividen, como ya se vio, en *determinadas* e *indeterminadas*, conceptos que se ampliarán en el artículo siguiente.

Antes de entrar a clasificar una estructura como determinada o indeterminada, es preciso asegurarse, al menos en las estructuras de la Ingeniería civil, de que la estructura es *estable*. Una estructura se considera estable cuando es capaz de soportar cualquier sistema concebible de cargas, de manera elástica, e inmediatamente son aplicadas, suponiendo que la resistencia de todos sus miembros y de los apoyos es infinita. Esto implica que la estabilidad de una estructura no depende del sistema de cargas aplicado ni de las dimensiones de sus elementos y apoyos, sino del número y disposición de unos y otros. Cuando la estructura es capaz de soportar algunos sistemas de cargas, pero no todos, de la manera y bajo el supuesto vistos atrás, no se dice que dicha estructura es estable sino que, sometida a tales sistemas especiales de carga, queda en una situación de equilibrio inestable.

1.4.2 Elementos

El primer paso para analizar una estructura es su *idealización*, que consiste en reducirla a un modelo matemático que la represente en forma adecuada y permita estudiar analíticamente su comportamiento ante las cargas. La técnica más moderna de análisis es la de los *elementos finitos*, que consiste, como su nombre lo indica, en reemplazar el continuo real por una serie de elementos de tamaño finito y con propiedades conocidas, que se suponen conectados en ciertos puntos llamados *nodos* o *nudos*. Ya se vio que los diferentes sistemas estructurales están asociados con elementos de características definidas. Aquí se ampliará lo correspondiente a aquellos que integran las estructuras simples, que son objeto de este texto.

Barras

En análisis se suele dar el nombre de barras a los elementos, generalmente de sección constante, con que se construyen las armaduras. En el artículo anterior se explicó que están sometidos primordialmente a esfuerzos de tensión o compresión simples, y ocasionalmente a esfuerzos de flexión.

Vigas

Son elementos en que una dimensión, la correspondiente a su eje longitudinal, predomina sobre las otras dos, y en los que, a diferencia de las barras, las cargas actúan normales con relación a dicho eje.

Las vigas simples y las vigas continuas están sometidas principalmente a corte y flexión, y algunas veces a torsión. Las que forman parte de pórticos están sujetas, además, a cargas axiales pero, en general, los esfuerzos que ellas producen son muy pequeños comparados con los de flexión y corte.

Cuando las cargas actúan en dirección normal al plano de un entramado constituido por vigas, como en los pisos reticulares, éstas sufren además de flexión, de torsión apreciable. Lo mismo ocurre, como se vio en Resistencia de materiales, cuando el plano de cargas no pasa el denominado *Centro de corte*.

Columns

Son elementos del mismo tipo geométrico de los anteriores, pero en los cuales priman fuerzas de compresión cuya línea de acción coincide con o es paralela a su eje. En el primer caso los esfuerzos son de compresión simple; en el segundo, ésta va acompañada de flexión uni o biaxial. Además pueden estar sometidas a corte, como es el caso de las columnas pertenecientes a pórticos.

1.4.3 Apoyos

Limitándose a estructuras en un plano, es sabido que los apoyos se clasifican en apoyos de primer, segundo o tercer género, según el número de componentes de reacción que puedan desarrollar.

Al primer género pertenecen los apoyos sobre rodillos o sus equivalentes: basculantes, superficies lisas, etc. Se los llama también apoyos simples. El segundo género lo constituyen los apoyos articulados y el tercero está integrado por empotramientos. En la figura 1.1 se indican las convenciones utilizadas para representar los diferentes tipos de apoyo, con sus correspondientes componentes de reacción.

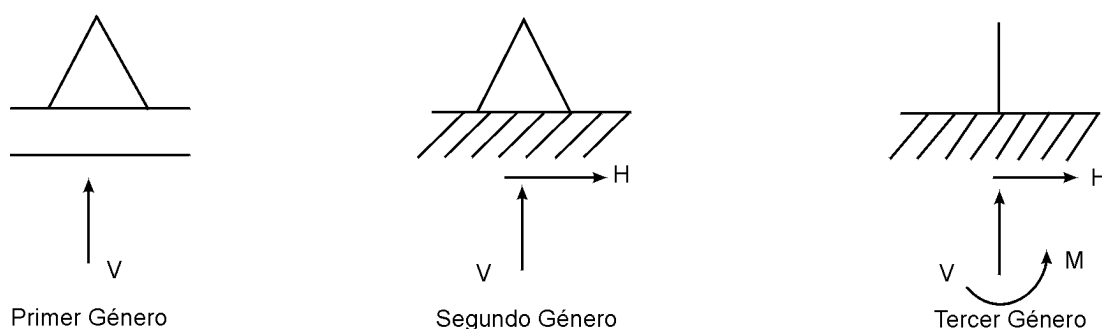


Figura 1.1 Tipos de apoyo y componentes de reacción correspondientes.

1.5 ESTABILIDAD Y DETERMINACIÓN

Una vez clasificada la estructura como estable, en los procesos manuales de análisis puede convenir estudiar su grado de indeterminación, que está dado por el exceso de incógnitas sobre el número de ecuaciones disponibles. Dicho estudio se puede hacer en

función de fuerzas o de desplazamientos. En el primer caso se habla de *indeterminación estática* y en el segundo, de *indeterminación cinemática*. El alumno generalmente está más familiarizado con el primer concepto, pues en Mecánica de sólidos aprendió que en las estructuras determinadas el número de incógnitas –fuerzas– era igual al número de ecuaciones de equilibrio –sumatoria de fuerzas y de momentos–. Cuando las primeras superaban a las segundas, la estructura se llamaba indeterminada, y para resolverla era necesario acudir a las expresiones de deformación y a las condiciones de compatibilidad de las mismas. Este concepto era suficiente para las estructuras simples, estáticamente determinadas, que estaba analizando entonces. Para estructuras más complejas, sin embargo, y específicamente en el caso de pórticos, puede resultar más conveniente considerar los desplazamientos como incógnitas, pues si la indeterminación cinemática resulta inferior a la estática, utilizando *Métodos de desplazamientos* se obtiene un ahorro en el número de ecuaciones por resolver, que puede ser importante desde el punto de vista de esfuerzo de computación, especialmente cuando se utiliza un ordenador digital para resolverlas.

Los conceptos de estabilidad y determinación son tan importantes en la formación del ingeniero de estructuras que algunos autores, entre ellos Kinney (referencia 1.6), recomiendan estudiarla considerando independientemente los apoyos y la estructura. A la primera le da el apelativo de externa, reservando el de interna para la segunda.

Naturalmente, el grado de indeterminación total, que es el que realmente interesa al calculista, puede obtenerse sumando las indeterminaciones externas e internas, o bien considerando conjuntamente la estructura y sus apoyos. A continuación se ilustran ambos procedimientos.

1.5.1 Estabilidad y determinación externas

Las estructuras bidimensionales, o estructuras ubicadas en un plano, requieren la existencia de por lo menos tantas componentes de reacción que no sean ni concurrentes ni paralelas como ecuaciones independientes de equilibrio que puedan plantearse en cada caso particular. Éstas serán las de sumatoria de fuerzas y de momentos iguales a cero aplicadas a la estructura en su conjunto y además cualquier otra ecuación proporcionada por detalles de construcción como por ejemplo articulaciones internas, ya que cada una de ellas proporcionará una condición adicional para la evaluación de las componentes de las reacciones.

Las componentes de reacción no pueden ser concurrentes, pues al serlo podrían reemplazarse por una fuerza única aplicada en el punto de concurrencia. Es evidente que no siempre la resultante de las cargas aplicadas podrá pasar por dicho punto, lo cual implica la existencia de un momento que haría girar la estructura como se muestra en la figura 1.2 (a).

Por otra parte, si las componentes de reacción son paralelas, la resultante de las mismas tendrá dirección definida y no podrá balancear ninguna fuerza que no tenga su misma línea de acción, como es el caso de la figura 1.2 (b).

Si el número de reacciones es menor que el número de ecuaciones independientes del equilibrio de la estructura, ésta será externamente inestable. Por el contrario, si las

reacciones exceden el número de tales ecuaciones, la estructura es externamente indeterminada y su grado de indeterminación externa es igual al exceso de reacciones sobre el número de ecuaciones. Es decir:

$$I_e = r_e - e \quad (1.1)$$

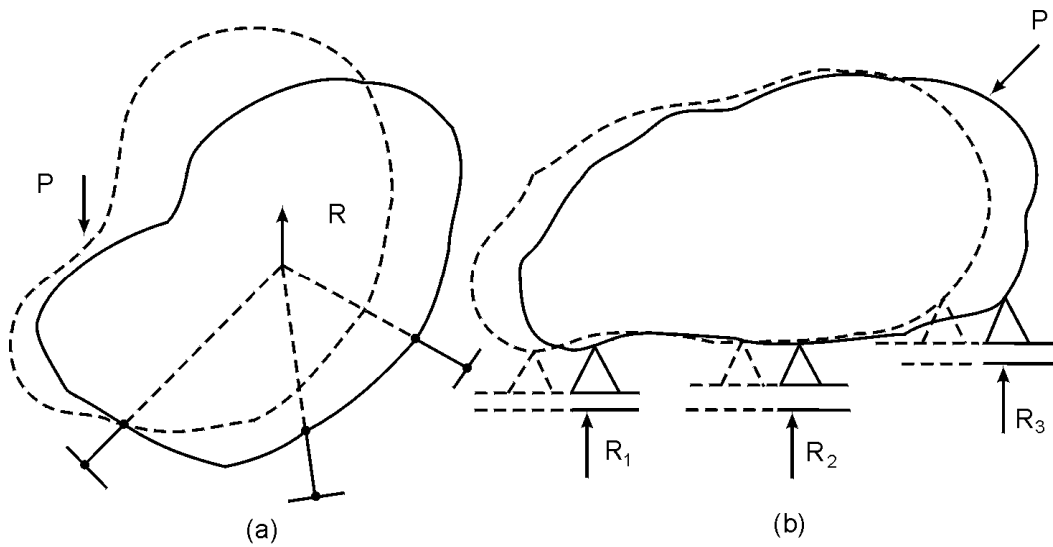


Figura 1.2 Apoyos que causan inestabilidad.

en donde I_e es el grado de indeterminación externa, r_e el número de componentes de reacción, y e el número de ecuaciones disponibles.

En la figura 1.3 se ilustran los conceptos anteriores para el caso de estructuras en un plano. En la parte (a) se presentan tres vigas con las mismas condiciones de apoyo. Se observa que en la última de ellas la condición de momento igual a cero en cada rótula proporciona dos ecuaciones adicionales que reducen la estructura a la condición de externamente determinada. Como en todas ellas hay más componentes de reacción (ni concurrentes ni paralelas) que ecuaciones de condición, las tres son externamente estables.

En la parte (b) se presentan dos pórticos, el segundo de los cuales sólo ofrece dos componentes de reacción que lo hacen externamente inestable. Cabe anotar que si una estructura es inestable, no tiene sentido hablar de su grado de indeterminación.

En la figura 1.3 (c) aparecen dos arcos. El primero de ellos tiene tres articulaciones y es externamente determinado, pues, aunque tiene cuatro componentes de reacción, la articulación central proporciona una cuarta ecuación al cortar allí y considerar el diagrama de cuerpo libre a uno y otro lados de la articulación. El arco doblemente empotrado tiene en cambio tres grados de indeterminación externa.

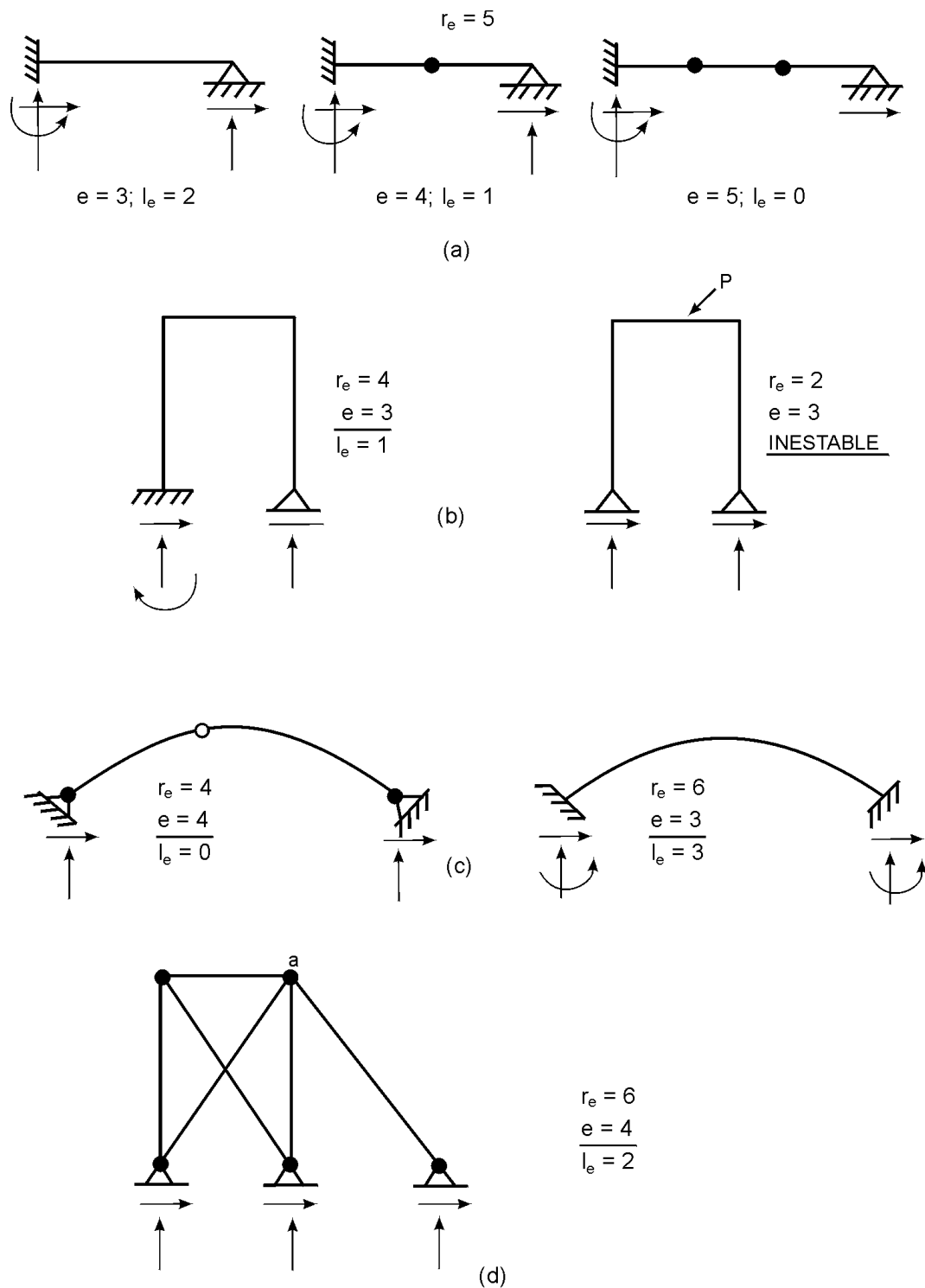


Figura 1.3 Cálculo del grado de indeterminación externa.

Finalmente, en la parte (d) de la figura se ilustra el caso de una armadura que se podría considerar de tercer grado de indeterminación externa. Sin embargo, la condición de que el momento de todas las cargas y reacciones que se encuentren a cualquier lado del punto "a" con respecto al mismo deba ser cero, proporciona una ecuación adicional que reduce su grado de indeterminación externa a dos.

En caso de un cuerpo rígido en el espacio hay seis grados de libertad, es decir, seis posibilidades de movimiento independiente, a saber: tres desplazamientos y tres rotaciones. Por consiguiente, la estabilidad de un cuerpo tal requiere seis componentes de reacción para mantenerlo en posición ante cualquier carga. Desafortunadamente no hay reglas geométricas simples que aseguren la adecuada disposición de las seis reacciones; en casos dudosos se debe acudir a las ecuaciones de equilibrio. Si la estructura es inestable el sistema de ecuaciones resulta indeterminado, y si se aproxima a esa situación, algunas de las reacciones y desplazamientos resultan muy grandes. Por esta razón deben evitarse los sistemas de apoyo que se aproximen a la condición de inestabilidad.

De lo dicho anteriormente se desprende que condiciones internas de la estructura pueden requerir la existencia de componentes adicionales de reacción para que la estructura sea estable. Un caso tal es el de la figura 1.4, en que la estructura es externamente estable pero la falta de una diagonal en el panel de BCDE la hace internamente inestable. La estabilidad se logra mediante un apoyo en D del tipo mostrado.

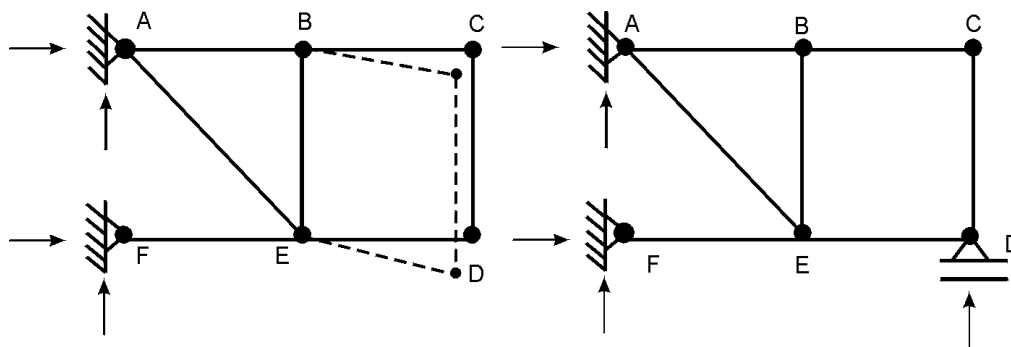


Figura 1.4 Inestabilidad por falta de una diagonal.

1.5.2 Estabilidad y determinación internas

Una estructura es internamente determinada si, una vez conocidas todas las reacciones necesarias para su estabilidad externa, es posible determinar todas las fuerzas internas de los elementos mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático. Conviene distinguir entre armaduras y pórticos.

Armaduras

En el caso de armaduras en un plano, en cada nudo se pueden aplicar sólo dos condiciones de equilibrio: las de sumatorias de fuerzas en x y y iguales a cero, pues la de

sumatoria de momentos nula es irrelevante, para determinar tanto las fuerzas en las barras como las reacciones. En consecuencia, para que una armadura sea determinada se requiere que

$$2j = b + r \tag{1.2}$$

en donde j es el número de nudos, b el número de barras y r el número de reacciones necesarias para su estabilidad externa. Nótese que r no es necesariamente el número de reacciones existentes, pues lo que se pretende es independizar la indeterminación interna de la externa. De lo visto en el párrafo anterior, se desprende que el valor adecuado para r será el número de ecuaciones disponibles para evaluación de las reacciones puesto que, como ya se dijo, este número es igual al de reacciones necesarias para la estabilidad externa. Despejando, de la fórmula anterior se obtiene como ecuación de condición:

$$b = 2j - r \tag{1.3}$$

que da el número de barras necesarias para la estabilidad interna de una estructura articulada. Hay que advertir, sin embargo, que esta condición no es suficiente, como se ilustra con las dos armaduras de la figura 1.5. La primera de ellas es estable; la segunda, en cambio, es internamente inestable por la falta de una diagonal en uno de los paneles.

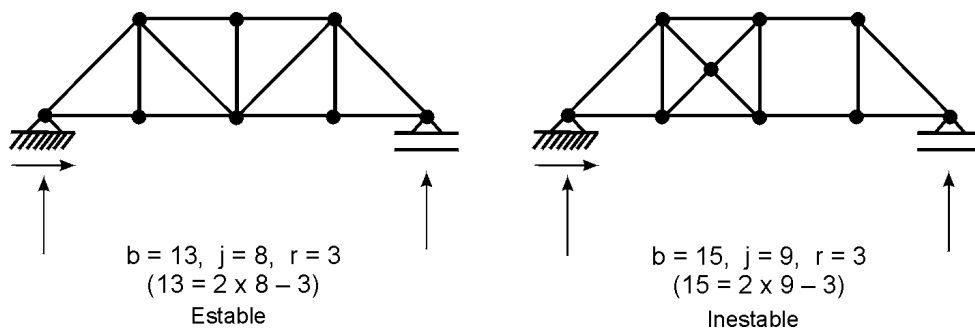


Figura 1.5 Ejemplo de cumplimiento de la ecuación de condición 1.3 en armaduras estables e inestables.

Si la ecuación de condición no se satisface, la estructura puede ser internamente inestable o internamente indeterminada. Cuando el número de barras es inferior al dado en la ecuación (1.3), la armadura es internamente inestable. En el caso contrario es internamente indeterminada, generalmente del grado indicado por la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de dicha ecuación. En la figura 1.6 se presentan varios ejemplos de aplicación de la ecuación anterior en que todas las armaduras mostradas son estables y de varios grados de indeterminación.

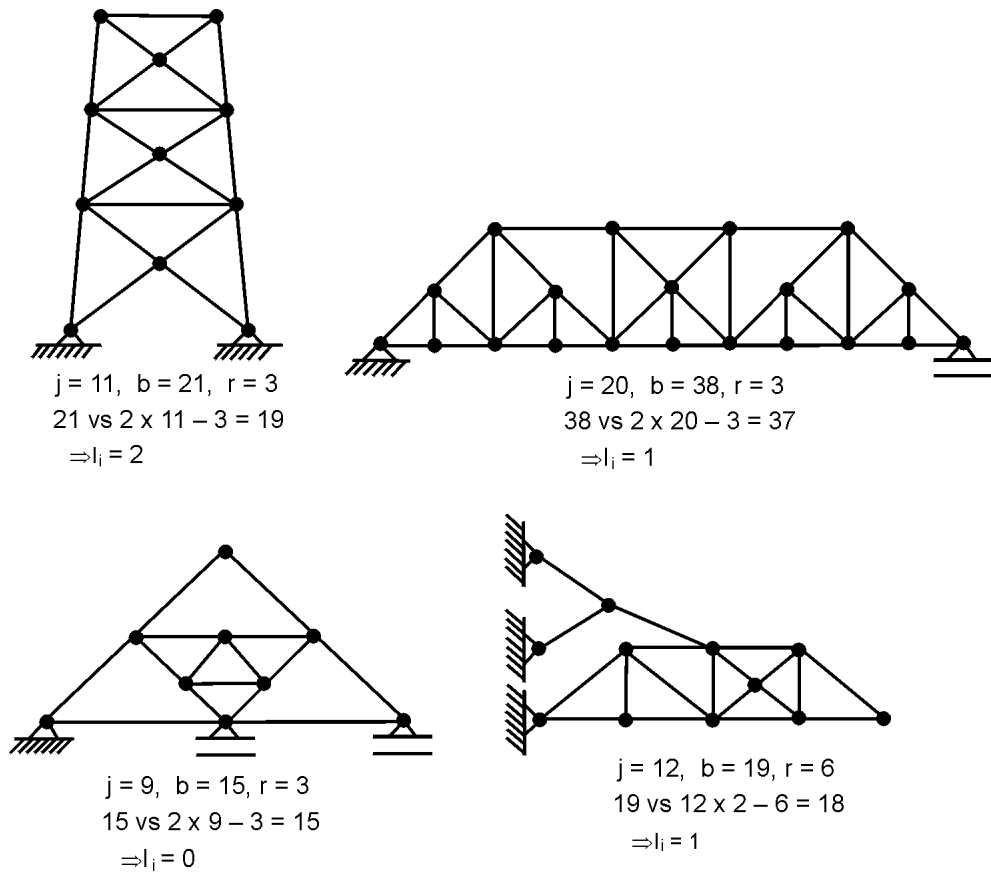


Figura 1.6 Cálculo del grado de indeterminación interna en armaduras.

Pórticos

El estudio del grado de indeterminación interna de los pórticos tiene poca importancia práctica y puede hacerse rápidamente por inspección, pues basta aplicar la ecuación:

$$I_i = 3n \quad (1.4)$$

en donde I_i es el grado de indeterminación interna y n el número de segmentos de área dentro de los límites del pórtico que se hallan completamente rodeados por elementos del mismo; es decir, los segmentos adyacentes al terreno no se cuentan. Según esto, las vigas continuas, que pueden considerarse como un caso límite de pórticos, son internamente determinadas. En la figura 1.7 se muestra un pórtico de noveno grado de indeterminación interna.

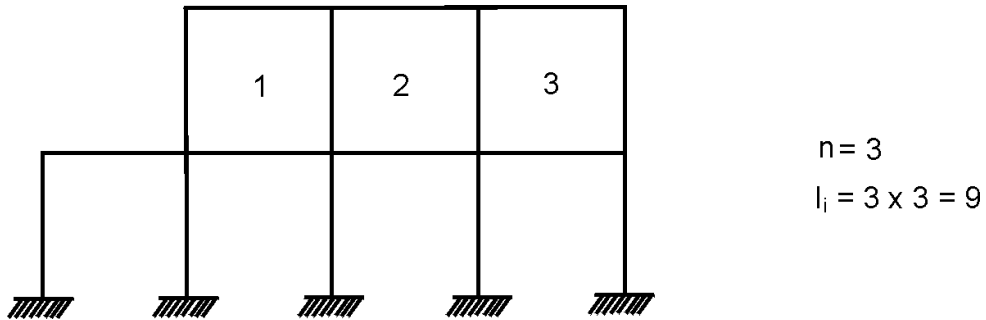


Figura 1.7 Cálculo del grado de indeterminación interna en un pórtico.

1.5.3 Estabilidad y determinación totales

La estabilidad e indeterminación totales son las que realmente importan para el análisis, pues se requiere una ecuación adicional para cada grado de indeterminación, independiente de si ésta es interna o externa. La indeterminación total se puede encontrar sumando las indeterminaciones externa e interna, o modificando las ecuaciones dadas anteriormente, como se indica a continuación.

Para las armaduras la ecuación de condición pasa a ser:

$$b = 2j - r_e \tag{1.5}$$

Para pórticos en un plano basta añadir a la ecuación (1.4) la indeterminación externa, quedando entonces:

$$I_t = 3n + r_e - 3 \tag{1.6}$$

en donde I_t es el grado de indeterminación total. Aplicando esta ecuación al pórtico de la figura 1.7, se obtiene una indeterminación total de grado 21.

Un método alternativo en este tipo de estructuras es el de hacer cortes que reduzcan el pórtico a otros formados por vigas y columnas en voladizo y, por consiguiente, estáticamente determinados. En cada sección es necesario colocar una fuerza axial, otra de corte y un momento para compensar los grados de libertad introducidos. En consecuencia, la indeterminación estará dada por tres veces el número de cortes, n_c :

$$I_t = 3 n_c \tag{1.6a}$$

Aplicando este método al pórtico anterior, como se indica en la figura 1.8, se llega de nuevo al mismo resultado. Cuando las condiciones de apoyo son diferentes de empotramiento, al valor encontrado mediante este método y la ecuación (1.6a) es necesario restarle el número de grados de libertad existente en los apoyos.

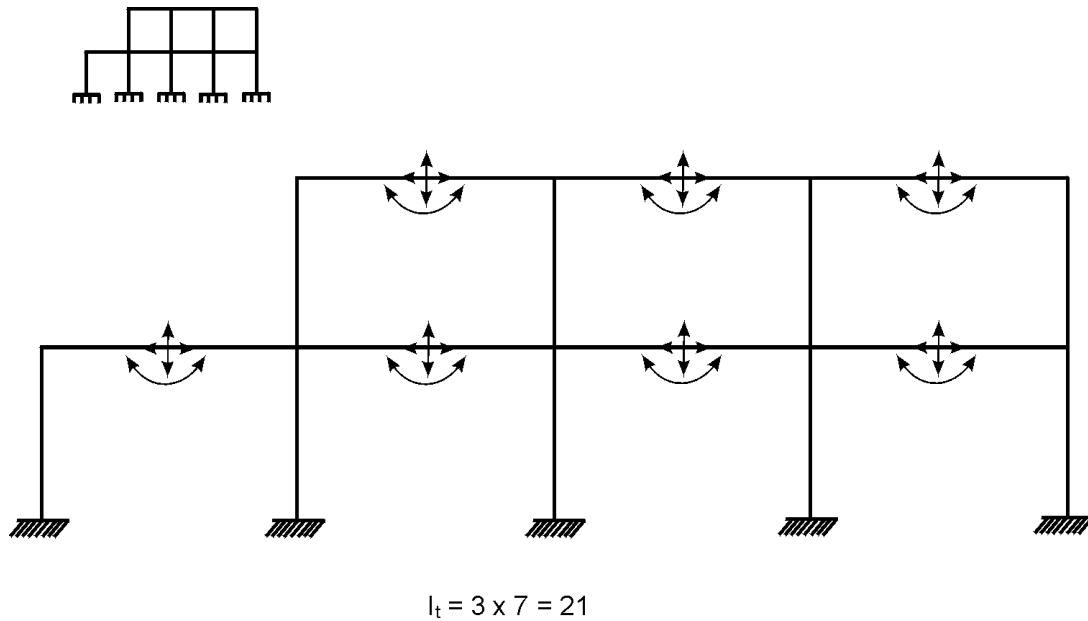


Figura 1.8 Método de los cortes para calcular el grado de indeterminación de un pórtico.

1.5.4 Indeterminación cinemática

Al comenzar el numeral 1.5 se mencionó que en el caso de pórticos puede resultar más conveniente utilizar los llamados *Métodos de desplazamientos* en lugar de *Métodos de fuerzas* para analizar la estructura. Considerar en los primeros los desplazamientos como incógnitas hace que para ellos lo que importe sea el grado de *indeterminación cinemática* que está dado por el número de desplazamientos generalizados –desplazamientos lineales y rotaciones de los nudos– desconocidos.

En los pórticos comunes se suelen despreciar las deformaciones axiales de los miembros y, en consecuencia, se considera que en cada piso sólo existen desplazamientos horizontales, iguales para cada una de las columnas involucradas, además de las rotaciones de los nudos. Siguiendo este criterio, en el pórtico de la figura 1.9, que es de grado 36 de indeterminación cinemática si se considera en forma exacta, pues tiene doce nudos libres con tres grados de libertad en cada uno, dicho valor se reduce a 16 cuando se desprecian las deformaciones axiales de los miembros, pues sólo quedan entonces cuatro desplazamientos y doce rotaciones independientes. En cambio es de grado 24 de indeterminación estática, como puede calcularse fácilmente aplicando cualquiera de los métodos ya vistos.

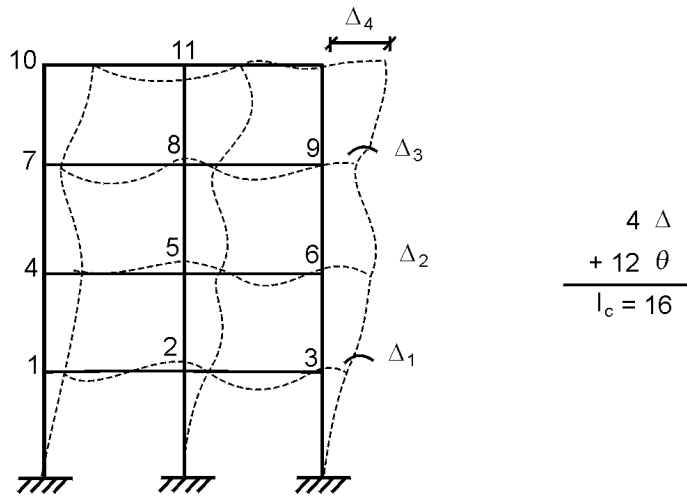


Figura 1.9 Cálculo del grado de indeterminación cinemática.

1.6 COMPARACIÓN DE ESTRUCTURAS

El profesor Eduardo Torroja empieza su obra *Razón y ser de los tipos estructurales* (referencia 1.7), con las siguientes palabras:

Cada material tiene una personalidad específica distinta, y cada forma impone un diferente fenómeno tensional. La solución natural de un problema –arte sin artificio–, óptima frente al conjunto de impuestos previos que la originaron, impresiona con su mensaje, satisfaciendo, al mismo tiempo, las exigencias del técnico y del artista.

El nacimiento de un conjunto estructural, resultado de un proceso creador, fusión de técnica con arte, de ingenio con estudio, de imaginación con sensibilidad, escapa del puro dominio de la lógica para entrar en las secretas fronteras de la inspiración.

Antes y por encima de todo cálculo está la idea, moldeadora del material en forma resistente, para cumplir con su misión.

Y a esa idea dedica su libro.

La formación de todo ingeniero de estructuras debería incluir un curso dedicado exclusivamente a analizar la idea creadora en las obras que nos rodean: a estudiar el porqué de las formas estructurales que constituyen el esqueleto de nuestras ciudades y de nuestros medios de transporte. El razonamiento que condujo a los grandes maestros constructores, antiguos y modernos, a legarnos las estructuras que hoy contemplamos con deleite y admiración. Desafortunadamente un curso tal no está contemplado en los programas actuales y priman en cambio otras consideraciones que hicieron exclamar al mismo autor:

... el caso es que en las escuelas hay tanto que aprender que rara vez queda tiempo para pensar.

Lo más grave está en que el alumno que no se acostumbra a pensar durante su paso por la universidad, rara vez lo hará en su ejercicio profesional. Por eso es frecuente encontrar lo mencionado por Torroja:

Es un error demasiado corriente empezar a calcular la viga número 1 sin haber antes meditado si la construcción debe llevar vigas o no.

Pretender hacer una comparación de las diferentes estructuras sería por lo menos una muestra de ingenuidad. Los factores que se suelen considerar en tales comparaciones se refieren principalmente a la estética, a la facilidad de análisis y construcción, y a la economía de la estructura, dando por sentado que todas las alternativas en estudio cumplen adecuadamente su función.

Como ya se transcribió, la solución natural del problema, o la que más se aproxima a ella, suele ser siempre la más económica y la más bella. Entender dicha solución requiere espíritu inquisitivo, gusto por la materia y devoción. El lector interesado se beneficiará grandemente a este respecto leyendo las referencias 1.1 a 1.3, 1.7 a 1.9 y 1.43 a 1.47.

1.7 CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN UNA ESTRUCTURA

Las fuerzas presentes en una estructura se suelen dividir en *externas* e *internas*. Las primeras están constituidas por las cargas aplicadas y las reacciones de los apoyos. Las cargas, a su vez, pueden clasificarse desde diversos puntos de vista, como se indica a continuación.

Según el modelo de aplicación pueden ser *estáticas* o *dinámicas*. Se llama carga estática la que se aplica gradualmente. Si se aplica súbitamente, la carga se clasifica como dinámica.

En atención a su permanencia, la carga puede ser *momentánea* o *sostenida*. Ejemplo de la primera es un camión que pasa por un puente; de la segunda, el peso propio de la estructura.

Considerando su estabilidad, la carga podría considerarse como *fija* o *fluctuante*. La primera no cambia con el tiempo; la segunda sí. Cuando una carga fluctuante es de naturaleza tal que sus valores máximos y mínimos son iguales en magnitud, pero de sentido opuesto, se dice que dicha carga es *invertida*.

Si se tiene en cuenta su origen, las cargas pueden clasificarse como debidas a la acción de la gravedad, a la presión hidrostática o al empuje, al viento, al sismo y a los cambios de temperatura.

Las cargas gravitacionales las subdividen los códigos a su vez en *carga muerta* y *carga viva*.

La *carga muerta* incluye los pesos propios de la estructura, muros, pisos, cubierta, cielos rasos, escaleras, equipos fijos y, en general, todas aquellas cargas gravitacionales que no son causadas por la ocupación y uso de la edificación y que deban ser soportadas por ésta; en consecuencia, se conoce con bastante aproximación. Al calcularlas deben usarse las densidades reales de los materiales. En el capítulo B.3 de las *Normas NSR-98* se encuentran como guía los valores mínimos que pueden utilizarse con este fin. Debe tenerse especial cuidado al evaluar la carga muerta causada por las fachadas, muros divisorios, particiones y acabados. Las *Normas* prescriben valores mínimos por estos conceptos que no pueden infringirse sin la debida justificación.

La *carga viva* son cargas gravitacionales de ocupación, móviles o movibles, que generalmente encierran para el diseñador un mayor grado de incertidumbre. Esto se refleja en los códigos al proveer para ellas *coeficientes de carga*, definidos más adelante, mayores que para la carga muerta. Las *cargas vivas* o de *servicio*, si están adecuadamente escogidas, rara vez serán excedidas durante la vida útil de la estructura. El calculista es legalmente responsable ante las autoridades de que su estructura resista las cargas estipuladas por el código local sin presentar ningún tipo de falla, salvo los agrietamientos sin importancia que no se puedan evitar económicamente.

En el cuadro 1.1 se dan las cargas vivas principales prescritas por diferentes códigos de reconocido prestigio para el diseño de las estructuras más comunes. Entre ellas están las establecidas en las *Normas NSR-98* (referencia 1.10), cuyo cumplimiento es obligatorio en todo el territorio nacional.

De acuerdo con la extensión de la zona de aplicación se habla de cargas *concentradas* o *puntuales*, y *repartidas*. La repartición puede ser uniforme, triangular, trapezoidal, parabólica, arbitraria, etc. Es evidente que esta clasificación es relativa y depende de las dimensiones del elemento estructural que recibe la carga. Por ejemplo, una persona parada sobre una viga puede considerarse como una carga concentrada que actúa sobre ella, pero pasa a ser carga repartida cuando el elemento que la soporta es un ladrillo.

También se pueden clasificar las cargas según el lugar de aplicación y la dirección que llevan. En el caso de elementos prismáticos la carga puede ser *centrada*, *excéntrica* o *normal* al eje longitudinal.

Cuadro 1.1

Principales cargas vivas mínimas prescritas en diversos códigos (N/m²)

Uso de la estructura	NSR - 98	ASCE 7 - 95	UBC- 1982	DIN 1055
Vivienda	1800	1450-1950	1950	1500-2000
Oficinas	2000	2450	2450	2000
Escaleras en oficinas y vivienda	3000	4900	4900	3500-5000
Cuartos de hospitales	2000	1950	1950	2000
Graderías de estadios y coliseos	4000	4900	1800 N/m	7500
Escuelas, colegios y universidades	2000	1950-3000	1950	3500

Cargas centradas son aquellas aplicadas, o que se pueden considerar aplicadas, en el centroide de una sección transversal del elemento. Cuando la línea de acción de una carga

tal pasa por los centroides de todas las secciones transversales del mismo, la carga se denomina *axial*. Las cargas que no están aplicadas en el centroide de la sección transversal se denominan *excéntricas*. Las cargas normales al eje pueden estar contenidas o no en un plano principal del elemento.

Se establece una división similar para las cargas que actúan sobre elementos laminares, ya sean éstos planos o curvos. Refiriéndose a los primeros, se habla de *cargas en el plano o normales al plano*. Al considerarse los segundos, se clasifican en *tangentes* y *normales* a la superficie. Es claro que no todas las cargas son normales o tangentes, pero es sabido que cualquiera se puede descomponer en cargas de estos tipos.

Esta clasificación es muy importante, pues determina el tipo de fuerzas internas que originan en las estructuras que las soportan. Las cargas axiales producen esfuerzos de tensión o compresión simples; las tangenciales, esfuerzos cortantes. Las excéntricas, flexocompresión o flexotensión; las normales al eje y contenidas en un plano principal, flexión y corte. Si son normales al eje pero están fuera de un plano principal, además de la flexión y el corte producen generalmente torsión.

En el cuadro 1.2 se resume la anterior clasificación. Este cuadro, que a primera vista puede parecer complicado, se hará realmente sencillo a medida que el alumno desarrolle la capacidad de analizar las cargas y las estructuras que encuentra a todo momento en su diario discurrir. No sobra recomendar acá un repaso a conciencia de los conceptos de fuerzas equivalentes y ejes y planos principales vistos en el primer curso de Mecánica de sólidos, con el convencimiento de que cualquier esfuerzo en este sentido lo verá el lector recompensado con creces.

1.8 ESTADOS DE CARGA CONSIDERADOS EN EL DISEÑO

El primer capítulo del libro de White, Gergely y Sexsmith (referencia 1.1) comienza con la siguiente cita de Theodore von Karman, uno de los grandes ingenieros estructurales de este siglo:

El científico explora lo que es; el ingeniero crea lo que nunca ha sido.

¡Cuán cierta parece esta expresión al contemplar las obras de Torroja, Nervi, Maillart, Candela y tantos otros (referencias 1.7 a 1.9), cuyas estructuras son modelos de buen funcionamiento y armonía!

Al enfrentarse el ingeniero con su misión creadora, es de capital importancia considerar los estados de carga a que se verá sometida la estructura durante su vida útil, para garantizar con el diseño que no se presenten fallas imprevistas.

El estado más frecuente de cargas en que debe pensar lo constituyen todas aquellas que van a presentarse innumerables veces durante la vida de la estructura. En términos familiares podría hablarse de la *carga de todos los días*. La estructura, al verse sometida a ella, debe comportarse impecablemente, salvo las pequeñas fisuras en el concreto, imposibles de evitar. Parte fundamental de dicha carga son las cargas permanentes o *carga muerta*, que se definió antes.

Cuadro 1.2

Clasificación de las fuerzas que actúan en una estructura

	Criterio de clasificación	División
Externas	Modo de aplicación	Estática Dinámica
	Permanencia	Momentánea Sostenida
	Estabilidad	Fija Fluctuante → invertida
	Origen	Gravedad $\left\{ \begin{array}{l} \textit{muerta} \\ \textit{viva} \end{array} \right.$ Presión hidrostática o empuje Viento Sismo Térmica
	Extensión de la zona de aplicación	Concentrada Repartida $\left\{ \begin{array}{l} - \textit{uniforme} \\ - \textit{triangular} \\ - \textit{trapezoidal} \\ - \textit{parabólica} \\ - \textit{arbitraria, etc.} \end{array} \right.$
Lugar de aplicación y dirección	Elementos prismáticos Centrada axial Excéntrica Normal al eje $\left\{ \begin{array}{l} \text{Contenidas en un plano principal} \\ \text{Fuera de un plano principal} \end{array} \right.$ Elementos laminares planos En el plano Normales al plano Elementos laminares curvos Tangentes a la superficie Normales a la superficie	
Internas	Efectos que producen	Axiales Cortantes Flectoras Torsoras

Existe un segundo estado constituido por las máximas cargas probables de ocupación, o sea las *cargas vivas o de servicio*, descritas anteriormente.

No hay que olvidar que antes de entrar en funcionamiento, la estructura se ve sometida a cargas particulares del proceso de *construcción*, que en ocasiones pueden exceder las de servicio.

Cuando se trata de estructuras especiales no contempladas en los códigos, el ingeniero debe esmerarse al máximo para prever, con la mayor aproximación posible, las cargas máximas que pueden ocurrir con un porcentaje razonable de probabilidad.

Además, en cualquier momento pueden presentarse cargas producidas por movimientos sísmicos, viento, cambios de temperatura, etc., fenómenos todos que escapan a nuestro control.

Por otra parte, la resistencia de un conjunto de miembros estructurales, aparentemente idénticos, tampoco es un valor único, pues existen incertidumbres en las propiedades de los materiales, en los procesos de construcción y en los métodos de cálculo.

Es decir, tanto las cargas que actúan sobre una estructura, como la resistencia de ésta no son valores fijos o *determinísticos*, sino que tienen naturaleza variable o *probabilística*.

En consecuencia, el calculista debe ser consciente de que no podrá lograr certeza absoluta contra ningún tipo de falla pues, por ejemplo en el caso de sismo, siempre habrá la posibilidad de que se presente uno que exceda sus previsiones. Por otra parte, no puede olvidar que la economía es uno de los criterios de diseño, de manera que al establecer sus márgenes de seguridad tendrá en cuenta la naturaleza probabilística de las cargas y de la resistencia de los miembros estructurales, las consecuencias de cada tipo de falla y el costo de reparación o reposición de la estructura.

Hasta hace pocos años la mayoría de los códigos de construcción eran de naturaleza determinística, pero tomando en cuenta lo anterior existe la tendencia a que en el futuro tengan cada vez más carácter probabilístico. El problema se puede explicar en términos generales mediante la figura 1.10, en la que se han representado con curvas normales las resistencias exigidas por las cargas y las proporcionadas por la estructura.

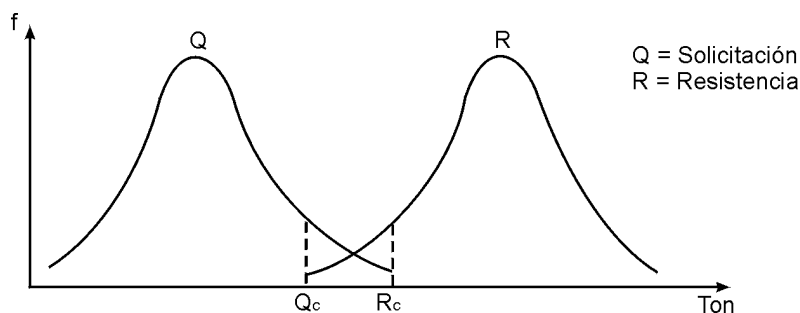


Figura 1.10 Resistencia exigida por las cargas, comparada con la proporcionada por la estructura.

Es claro que, no importa cuánto se desplace hacia la derecha la curva de resistencia de la estructura, siempre habrá una zona de traslapo indicativa de la probabilidad de falla.

Por otra parte, dicho desplazamiento, que implica un incremento en el margen de seguridad, ocasiona, infortunadamente, un aumento en los costos en la mayoría de los casos.

Se mencionó ya que existen ciertas cargas que por su origen, o por el tipo y localización de la estructura, escapan a nuestro control. Tal es el caso de las debidas a huracanes o a movimientos telúricos, o el del puente en un camino vecinal que es cargado irresponsablemente con un camión grande. Impedir todo tipo de falla en una estructura que se ve sometida a ellas no sería factible desde el punto de vista económico y hay un cierto valor crítico a partir del cual resulta más barato reparar la estructura. Se habla entonces de la máxima carga *posible* en lugar de *probable*, y con ella se permiten, además de la falla por separación parcial, las fallas por separación elástica excesiva e incluso por deformación permanente. Esta diferenciación cualitativa se puede hacer cuantitativa mediante el *diseño para estados límites*, que se explicará más adelante. La que sí está totalmente excluida es la falla por separación total o colapso de la estructura que pueda ocasionar pérdida de vidas humanas o lesiones irreparables.

En adición a los estados anteriores, es conveniente que el diseñador tenga al menos idea del comportamiento de la estructura sometida a las cargas últimas que ocasionan su colapso. Este tipo de falla es permitido únicamente en el laboratorio y en condiciones controladas, pero es de capital importancia en la evaluación del margen de seguridad. Si la falla se presenta gradualmente, dando tiempo para tomar medidas correctivas o para evacuar la estructura, se pueden utilizar márgenes de seguridad mucho más bajos que cuando la falla es intempestiva o de naturaleza explosiva. Vale la pena señalar que, aunque la mayoría de las investigaciones experimentales se limitan a estudiar miembros estructurales, hoy en día se emplean con éxito modelos reducidos para el estudio de estructuras especiales importantes, con la ventaja de que se pueden llevar hasta la falla a un costo relativamente bajo.

1.9 CÓDIGOS DE CONSTRUCCIÓN

Debido a las implicaciones sociales y económicas de las fallas estructurales, los gobiernos, en defensa del bien común y de la seguridad ciudadana, establecen *códigos de construcción* con los requisitos mínimos que deben satisfacer las edificaciones comunes y las destinadas al comercio, transporte, culto o entretenimiento. En Colombia las *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98* (referencia 1.10), establecidas por el Decreto 33 de 1998, reglamentario de la Ley 400 de 1997, son de obligatorio cumplimiento desde febrero de 1998.

El *Consejo sobre Edificios Altos y Hábitat Urbano* (referencia 1.11) indica que, en general, los formatos utilizados por los códigos pueden clasificarse de tres maneras:

1. Por sus bases filosóficas, en dos categorías: determinísticos y probabilísticos.
2. Por los métodos y precisión de los cálculos involucrados, en tres: diseño para esfuerzos de trabajo, diseño a la rotura y diseño para estados límites.
3. Desde un punto de vista histórico, por su desarrollo cronológico.

Cabe anotar que tanto el diseño para esfuerzos admisibles como el diseño a la rotura se establecieron sobre bases determinísticas porque al ser propuestos no se había

desarrollado todavía la aplicación de los conceptos probabilísticos a la Ingeniería estructural.

La introducción del enfoque probabilístico coincidió con la adopción del concepto de estados límites y debe reconocerse que desde entonces los otros dos métodos han absorbido algunas ideas probabilísticas, a pesar de lo cual permanecen esencialmente determinísticos.

En el numeral 1.10 se ampliarán los conceptos anteriores. Conviene señalar que las *Normas NSR-98* tienen bases probabilísticas y utilizan tanto el método de diseño para esfuerzos admisibles como el de diseño para estados límites.

Para el diseño de puentes, el Instituto Nacional de Vías y Ferrovías de Colombia han establecido normas que siguen fundamentalmente las de la *American Association of Highway and Transportation Officials (AASHTO)*, en el primer caso, y de la *American Railway Engineers Association (AREA)*, en el segundo. Para los puentes de carreteras el instituto citado adoptó el *Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes, CCP 200-94*, de la *Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS)*, que es básicamente una adaptación de la norma vigente de la AASHTO.

Las instalaciones industriales se diseñan en muchos casos siguiendo especificaciones de entidades especializadas.

1.10 MÉTODOS DE DISEÑO

A continuación se recordarán los fundamentos de cada uno de los métodos citados en el numeral 1.9 y los capítulos de las *Normas NSR-98* asociados con ellos. Nuestra meta, siguiendo la referencia 1.11, es comparar los diferentes enfoques y evaluar su confiabilidad y campo de validez. Se espera que, al hacerlo, el lector comprenda las ventajas del diseño para estados límites y esté de acuerdo en que es el mejor método.

1.10.1 Diseño para esfuerzos admisibles

Es el método clásico, desarrollado a comienzos del siglo XIX, con base en la aplicación directa de la teoría de elasticidad; por esta razón se le suele llamar también diseño elástico. Consiste en limitar los esfuerzos en todos los puntos de la estructura, cuando está sometida a las *cargas de servicio*, a valores admisibles, por debajo del límite elástico del material y suficientemente alejados del esfuerzo de falla para que pueda garantizarse un margen adecuado de seguridad.

Las *cargas de servicio*, como se recordará, son aquellas que si están bien escogidas, sólo rara vez serían superadas en la vida útil de la estructura y generalmente están especificadas en los códigos, como se dijo antes.

Los *esfuerzos admisibles* se obtienen dividiendo los esfuerzos de falla del material por *factores de seguridad*, escogidos más o menos arbitrariamente. Los factores comunes varían desde 1.5 para el acero hasta 6 para mampostería.

Según Madsen, Krenk y Lin (referencia 1.13), a comienzos de este siglo los ingenieros estructurales, en general, no creían económicamente justificable investigar la incertidumbre y dispersión de las variables aleatorias que entraban en el diseño. Para cualquier nuevo tipo de estructura surgían factores de seguridad propios, primero aplicando *buen criterio* y luego refinándolos a medida que se acumulaba experiencia sobre ellos, de tal manera que al final se olvidaba toda su génesis. Unos pocos visionarios, como el alemán Mayer en 1926 y el suizo Basler en 1960, eran conscientes de la importancia que tenía la dispersión de las variables sobre el margen de seguridad y propusieron medidas semejantes a las formuladas por Cornell en 1967, pero su trabajo fue ignorado.

El considerar que el material falla al llegar al límite elástico y el no tener en cuenta la naturaleza probabilística tanto de los materiales como de las cargas hacen que el diseño para esfuerzos admisibles no ofrezca una medida precisa de su confiabilidad.

Hoy en día se considera que el diseño elástico es aceptable cuando no se dispone de otra interpretación del comportamiento estructural. Por eso se utiliza parcialmente en el diseño de mampostería y en el de estructuras de madera, ante la ausencia de datos suficientes que permitan un mejor tratamiento. También se usa en el diseño del hormigón preesforzado y aun se permite en el de estructuras de acero, a pesar de la amplísima información disponible sobre el comportamiento de estas últimas.

Las *Normas NSR-98* estipulan que los siguientes materiales pueden diseñarse de acuerdo con esta metodología:

Hormigón preesforzado en condiciones de servicio	Capítulo C.18
Tanques y compartimientos estancos	Capítulo C.20
Mampostería	Apéndice D-1
Edificaciones de madera	Título G
Diseño elástico de estructuras de acero	Capítulos F.3 y F.4

1.10.2 Diseño a la resistencia última

El segundo método de diseño parte de la premisa de que, como la existencia de un margen predeterminado entre la resistencia de los miembros estructurales y los esfuerzos causados por las cargas de trabajo no da una indicación precisa del margen de seguridad disponible, es más lógico adoptar como referencia el estado límite de falla y fijar la relación que debe existir entre la carga última y la de trabajo.

En este caso el factor de seguridad se aplica a las cargas, mayorándolas mediante *coeficientes de carga*, lo cual a primera vista podría hacerlo aparecer como equivalente al método de esfuerzos de trabajo, con una simple transposición algebraica entre los dos lados de la ecuación de condición límite. Sin embargo, un estudio más cuidadoso permite apreciar que el diseño a la resistencia última presenta ciertas ventajas, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Entre ellas se mencionan las siguientes (referencia 1.11):

- El diseño a la resistencia última considera la respuesta de la sección transversal o del miembro completo y no simplemente un esfuerzo local, lo cual lo hace más acorde con la realidad.

- Implícitamente, el método obliga al calculista a preocuparse por lo que pasa en el intervalo entre la carga de servicio y la de falla. Hay efectos que se agravan al aumentar la carga, mientras que otros pierden importancia al acercarse al estado último. Al pensar en términos de *coeficientes de carga*, es posible obtener entonces dimensionamientos más lógicos.
- Los estimativos teóricos de la resistencia última se pueden verificar ensayando modelos o prototipos.

Por otra parte, presenta las siguientes desventajas:

- El asegurar el buen comportamiento ante cargas últimas no es garantía de un adecuado funcionamiento en condiciones de servicio. En general se trata de solucionar este problema aplicando métodos indirectos como limitaciones en las relaciones de esbeltez y en el espaciamiento del refuerzo, que intuitivamente dejan mucho que desear.
- La naturaleza misma del método puede conducir a que los involucrados en el proceso, bien sea calculista, productor de materiales o constructor, lleguen a pensar que el intervalo entre condiciones de servicio y el estado último está a su entera disposición para remediar posibles imprecisiones, errores de diseño o defectos de construcción.
- Al adoptar un factor de seguridad global, todos los miembros resistentes quedan en condiciones idénticas y no se pueden tener en cuenta ni la diferencia en comportamiento de los materiales constitutivos, ni las distintas respuestas ante diversas sollicitaciones.
- Finalmente es cuestionable la validez de coeficientes de carga que han sido fijados sin tener en cuenta la variabilidad de las acciones aplicadas a la estructura y los riesgos de una posible falla.

En las *Normas NSR-98* no existen prescripciones equivalentes por considerar que no se justifican en nuestro medio y que se puede obtener un mejor resultado con el diseño para estados límites.

1.10.3 Diseño para estados límites

El diseño para estados límites se basa en la disminución de la probabilidad de falla de la estructura para ciertos estados límites, considerados importantes a valores aceptables. Para llegar a esta definición se necesitaron 50 años, pues aunque la teoría de confiabilidad estructural se había venido desarrollando desde 1924 sólo en 1967, con la formulación del modelo de Cornell (referencia 1.14), empezó a tener aceptación entre los ingenieros el diseño con bases probabilísticas. Esta primera etapa culminó en América en 1974 con la aparición del primer código de *diseño para estados límites*, publicado por la *Canadian Standards Association* (referencia 1.15), y fundamentado en razones probabilísticas.

Madsen *et al.*, en la referencia ya citada, explican así la apatía en la aceptación profesional de los métodos propuestos:

- No parecía que hubiese necesidad de cambiar los métodos ya establecidos; aparentemente el diseño determinístico cumplía muy bien sus propósitos. Las fallas estructurales eran pocas y las que ocurrían se podían atribuir a error humano, como asunto de rutina.
- El diseño probabilístico parecía muy complicado; era difícil seguir la teoría matemática y su desarrollo numérico.
- Había muy pocos datos disponibles, insuficientes para definir las *colas* de las distribuciones de carga y de resistencia, muy importantes para lo que se pretendía.

En los primeros años de la década de los sesenta los especialistas se dedicaron a encontrar maneras de obviar estos problemas y en 1967 Cornell propuso el formato de *segundo momento* (referencia 1.14), que se explicará más adelante. Por esa época se consideraba que un simple modelo gaussiano de las variables involucradas, no daría suficiente precisión en sistemas de alta confiabilidad como debían ser las estructuras. En consecuencia, es probable que el modelo de Cornell hubiera sido ignorado si Lind no hubiese demostrado en 1973 (referencia 1.16) que el concepto de *índice de confiabilidad* (llamado originalmente *índice de seguridad*) propuesto por Cornell, podía utilizarse para deducir un conjunto de márgenes de seguridad para cargas y resistencia. Este enfoque sirvió de puente para relacionar el análisis de confiabilidad con los métodos de diseño tradicionales y, con algunas modificaciones, ha sido empleado desde entonces en muchas normas como la canadiense de 1974, mencionada antes.

Posteriormente se descubrieron algunas dificultades serias con la aplicación del formato de segundo momento a ejemplos prácticos, pero ellas han sido clarificadas lo mismo que las limitaciones del método. De ahí que se hayan desarrollado, en rápida sucesión, varios códigos que siguen este esquema y documentos que facilitan su aplicación: CEB, 1976; CIRIA, 1977; CSA, 1981; ANSI, 1982; AISC, 1986 (referencias 1.17 a 1.19, 1.15 y 1.20 a 1.25 y 1.31).

El método de la resistencia contemplado en las *Normas NSR-98* sigue parcialmente la metodología del diseño para estados límites, y es obligatorio en los siguientes casos:

Concreto reforzado	Título C
Mampostería	Título D
Estructuras con miembros de lámina delgada de acero formados en frío	Capítulo F.6
Estructuras de aluminio	Capítulo F.7

Además es el **recomendado** para el *diseño de estructuras de acero hechas con perfiles laminados*, cubiertas en los *capítulos F.2 y F.3*.

Hoy en día (año 2000) se reconoce que la teoría de confiabilidad estructural en su estado actual no es del todo adecuada para responder por el comportamiento observado de estructuras reales, ya que la mayoría de las fallas estructurales son atribuibles a errores humanos y éste es un factor que no se ha tenido en cuenta al formular dicha teoría. El estudio del error humano exige la aplicación de métodos desarrollados en las ciencias sociales, muy diferentes de los utilizados tradicionalmente en ingeniería al estudiar la mecánica y confiabilidad estructurales. Se están haciendo esfuerzos para desarrollar una teoría más extensa de control de calidad estructural, que integre la desarrollada hasta ahora con los efectos del error humano.

Teniendo en cuenta la importancia de este método, se explicarán ahora en más detalle sus fundamentos y metodología.

1.10.3.1 Estados límites

El código modelo CEB-FIP, ya citado, prescribe que deben definirse claramente los criterios que caracterizan el comportamiento esperado de la estructura y que la manera más eficiente de hacerlo consiste en enunciarlos en términos de *estados límites*, definiéndolos como aquellos más allá de los cuales la estructura deja de cumplir su función o de satisfacer las condiciones para las que fue proyectada. Estos estados límites están íntimamente ligados con los estados de carga que se discutieron anteriormente.

En el proyecto es necesario considerar todos los estados límites posibles, de tal manera que se asegure un grado conveniente de seguridad y de aptitud para el servicio. El procedimiento usual consiste en dimensionar con base en el estado límite más crítico y verificar luego que no se alcanzan los otros estados límites. Los estados límites pueden clasificarse en dos categorías:

- a) los *estados límites últimos*, que corresponden al máximo de la capacidad portante;
- b) los *estados límites de servicio*, que están ligados a los criterios que rigen la utilización normal y la durabilidad.

El estado límite último puede alcanzarse por fenómenos como la pérdida de equilibrio de una parte o del conjunto de la estructura considerada como un cuerpo rígido, la plastificación o rotura de secciones críticas, el desarrollo de deformaciones excesivas, la transformación de la estructura en un mecanismo, los pandeos –general, lateral o local, debidos a una inestabilidad elástica o plástica– y la fatiga.

Los estados límites de servicio pueden alcanzarse si con las cargas de trabajo la estructura presenta deformaciones excesivas que afectan desfavorablemente su utilización, o daños locales que requieran mantenimiento o produzcan corrosión, o vibraciones que produzcan incomodidad, impresión de inseguridad, o incluso pérdida de aptitud de la estructura para cumplir su función, o cualquier otro criterio particular que requiera una estructura para la cual se haya previsto una función especial o poco habitual.

Se espera, además, que la estructura tenga adecuadas características para que haya una probabilidad razonable de que no se hundirá en forma catastrófica por un empleo abusivo o por un accidente; que resistirá un incendio sin perder su capacidad portante durante un

período de tiempo definido, y que esté protegida adecuadamente de condiciones ambientales que afecten su durabilidad.

1.10.3.2 Criterio de diseño

El criterio de diseño para estados límites se puede expresar matemáticamente de varias formas. Una de ellas, que utiliza *coeficientes de carga y de resistencia*, se puede expresar mediante la siguiente fórmula general, empleada en las *Normas*:

$$\phi R_n \geq \sum \gamma_k Q_k \quad (1.7)$$

en donde el lado izquierdo de la ecuación se refiere a la resistencia de la estructura y el lado derecho al efecto de las cargas que actúan sobre ella. Los términos tienen el siguiente significado:

ϕ = coeficiente de reducción de capacidad, también llamado *coeficiente de resistencia*, siempre menor o igual a uno.

R_n = resistencia nominal, calculada con una fórmula de un código estructural, utilizando las dimensiones nominales del elemento y las propiedades nominales del material. Es una fuerza interna generalizada: fuerza axial, momento flector o corte, asociada con el estado límite de capacidad o de funcionalidad en estudio. También pueden entrar acá ecuaciones iterativas, como las utilizadas para analizar la interacción entre carga axial y momento flector, cuando se combinan varios tipos de sollicitación.

γ_k = *coeficiente de carga* que refleja la posibilidad de que se presenten sobrecargas y las incertidumbres inherentes al cálculo de los efectos de la carga. El subíndice k representa las varias cargas así: **D** para la carga muerta, **L** para la viva, **E** para el sismo, **W** para el viento, etc. Los valores de estos coeficientes son generalmente mayores que uno, exceptuando aquellos casos en que un incremento de las cargas reales iría en contra de la seguridad. Tal situación se presenta al estudiar la estabilidad al volcamiento o al deslizamiento, en cuyo caso la carga muerta se multiplica por un coeficiente menor que uno. Al combinar varias hipótesis pueden aparecer valores menores que uno, cuando los coeficientes de mayoración se aplican a fracciones de una carga de diseño para tener en cuenta la bajísima probabilidad de que varias sollicitaciones máximas se presenten simultáneamente.

Q_k = efecto de la carga de diseño correspondiente al subíndice k, según se explicó en el párrafo anterior. La *carga de diseño* es la estipulada en el código de construcción, según el uso y características de la estructura en consideración.

Al diseñar la estructura se debe plantear la ecuación (1.7) para cada combinación de cargas que requiera estudio en los estados límites especificados. Si para cualquiera de ellas no se cumple la ecuación, se considera que la estructura ha fallado en el sentido

indicado antes; o en otras palabras, que se ha excedido un límite claramente establecido de utilidad estructural.

1.10.3.3 Modelo probabilístico de Cornell

En los Estados Unidos, el ACI, el AISC, el AISI y otras entidades normativas escogieron como modelo probabilístico el debido a Cornell (referencias 1.14 y 1.22), por su simplicidad y por su capacidad para tratar todas las incertidumbres del problema de diseño en forma consistente.

Se trata de un método probabilístico de *primer orden y segundo momento*, o sea un procedimiento simplificado que utiliza sólo dos parámetros estadísticos: los valores medios y los coeficientes de variación de las variables relevantes, y una relación entre ellos, β , denominada *índice de confiabilidad*. El valor de éste se puede fijar como meta por el organismo competente, mediante un proceso de *calibración* con diseños que se ajusten a lo que se considera buena práctica.

Se parte del principio básico de que la seguridad estructural es función de la resistencia de la estructura, R , y del efecto de las cargas, Q , que actúan sobre ella; y de que tanto R como Q son variables aleatorias. El margen de seguridad se puede definir mediante la variable aleatoria $R - Q$, en cuyo caso la estructura es adecuada cuando $R - Q > 0$. La figura 1.11 (a) representa la curva de frecuencias de dicha variable para un elemento estructural. De acuerdo con dicha representación, la probabilidad de falla del elemento está dada por:

$$P_F = P \left| (R - Q) < 0 \right| \quad (1.8)$$

La figura 1.11 (b) ofrece una representación equivalente de seguridad estructural, en que se ha dibujado la curva de frecuencias del $\ln(R/Q)$. En este caso la probabilidad de falla es:

$$P_F = P \left| \ln \frac{R}{Q} < 0 \right| \quad (1.9)$$

Por medio de una serie de transformaciones se puede definir el índice de confiabilidad, β , que mide esta característica del elemento:

$$\beta = \frac{\left| \ln \frac{R}{Q} \right|_m}{\sigma_{\ln \left(\frac{R}{Q} \right)}} \quad (1.10)$$

cuyo significado físico se puede apreciar en la misma figura. Si se conociera la distribución probabilística de (R/Q) , β produciría directamente un valor de la probabilidad de falla. En la práctica tal distribución es desconocida y sólo se calculan los dos primeros momentos estadísticos de R y Q .

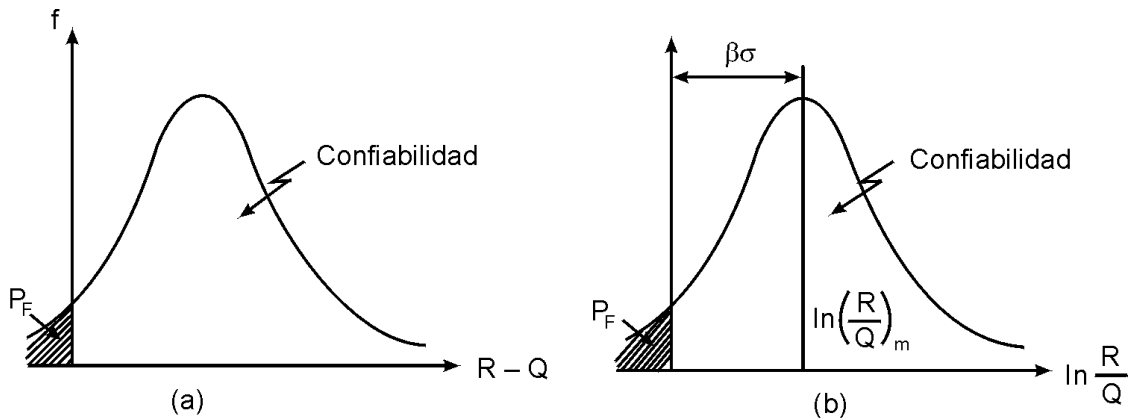


Figura 1.11 Modelo de Cornell: a) Curva de frecuencias de $R - Q$; b) Curva de frecuencias de $\ln(R/Q)$.

Al utilizar un modelo probabilístico de primer orden, β sólo puede dar una medida relativa de confiabilidad, pero un valor constante del índice de confiabilidad fija una confiabilidad constante para todos los elementos estructurales similares.

Vale la pena señalar que una de las formas de tener en cuenta la naturaleza de la falla es variando el índice de seguridad. MacGregor, por ejemplo, toma $\beta = 3.5$ cuando ésta es dúctil, mientras que para fallas frágiles aumenta dicho valor a 4.0 (referencia 1.23). Sin embargo, con el fin de independizar del material de construcción el lado derecho de la ecuación básica, se prefiere incorporar estas consideraciones en el coeficiente de reducción de capacidad.

El lector interesado podrá encontrar en las referencias 1.23 a 1.30 mayor información sobre la manera de aplicar el método. A continuación se explican someramente los factores que afectan ambos lados de la ecuación básica.

1.10.3.4 Resistencia y reducción de capacidad

La aleatoriedad de la resistencia verdadera, R , de un elemento estructural resulta de las variaciones inherentes a las propiedades mecánicas del material, a las tolerancias en las dimensiones con respecto a las nominales y a las incertidumbres en la teoría con que se evalúa matemáticamente su capacidad. En consecuencia la parte izquierda de la ecuación (1.7) se puede expresar, generalmente, como el producto:

$$R = \phi R_n = M F P R_n \tag{1.11}$$

en donde M , F y P son variables aleatorias que representan las diferencias debidas al material, a la fabricación y a las hipótesis de cálculo, o profesionales, respectivamente. En la referencia 1.25 se presentan programas de computador y gráficos que permiten determinar los coeficientes de resistencia, ϕ . Estos coeficientes se pueden determinar también con base en la ecuación:

$$\phi = (R_m/R_n) \exp(-0.55 \beta V_R) \quad (1.12)$$

en donde:

R_m = resistencia promedio

R_n = resistencia nominal de acuerdo con las fórmulas dadas en el código

V_R = coeficiente de variación de la resistencia

En el cuadro 1.3 se muestran algunos de los valores de ϕ prescritos para el diseño de miembros de concreto reforzado, y de acero con perfiles laminados en las *Normas NSR-98*.

Cuadro 1.3

Algunos coeficientes de reducción de capacidad ϕ establecidos en las Normas NSR-98

Solicitud	Estructuras de concreto reforzado	Estructuras de acero con perfiles laminados	
		Fluencia	Rotura
Flexión sin carga axial	0.90	0.90	0.75
Tensión axial con o sin flexión	0.90	0.90	0.75
Compresión axial, con o sin flexión:		0.85	
• Elementos con refuerzo en espiral	0.75		
• Elementos reforzados de otra manera	0.70		
Contacto o aplastamiento	0.70	0.75	
Corte y torsión	0.85	0.90	

Para poder incorporar en forma apropiada estos parámetros en nuestro código es urgente, como el autor manifestó hace ya cuatro lustros (referencia 1.24), adelantar las investigaciones respectivas en nuestro medio tanto para las estructuras de hormigón como para las de acero. Desde ese entonces en el país, Piñeros (referencia 1.26), Gómez (referencia 1.27) y Merchán (referencia 1.28), calcularon los valores de ϕ para algunas estructuras de concreto construidas en Bogotá. En estructuras de acero no sólo entran las variaciones dimensionales en los perfiles utilizados sino las tolerancias en los procesos de fabricación y montaje; Quiroga (referencia 1.29) hizo estudios de este tipo para ángulos y platinas de producción nacional. A su vez, Aragón (referencia 1.30) estudió la influencia de la fabricación en algunos edificios recientes construidos con estructura metálica en Bogotá.

1.10.3.5 Efecto de las cargas

Al plantear la ecuación de condición, se dijo que era necesario estudiar todas las combinaciones que exijan los estados límites especificados. Es bien sabido que la asignación de valores realistas a las cargas que tiene que soportar una estructura es quizás la fase menos precisa del diseño. En cada caso es necesario determinar tanto la carga de trabajo como el

coeficiente de mayoración correspondiente. Por limitaciones de espacio la discusión siguiente se limitará a las cargas gravitacionales muerta y viva, a las cargas sísmicas y a las de viento.

Cargas gravitacionales muerta y viva. La carga muerta se supone constante durante la vida de la estructura, mientras que la viva varía aleatoriamente en el espacio y en el tiempo. Generalmente se supone que las variables **D** y **L** de los códigos incluyen las incertidumbres asociadas con las hipótesis simplificadoras, en cuanto a magnitud y distribución. La carga muerta es más fácil de evaluar que la viva y usualmente se supone que su valor medio es el dado por el código de construcción.

La carga viva incluye todas las cargas gravitacionales no permanentes y presenta dos tipos de variación: en el espacio y en el tiempo. La primera se suele simplificar en el análisis, suponiendo que la carga está concentrada o distribuida uniformemente. En cuanto al segundo tipo de variación, conviene diferenciar entre la carga sostenida y la transeúnte o extraordinaria. La primera se define como aquella parte de la carga viva que está presente normalmente en la estructura como consecuencia de la actividad diaria que se desenvuelve en ella. La transeúnte o extraordinaria, en cambio, ocurre infrecuentemente y tiene alta intensidad y poca duración.

En el cuadro 1.1 se mostraron algunos valores de carga viva prescritos por diversos códigos de reconocido prestigio. Como puede apreciarse, hay casos en que presentan diferencias considerables.

Para calcular los coeficientes de carga se puede demostrar que dichos factores pueden expresarse, en forma aproximada, como sigue:

$$\gamma_D = \frac{D_m}{D} \exp(\alpha^2 \beta V_D) \quad (1.13)$$

$$\gamma_L = \frac{L_m}{L} \exp(\alpha^2 \beta V_L) \quad (1.14)$$

en donde α es un coeficiente de linealidad y V_D y V_L los coeficientes de variación de las cargas muerta y viva, respectivamente. Estos coeficientes de variación se evalúan utilizando las expresiones:

$$V_D = \sqrt{V_{SD}^2 + V_{ED}^2} \quad (1.15)$$

y

$$V_L = \sqrt{V_{SL}^2 + V_{EL}^2} \quad (1.16)$$

en donde la S se refiere a la carga sostenida y la E a un factor que tiene en cuenta las diferencias entre la estructura real tridimensional y el modelo matemático simplificado que se utiliza en el análisis.

En la referencia 1.24 se indican valores medios, desviaciones estándar y coeficientes de variación encontrados por diversos investigadores en países distintos de Colombia. Los

valores medios de las cargas vivas sostenidas son considerablemente menores (1/5 a 1/3) que los valores de trabajo estipulados en los códigos.

Hasta la fecha de dicho artículo (1979) el único trabajo al respecto realizado en nuestro medio, que el autor conocía, era el presentado por Sarria (referencia 1.32). Posteriormente, Tamayo (referencia 1.33), Dussán (referencia 1.34), Belalcázar (referencia 1.35), Coll (referencia 1.36) y Bettín (referencia 1.37) estudiaron las cargas vivas en las aulas de diez colegios y diez universidades. Aunque la muestra es muy pequeña para sacar conclusiones definitivas, su trabajo es importante como primer paso en una investigación de urgente necesidad. Es posible que se hayan hecho otros trabajos semejantes, pero infortunadamente no han tenido divulgación.

La mayoría de los códigos permiten reducir las cargas vivas cuando el área de influencia del elemento estructural y la carga viva estipulada son grandes.

No hay que olvidar que cuando la carga parcial de una estructura con la carga viva de diseño produce un efecto más desfavorable que cuando la carga se aplica en la totalidad de ella, esto debe tenerse en cuenta en el diseño.

Cargas de impacto. Hay casos, como el de los puentes y algunas estructuras industriales, en que las cargas vivas tienen carácter dinámico y ocasionan impacto. En general los efectos del mismo se tienen en cuenta incrementando tales cargas en determinados porcentajes. Los valores mínimos de esos incrementos están prescritos en las *Normas*. También hay que tener en cuenta las estructuras expuestas a excitaciones dinámicas producidas por el público tales como estadios, coliseos, teatros, pistas de baile, centros de reunión o similares.

Fuerzas sísmicas. Para evaluar las fuerzas que en caso de sismo actuarán sobre una edificación, es necesario tener en cuenta la amenaza sísmica propia de la región donde está localizada la edificación, los efectos locales asociados con las características del perfil del suelo sobre el cual está cimentada, la importancia de la edificación según su uso, el espectro elástico de diseño que da la máxima aceleración horizontal, expresada como un porcentaje de la gravedad a que se ve sometido un sistema de un grado de libertad con un período de vibración determinado, y la naturaleza del sistema o sistemas empleados para resistir tanto las cargas gravitacionales como las horizontales.

Fuerzas causadas por el viento. La amenaza eólica es también propia de cada región. Las fuerzas producidas por el viento sobre una estructura dependen de la velocidad del que actúa sobre ella, que a su vez varía con la altura sobre el piso; del grado de protección que le ofrecen la topografía y las edificaciones circundantes; y de las propiedades aerodinámicas de su perfil geométrico. Al evaluarlas también se tiene en cuenta el uso de la edificación al asignarle el grado de seguridad requerido.

1.10.3.6 Combinaciones de carga

Al diseñar una estructura es necesario tener en cuenta todas las combinaciones posibles de carga que puedan producir el efecto más desfavorable sobre cada uno de sus miembros.

Coefficientes de carga para estados límites últimos. Los coeficientes de carga asociados con cada tipo de fuerza, en las diversas combinaciones para el estudio de los estados límites últimos, reconocen el hecho de que cuando varias cargas actúan en combinación con la carga muerta, sólo una de ellas podría actuar con su valor máximo mientras que la otra u otras lo harían con un valor arbitrario de su variación con el tiempo. La referencia 1.38, por ejemplo, trae para las combinaciones de carga muerta y viva más viento la siguiente explicación al respecto. Con dichas cargas son apropiadas estas combinaciones:

$$\gamma_D D + \gamma_L L \tag{1.17}$$

$$\gamma_D D + \gamma_{L_a} L_a + \gamma_W W \tag{1.18}$$

$$\gamma_D D + \gamma_L L + \gamma_{W_a} W_a \tag{1.19}$$

en donde el subíndice “a” se refiere al valor de un punto arbitrario en el tiempo.

El valor medio de la carga viva en dicho punto, L_a , varía entre 0.24 y 0.40 de la carga viva máxima promedio en la vida útil de la estructura para muchas clases de ocupación, pero su dispersión es mucho mayor. Como punto arbitrario de carga de viento que actúa en combinación con la carga viva máxima se tomó el viento diario máximo; con este supuesto la combinación $\gamma_{W_a} W_a$ da una cantidad despreciable y por esto sólo quedan dos combinaciones:

$$1.2 D + 1.6 L \tag{1.20}$$

y

$$1.2 D + 0.5 L + 1.3 W \tag{1.21}$$

El valor de 0.5 asignado a L es un valor reducido del que correspondería a L_a con el fin de poder expresar el término respectivo en función de L, sin tener que calcular una carga adicional.

Coefficientes de carga para estados límites de servicio. La mayoría de los códigos de construcción fijan los coeficientes de carga y de resistencia para los estados límites últimos, puesto que las consideraciones de seguridad pública no pueden dejarse al criterio del diseñador.

Los estados límites de servicio, en cambio, tienen que ver más con la comodidad o con efectos de importancia secundaria, que pueden ser dejados al criterio individual. Normalmente la verificación de los estados límites de servicio se hace con coeficientes de carga iguales a 1.0 para las combinaciones de cargas gravitacionales; cuando dichas

cargas se combinan con viento o sismo, es posible emplear factores menores en algunos casos; el valor más común es 0.75, equivalente al 33% de sobreesfuerzo permitido en el diseño elástico.

Con esto se puede considerar cubierta la parte fundamental de las filosofías de diseño y la manera de formular un código probabilístico basado en el estudio de los estados límites. A continuación se presentará el tratamiento correspondiente, dado en las *Normas NSR-98*.

1.11 NORMAS COLOMBIANAS DE DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN SISMO RESISTENTE, NSR-98

La Ley 400 de 1997 establece criterios y requisitos mínimos para el diseño, construcción y supervisión técnica de edificaciones nuevas, así como de las indispensables para la recuperación de la comunidad con posterioridad a la ocurrencia de un sismo, que puedan verse sometidas a fuerzas sísmicas y otras fuerzas impuestas por la naturaleza o el uso, con el fin de que sean capaces de resistirlas, reduciendo a un mínimo el riesgo de pérdida de vidas humanas y defendiendo en lo posible el patrimonio del Estado y de los ciudadanos.

Esta ley fue reglamentada por el Decreto 33 de 1998 y en su conjunto constituyen las *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98*. Se espera que una edificación diseñada siguiendo los requisitos de estas *Normas* sea capaz de resistir, además de las fuerzas que le impone su uso, temblores de poca intensidad sin daño, temblores moderados sin daño estructural pero posiblemente con algún daño en elementos no estructurales y un temblor fuerte con daños a elementos estructurales y no estructurales, pero sin colapso que pueda ocasionar pérdida de vidas humanas. Adicionalmente, las líneas vitales de las construcciones indispensables del grupo de uso IV, que se define en las *Normas*, deben permanecer operativas en todos los casos.

Las *Normas* comprenden once títulos, cada uno de ellos dividido en capítulos. En el título A se presentan los requisitos generales de diseño y construcción sismo resistente; el B se refiere a cargas; el C cubre el concreto estructural; el D la mampostería estructural; el E las casas de uno y dos pisos; el F las estructuras metálicas y el G las de madera. En el H se consideran los aspectos geotécnicos; en el I la supervisión técnica; en el J los requisitos de protección contra el fuego, y finalmente el K cubre otros requisitos complementarios. En lo que sigue se presenta un resumen de los de carácter general que tienen que ver con el análisis estructural.

1.11.1 Título A - Requisitos generales de diseño y construcción sismo resistente

El título A de las *Normas* presenta los requisitos generales de diseño y construcción sismo resistente. Tiene que ver, entre otros temas, con la determinación de las zonas de amenaza sísmica, los movimientos sísmicos de diseño, los métodos permitidos para el análisis, las limitaciones en la deriva admisible y la interacción suelo-estructura. En seguida se presenta un resumen de algunos de ellos.

Amenaza sísmica. La amenaza sísmica propia de una región está asociada con una probabilidad de excedencia de un parámetro descriptivo del sismo. Para las *Normas NSR-98* se escogió la aceleración pico efectiva, A_a , definida para un nivel de amenaza tal que hay una probabilidad del 10% de que sea excedida en un lapso de 50 años. El período de retorno del sismo de diseño resulta ser, entonces, de 475 años. Tal definición la hace el ATC-3 en la referencia 1.39, documento que sirvió de modelo para la elaboración del Código Colombiano. Los mapas de las *NSR-98* fueron tomados de un nuevo estudio que incorpora toda la información recogida en los últimos diez años y corresponde a un catálogo de 11088 eventos sísmicos. También se profundizaron algunos aspectos, de manera que los nuevos mapas de amenaza sísmica están hechos con base en la tecnología más avanzada. Los mapas fueron preparados por la *Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS)*, en lo que ha sido reconocido una vez más como un excelente trabajo investigativo (referencia 1.40).

Es importante recalcar que las fuerzas sísmicas calculadas con base en este parámetro corresponden al nivel de resistencia última y por lo tanto ya incluyen el coeficiente de carga. Por eso las *Normas* advierten que al evaluar estados límites de servicio o diseñar por el método de los esfuerzos de trabajo, dichas fuerzas deben multiplicarse por 0.7, que aproximadamente corresponde al inverso de 1.4, o sea al coeficiente de mayoración prescrito por el ACI (referencia 1.41), para las combinaciones que incluyen sismo.

Por otra parte, a raíz de la magnitud de los daños en elementos no estructurales, ocurridos con sismos recientes de magnitud pequeña comparada con la del sismo de diseño, siguiendo la tendencia mundial se redujeron las derivas admisibles, y además de este sismo se incluye ahora un movimiento sísmico de servicio o de *umbral de daño*. Los efectos de este sismo tienen una probabilidad del 80% de ser excedidos en un lapso de quince años, lo cual conduce a un período promedio de retorno de diez años. Corresponde a un sismo de intensidad relativamente baja que no debe producir daños ni en los elementos estructurales, ni en los no estructurales, pero si llegaren a producirse en éstos, tales daños deben ser reparables y no deben interferir con el funcionamiento de la edificación.

El primer paso para el diseño sismo resistente de una edificación consiste en localizarla dentro de los mapas de zonificación sísmica dados en las *Normas*, que por comodidad se incluyen en el apéndice A de este texto. Con base en el mapa A.1.1 se determina el nivel de amenaza sísmica del lugar, que puede ser alta, intermedia o baja, y con el mapa A.1.2 el número de la región en donde está localizada la edificación. El valor de A_a se puede obtener para cada región con la tabla 1.1.

Adicionalmente, las *Normas* presentan en su tabla A.2-2 los valores de A_a para todas las capitales de departamento y en su apéndice A-3 los de todos los municipios del país. La primera de dichas tablas está reproducida también en el apéndice A de este texto.

El coeficiente que representa la aceleración pico esperada para el umbral de daño se representa por A_d y está incluido en el apéndice A-3 ya citado.

Tabla 1.1

Regiones de amenaza sísmica y aceleración pico efectiva correspondiente

Región N°	A_a	Amenaza sísmica
10	0.45	Alta
9	0.40	Alta
8	0.35	Alta
7	0.30	Alta
6	0.25	Alta
5	0.20	Intermedia
4	0.15	Intermedia
3	0.10	Baja
2	0.075	Baja
1	0.05	Baja

Efectos locales. Los efectos locales de la respuesta sísmica de la edificación se tienen en cuenta con un coeficiente S , llamado coeficiente de sitio, evaluado con base en los perfiles de suelo dados a continuación:

$S = 1$ para perfiles con las siguientes propiedades:

- a) compuesto hasta la superficie por roca de cualquier característica, que tiene una velocidad de la onda de cortante mayor o igual a 750 m/seg, o
- b) conformados entre la roca y la superficie por suelos duros o densos, con un espesor menor de 60 m, compuestos por depósitos estables de arenas, gravas o arcillas duras, con una velocidad de la onda de cortante mayor o igual a 400 m/seg.

$S = 1.2$ para perfiles con estas características:

- a) cuando entre la roca y la superficie existen más de 60 m de depósitos estables de suelos duros o densos, compuestos por arcillas duras o suelos no cohesivos, con una velocidad de la onda de cortante mayor o igual a 400 m/seg, o
- b) perfiles en donde entre la roca y la superficie existen menos de 60 m de depósitos estables de suelos de consistencia media, compuestos por materiales con una velocidad de la onda de cortante cuyo valor está entre 270 y 400 m/seg.

- S =1.5 cuando entre la roca y la superficie hay más de 20 m de suelo que contiene depósitos estables de arcillas cuya dureza varía entre mediana y blanda, con una velocidad de la onda de cortante entre 150 y 270 m/seg y que dentro de ellos, en conjunto, hay menos de 12 m de arcillas blandas.
- S =2.0 para perfiles en donde, dentro de los depósitos existentes entre la roca y la superficie, hay más de 12 m de arcillas blandas, caracterizadas por una velocidad de onda de cortante menor de 150 m/seg.

Las *Normas* advierten que los valores anteriores no pueden utilizarse cuando exista la posibilidad de que el depósito no sea estable. Por otra parte, cuando se hayan realizado estudios de microzonificación que cumplan las prescripciones pertinentes estipuladas en las mismas *Normas*, pueden utilizarse los resultados de éstos.

Coficiente de importancia. La importancia de la edificación se tiene en cuenta con un coeficiente I, de acuerdo con la siguiente clasificación:

- I = 1.3 para el denominado grupo IV, que comprende las instalaciones indispensables que deben funcionar durante y después de la ocurrencia del sismo, para atender la emergencia y preservar la salud y la seguridad de las personas, y además su operación no puede ser trasladada a otra edificación. Este grupo incluye hospitales, clínicas, centros de salud, estructuras que forman parte de los sistemas contra incendio de dichas instalaciones, así como las plantas de emergencia de las mismas y las edificaciones de las centrales telefónicas, de telecomunicación y de radiodifusión.
- I = 1.2 para el grupo III, que comprende las edificaciones de atención a la comunidad, indispensables después de un temblor para atender la emergencia y preservar la salud y la seguridad de las personas, exceptuando las incluidas en el grupo IV. En ellas se incluyen las estaciones de bomberos y de policía, los cuarteles y las sedes de las oficinas de prevención y atención de desastres, lo mismo que los garajes de vehículos de emergencia y los centros de atención de las mismas.
- I =1.1 para las construcciones del grupo II, en el cual están comprendidas aquellas en donde se puedan reunir más de 200 personas en un mismo salón, graderías al aire libre donde pueda haber más de 2000 personas a la vez, guarderías, escuelas, colegios, universidades, almacenes con más de 500 m² por piso, las edificaciones donde residan más de 3000 perso-

nas, los edificios gubernamentales y todas aquellas edificaciones en donde sus ocupantes estén restringidos en su movimiento o en donde pueda presentarse pánico general.

$I = 1.0$ para todas las edificaciones cubiertas por las *Normas*, pero que no pertenecen a ninguno de los grupos anteriores.

Espectro de diseño. Las *Normas* establecen que en el diseño se debe utilizar el espectro elástico de aceleraciones reproducido en la figura 1.12, que involucra un amortiguamiento crítico del 5%.

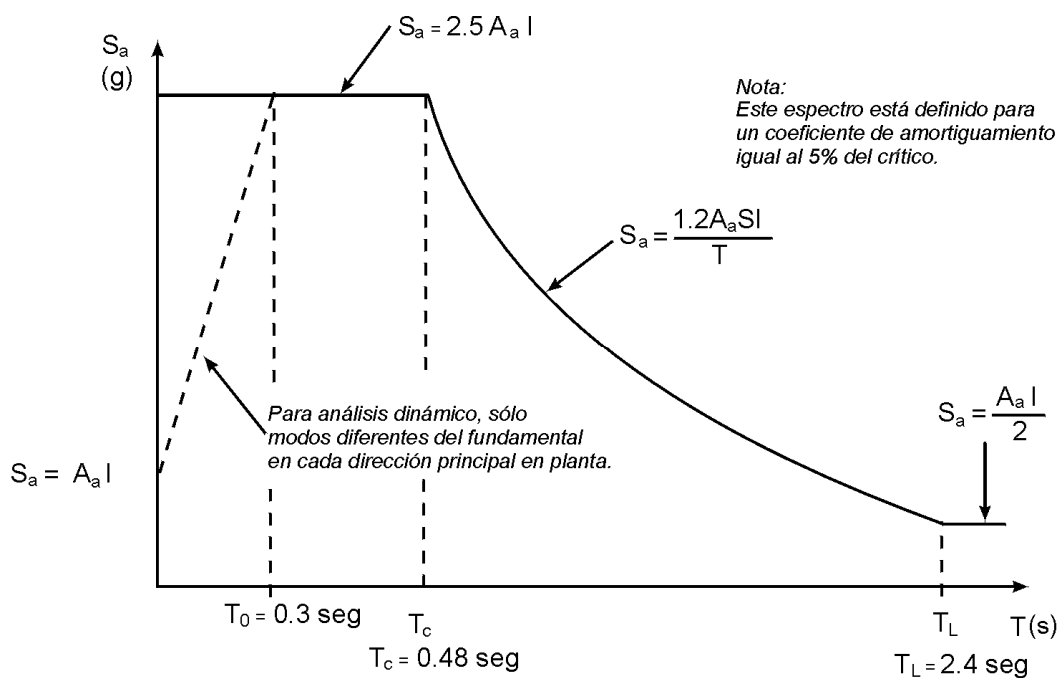


Figura 1.12 Espectro elástico de diseño (referencia 1.10).

Las *Normas* presentan otras alternativas de espectro de diseño para aquellos casos en que se utilice análisis dinámico, elástico o inelástico, que son dos de los métodos de análisis aceptados por ellas. También admite utilizar los resultados de estudios de microzonificación donde éstos existan.

Definición de las características estructurales y del material estructural empleado

El siguiente paso en el procedimiento es la escogencia de un sistema estructural y del material o materiales encargados de resistir las sollicitaciones. Comprende varias etapas, como se explica en seguida.

Capacidad de disipación de energía. Un aspecto fundamental en la obtención de una respuesta apropiada de la estructura al verse sometida a los efectos de un sismo es su capacidad de disipación de energía en el estado inelástico. Las *Normas NSR-98* contemplan tres niveles: especial (*DES*), moderada (*DMO*) y mínima (*DMI*). Para cada uno de los materiales estructurales se prescriben los requisitos de detallado de los miembros, en función de estas tres capacidades. La posibilidad de emplear miembros y sistemas estructurales depende entonces de la zona de amenaza sísmica y de la capacidad escogida de disipación de energía en el rango inelástico, así:

Capacidad de disipación de energía	Zona de amenaza sísmica		
	Baja	Intermedia	Alta
Mínima (DMI)	Permitido	No	No
Moderada (DMO)	Permitido	Permitido	No
Especial (DES)	Permitido	Permitido	Permitido

De acuerdo con esto, el diseñador decide entonces la capacidad de disipación de energía que va a utilizar.

Sistemas estructurales. Se reconocen cuatro tipos generales de sistemas estructurales de resistencia sísmica, llamados así: de muros de carga, combinado, de pórtico y dual. Para los fines de esta clasificación se entiende como muro de carga un muro estructural, continuo hasta la cimentación, que soporta principalmente cargas verticales. Como pórtico un conjunto de vigas, columnas y, en algunos casos, diagonales, todos ellos interconectados entre sí por medio de conexiones o nudos que pueden ser, o no, capaces de transmitir momentos flectores de un elemento a otro; dependiendo de sus características tiene diferentes denominaciones.

El *sistema de muros de carga* es un sistema estructural que no dispone de un pórtico esencialmente completo, en el cual las cargas verticales son resistidas por los muros de carga y las fuerzas horizontales por muros estructurales o pórticos con diagonales.

El *sistema combinado* es un sistema estructural, en el cual:

- a) Las cargas verticales son resistidas por un pórtico no resistente a momentos, esencialmente completo, y las fuerzas horizontales son resistidas por muros estructurales o pórticos con diagonales, o
- b) las cargas verticales y horizontales son resistidas por un pórtico resistente a momentos, esencialmente completo, combinado con muros estructurales o pórticos con diagonales, y que no cumple los requisitos de un sistema dual.

El *sistema de pórtico* es un sistema estructural compuesto por un pórtico espacial, resistente a momentos, esencialmente completo, sin diagonales, que resiste todas las cargas verticales y fuerzas horizontales.

El *sistema dual* es un sistema que tiene un pórtico espacial resistente a momentos y sin diagonales, combinado con muros estructurales o pórticos con diagonales. Este sistema debe cumplir los siguientes requisitos:

- a) El pórtico espacial sin diagonales, resistente a momentos y esencialmente completo debe ser capaz de soportar las cargas verticales.
- b) Las fuerzas horizontales son resistidas por la combinación de muros estructurales o pórticos con diagonales, con el pórtico resistente a momentos, el cual puede ser un pórtico de capacidad especial de disipación de energía (*DES*) cuando se trata de concreto reforzado o acero estructural, un pórtico con capacidad moderada de disipación de energía (*DMO*) de concreto reforzado, o un pórtico con capacidad mínima de disipación de energía (*DMI*) de acero estructural. El pórtico resistente a momentos, actuando independientemente, debe diseñarse para que sea capaz de resistir como mínimo el 25% del cortante sísmico en la base.
- c) Los dos sistemas deben diseñarse de tal manera que en conjunto sean capaces de resistir la totalidad del cortante sísmico en la base, en proporción a sus rigideces relativas, considerando la interacción del sistema dual en todos los niveles de la edificación, pero en ningún caso la responsabilidad de los muros estructurales o de los pórticos con diagonales puede ser menor del 75% del cortante sísmico en la base.

Materiales. Se tiene en cuenta ahora cuál de los materiales cubiertos por las *Normas* se va a emplear: concreto estructural, mampostería estructural, estructuras metálicas, madera o una combinación de ellos.

Grado de irregularidad de la estructura. Corresponde ahora analizar el grado de irregularidad de la edificación, tanto en planta como en alzado, para determinar los correspondientes coeficientes de reducción de capacidad de disipación de energía, ϕ_p y ϕ_a . Estos coeficientes afectan el valor del coeficiente básico de modificación de respuesta R_o , obtenido de diversas tablas según el sistema estructural empleado, para obtener el coeficiente de modificación de respuesta que se utiliza en el diseño, R , mediante la ecuación:

$$R = \phi_p \phi_a R_o \quad (1.22)$$

Las tablas de las *Normas* que especifican los valores de R_o indican además las zonas de amenaza sísmica donde se permite cada tipo de sistema estructural y las alturas máximas permitidas en cada caso. Los valores de R_o varían entre 1.0 y 8.0.

Obtención de las fuerzas sísmicas de diseño

Con toda la información anterior se obtienen entonces las fuerzas sísmicas de diseño por cualquiera de los métodos aceptados por las *Normas*. En ellas figuran específicamente los denominados: a) método de la fuerza horizontal equivalente, b) métodos de análisis dinámico elástico, c) métodos de análisis dinámico inelástico, y d) métodos de análisis alternos. Teniendo en cuenta las limitaciones de este texto se describirá únicamente el primero de ellos, que es el más sencillo, aunque tiene más restricciones en su aplicación.

Método de la fuerza horizontal equivalente. El método de la fuerza horizontal equivalente consiste fundamentalmente en reemplazar el efecto del sismo en un edificio por fuerzas horizontales equivalentes, aplicadas en los niveles de las placas, calculadas siguiendo los pasos indicados a continuación, de los cuales los tres primeros ya se explicaron y son válidos también para los métodos de análisis dinámicos:

1. Localícese la edificación en los mapas A.1.1 y A.1.2 del apéndice A; determínese el nivel de amenaza, y con la tabla A.2-2 o el apéndice A-3 de las *Normas*, la región a que pertenece y su aceleración pico efectiva A_a .
2. Con base en las características del perfil del suelo, determínese el coeficiente de sitio S .
3. Teniendo en cuenta el uso de la edificación, asígnesele el correspondiente coeficiente de importancia I .
4. Evalúese el período fundamental del edificio, T , bien sea a partir de las propiedades del sistema de resistencia sísmica del edificio en la dirección considerada, de acuerdo con los principios de la dinámica estructural, suponiendo un modelo linealmente elástico de la estructura y que ésta se halla empotrada en la base, o con las fórmulas aproximadas dadas luego.

Este requisito puede suplirse por medio del uso de la siguiente ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i \delta_i^2)}{\sum_{i=1}^n (f_i \delta_i)}} \quad (1.23)$$

En donde δ_i es el desplazamiento horizontal del nivel i con respecto a la base de la estructura, debido a las fuerzas horizontales f_i distribuidas de acuerdo con las ecuaciones (1.31) y (1.32), o utilizando cualquier otra distribución racional que se aproxime a la del modo fundamental de la estructura en la dirección del estudio. El valor calculado con esta ecuación estará limitado por $1.2 T_a$, donde T_a es el valor hallado con la fórmula aproximada apropiada, como sigue:

- a) El período fundamental aproximado, T_a , en segundos, puede calcularse por medio de:

$$T_a = C_t h_n^{3/4} \quad (1.24)$$

en donde h_n es la altura en metros, medida desde la base, de la placa de cubierta y C_t toma los siguientes valores:

0.08 para pórticos resistentes a momentos de concreto reforzado y para pórticos de acero estructural con diagonales excéntricas.

0.09 para pórticos resistentes a momentos de acero estructural.

0.05 para los otros tipos de sistemas de resistencia sísmica.

Es importante señalar que estas fórmulas aproximadas pueden no ser válidas para edificaciones no destinadas a vivienda u oficinas, como por ejemplo las cubiertas de bodegas o instalaciones industriales. En tales casos se debe utilizar la primera alternativa o ser conservador en el uso de la segunda.

- b) Alternativamente, el valor de C_t para estructuras que tengan muros estructurales de concreto reforzado o mampostería estructural puede calcularse por medio de la ecuación (A.4-3) de las *Normas*.
5. Calcúlese el valor del espectro elástico de aceleraciones de diseño para el valor de T encontrado en el paso anterior, utilizando la fórmula correspondiente obtenida de la figura 1.12.

Para períodos de vibración comprendidos entre T_C y T_L , S_a se define por medio de la siguiente fórmula:

$$S_a = \frac{1.2A_aSI}{T} \quad (1.25)$$

en donde:

S_a = máxima aceleración horizontal, expresada como un porcentaje de la gravedad, a que se ve sometido un sistema de un grado de libertad con un período de vibración T .

A_a = coeficiente de aceleración correspondiente a la aceleración pico esperada, obtenido en el paso 1.

S = coeficiente de sitio establecido en el paso 2.

I = coeficiente de importancia definido en el paso 3.

T = período de vibración del sistema, en segundos, calculado en el paso 4.

Los valores límites se calculan así:

$$T_c = (0.48S) \tag{1.26}$$

y

$$T_L = 2.40S \tag{1.27}$$

Para períodos de vibración menores que T_c , el valor de S_a puede limitarse al obtenido de la fórmula:

$$S_a = 2.5 A_a I \tag{1.28}$$

Por otra parte, para períodos de vibración mayores que T_L el valor de S_a no puede ser menor que el dado por la ecuación (1.29):

$$S_a = \frac{A_a I}{2} \tag{1.29}$$

6. El cortante sísmico en la base, V_s , equivalente a la totalidad de los efectos inerciales horizontales producidos por los movimientos sísmicos de diseño, en la dirección en estudio, se obtiene por medio de la siguiente ecuación:

$$V_s = S_a g M \tag{1.30}$$

en donde M es la masa total de la edificación, igual a la masa total de la estructura más la masa de aquellos elementos ligados permanentemente a ella, como muros divisorios, particiones, equipos permanentes, tanques y sus contenidos, etc. En depósitos o bodegas debe incluirse además un 25% de la carga viva del piso.

7. El corte anterior está constituido por fuerzas sísmicas horizontales, F_x , actuando en los niveles de las placas, de valor:

$$F_x = C_{vx} V_s \tag{1.31}$$

en donde:

$$C_{vx} = \frac{m_x h_x^k}{\sum_{i=1}^n (m_i h_i^k)} \tag{1.32}$$

y:

k = exponente relacionado con el período fundamental de la estructura de la siguiente manera:

1.0	para T menor o igual a 0.5 segundos
2.0	para T mayor de 2.5 segundos
$0.75 + 0.5T$	para T entre 0.5 y 2.5 segundos.

m_i, m_x = parte de M que está colocada en el nivel i o x respectivamente.

h_i, h_x = altura, medida desde la base, al nivel i o x .

Análisis de la estructura y diseño de los miembros estructurales

Con las fuerzas calculadas en el punto 7 anterior, se efectúa el análisis de la estructura mediante un modelo matemático linealmente elástico que represente adecuadamente sus características. En dicho análisis se encontrarán no sólo las fuerzas internas en todos los miembros sino también los desplazamientos de cada piso. Obsérvese que el análisis de la estructura se debe efectuar para los movimientos sísmicos de diseño, sin ser divididos por el coeficiente de capacidad de disipación de energía, **R**. Los desplazamientos máximos que imponen los movimientos sísmicos de diseño a la estructura obtenidos así deben sumarse a los causados por las fuerzas gravitacionales debidamente mayoradas, para verificar si las derivas máximas cumplen o no con los valores admisibles.

Deriva admisible. Con el objeto de limitar los daños en los elementos no estructurales, las *Normas NSR-98* limitan las derivas admisibles, entendidas como la diferencia entre los desplazamientos horizontales reales, en el intervalo inelástico, de dos niveles consecutivos a los porcentajes dados en la tabla 1.2.

Tabla 1.2
Derivas máximas como porcentaje de h_{pi}

Estructuras de:	Deriva máxima
Concreto reforzado, metálicas, madera y mampostería que cumpla requisitos especiales.	1.0%
Mampostería que no cumple dichos requisitos.	0.5%

Cuando se utilicen secciones fisuradas, tanto en concreto reforzado como en mampostería, las derivas pueden multiplicarse por 0.7 antes de hacer la comparación con los límites dados en dicha tabla.

Por otra parte, los efectos de las fuerzas sísmicas para efectos del diseño de los elementos que componen el sistema de resistencia sísmica se obtienen a partir de esas fuerzas internas divididas por el **R** apropiado. Este **R** a su vez, como ya se dijo, es el resultado de multiplicar los coeficientes **R_o** dados por las *Normas* para cada tipo de sistema estructural por coeficientes ϕ_p y ϕ_a , que tienen en cuenta los efectos de las irregularidades en planta y en alzado, respectivamente.

La razón de esto es facilitar el diseño de estructuras mixtas donde se empleen miembros de diversos materiales. Para el diseño de los miembros estructurales, las fuerzas internas causadas por el sismo y divididas por **R** deben sumarse a las fuerzas internas debidas a las otras cargas (muerta, viva, eólica, etc.), según las combinaciones prescritas por las *Normas*.

Naturalmente el proceso aquí descrito es sólo un breve resumen de un tema que requiere mucha atención y cuidado; el ingeniero, al diseñar, deberá referirse obligatoriamente a las *Normas*.

1.11.2 Título B - Cargas

El título B da los requisitos mínimos que deben cumplir las edificaciones en lo que respecta a cargas diferentes de las sísmicas, las combinaciones de carga que deben considerarse tanto en el diseño para estados límites, como por el método de esfuerzos admisibles, los coeficientes de reducción de la capacidad de miembros de concreto en estructuras mixtas, las cargas muertas y vivas, las debidas a empuje de tierra o presión hidrostática y las fuerzas eólicas. A continuación se describen algunos de estos temas.

Combinaciones de carga

Las combinaciones de carga prescritas dependen del método seguido en el análisis de la estructura. En seguida se presentan las combinaciones básicas exigidas por las NSR-98 para los diferentes casos.

Método de esfuerzos de trabajo o verificaciones del estado límite de servicio. Las combinaciones por estudiar son:

D	(B.2.3-1)
D + L	(B.2.3-2)
D + W	(B.2.3-3)
D + 0.7 E	(B.2.3-4)
D + L + W	(B.2.3-5)
D + L + 0.7 E	(B.2.3-6)

en donde D representa la carga muerta, L la viva, W las fuerzas eólicas y E las causadas por el sismo de diseño. Cuando la carga muerta reduzca la posibilidad de vuelco de la estructura, D irá multiplicada por 0.85.

En el caso de estructuras metálicas diseñadas por este método, en lugar de las ecuaciones (B.2.3-2) y (B.2.3-5) se usarán las siguientes:

D + L + (L _r o G)	(B.2.3-7)
D + L + (L _r o G) + W	(B.2.3-8)
D + L + (L _r o G) + 0.7 E	(B.2.3-9)

en donde L_r representa la carga viva sobre la cubierta y G la debida a lluvia y granizo, sin tener en cuenta la contribución del empozamiento.

Se hace énfasis en que las fuerzas sísmicas **E**, utilizadas en las combinaciones B.2.3-4, B.2.3-6 y B.2.3-9, corresponden a los movimientos sísmicos de diseño prescritos en el título A, divididos por **R**, cuando se trata de diseñar los miembros. Cuando dichas combinaciones se utilicen para verificar deflexiones en el estado límite de servicio, se omite tal división. Para edificaciones indispensables del grupo de uso IV, en vez de **E** deberán utilizarse las fuerzas calculadas con el sismo del umbral de daño **E_d** y un

coeficiente de carga igual a 1.0; en tal caso, en las combinaciones B.2.3-6 y B.2.3-9 puede emplearse un coeficiente de carga de 0.4 para la carga viva.

Estructuras de concreto o mampostería estructural, usando el método del estado límite de resistencia. Las Normas establecen que las estructuras de concreto o mampostería estructural, sus componentes y su cimentación deben diseñarse de tal manera que sus resistencias de diseño excedan los efectos de las cargas mayoradas, de acuerdo con las siguientes combinaciones básicas:

$1.4 D + 1.7 L$	(B.2.4-1)
$1.05 D + 1.28 L + 1.28 W$	(B.2.4-2)
$0.9 D + 1.3 W$	(B.2.4-3)
$1.05 D + 1.28 L + 1.0 E$	(B.2.4-4)
$0.9 D + 1.0 E$	(B.2.4-5)
$1.4 D + 1.7 L + 1.7 H$	(B.2.4-6)
$1.05 D + 1.28 L + 1.05 T$	(B.2.4-7)
$1.4 D + 1.4 T$	(B.2.4-8)

en donde T representa las fuerzas y efectos causados por expansión o contracción debida a cambios de temperatura, retracción de fraguado, flujo plástico, cambios de humedad, asentamientos diferenciales o combinación de varios de estos efectos.

Estructuras de acero y estructuras mixtas diseñadas para el estado límite de resistencia. Cuando para diseñar las estructuras de acero con perfiles laminados se siguen las prescripciones de los capítulos F.2 y F.3 y en el diseño de estructuras mixtas, conformadas por elementos tanto de acero estructural como de concreto reforzado, se deben estudiar las siguientes combinaciones básicas:

$1.4 D$	(B.2.5-1)
$1.2 D + 1.6 L + 0.5 (L_r \text{ o } G)$	(B.2.5-2)
$1.2 D + 1.6 (L_r \text{ o } G) + (0.5 L \text{ ó } 0.8 W)$	(B.2.5-3)
$1.2 D + 1.3 W + 0.5 L + 0.5 (L_r \text{ o } G)$	(B.2.5-4)
$1.2 D + 1.0 E + (0.5 L \text{ ó } 0.2 G)$	(B.2.5-5)
$0.9 D - (1.3 W \text{ ó } 1.0 E)$	(B.2.5-6)

De nuevo se hace énfasis en que las fuerzas sísmicas **E**, utilizadas en las combinaciones B.2.5-5 y B.2.5-6, corresponden a los movimientos sísmicos de diseño prescritos en el título A, divididos por **R**, cuando se trata de diseñar los miembros. Cuando dichas combinaciones se utilicen para evaluar las deflexiones inelásticas, se omite tal división.

Las estructuras hechas con miembros de acero formados en frío se diseñan con el capítulo F.4; para ellas en lugar de las combinaciones B.2.5-1 y B.2.5-3 se utilizarán las siguientes:

$1.4 D + L$	(B.2.5-7)
$1.2 D + (1.4 L_r \text{ ó } 1.6 G) + (0.5 L \text{ ó } 0.8 W)$	(B.2.5-8)

Estructuras de aluminio. Las estructuras de aluminio se diseñarán de tal manera que sus componentes y cimentación excedan los efectos de las cargas mayoradas estipuladas para las estructuras de acero. Los casos básicos correspondientes son las combinaciones B.2.5-1 a B.2.5-6.

En la tabla 1.3 se comparan las combinaciones de carga prescritas para las estructuras de concreto o mampostería estructural, con las estipuladas para las estructuras metálicas y las estructuras mixtas. Se espera que en un futuro próximo dichos coeficientes sean idénticos para todos los materiales. Para compensar lo anterior, en el caso de estructuras mixtas los elementos de concreto se deben diseñar con coeficientes de reducción de resistencia distintos de los prescritos en el título C.

Tabla 1.3
Comparación de las combinaciones de carga, según el material

Estructuras de concreto o mampostería estructural	Estructuras metálicas y mixtas
1.4D + 1.7L	1.4D
1.05D + 1.28L + 1.28W	1.2D + 1.6L + 0.5(L _r o R)
0.9D + 1.3W	1.2D + 1.6 (L _r o R) + [(0.5 ó 1.0) L ó 0.8W]
1.05D + 1.28L + 1.0E	1.2D + 1.3W + (0.5 ó 1.0) L + 0.5(L _r o R)
0.9D + 1.0E	1.2D + (0.5 ó 1.0) L + 1.5E
1.4D + 1.7L + 1.7H	0.9D – (1.3W ó 1.5E)
1.05D + 1.28L + 1.05T	Cuando F, H, P o T sean importantes,
1.4D + 1.4T	entrarán así: 1.3F, 1.6H, 1.2P y 1.2T

Cargas muertas

Para calcular las cargas muertas deben utilizarse las masas reales de los materiales. Las *Normas* permiten utilizar como guía los valores mínimos de las tablas B.1.1, B.1.2 y B.1.3, que para comodidad de los lectores se reproducen en el apéndice B.

En la tabla B.1.1 se dan los pesos unitarios por unidad de volumen de material. En la tabla B.1.2 se dan los pesos por unidad de superficie de productos industriales utilizados en cubiertas y entresijos. La carga muerta causada por las fachadas de la edificación se evaluará como una carga por metro lineal, sobre el elemento estructural de soporte al borde de la losa, o como una carga concentrada en el extremo exterior cuando se trate de elementos en voladizo; pueden emplearse los valores de la tabla B.1.3 como mínimos por metro cuadrado de área de fachada.

Para los materiales o productos no incluidos en estas tablas se utilizará el peso especificado por el fabricante o, a falta de éste, se evaluará analítica o experimentalmente.

Muros y particiones. En cuanto a los muros divisorios y particiones hechas con materiales tradicionales, cuando no hacen parte del sistema estructural, las *Normas* establecen que debe evaluarse su peso para cada piso, pudiéndose utilizar como carga distribuida en las placas. Cuando no se realice un análisis detallado pueden utilizarse 3.0 kN/m^2 de área de placa cuando sean muros de ladrillo hueco de arcilla o bloque hueco de concreto y 3.5 kN/m^2 de área de placa cuando se trate de muros de ladrillo macizo, tolete, de arcilla, concreto o silical. Estos valores corresponden a alturas libres de entrepiso de 2.20 m; para otras alturas se harán los ajustes correspondientes.

Lo mismo debe hacerse en el caso de muros divisorios y particiones livianas, en cuyo caso pueden emplearse los siguientes valores mínimos:

Divisiones móviles de media altura	0.50 kN/m^2
Lámina de yeso de 13 mm en cada costado y parales de acero o de madera	0.90 kN/m^2
Lámina de madera protegida y parales de madera, pañetado sobre malla	2.00 kN/m^2

Acabados. También debe evaluarse la carga producida por los acabados de los pisos. En terrazas y azoteas es necesario tener en cuenta los desniveles. Cuando no se realice un análisis detallado, las *Normas* permiten utilizar en pisos y terrazas 1.5 kN/m^2 .

Cargas vivas

Las cargas vivas son las producidas por el uso y ocupación de la edificación y no incluyen las debidas a fenómenos naturales, como viento o sismo. En el caso de las cubiertas son causadas por los materiales, equipos y trabajadores utilizados en su mantenimiento y por las personas que tengan acceso a ella. También se considera carga viva la debida a la acumulación de granizo.

Las cargas vivas que se utilicen en el diseño de la estructura deben ser las máximas cargas que pueden esperarse en la vida útil de la estructura a causa de su uso. En ningún caso pueden ser menores que las dadas en la tabla B.1.4.

Cubiertas. Las *Normas* establecen que, en el caso de estructuras con cubiertas de placa de concreto, ésta debe diseñarse para la misma carga viva que las de entrepiso en el resto de la edificación. En el diseño de estructuras metálicas suele influir considerablemente la carga viva supuesta para cubiertas. Naturalmente, ésta depende de las características de cada proyecto y, especialmente, del material de recubrimiento de la estructura. Las *Normas NSR-98* estipulan que en ningún caso podrá tomarse menos de 0.35 kN/m^2 , valor que resulta de repartir el peso promedio de una persona en un área de 2 m^2 . Además, prescriben 0.50 kN/m^2 cuando la pendiente es menor que 20%. Estos valores sólo se permiten cuando hay imposibilidad física de que la estructura de cubierta pueda estar sometida a cargas mayores.

Sin embargo, hay ocasiones en que es necesario considerar valores más altos, especialmente cuando para simplificar el análisis no se estudian los patrones de distribución de carga viva que producen respuestas máximas

Barandas y pasamanos. Las *Normas* también prescriben que las barandas y pasamanos de escaleras y balcones, tanto exteriores como interiores, y los antepechos, deben diseñarse para que resistan un empuje horizontal de 0.75 kN/m, aplicado en la parte superior de la baranda, pasamanos o antepecho. En el caso de teatros y tribunas se recomienda emplear 1 kN/m.

Se recuerda que cuando la carga parcial de un elemento con la carga viva de diseño produce un efecto más desfavorable que si la carga se aplica en la totalidad de la luz, esto debe tenerse en cuenta en el diseño.

Cargas de impacto

En puentes y en estructuras metálicas industriales es frecuente encontrar que las cargas vivas tienen carácter dinámico y ocasionan impacto. En general los efectos del mismo se toman en cuenta incrementando tales cargas en determinados porcentajes. Los valores mínimos de tales incrementos están prescritos en las respectivas *Normas*. Las correspondientes a estructuras metálicas se muestran en la tabla 1.4.

Tabla 1.4
Incremento mínimo de cargas vivas por causa de impacto (%)

Para soportes de elevadores	100
Para vigas de puentes grúas con cabina de operación y sus conexiones	25
Para vigas de puentes grúas operados por control remoto y sus conexiones	10
Para apoyos de maquinaria liviana, movida mediante motor eléctrico o por un eje	20
Para apoyos de maquinaria de émbolo o movida por motor de pistón, no menos de	50
Para tensores que sirvan de apoyo a pisos o balcones suspendidos y escaleras	33

Al diseñar las vigas carrilera de los puentes grúas, debe considerarse una fuerza horizontal equivalente a por lo menos el 20% de la suma de los pesos de la grúa y la carga levantada, pero sin que entre en la suma el peso de las partes estacionarias del puente grúa. Esta fuerza debe suponerse colocada en la parte superior de los rieles y en sentido perpendicular a ellos. Se repartirá entre las vigas de acuerdo con la rigidez lateral de la estructura que soporta los rieles. Se tomará en cuenta, además, una fuerza horizontal longitudinal, aplicada al tope del riel, igual al 10% de las cargas máximas de rueda de la grúa.

En el caso de las vigas de puentes grúas se utiliza la carga total móvil, o sea la de rueda, como base para evaluar la carga de impacto, pues el máximo se presenta cuando la grúa viaja con la carga levantada. No es necesario considerar dicho incremento al diseñar las columnas de apoyo de tales vigas porque sus efectos (incremento en excentricidad o en combadura) o no alcanzan a desarrollarse o resultan despreciables durante la corta duración del impacto.

Efectos dinámicos

Teniendo en cuenta el peligro que representan las vibraciones en espectáculos de multitudes, las *Normas NSR-98* prescriben que las estructuras expuestas a excitaciones dinámicas producidas por el público, tales como estadios, coliseos, teatros, gimnasios, pistas de baile, centros de reunión o similares, deben ser diseñadas de tal manera que tengan frecuencias superiores a 5 Hz, o sea períodos naturales menores de 0.2 seg, para vibraciones verticales.

Reducción de las cargas vivas

Las *Normas NSR-98*, como la mayoría de los códigos de construcción, permiten reducir las cargas vivas estipuladas en los cuadros anteriores, cuando el área de influencia del miembro estructural sea mayor o igual a 35 m² y la carga viva esté comprendida entre 1.80 kN/m² y 3.00 kN/m². Dicha reducción se hace utilizando la ecuación siguiente:

$$L = L_o \left[0.25 + \frac{4.6}{\sqrt{A_i}} \right] \quad (1.33)$$

en donde:

- L = carga viva reducida, en kN/ m².
- L_o = carga viva sin reducir, en kN/m².
- A_i = área de influencia del elemento, en m².

La máxima reducción permitida es del 50% de L_o en elementos que soportan un piso y del 60% en otros elementos. El área de influencia se considera igual a cuatro veces el área aferente para una columna, dos veces el área aferente para una viga y al área del panel para una losa armada en dos direcciones. Para columnas y vigas, equivale al área de los paneles de placa que tocan el elemento y debe tomarse así:

vigas centrales	A _i = área de dos paneles
vigas de borde	A _i = área de un panel
columnas centrales	A _i = área de cuatro paneles
columnas de borde	A _i = área de dos paneles
columnas de esquina	A _i = área de un panel

Para miembros que soportan más de un piso, deben sumarse las áreas de influencia de los diferentes pisos.

En edificios de cinco o más pisos, las *Normas* permiten utilizar como alternativa de reducción de la carga viva para efectos del diseño de las columnas y la cimentación, tomar la suma de las cargas vivas de cada piso multiplicadas por el coeficiente **r** correspondiente a ese piso:

$$\begin{array}{ll}
 r = 1.0 & \text{para } i \text{ desde } n \text{ hasta } n-4 \text{ (cinco pisos superiores)} \\
 r = 1.0 + 0.10 (i - n+4) & \text{para } i \text{ entre } n - 5 \text{ y } n - 8 \\
 r = 0.5 & \text{para } i \text{ de } n - 9 \text{ en adelante}
 \end{array}$$

en donde:

$$\begin{array}{l}
 n = \text{número de pisos del edificio} \\
 i = \text{número del piso donde se aplica el coeficiente } r
 \end{array}$$

Fuerzas de viento

Como ya se dijo, la amenaza eólica es también propia de cada región. El mapa de tal amenaza en Colombia fue elaborado por la empresa Consultoría Colombiana (referencia 1.42), con base en los registros de 113 estaciones, donde se señalan para un 65% del territorio nacional, las velocidades máximas de vientos con un período de retorno de 50 años, que es el parámetro básico utilizado comúnmente en los códigos modernos. Para ilustración de los lectores este mapa se reproduce en el apéndice B del presente texto. Es importante señalar que para estructuras livianas, como suelen ser algunas metálicas y las de madera, las fuerzas causadas por el viento pueden ser superiores a las sísmicas. Teniendo en cuenta esto, las *Normas* contemplan dos procedimientos, como se verá a continuación.

Análisis simple

Es válido cuando el viento no gobierna el diseño. La velocidad de aquél se obtiene del mapa de amenaza eólica mencionado antes. Además, se tiene en cuenta la variación de la densidad del aire con la altitud. La presión p sobre la superficie en cuestión, se calcula entonces así:

$$p = C_p q S_4 \quad (\text{B.6.4-1})$$

en donde C_p es un coeficiente de presión, estipulado en las tablas B.6.4-2 y B.6.4-3 de las *Normas*, y q la presión dinámica causada por el viento, que es función de su velocidad y de la altura del punto considerado sobre el nivel del terreno. Los valores de q están dados en la tabla B.6.4-1 de dicho documento, para velocidades entre 60 y 130 km/h y diversos intervalos de altura.

El coeficiente S_4 tiene en cuenta la densidad del aire y se obtiene de la tabla B.6.6. Varía entre 1.00 al nivel del mar y 0.69 a 3000 m de altitud. Para Bogotá es 0.72.

Para mayor comodidad de los lectores, las tablas citadas están reproducidas en el apéndice B.

Si con este análisis se ve que el viento no gobierna el diseño, el estudio se considera suficiente; en caso contrario, en que el viento sí gobierna, es necesario hacer el análisis más estricto que se explica en seguida.

Análisis completo

El análisis completo contempla cuatro pasos básicos, a saber:

1. Se busca la velocidad del viento básico, V , en el sitio de la construcción, utilizando el mapa de amenaza eólica.
2. La velocidad del viento de diseño, V_s , se obtiene multiplicando dicho valor por tres coeficientes, S_1 , S_2 y S_3 , que tienen en cuenta, respectivamente, la topografía; la rugosidad del terreno, el tamaño del edificio y su altura sobre el piso; y el grado de seguridad y la vida útil de la estructura. Esto es:

$$V_s = V S_1 S_2 S_3 \quad (\text{B.6.4-2})$$

Los valores de estos coeficientes están dados en las tablas B.6.5-1 y B.6.5-2, y en el artículo B.6.5.6 de las *Normas*.

3. La velocidad del viento de diseño se convierte a la presión dinámica, q , mediante la ecuación:

$$q = 0.0625 V_s^2 S_4 \quad (V_s \text{ en m/seg}) \quad (\text{B.6.4-3a})$$

en donde S_4 es el coeficiente ya visto que tiene en cuenta la influencia de la altitud (1.00 al nivel del mar; 0.73 a 2500 m).

4. Finalmente se multiplica dicha presión q por el coeficiente de presión apropiado, C_p , para obtener la presión p , ejercida sobre cualquier punto de la superficie del edificio:

En las tablas B.6.7-1 a B.6.7-9 de las *Normas* se presentan los valores de los coeficientes C_p para diversas configuraciones.

Las fuerzas calculadas con la presión p se multiplican entonces por los coeficientes de mayoración de cargas de viento de las ecuaciones (B.2.4) y (B.2.5) de las *Normas*, de acuerdo con el material y las diferentes combinaciones aplicables.

REFERENCIAS

- 1.1 White, R.N, Gergely, P. y Sexsmith, R. - *Structural Engineering*, Vols. 1 a 3, Wiley, 1972.
- 1.2 Leonhardt, F. *Structural Engineering and the Environment*, Bulletin International Association for Shell and Spatial Structures, No. 60, Vol. XVII-I, abril de 1976.
- 1.3 Cross, H. - *Ingenieros y las torres de marfil*, McGraw-Hill, 1971.
- 1.4 *Código Modelo CEB-FIP para estructuras de hormigón*, Comité Euro-Internacional del Hormigón, CEB, 1978.

- 1.5 Fernández Casado, C. - *Cálculo de arcos*, Dossat, 1955.
- 1.6 Kinney, J.S. - *Indeterminate Structural Analysis*, Addison-Wesley, 1957.
- 1.7 Torroja, E. - *Razón y ser de los tipos estructurales*, Instituto Eduardo Torroja, 1960.
- 1.8 Nervi, L. - *Aesthetics and Technology in Building*, Harvard University Press, 1965.
- 1.9 Bill, M. - *Robert Maillart*, Zurich, Verlag Girsberger, 1955.
- 1.10 *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente*, Ley 400 de 1997, Decreto 33 de 1988. Preparado por la Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS).
- 1.11 *Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings*. Monograph. Vol. CB, Council on Tall Buildings & Urban Habitat, Nueva York, American Society of Civil Engineers, 1978.
- 1.12 *Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes, CCP 200 - 94*. Preparado por la Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS), 1995.
- 1.13 Madsen, H.O., Krenk, S. & Lind, N.C. - *Methods of Structural Safety*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1986.
- 1.14 Cornell, C.A. - *Some Thoughts on Maximum Probable Loads and Structural Safety Insurance*, Memorando del Departamento de Ingeniería Civil del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) a los miembros del Comité de Seguridad Estructural de la ASCE, marzo de 1967.
- 1.15 *Standards for Design of Cold-Formed Members in Buildings CSAS-136*, Ontario, Canadian Standards Association, 1974, 1981.
- 1.16 Lind, N.C. - *The Design of Structural Design Norms*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 1, 1973, pp. 357-370.
- 1.17 *First Order Concepts for Design Codes*, Comité Europeen du Béton (CEB), Joint Committee on Structural Safety CEB-CECM-FIP-IABSE-RILEM, Bulletin No. 112, 1976.
- 1.18 *Common Unified Rules for Different Types of Construction and Materials*, Comité Europeen du Béton (CEB), Joint Committee on Structural Safety CEB-CECM-FIP-IABSE-IASS-RILEM, Bulletin No. 116E, 1976.
- 1.19 *Rationalisation of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes*, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA), Report No. 63, Londres, 1977.
- 1.20 *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures*, American National Standard ANSI A58.1-1982, American National Standards Institute, Nueva York, 1982.
- 1.21 *Load and Resistance Factor Design Specifications for Structural Steel Buildings*, Chicago, American Institute of Steel Construction (AISC), 1986.
- 1.22 Cornell, C.A. - *A Probability Based Structural Code*, Journal of American Concrete Institute (ACI), Vol. 66, No.12, diciembre de 1969.
- 1.23 MacGregor, J.G. - *Safety and Limit States for Reinforced Concrete*, Canadian Journal of Civil Engineering, No. 3, 1976.

- 1.24 Uribe, J. - *Diseño de estructuras de acero utilizando coeficientes de carga y de resistencia*, Memorias de las Terceras Jornadas Estructurales de la Ingeniería de Colombia, Bogotá, Sociedad Colombiana de Ingenieros, octubre de 1979.
- 1.25 Ellingwood, B., Galambos, T.V., MacGregor, J.G. y Cornell, C.A. - *A Probability-Based Load Criterion for Structural Design*, Civil Engineering, American Society of Civil Engineers (ASCE), julio de 1981.
- 1.26 Piñeros, M.F. - *Estudio probabilístico de los factores de seguridad para las construcciones de hormigón armado en Bogotá*. Tesis para obtener el título de Magíster en Ingeniería Civil, Bogotá, Universidad de los Andes, 1979.
- 1.27 Gómez, P.M. - *Análisis de los factores de sobrecarga y resistencia usados en el diseño de estructuras de hormigón – columnas*. Proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Civil, Bogotá, Universidad de los Andes, 1982.
- 1.28 Merchán, R.A. - *Determinación de los coeficientes de resistencia para columnas sometidas a carga axial y para vigas sometidas a flexión y corte, hechas en concreto reforzado*. – Proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Civil, Bogotá, Universidad de los Andes, 1990.
- 1.29 Quiroga, P.N. - *Control de calidad en estructuras de acero*. Tesis para obtener el título de Magíster en Ingeniería Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1990.
- 1.30 Aragón, J.A. - *Aseguramiento de la calidad en estructuras metálicas*. Proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Civil, Bogotá, Universidad de los Andes, 1995.
- 1.31 Uribe, J. - *Diseño para estados límites y su aplicabilidad al Código colombiano*. Memorias de la Reunión del Concreto 1988, Cartagena, ASOCRETO, agosto de 1988.
- 1.32 Sarria, A. - *Carga viva en edificios de Bogotá*, Memorias de las Segundas Jornadas Estructurales, Bogotá, Sociedad Colombiana de Ingenieros, octubre de 1977.
- 1.33 Tamayo, M. del P. - *Determinación de la carga viva de diseño y su factor de mayoración para aulas estudiantiles*. Tesis para obtener el título de Magíster en Ingeniero Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1988.
- 1.34 Dussán, L. - *Determinación de la carga viva de diseño y su factor de mayoración para aulas estudiantiles*, 2° estudio. Proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1989.
- 1.35 Belalcázar, A. - *Determinación de la carga viva de diseño y su factor de mayoración para aulas estudiantiles*, 3er. estudio. Proyecto de grado para obtener el título de Ingeniero Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1990.
- 1.36 Coll, J.J. - *Determinación de la carga viva de diseño y su factor de mayoración para aulas estudiantiles*, 4° estudio. Tesis para obtener el título de Magíster en Ingeniero Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1992.
- 1.37 Bettín, E.R. - *Determinación de la carga viva de diseño y su factor de mayoración para aulas estudiantiles*, 5° estudio. Tesis para obtener el título de Magíster en Ingeniero Civil, Profesor asesor: Jairo Uribe Escamilla, Bogotá, Universidad de los Andes, 1994.

- 1.38 Ravindra, M.K. y Galambos, T.V. - *Load and Resistance Factor Design for Steel*, ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 104, N° ST9, septiembre de 1979.
- 1.39 *Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Building*, ATC 3-06, Palo Alto, Applied Technology Council, 1978.
- 1.40 Alarcón, A. *et al.* - *Estudio general de amenaza sísmica de Colombia* - Comité AIS 300 - Amenaza Sísmica, Bogotá, Colombia, Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 1996.
- 1.41 *Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-95) and Commentary* - ACI 318 R-95, Detroit, American Concrete Institute, 1995.
- 1.42 *Información Meteorológica Básica para Diseño de Líneas de Transmisión*, Documento NE-86-02, Preliminar. Preparado por Consultoría Colombiana para Interconexión Eléctrica S.A., Bogotá, 1986.
- 1.43 Engel, H. - *Sistemas estructurales*, Blume, 1970.
- 1.44 Wittfoht, H. - *Puentes; ejemplos internacionales*, Gustavo Gili, 1975.
- 1.45 Billington, D.P. - *The Tower and the Bridge: The New Art of Structural Engineering*, Nueva York, Basic Books, Inc., 1983.
- 1.46 Kulterman, U. - *Kenso Tange: arquitectura y urbanismo, 1946-1969*, Gustavo Gili, 1970.
- 1.47 Pica, A. - *Pier Luigi Nervi*, Gustavo Gili, 1969.

2.1 DIVISIÓN GENERAL



fundamentalmente, el análisis de estructuras busca encontrar la forma que adquiere una estructura al ser sometida a cargas y los consecuentes esfuerzos a que se ven sometidos sus miembros.

Para lograr este objetivo se pueden utilizar métodos analíticos, numéricos, gráficos y experimentales.

En los primeros se comienza por la formulación de un modelo matemático al cual se le puedan aplicar los principios y leyes de la Teoría de estructuras, que se verán más adelante.

Cuando la solución matemática exacta del modelo es muy complicada o en muchos casos en que se utiliza el computador, se acude a métodos numéricos que permitan obtener la respuesta con suficiente aproximación y mucho menos trabajo.

En el análisis de estructuras metálicas era frecuente obtener las fuerzas internas en los elementos y los desplazamientos de los nudos, mediante métodos gráficos como los de Cremona y Williot-Mohr (referencia 1.6).

Finalmente, en especial cuando un modelo matemático adecuado es muy difícil de establecer, se puede recurrir al uso de modelos a escala de la estructura en cuestión. En algunos casos se utilizan materiales distintos del de la estructura verdadera, por ejemplo cartón, bronce o *plexiglass*. Para estructuras importantes, especialmente presas y cascarones, se prefiere emplear modelos de *microconcreto* o yeso. Este es un campo que ofrece enormes posibilidades en el futuro y que sólo se ha explotado incipientemente en nuestro medio.

2.2 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN. TEORÍAS ELÁSTICA, PLÁSTICA Y DE DEFLEXIÓN

Se dijo que el análisis de una estructura consiste en encontrar su posición deformada y las fuerzas internas de sus miembros. La prioridad que se dé en los métodos analíticos a una u otra incógnita, los divide en dos grandes grupos: los *Métodos de desplazamientos*, en que se empieza por averiguar éstos, y los *Métodos de fuerzas*, en que primero se averiguan las fuerzas internas y luego sí se calculan los desplazamientos.

Cuando la estructura es estáticamente indeterminada, generalmente se prefiere considerar

las reacciones o fuerzas internas en exceso como sistemas de carga adicionales que reciben el nombre de *redundantes*, y que actúan sobre una estructura modificada que sea estáticamente determinada. La equivalencia se logra mediante las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones de la nueva estructura con las de la estructura original. Este procedimiento, ilustrado en la figura 2.1, se puede usar siempre y cuando sea aplicable el principio que se enuncia en seguida.

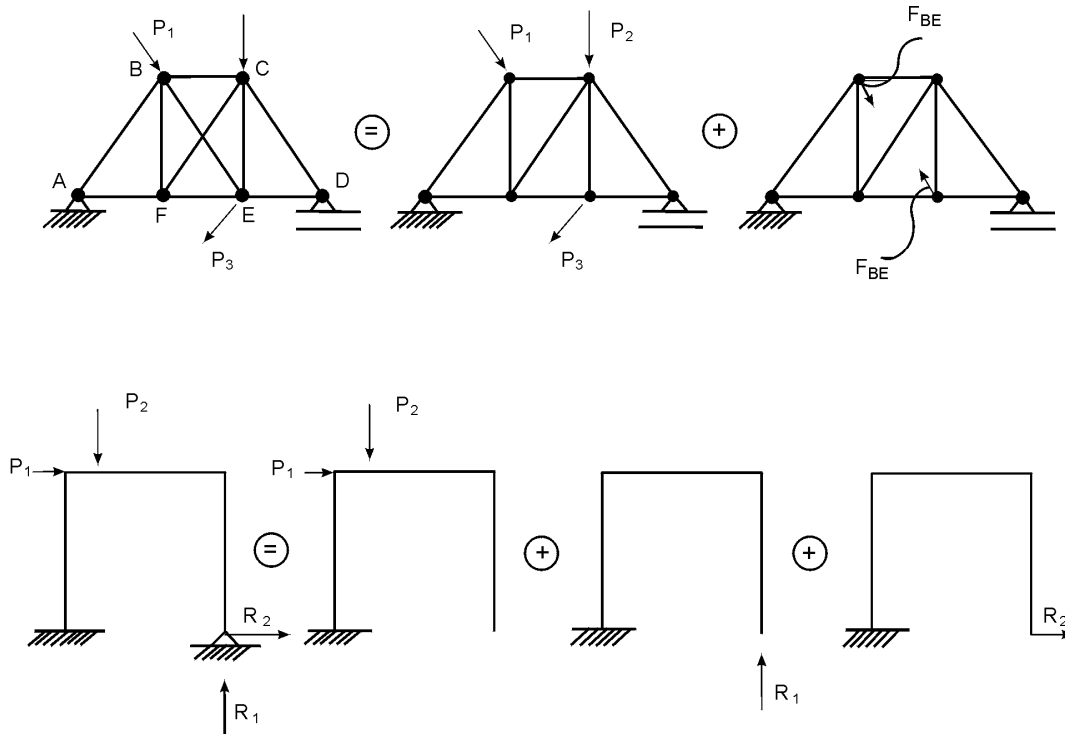


Figura 2.1 Aplicación del Principio de superposición.

Principio de superposición. Si los desplazamientos y esfuerzos en todos los puntos de una estructura son proporcionales a las cargas que los causan, los desplazamientos y los esfuerzos totales que resultan de la aplicación simultánea de varias cargas son la suma de los desplazamientos y esfuerzos causados por dichas cargas, aplicadas separadamente.

Según esto, para que se pueda aplicar la superposición es necesario que exista una relación lineal entre cargas, esfuerzos y deflexiones. Tal relación deja de ser lineal cuando las deformaciones en el material de que está hecha la estructura no son proporcionales a los esfuerzos, o sea cuando el material no sigue la Ley de Hooke, y cuando los cambios en geometría de la estructura al ser sometida a cargas y la naturaleza de éstas son tales que dichos cambios afectan las fuerzas internas en forma que no se puede despreciar. Esto ocurre por ejemplo en los elementos a flexocompresión, también llamados viga-columna, como el mostrado en la figura 2.2.

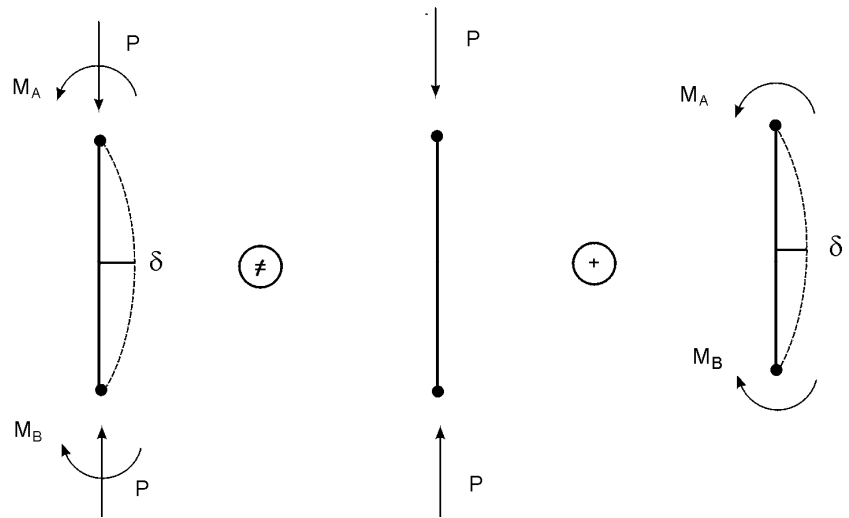


Figura 2.2 Ejemplo de no aplicabilidad del Principio de superposición.

Si sólo actuasen los momentos M_A y M_B , éstos producirían una deflexión δ_1 en cualquier punto; pero al aplicar P , en cada sección estará actuando un momento adicional igual a $P \times \delta_1$ que a su vez aumentará la deflexión, lo cual en turno incrementa el momento y así sucesivamente en un círculo vicioso.

Hay muchas estructuras en que las dos condiciones de aplicabilidad del Principio de superposición –relación lineal entre esfuerzos y deformaciones del material y la posibilidad de despreciar los cambios en geometría– se cumplen fielmente, pero en algunas sólo se cumple una u otra. Se requieren entonces diversos tratamientos que se cubren en las llamadas *Teoría elástica*, *Teoría plástica* y *Teoría de deflexión*.

Teoría elástica. La Teoría elástica comprende varios teoremas y métodos cuya validez depende de la aplicabilidad del Principio de superposición. En consecuencia, se supone que el material sigue la Ley de Hooke y que los esfuerzos de trabajo están por debajo del límite de proporcionalidad. En virtud del supuesto de que los cambios geométricos se pueden despreciar, el análisis se hace basándose en las dimensiones y formas originales de la estructura. Prácticamente todo lo cubierto en este texto se refiere a la Teoría elástica.

Teoría plástica. La Teoría plástica permite analizar el caso de no proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones del material, ya sea porque a ningún nivel existe linealidad, como en el caso del concreto, o porque se ha excedido el límite de proporcionalidad, en el caso del acero.

Teoría de deflexión. En la Teoría de deflexión se agrupan los métodos de análisis aplicables a aquellas estructuras en que no es posible despreciar los cambios geométricos producidos por las cargas, para evaluar las reacciones y fuerzas internas resultantes. En consecuencia, éstas se evalúan a partir de la situación deformada de la estructura, utilizando generalmente un proceso iterativo.

La Teoría de deflexión se ha desarrollado principalmente para el cálculo de puentes

colgantes, de cubiertas y de arcos. Como se indica en la figura 2.3, al tener en cuenta las deformaciones se obtienen fuerzas internas superiores a las encontradas mediante la Teoría elástica. La diferencia porcentual es aún mayor en arcos de dos articulaciones. Así, por ejemplo, en el *Puente del arco iris* de las cataratas del Niágara, citado por Kinney, el arco doblemente empotrado (construido) presentaba un incremento de momento en los cuartos de la luz del 18% que hacía subir los esfuerzos en un 7%, todos con respecto a los obtenidos por Teoría elástica. El mismo arco doblemente articulado presentaba incrementos del 64 y 29%, respectivamente. Si el puente se hubiera construido así, ignorar las deformaciones del arco habría implicado una disminución del factor de seguridad, de 1.87 a 1.30.

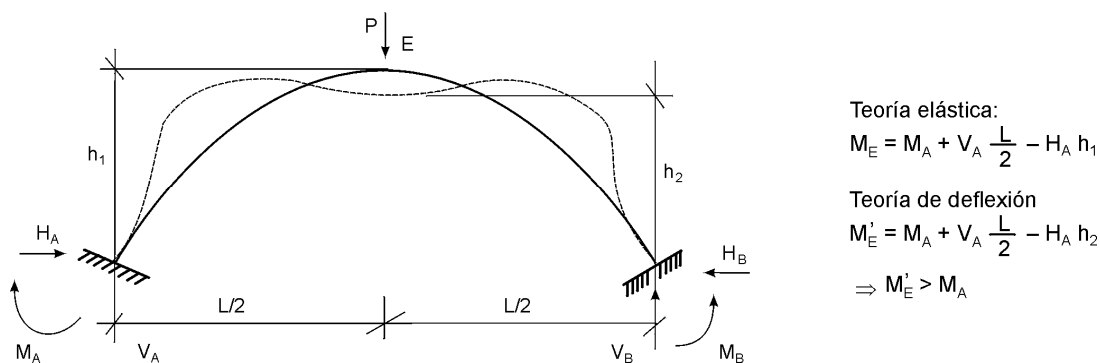


Figura 2.3 Momento en la clave de un arco doblemente empotrado.

2.3 CÁLCULO DE FUERZAS Y DEFLEXIONES EN ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE DETERMINADAS

Para poder garantizar que se cumple con el requisito de adecuada resistencia establecido en los objetivos de diseño, es preciso evaluar primero las fuerzas internas originadas en la estructura al aplicarle las cargas de diseño. Se mencionó que aun en el análisis de estructuras indeterminadas se suele comenzar por analizar una estructura modificada, que es estáticamente determinada. Parece apropiado entonces dejar muy en claro los métodos para encontrar las fuerzas en estas estructuras y posteriormente los que permiten evaluar sus deformaciones. Algunos de ellos se vieron ya en los cursos de Mecánica de sólidos, pero se incluyen aquí para completar el tratamiento del tema y facilitar su repaso.

Los cuadros 2.1 y 2.2 tomados de la referencia 2.1 son particularmente útiles para lograr una visión de conjunto. En lo que respecta a la evaluación de fuerzas, el alumno está familiarizado con los métodos 1, 2, 5, 6 y 7. De los tres restantes sólo se hará referencia al 8 al estudiar las llamadas *Líneas de influencia*. Un buen repaso de los métodos citados es prerequisite indispensable para acometer con éxito el estudio de los temas siguientes.

En el cuadro 2.2 se enlistan los métodos para calcular deflexiones. De nuevo el alumno encontrará que ya conoce los identificados con los números 2 a 6. Como algunos de ellos

son claves en la solución de estructuras indeterminadas, se repasarán sus principios antes de aplicarlos a éstas. Además, los capítulos 11 y 12 se dedicarán al estudio de los métodos matriciales.

2.4 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS INDETERMINADAS

Al observar el cuadro 2.3 se nota de inmediato la división en los dos grandes grupos ya mencionados.

- a) Métodos de fuerzas
- b) Métodos de desplazamientos

El grupo (a) comprende todos aquellos métodos cuyo objetivo inmediato es encontrar las fuerzas redundantes vistas atrás. Generalmente, los dos primeros se ven en los cursos de Mecánica de sólidos en sus aplicaciones más elementales, y aquí se extenderá su utilidad al caso de estructuras indeterminadas. Además se estudiarán los métodos 3 y 6, esto es, los basados en la ecuación de los tres momentos y en la matriz de flexibilidad.

En los métodos de desplazamientos, a diferencia de los anteriores, se empieza por encontrar las rotaciones y desplazamientos experimentados por los nudos de la estructura al verse sometida a cargas.

Se estudiarán los métodos 8, 9 y 11, es decir, los basados en las ecuaciones de ángulos de giro y deflexión, en distribución de momentos (Cross, Kani y Takabeya) y en la matriz de rigidez de la estructura considerada.

Vale la pena señalar que la mayoría de los programas comerciales utilizados hoy en día por los calculistas de estructuras, se basan en este último método.

REFERENCIAS

- 2.1 Gaylord, E.H. y Gaylord, C.N. - *Handbook of Structural Engineering*, McGraw- Hill, 1987.

Cuadro 2.1

Cálculo de fuerzas en estructuras estáticamente determinadas (referencia 2.1)

Método	Observaciones
Armaduras	
1. Método de los nudos	Aplicación de las ecuaciones $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ a cada nudo en sucesión. Generalmente se aplica sólo a armaduras planas.
2. Método de las secciones	Además de las ecuaciones anteriores se aplica $\sum M = 0$ a una parte de la estructura para obtener las fuerzas en las barras intersectadas por una sección adecuadamente escogida. Es muy útil cuando sólo interesa averiguar las fuerzas en unos pocos miembros.
3. Método de Cremona	Solución gráfica del método de los nudos.
4. Coeficientes de tensión	Sistematización del método 1, especialmente apropiada para armaduras complicadas y espaciales.
Vigas y marcos	
5. Integración matemática	Aplicación del cálculo integral a la obtención de fuerzas de corte y momento, partiendo de la ecuación de carga. En la mayoría de los casos el método siguiente es más apropiado.
6. Integración numérica	Generalmente es preferible al anterior, pues es más fácil de aplicar y conlleva la misma exactitud. Admite cargas arbitrariamente distribuidas sin mayores complicaciones.
7. Método de las secciones	Es el mismo método 2 pero aplicado a vigas. Resulta útil cuando sólo se buscan el corte y el momento en puntos específicos.
8. Líneas de influencia	Solución gráfica del corte y el momento a lo largo de la estructura. Especialmente útil en el estudio de estructuras sometidas a cargas móviles.

Cuadro 2.2
Cálculo de deflexiones de estructuras determinadas (referencia 2.1)

Método	Observaciones
<p>a) Cinemáticos</p> <p>Adición de vectores de deformación de los elementos</p> <p>1. Diagrama de Williot-Mohr</p> <p>2. Integración matemática de la ecuación de la viga</p> <p>3. Integración numérica de la ecuación de la viga.</p> <p>4. Área de momentos y viga conjugada.</p>	<p>Apropiados únicamente para estructuras que poseen una forma geométrica simple. En la práctica, restringidos casi por completo a armaduras y vigas.</p> <p>Adición gráfica de vectores para el estudio de desplazamientos en armaduras.</p> <p>Generalmente sólo es apropiado para problemas simples. No es conveniente en casos de inercia variable o carga arbitraria.</p> <p>Apropiado para cualquier variación de momento de inercia y de carga.</p> <p>Técnicas especiales para acelerar la solución de problemas particulares, basadas en resolver la ecuación de una viga por métodos indirectos.</p>
<p>b) Energéticos</p> <p>5. Carga unitaria</p> <p>6. Energía complementaria y Teorema de Castigliano</p> <p>7. Análisis matricial</p>	<p>Métodos generales aplicables a cualquier estructura y cualquier carga.</p> <p>El método general más útil para calcular la deflexión de cualquier estructura sometida a cualquier carga. Se le conoce también como método del trabajo virtual.</p> <p>La deflexión en el punto de aplicación de una carga, en la dirección de su línea de acción, se obtiene diferenciando la energía complementaria con respecto a la carga. El Teorema de Castigliano es el caso particular de linealidad y en su aplicación práctica es usualmente idéntico al de la carga unitaria.</p> <p>Método sistemático basado en el 5, para calcular la flexibilidad de la estructura. Requiere datos simples y es particularmente apropiado para resolver problemas que involucren gran número de hipótesis de carga.</p>

Cuadro 2.3
Análisis de estructuras indeterminadas (referencia 2.1)

Método	Observaciones
Métodos de fuerzas	Las fuerzas son las incógnitas.
1. Carga unitaria	Basado en el método 5 del cuadro 2.2.
2. Energía complementaria mínima y Teorema de Castigliano	La energía complementaria es minimizada con respecto a las fuerzas redundantes. El Teorema de Castigliano es el caso particular de linealidad
3. Ecuación de los tres momentos	Ecuación que relaciona los momentos en tres apoyos consecutivos de una viga continua.
4. Centro elástico	Técnica para escoger coordenadas de tal manera que se simplifique la formulación de las ecuaciones de pórticos y arcos.
5. Analogía de la columna	Analogía entre los momentos presentes en marcos y pórticos y los que ocurren en una columna corta cargada excéntrica.
6. Matriz de flexibilidad	Proceso sistemático basado en el método 1. Especialmente apropiado para estructuras altamente redundantes.
Métodos de desplazamientos	Los desplazamientos de los nudos libres son las incógnitas.
7. Desplazamiento unitario	Un desplazamiento unitario es aplicado a cada grado de libertad originando fuerzas internas. Éstas se igualan a las cargas aplicadas, resultando un sistema de ecuaciones para los desplazamientos.
8. Método de ángulos de giro y deflexión	Ecuaciones aplicables a pórticos, en términos de ángulos de giro y desplazamientos de los nudos.
9. Distribución de momentos (Cross, Kani y Takabeya)	Técnicas para resolver las ecuaciones del método 8 por aproximaciones sucesivas. Útiles para pórticos con muchos elementos.
10. Energía potencial mínima	Usado para obtener soluciones aproximadas de estructuras altamente redundantes en que los desplazamientos se pueden expresar por unos pocos términos de una serie.
11. Matriz de rigidez	Proceso sistemático basado en el método 7. Especialmente apropiado para estructuras en que la indeterminación cinemática es inferior a la estática.

“Si he podido ver un poco más allá que algunos otros, ha sido por estar parado en hombros de gigantes”.

Isaac Newton



on la frase anterior, Newton reconoció todo lo que debía a los grandes hombres de ciencia que lo precedieron (referencia 1.6). Antes de enunciar las leyes y principios que constituyen la Teoría estructural actual, conviene entonces hacer un recuento del largo camino recorrido por el hombre para llegar a ella.

3.1 RECUESTO HISTÓRICO

Este recuento histórico es básicamente un compendio del dado por Kinney (referencia 1.6). Seguramente los primeros desarrollos estructurales tuvieron que ver con la construcción de viviendas del hombre primitivo. Parece que las primeras construcciones conocidas son las viviendas lacustres de algunos lagos suizos (referencia 3.1), que se remontan al período paleolítico. Posteriormente debió inventar las seis primeras máquinas simples, a saber: el plano inclinado con sus dos variantes: la cuña y el tornillo, y la palanca con sus dos derivadas: la polea y la rueda con eje. La única máquina simple que no conoció el hombre primitivo fue la prensa hidráulica, inventada por Pascal en 1620.

Los primeros registros de ingeniería estructural datan del imperio antiguo de Egipto, aunque por la misma época había muestras de ella en los valles del Tigris y el Éufrates. Posiblemente el primer ingeniero de estructuras de la historia fue el egipcio Imhotep, uno de los pocos plebeyos deificados durante la larga historia de Egipto. Construyó la pirámide escalonada de Zoser (III dinastía) en Saggarah, hacia el año 3000 a.C., que constituye el punto de partida para las sepulturas propiamente piramidales del tipo de Gizeh. Además desarrollaron otro tipo de tumbas y templos en los que prácticamente sólo utilizaban como elementos estructurales vigas y columnas. En todo su territorio apenas se ha encontrado un arco verdadero, construido alrededor del año 1500 a.C.

Por la misma época los asirios y los persas desarrollaron sus propios métodos de construcción, en los que utilizaban vigas, columnas y arcos. Infortunadamente, en su mayor parte las construcciones estaban hechas de adobe y ladrillo, y no resistieron el paso del tiempo.

De lo anterior se desprende que por el año 600 a.C. la construcción pesada ya se había desarrollado, aunque todavía no se contaba con ningún método racional de análisis, ni siquiera para una viga simple.

En el año 350 a.C. Aristóteles escribió un libro sobre máquinas, por lo cual debe mencionarse en toda historia de mecánica estructural; pero el más grande de los griegos en este campo fue Arquímedes (287-212 a.C.), cuyo tratado *Sobre el equilibrio* lo acredita como fundador de la estática. Los templos griegos son ejemplos espléndidos del uso de columnas y vigas de piedra como elementos estructurales principales, pero no presentan ningún nuevo desarrollo.

Aunque los romanos hicieron progresar la ciencia mucho menos que los griegos, en el campo de la ingeniería se destacaron en forma sorprendente y aquellas de sus estructuras que han llegado hasta nosotros no pueden menos que despertar nuestra admiración. Parece que eran primordialmente constructores y adquirieron gran habilidad en la utilización de ciertas formas estructurales, como el arco, aunque aparentemente tenían poco conocimiento sobre cómo analizarlas. La necesidad de movilizar con rapidez sus ejércitos, dada la extensión del imperio, los motivó para desarrollar su extraordinaria capacidad de construcción de puentes. El de César sobre el Rin medía más de 500 m y se dice que fue construido sobre pilotes en diez días. El puente de Trajano, sobre el Danubio, construido en el 104 de nuestra era, fue el puente más largo del imperio romano con una longitud total de 1200 m, lograda mediante 20 arcos de madera. También son famosos sus puentes y acueductos con arcos de piedra como el *Pont du Gard* y el de Segovia, y sus domos de mampostería, entre los cuales se destacan los que cubren el Panteón de Roma y la catedral de Santa Sofía en Estambul, construida hacia el año 563.

A pesar del declinamiento experimentado en Europa durante el medioevo, el avance estructural continuó con el desarrollo de las bóvedas de arista por los constructores románicos (500-1000) y de las bóvedas de crucería y arcos ojivales, logrado por la arquitectura gótica (1200-1492).

Al comenzar el Renacimiento, hace su aparición Leonardo da Vinci (1452-1519), quien además de ser el primer artista de su tiempo fue también un gran científico e ingeniero. Al establecer la ley de la palanca introdujo el concepto de momento de una fuerza y en sus escritos prácticamente fijó el principio que se conoce hoy como la tercera ley de Newton. También se deduce de ellos que entendía muy bien ciertos fundamentos del comportamiento de los materiales estructurales, así que su trabajo en este campo parece ser el verdadero comienzo del desarrollo de la teoría estructural, pero por no haber recibido suficiente publicidad, es a Galileo (1564-1642) a quien se le acredita el origen de la mecánica de materiales, pues en su última publicación, *Dos nuevas ciencias* (1638), fue el primero en discutir la resistencia de ciertos elementos estructurales, incluyendo el caso de la viga en voladizo.

Cabe anotar que un poco antes Andrea Palladio (1518-1580), arquitecto italiano, utilizó armaduras por primera vez, aunque no basaba sus diseños en ningún análisis racional. Hasta entonces sólo se utilizaban como tipos estructurales la columna, la viga, el arco y el

domo. Sin embargo, debieron transcurrir casi dos siglos para que otro hombre reconociera la potencialidad de las armaduras.

También debe mencionarse a Simón Stevin (1548-1620), notable ingeniero holandés, autor de un libro publicado en 1586 sobre estática e hidrostática, del cual se desprende que comprendía la composición y resolución de fuerzas, pues introdujo el principio del triángulo de fuerzas.

Sin embargo, como ya se dijo, fue Galileo quien llamó la atención sobre la existencia e importancia de la mecánica de materiales y aunque su solución del problema de la viga en voladizo es errada, es interesante anotar que le proporcionaba la relación correcta de las resistencias de dos vigas de secciones transversales similares. Norris (referencia 3.1) anota también que, tanto Galileo como Da Vinci, estaban más preocupados por averiguar resistencias que por determinar esfuerzos y deformaciones causados por cargas inferiores a la de falla y que desafortunadamente esta prioridad fue invertida por los tratadistas posteriores, llegándose así al desbalance que existe actualmente entre lo que se conoce sobre comportamiento elástico y lo que se sabe sobre comportamiento último o resistencia real de las estructuras.

En 1635 nació Robert Hooke, quien además de enseñar geometría fue el topógrafo oficial de la ciudad de Londres. Fue asistente de laboratorio de Robert Boyle, quien no le dio el crédito que merecía por sus logros. Esto lo hizo amargado y suspicaz y por eso, aunque desde 1660 en sus estudios de elasticidad había descubierto la ley que ahora lleva su nombre, sólo la publicó en 1667 e incluso en forma de anagrama *ceiinnosssttuu*, cuya solución dio en 1678: *Ut tensio sic vis*.

Hooke no aplicó su ley a problemas de ingeniería, pero en 1680 E. Mariotte hizo un anuncio independiente de la misma ley y la aplicó a las fibras de una viga, concluyendo de los resultados experimentales que las fibras situadas a media altura de la viga no experimentaban ninguna deformación, mientras que todas las otras sufrían alargamientos o acortamientos.

Isaac Newton (1642-1727) publicó en 1687 su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, el libro científico más importante de todos los tiempos. Era sumamente modesto y agradecido, como lo demuestra la frase con que se inició este capítulo.

Posteriormente se destacaron James Bernouilli (1654-1705), quien fue el primero en suponer que las secciones planas de una viga permanecen planas durante la flexión; su hermano Johann (1667-1748), quien enunció en 1717 el principio de las velocidades virtuales, base del método más general aplicable al cálculo de deflexiones elásticas, y un hijo de Johann, Daniel (1700-1782), quien obtuvo una ecuación diferencial aplicable a las vibraciones transversales de una barra e interesó a su amigo Leonhard Euler (1707-1783) en el problema de determinar la deformada o *curva elástica* de vigas y columnas, sugiriéndole que la forma verdadera debería ser la que produjera un trabajo interno mínimo. Con esta base, Euler llegó a su valiosa contribución sobre el pandeo elástico de columnas.

Por la misma época otro suizo, Ulrich Grubenmann, comprendió el valor de las armaduras empleadas 200 años atrás por Palladio y tendió sobre el Rin una armadura de madera con luz de 50 m y más tarde, en asocio de su hermano Jean, construyó otra de 120 m. Sin embargo, sus diseños eran empíricos.

Coulomb (1736-1806) es considerado con Navier (1785-1836) cofundador de la mecánica de materiales como ciencia. En 1776 publicó el primer análisis correcto de los esfuerzos en una viga de sección rectangular y al mismo tiempo su teoría del empuje de tierra sobre un muro de contención. Ocho años después estableció una teoría para la torsión de ejes.

Navier, por su parte, publicó en 1826 la primera edición de sus *Lecciones*, que constituyó el primer gran texto de mecánica estructural. No sólo analizaba en él la resistencia y deflexión de vigas de cualquier sección transversal, sino también arcos, columnas con carga excéntrica, puentes colgantes y otros problemas técnicos.

Como la Teoría estructural no podía desarrollarse mientras no se hubieran establecido los principios básicos que gobiernan el comportamiento de los materiales, varios ingenieros notables se dedicaron al estudio de la Teoría de la elasticidad. Entre ellos se debe citar a Lamé (1795-1870), Clapeyron (1799-1864) y Saint-Venant (1797-1886). Los dos primeros publicaron, en 1833, un artículo con el importante principio de igualdad de trabajos externo e interno en una estructura deformada, debido a Clapeyron. En 1852 Lamé publicó el primer libro sobre elasticidad y en 1857 Clapeyron presentó su *Teorema de los tres momentos*, para el análisis de vigas continuas, uno de los tópicos que se verán más adelante.

Saint-Venant fue quizás el mejor de todos, presentando en 1855 unas memorias famosas sobre torsión y en 1856 otras relacionadas con flexión, en las cuales, por primera vez, se consideraban correctamente los esfuerzos cortantes de las vigas.

Por ese entonces un norteamericano, Squire Whipple (1804-1888), publicó su valioso tratado *Construcción de puentes*, presentando por primera vez un análisis racional de las armaduras articuladas, tipo estructural muy utilizado en los Estados Unidos a partir de la guerra de independencia.

Una vez establecidos los principios básicos, la teoría de estructuras se desarrolló a velocidad impresionante. Fueron tantos los contribuyentes a dicho desarrollo que aquí sólo se pueden mencionar los más importantes.

Bresse, ingeniero francés, publicó en 1859 un tratado muy útil para analizar vigas curvas y arcos. Un año antes, Rankine (1820-1872) publicó el primer libro en inglés sobre mecánica aplicada, que tuvo 20 ediciones, la última en 1919.

Maxwell (1830-1879) fue el primero en publicar, en 1864, un aporte significativo al análisis de estructuras indeterminadas. Estableció el *Teorema de las deflexiones recíprocas*, generalizado más tarde (1872) por Betti, y un método gráfico para encontrar las fuerzas internas de las armaduras, extendido posteriormente por Cremona.

En 1863, Ritter publicó el *Método de las secciones* para el análisis de armaduras y en 1867 Winkler introdujo el concepto de *línea de influencia*, cuyo uso se facilitó más tarde con el principio establecido por Müller - Breslau (1851-1925).

En 1866, Culmann (1821-1881) publicó un libro de mecánica estructural en el que prácticamente nació la grafostática como medio efectivo de análisis estructural.

Mohr (1835-1918) hizo contribuciones muy importantes como el método de la viga conjugada y una corrección al diagrama de Williot, método semigráfico para determinar deflexiones de estructuras articuladas. Además fue el precursor del método de ángulos de giro y deflexión, pues lo aplicó al análisis de esfuerzos secundarios.

Castigliano (1847-1884), además de proporcionar sus famosos teoremas, tuvo el mérito

de publicar en 1879 un libro notable por su originalidad y facilidad de comprensión, si se lo compara con los trabajos previos de Maxwell y Mohr.

Carus Wilson contribuyó al desarrollo de la fotoelasticidad como método para determinar esfuerzos con la publicación, en 1891, de un estudio sobre esfuerzos en vigas, y Maney en 1915 estableció el *método de ángulos de giro y deflexión* en la forma que se verá después. Ostenfeld contribuyó a su difusión y a la de los *métodos de desplazamientos* con un libro publicado en 1926.

Aunque el método de *ángulos de giro y deflexión* es fácilmente aplicable a toda clase de pórticos indeterminados, tenía el grave inconveniente de resultar en sistemas de ecuaciones que involucran un gran número de incógnitas, con la consecuente dificultad de resolución manual. Este problema fue obviado por Hardy Cross, quien en 1924 empezó a enseñar a sus alumnos un método de *distribución de momentos*, publicado en 1930, que revolucionó el análisis de estructuras aperticadas y ha sido considerada la contribución simple más importante hecha por cualquier individuo al desarrollo de la ingeniería estructural. Independientemente, Southwell desarrolló su *método de relajación* (1935), sobre bases similares. Procedimientos análogos fueron presentados por Kani y Takabeya, orientados principalmente hacia los entramados ortogonales de uso corriente en edificios de muchos pisos.

Cuando el libro de Kinney estaba en prensa (1956), apareció un artículo de Turner, Clough, Martin y Topp, que puede señalarse como el comienzo de la aplicación a estructuras civiles de los métodos denominados *matriciales*, que hoy en día han alcanzado un auge extraordinario gracias a los avances y facilidad de utilización de las computadoras digitales. La etapa más avanzada de los mismos es la de *análisis por elementos finitos*, la herramienta más poderosa con que se cuenta para el análisis sistemático de todo tipo de estructuras. Entre quienes más contribuyeron a su desarrollo pueden citarse Clough, Wilson, Gallagher y Zienkiewicz, sin pretender que esta lista sea completa.

Con esto queda cubierto el recuento histórico que se pretendía. Si se ha incluido aquí, es por creer con Kinney que puede servir para *ampliar el interés, mejorar la visión y engendrar orgullo profesional en el estudiante*, pues como dijo Aristóteles:

Quien considere las cosas en su origen y primer crecimiento... obtendrá la más clara visión de ellas.

En los artículos siguientes se presentan los diversos principios y teoremas, ya mencionados, que constituyen la base de la Teoría de estructuras.

3.2 PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

El *Principio de los desplazamientos virtuales* fue establecido por Johann Bernouilli en 1717 y constituye la base del *Método del trabajo virtual*, el más versátil de los métodos comunes para calcular deflexiones de estructuras.

Se define como desplazamiento virtual *un desplazamiento hipotético, finito o infinitesimal, de un punto o sistema de puntos de un cuerpo rígido en equilibrio, de naturaleza tal que no se violen las condiciones de equilibrio del cuerpo.*

Es importante anotar que siempre se considera que los desplazamientos virtuales son

producidos por causas diferentes de las fuerzas que mantienen el cuerpo en equilibrio; en consecuencia se considera que éstas ya tienen su valor final al ocurrir los desplazamientos virtuales. Por la definición de trabajo, el *trabajo virtual* hecho por dichas fuerzas al efectuarse los desplazamientos virtuales está dado por la suma de los productos de cada fuerza por el desplazamiento en su línea de acción.

Para demostrar el *Principio de los desplazamientos virtuales* se utilizará el de superposición, considerando primero el caso de una translación y después el de la rotación, como se ilustra en la figura 3.1 que representa un cuerpo rígido en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas F y momentos M .

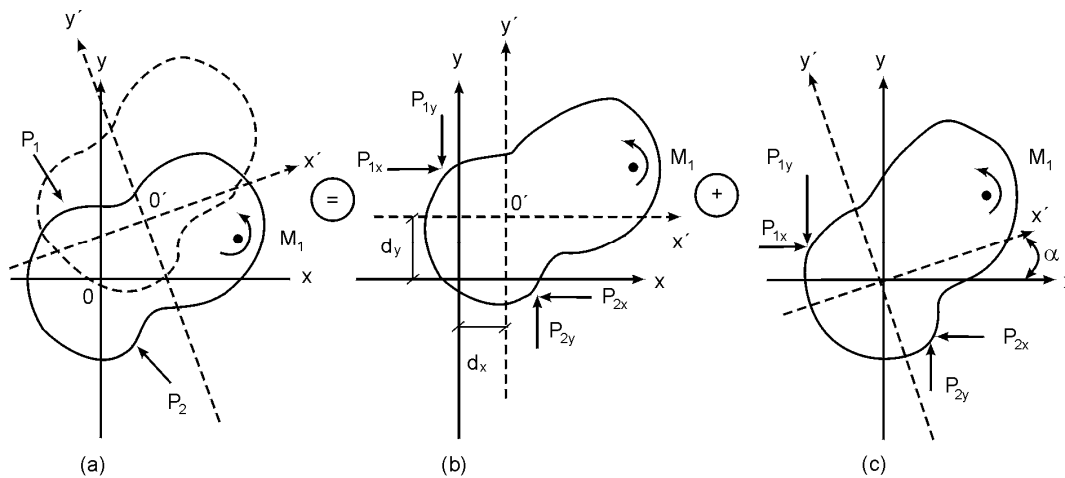


Figura 3.1 Aplicación del Principio de superposición a desplazamientos virtuales.

Para mayor facilidad las fuerzas se reemplazan por sus componentes y como el cuerpo está en equilibrio se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0 \\ \sum P_y &= 0 \\ \sum M + \sum P_x(y) + \sum P_y(x) &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

El trabajo hecho por las fuerzas y momentos durante la translación, W_t , está dado por

$$W_t = \sum P_x(dx) + \sum P_y(dy) \quad (3.2)$$

Como dx y dy son constantes para todos los puntos se pueden sacar de las sumatorias, quedando:

$$W_t = (dx)\sum P_x + (dy)\sum P_y = 0 \quad (3.2a)$$

pues por las dos primeras ecuaciones (3.1), cada una de las sumas es igual a cero.

Al rotar el cuerpo un ángulo pequeño, α , se observa en la figura 3.2 que dicha rotación produce desplazamientos de todos los puntos, cuyas componentes son " αy " y " αx ".

En consecuencia, el trabajo hecho por las fuerzas y momentos durante la rotación, W_r , es:

$$W_r = \sum M\alpha + \sum P_x(\alpha y) + \sum P_y(\alpha x) \quad (3.3)$$

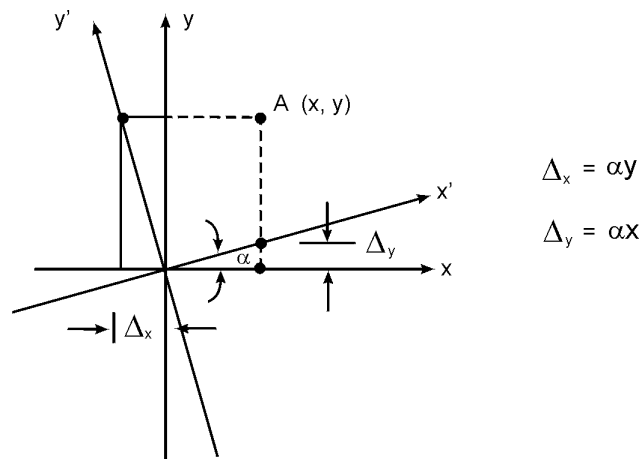


Figura 3.2 Efecto de translación producido por una rotación pequeña.

y siendo α constante, se reduce a:

$$W_r = \alpha \left[\sum M + \sum P_x(y) + \sum P_y(x) \right] = 0 \quad (3.3a)$$

pues el término entre paréntesis es la tercera ecuación (3.1).

Considerando ahora que cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo puede interpretarse como la suma de una translación y una rotación, según se ilustró en la figura 3.1, y puesto que en ambos casos se ha demostrado que el trabajo total efectuado es cero, se puede enunciar el *Principio de los desplazamientos virtuales* así:

Dado un cuerpo rígido en equilibrio bajo un sistema de fuerzas, el trabajo total virtual hecho por este sistema de fuerzas durante un desplazamiento virtual es cero.

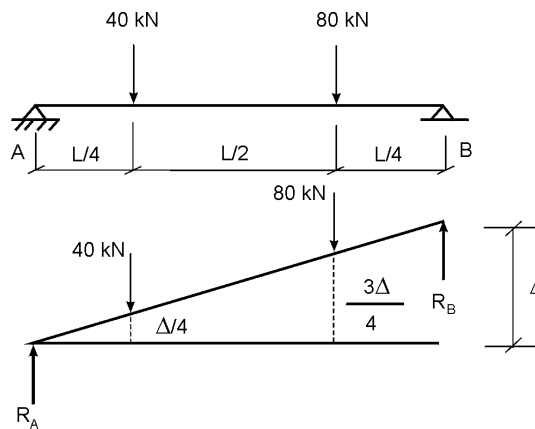
Aquí, al hablar de *fuerzas*, se considera el concepto general, o sea incluyendo momentos; de manera similar el término *desplazamiento* incluye rotación. El siguiente ejemplo sirve para ilustrar una aplicación de este principio.

Ejemplo 3.1

Calcule la reacción en el apoyo derecho de la viga mostrada en la página siguiente, utilizando el Principio de los desplazamientos virtuales.

Solución

Como se quiere averiguar la reacción en el apoyo B, se da a dicho apoyo un desplazamiento virtual Δ en la dirección de la fuerza buscada. Suponiendo el cuerpo rígido la forma desplazada de la estructura será la indicada debajo de ella.



Aplicando el Principio de los desplazamientos virtuales, se tiene:

$$W = 40 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) + 80 \left(-\frac{3\Delta}{4} \right) + R_B \Delta = 0$$

$$\rightarrow R_B = 70 \text{ kN } \uparrow$$

Obsérvese que los desplazamientos correspondientes a las cargas se han considerado negativos por tener direcciones contrarias a las de ellas.

3.3 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considerando ahora un cuerpo deformable, por ejemplo la placa delgada mostrada en la figura 3.4, en equilibrio bajo la acción de las cargas P y las reacciones R , se puede pensar que dicho cuerpo está formado por un conjunto de elementos, dos de los cuales, uno interior y otro de borde, se muestran en la misma figura.

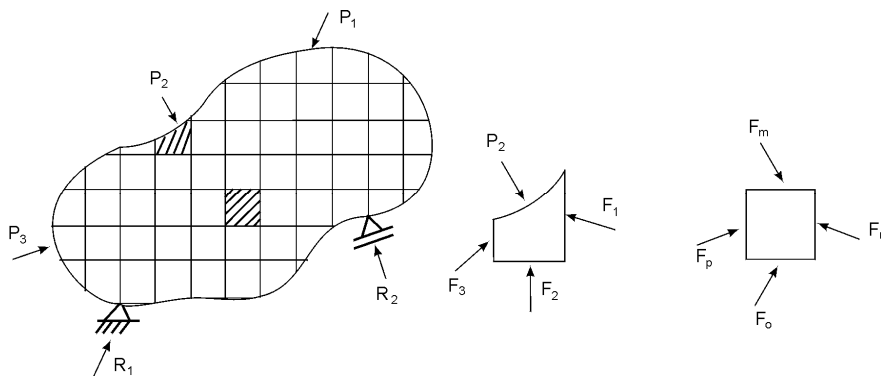


Figura 3.4 Idealización de una placa delgada mediante elementos finitos.

El elemento interior está sometido a fuerzas interelementales en todas las caras. El elemento de la periferia tiene una carga P actuando sobre una cara y fuerzas interelementales sobre las otras tres. Ambos elementos están en equilibrio bajo la acción de las fuerzas respectivas y siendo deformables dichas fuerzas originan fuerzas internas en ellos.

Aplicando ahora una *acción virtual* a la placa que resulte en un *desplazamiento virtual* del cuerpo entero y una *deformación virtual* del mismo, el trabajo virtual efectuado por las fuerzas externas a cada elemento, dW_e , se dividirá en dos: 1) un trabajo virtual de translación y rotación del elemento considerado como cuerpo rígido, dW_{tr} , y, 2) un trabajo virtual de deformación del elemento o energía de deformación virtual interna, dW_i . Por consiguiente:

$$dW_e = dW_{tr} + dW_i = dW_i \quad (3.4)$$

pues por el Principio de los desplazamientos virtuales $dW_{tr} = 0$
Al integrar el trabajo efectuado en todos los elementos se llega a:

$$W_e = \int dW_e = \int dW_i = W_i \quad (3.5)$$

en donde W_e representa el trabajo virtual total de las fuerzas externas e interelementales y W_i representa la energía virtual interna de deformación.

Considerando ahora dos elementos vecinos, a cada acción de un elemento sobre la cara común del vecino corresponde una reacción de éste idéntica en magnitud, pero de sentido contrario. Por consiguiente, cualquier trabajo producido por las fuerzas interelementales al actuar sobre el borde de un elemento diferencial dado se cancela con el efectuado por el vecino sobre ese borde común y el valor de W_e se reduce al trabajo virtual hecho por las cargas P que actúan sobre la estructura.

En vista de lo anterior, se puede enunciar el *Principio del trabajo virtual* como sigue:

Si una estructura deformable está en equilibrio bajo un sistema de cargas y permanece en equilibrio al someterla a una acción virtual pequeña producida por cualquier causa adicional, el trabajo virtual externo hecho por el sistema de cargas es igual al trabajo virtual interno de deformación producido por las fuerzas internas debidas a dicho sistema.

Se desprende de lo anterior que el método del trabajo virtual tiene una gran flexibilidad y generalidad, pues sus únicas limitaciones son que el sistema esté originalmente en equilibrio y permanezca en equilibrio durante la acción virtual.

3.4 TEOREMA DE MAXWELL DE LAS DEFLEXIONES RECÍPROCAS

Maxwell formuló su teorema de las deflexiones recíprocas en 1864, pero por no demostrarle aplicación práctica sólo vino a ser apreciado en 1886, cuando Müller-Breslau presentó su versión del método Maxwell-Mohr.

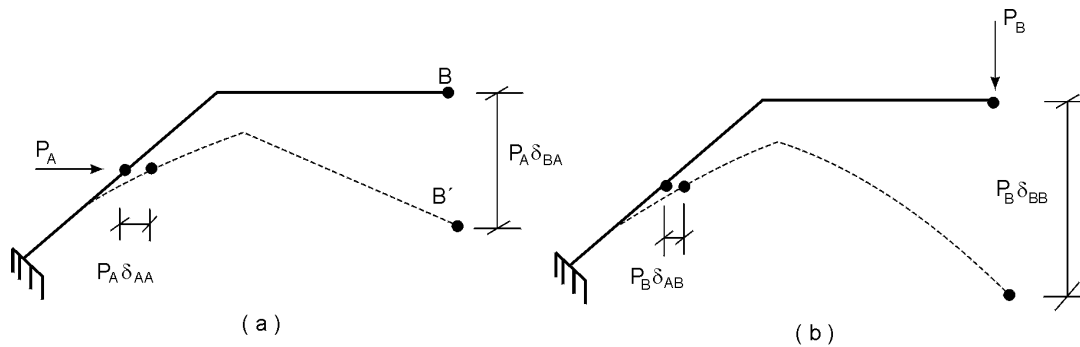


Figura 3.5 Deformaciones debidas a dos sistemas de cargas.

Considerando el pórtico de la figura, al aplicarle una fuerza horizontal en A la estructura se deforma de la manera indicada en (a), donde se han utilizado *coeficientes de influencia* definidos así:

δ_{ij} = desplazamiento en i, en la dirección de la carga aplicada en i, producido por una carga unitaria aplicada en j;

y el Principio de superposición.

Similarmente, si se aplica una carga vertical P_B en B, se obtiene la deformada de (b). Si ambas cargas se aplican gradual y simultáneamente, el trabajo total externo producido por ellas será:

$$W = \frac{1}{2} P_A (P_A \delta_{AA} + P_B \delta_{AB}) + \frac{1}{2} P_B (P_A \delta_{BA} + P_B \delta_{BB}) \quad (3.6)$$

Si sólo se aplica P_A , se efectuará un trabajo:

$$W_I = \frac{1}{2} P_A (P_A \delta_{AA}) \quad (3.7)$$

y si después de que P_A alcance su valor final se aplica gradualmente P_B , habrá un trabajo adicional:

$$W_{II} = P_A (P_B \delta_{AB}) + \frac{1}{2} P_B (P_B \delta_{BB}) \quad (3.8)$$

pero por el Principio de superposición el trabajo realizado es independiente de la secuencia. De ahí que:

$$W = W_I + W_{II}$$

y reemplazando los valores respectivos dados arriba resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_B P_A \delta_{BA} &= \frac{1}{2} P_A P_B \delta_{AB} \\ \delta_{BA} &= \delta_{AB} \end{aligned} \quad (3.9)$$

y generalizando:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (3.10)$$

Como i y j son dos puntos cualesquiera, el *Teorema de Maxwell de las deflexiones recíprocas* se puede enunciar como sigue:

1. *Cualquier componente lineal de deflexión de un punto i que resulte de la aplicación de una fuerza unitaria en cualquier otro punto j , es igual en magnitud a la componente lineal de la deflexión de j (en la dirección de la fuerza aplicada inicialmente en j), que resulta de la aplicación de una fuerza unitaria en i en la misma dirección de la componente original de la deflexión en i .*

La misma deducción se puede hacer para el caso de rotaciones debidas a momentos, o para la combinación de un desplazamiento lineal y una rotación, resultando entonces otras dos proposiciones.

2. *El giro en cualquier punto i de una estructura, causado por un momento unitario aplicado en cualquier otro punto j , es igual en magnitud al giro de j producido por un momento unitario actuando en i . O sea:*

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (3.11)$$

3. *Cualquier componente lineal de deflexión de un punto i , causada por un momento unitario aplicado en cualquier otro punto j , es igual en magnitud al giro de j que resulte de la aplicación de una fuerza unitaria en i en la dirección originalmente considerada. En otros términos:*

$$\delta'_{ij} = \alpha'_{ji} \quad (3.12)$$

en que la prima se ha utilizado para denotar el carácter mixto de las causas y los efectos. Las ecuaciones (3.10) a (3.12), además de permitir ahorrar trabajo en muchos problemas, constituyen la base de cierto tipo de análisis por modelos.

3.5 TEOREMA RECÍPROCO DE MAXWELL Y BETTI

En 1872, E. Betti publicó una forma generalizada del teorema recíproco. En la figura 3.6 se presenta una misma estructura sometida a dos sistemas de cargas diferentes. En las deformadas correspondientes se han señalado las componentes de deflexión *paralelas* a la dirección de las fuerzas en el otro sistema y para facilitar la notación se les ha asignado una barra a los términos del sistema II. Las componentes de deflexión causadas por un sistema, *paralelas* a las cargas del otro sistema, se dice que son *componentes correspondientes de deflexión*. Si se conviene en considerar aquí únicamente este tipo de componentes, se puede simplificar la nomenclatura utilizada antes en el Teorema de Maxwell.

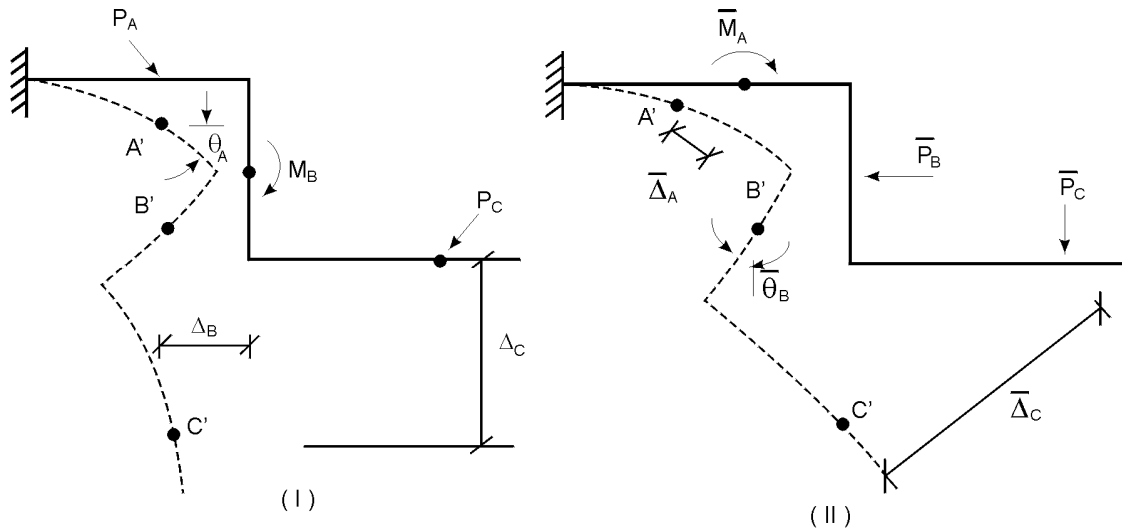


Figura 3.6 Dos sistemas de carga y sus componentes correspondientes de deflexión.

Por consiguiente, las componentes de deflexión que resultan al aplicar el sistema I de cargas son:

$$\begin{aligned}
 \theta_A &= P_A \alpha'_{AA} + M_B \alpha_{AB} + P_C \alpha'_{AC} \\
 \Delta_B &= P_A \delta_{BA} + M_B \delta'_{BB} + P_C \delta_{BC} \\
 \Delta_C &= P_A \delta_{CA} + M_B \delta'_{CB} + P_C \delta_{CC}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

en donde de nuevo las primas indican giros producidos por fuerzas o deflexiones debidas a momentos.

Las componentes de deflexión causadas por el sistema II son:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_A &= \bar{M}_A \delta'_{AA} + \bar{P}_B \delta_{AB} + \bar{P}_C \delta_{AC} \\
 \bar{\theta}_B &= \bar{M}_A \alpha_{BA} + \bar{P}_B \alpha'_{BB} + \bar{P}_C \alpha'_{BC} \\
 \bar{\Delta}_C &= \bar{M}_A \delta'_{CA} + \bar{P}_B \delta_{CB} + \bar{P}_C \delta_{CC}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Aplicando ahora arbitrariamente las componentes correspondientes de deflexión del sistema II, como desplazamientos virtuales del sistema I, resulta un trabajo:

$$\begin{aligned}
 W_I &= P_A (\bar{M}_A \delta'_{AA} + \bar{P}_B \delta_{AB} + \bar{P}_C \delta_{AC}) + \\
 &+ M_B (\bar{M}_A \alpha_{BA} + \bar{P}_B \alpha'_{BB} + \bar{P}_C \alpha'_{BC}) + \\
 &+ P_C (\bar{M}_A \delta'_{CA} + \bar{P}_B \delta_{CB} + \bar{P}_C \delta_{CC}) = \\
 &(1) \qquad (2) \qquad (3) \qquad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_I = & P_A \bar{M}_A \delta'_{AA} + P_A \bar{P}_B \delta'_{AB} + P_A \bar{P}_C \delta'_{AC} + M_B \bar{M}_A \alpha'_{BA} + \\
& (5) \qquad (6) \qquad (7) \\
& + M_B \bar{P}_B \alpha'_{BB} + M_B \bar{P}_C \alpha'_{BC} + P_C \bar{M}_A \delta'_{CA} + \\
& (8) \qquad (9) \\
& + P_C \bar{P}_B \delta_{CB} + P_C \bar{P}_C \delta_{CC}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Haciendo ahora lo contrario, es decir, utilizando las componentes correspondientes de deflexión del sistema I como desplazamientos virtuales del sistema II, el trabajo virtual efectuado es:

$$\begin{aligned}
W_{II} = & \bar{M}_A (P_A \alpha'_{AA} + M_B \alpha'_{AB} + P_C \alpha'_{AC}) + \\
& + \bar{P}_B (P_A \delta_{BA} + M_B \delta'_{BB} + P_C \delta_{BC}) + \\
& + \bar{P}_C (P_A \delta_{CA} + M_B \delta'_{CB} + P_C \delta_{CC}) = \\
W_{II} = & \bar{M}_A P_A \alpha'_{AA} + \bar{M}_A M_B \alpha'_{AB} + \bar{M}_A P_C \alpha'_{AC} + \\
& + \bar{P}_B P_A \delta_{BA} + \bar{P}_B M_B \delta'_{BB} + \bar{P}_B P_C \delta_{BC} + \\
& + \bar{P}_C P_A \delta_{CA} + \bar{P}_C M_B \delta'_{CB} + \bar{P}_C P_C \delta_{CC}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Si se aplica ahora el Teorema de Maxwell de las deflexiones recíprocas a los términos que tienen igual número en las ecuaciones (3.15) y (3.16), se observa que dichas ecuaciones resultan iguales, pudiéndose, en consecuencia, enunciar el *Principio de Maxwell y Betti* como sigue:

Dada cualquier estructura estable con una relación lineal carga-deformación, en la cual se han escogido puntos arbitrarios en donde se consideran aplicadas fuerzas o momentos en cualquiera de dos sistemas de carga diferentes, el trabajo virtual hecho por las fuerzas y momentos del primer sistema, al recorrer las deflexiones correspondientes causadas por el segundo sistema, es igual al trabajo virtual hecho por las fuerzas y momentos del segundo sistema al recorrer las deflexiones correspondientes causadas por el primer sistema.

3.6 TEOREMA DE CASTIGLIANO

En 1876, Alberto Castigliano enunció un teorema que permite encontrar cualquier componente de deflexión de una estructura a partir de la energía de deformación de la misma. Al aplicarlo a las reacciones redundantes de una estructura indeterminada, se obtiene un corolario que se conoce también como *Segundo teorema de Castigliano*. El teorema original dice:

La componente de deflexión del punto de aplicación de una acción sobre una estructura, en la dirección de dicha acción, se puede obtener evaluando la pri-

mera derivada parcial de la energía interna de deformación de la estructura con respecto a la acción aplicada.

El teorema es aplicable tanto a fuerzas como a momentos, obteniéndose en el primer caso la componente de deflexión en la dirección de la fuerza y en el segundo la rotación en el plano del momento.

Para demostrarlo se puede utilizar la viga de la figura 3.7, en la que se supone que existe una relación lineal entre cargas y deflexiones. En la parte (a) de la misma se considera que las fuerzas P y Q se han aplicado gradual y simultáneamente y la deflexan según la línea de trazos. En virtud del supuesto de linealidad entre cargas y deflexiones, el trabajo externo realizado, que es igual a la energía interna de deformación, como se demostró anteriormente, está dado por:

$$W = \frac{P\Delta_P}{2} + \frac{Q\Delta_Q}{2} \quad (3.17)$$

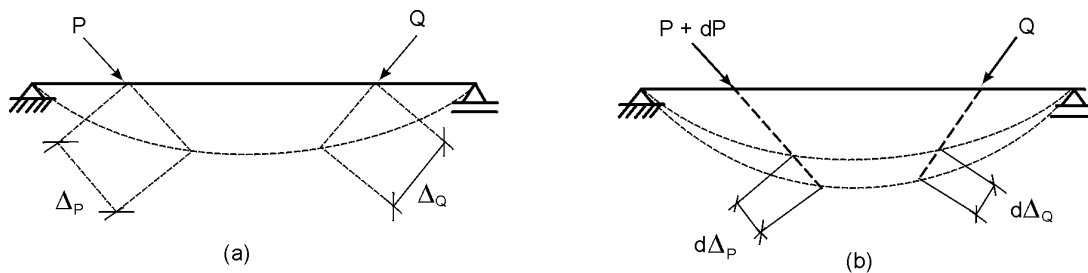


Figura 3.7

Si se le añade ahora al sistema una pequeña carga dP con la misma dirección y sentido de la carga P original, se producirá una deflexión adicional según se indica en la parte (b) de la misma figura. A su vez resulta un trabajo adicional:

$$dW = P(d\Delta_P) + \frac{dP(d\Delta_P)}{2} + Q(d\Delta_Q) \quad (3.18)$$

y si se desprecia el producto de las dos diferenciales dicho trabajo se reduce a:

$$dW = P(d\Delta_P) + Q(d\Delta_Q) \quad (3.18a)$$

El mismo estado final se podría haber obtenido aplicando desde el principio $(P + dP)$ y Q, gradual y simultáneamente. Es evidente que en tal caso se obtendría de una vez la posición deflectada de la parte (b) de la figura y en consecuencia el trabajo total externo estaría dado por:

$$W_T = \left(\frac{P + dP}{2} \right) (\Delta_P + d\Delta_P) + \frac{Q}{2} (\Delta_Q + d\Delta_Q) \quad (3.19)$$

que al despreciar de nuevo el producto de dos diferenciales se convierte en:

$$W_T = \frac{P\Delta_P}{2} + \frac{P(d\Delta_P)}{2} + \Delta_P \frac{dP}{2} + \frac{Q\Delta_Q}{2} + \frac{Q(d\Delta_Q)}{2} \quad (3.19a)$$

Pero $dW = W_T - W$; por consiguiente, de las ecuaciones (3.19a) y (3.17) se obtiene:

$$dW = \frac{P(d\Delta_P)}{2} + \Delta_P \frac{dP}{2} + \frac{Q(d\Delta_Q)}{2} \quad (3.20)$$

Despejando ahora de la ecuación (3.18a):

$$Q(d\Delta_Q) = dW - P(d\Delta_P)$$

Reemplazando este valor en la ecuación (3.20) resulta:

$$2dW = P(d\Delta_P) + \Delta_P (dP) + dW - P(d\Delta_P)$$

y despejando:

$$\Delta_P = \frac{dW}{dP} \quad (3.21)$$

que era lo que se quería demostrar, pues el hecho de haber mantenido a Q constante, equivale matemáticamente a derivar parcialmente con respecto a P . Por lo tanto, el Teorema de Castigliano se puede expresar en general así:

$$\Delta_P = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (3.21a)$$

Si el signo de la respuesta da negativo quiere decir que la deflexión es opuesta al sentido de la acción con respecto a la cual se tomó la derivada. Si se quiere averiguar la deflexión en un punto donde no hay aplicada ninguna acción, o en una dirección distinta de la acción aplicada, sencillamente se aplica una acción imaginaria en el sitio y dirección deseados hasta encontrar la derivada parcial de la energía de deformación; luego la acción imaginaria se iguala a cero. Generalmente se ahorra tiempo si la derivación se efectúa antes de integrar las expresiones que dan la energía de deformación, como se ilustra a continuación. Estas expresiones, deducidas en el segundo curso de mecánica de sólidos, aparecen en el cuadro 3.1 para facilitar su utilización.

Por consiguiente, si se quiere averiguar una deflexión lineal en una armadura, basta aplicar:

$$(\Delta_P)_a = \frac{\partial}{\partial P} \sum \frac{S^2 L}{2AE} = \sum S \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} \quad (3.22)$$

Las deflexiones lineales por flexión están dadas por:

$$(\Delta_P)_f = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (3.23)$$

Cuadro 3.1
Energías internas de deformación

Tipo de estructuras	Concepto	Energía de deformación
Armaduras	Fuerza axial	$\sum \frac{S^2 L}{2AE}$
Pórticos	Fuerza axial	$\int \frac{P^2 dx}{2AE}$
	Flexión	$\int \frac{M^2 dx}{2EI}$
	Corte	$K \int \frac{V^2 dx}{2AG}$ *
	Torsión	$\int \frac{T^2 dx}{2JG}$ **

* Para secciones rectangulares $K=1.2$, circulares; $K=10/9$, perfiles W: $K \approx 1$ y se toma como A el área del alma.

** Para secciones rectangulares de dimensiones h y b ($h > b$):

$$J = Cb^3h$$

$$C = \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right]$$

El efecto de corte es:

$$\left(\Delta_P \right)_v = \frac{\partial}{\partial P} K \int \frac{V^2 dx}{2AG} = K \int V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{AG} \quad (3.24)$$

y el de torsión:

$$\left(\Delta_P \right)_t = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{T^2 dx}{2JG} = \int T \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{JG} \quad (3.25)$$

Si se quieren averiguar rotaciones, en el lado izquierdo de las expresiones anteriores se escribiría θ y las derivadas parciales se tomarían con respecto a un momento aplicado en el punto de la rotación deseada. En todos los casos es muy importante dar a las fuerzas internas los signos apropiados.

El Teorema de Castigliano se puede aplicar a cualquier componente de reacción. Si se tiene en cuenta que la deflexión correspondiente es nula, es claro que en tal caso los lados derechos de las ecuaciones (3.22) a (3.25) deberán dar cero. Esta observación constituye el corolario del teorema y resulta muy útil para evaluar las reacciones redundantes en estructuras estáticamente indeterminadas.

Corolario: *La derivada parcial de la energía interna de deformación de una estructura cargada, con respecto a un componente de reacción, es igual a cero.*

Si se presta atención al significado matemático del enunciado anterior y se aplica a una estructura indeterminada, el corolario puede expresarse en una forma alterna:

En cualquier estructura indeterminada sometida a carga los valores de las redundantes deben ser tales que hagan mínima la energía total interna de deformación elástica que resulta de la aplicación del sistema de cargas dado.

Aplicado en esta forma da origen al *Método del trabajo mínimo*, que resulta muy efectivo para analizar estructuras articuladas indeterminadas y en la formulación de las matrices de rigidez utilizadas en el análisis matricial de estructuras. No puede, sin embargo, ser utilizado para determinar esfuerzos debidos a errores de fabricación, cambios de temperatura o corrimientos de los apoyos.

Con la formulación del Teorema de Castigliano y su corolario, se da por terminado el planteamiento de la Teoría de estructuras básica. En los capítulos siguientes se utiliza esta teoría en la resolución de problemas y en el desarrollo de métodos que facilitan su aplicación.

REFERENCIAS

- 3.1 Norris, C.H. y Wilbur, J.B. - *Elementary Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1960.

En este capítulo se presentan los principales métodos tradicionales utilizados en el cálculo de deflexiones de estructuras. Algunos de ellos fueron vistos en los cursos de Mecánica de sólidos, aplicados a estructuras determinadas, y se repasan aquí para facilitar su empleo en la solución de estructuras indeterminadas.

4.1 MÉTODO DEL TRABAJO REAL

El método del trabajo real utiliza el principio de conservación de la energía, en virtud del cual el trabajo externo realizado por las cargas debe ser igual al trabajo interno de deformación producido por los esfuerzos causados por las cargas. Al plantear el trabajo externo es preciso cuidar que las cargas sean compatibles con las deflexiones, de tal manera que para componentes lineales de deflexión se tenga

$$\frac{P\Delta}{2} = W_i \quad (4.1)$$

y para rotaciones:

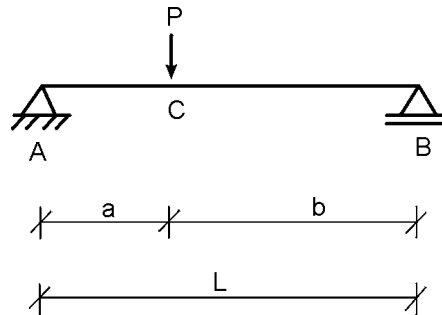
$$\frac{M\theta}{2} = W_i \quad (4.2)$$

La desventaja del método radica en su limitación, pues sólo permite la existencia de una incógnita, y si se aplica más de una fuerza o momento se tendrá más de un desplazamiento o rotación.

La única excepción a lo anterior es el caso de simetría con dos fuerzas o dos momentos, ya que entonces las deflexiones lineales o rotacionales bajo cada una de las cargas son iguales.

Ejemplo 4.1

Utilizando el método del trabajo real, encuentre la deflexión debida a flexión que se produce en la viga mostrada en el punto de aplicación de la carga.



Solución

Igualando el trabajo externo y la energía interna de deformación por flexión se obtiene:

$$\frac{P\Delta_f}{2} = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (a)$$

Para evaluar la integral conviene utilizar el siguiente cuadro:

Tramo	Origen	M
AC	A	$\frac{Pb}{L}x$
CB	B	$\frac{Pa}{L}x$

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} &= \int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x \right)^2 \frac{dx}{2EI} + \int_0^b \left(\frac{Pa}{L}x \right)^2 \frac{dx}{2EI} = \\ &= \frac{P^2 b^2}{L^2} \frac{a^3}{6EI} + \frac{P^2 a^2}{L^2} \frac{b^3}{6EI} \\ &= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL^2} (a+b) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL} \end{aligned}$$

Reemplazando este valor en (a):

$$\frac{P\Delta_f}{2} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

y despejando:

$$\Delta_f = \frac{Pa^2 b^2}{3EIL}$$

que es la respuesta pedida. En el caso particular en que $a = b = L/2$, la expresión anterior se transforma en:

$$\Delta_f = \frac{P(L/2)^4}{3EIL} = \frac{PL^3}{48EI}$$

como debía ser.

Ejemplo 4.2

Encuentre para la misma viga del ejemplo anterior la deflexión del punto C debida a los esfuerzos cortantes.

Solución

En este caso la ecuación (4.1) se convierte en:

$$\frac{P\Delta_v}{2} = K \int_0^L \frac{V^2 dx}{2AG} \quad (a)$$

y haciendo para la fuerza de corte un cuadro similar al anterior.

Tramo	Origen	V
AC	A	$\frac{Pb}{L}$
CB	B	$\frac{Pa}{L}$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{V^2 dx}{2AG} &= \int_0^a \left(\frac{Pb}{L}\right)^2 \frac{dx}{2AG} + \int_0^b \left(\frac{Pa}{L}\right)^2 \frac{dx}{2AG} \\ &= \frac{P^2 b^2}{L^2} \frac{a}{2AG} + \frac{P^2 a^2}{L^2} \frac{b}{2AG} = \\ &= \frac{P^2 ab}{2AGL^2} (a+b) = \frac{P^2 ab}{2AGL} \end{aligned}$$

y llevando este valor a la ecuación (a):

$$\frac{P\Delta_v}{2} = K \frac{P^2 ab}{2AGL}$$

$$\Delta_v = K \frac{P ab}{AGL}$$

que es la expresión buscada. De nuevo, considerando el caso especial de carga en el centro de la luz, se obtiene

$$\Delta_v = K \frac{P(L/2)(L/2)}{AGL} = \frac{K P L}{4AG}$$

Si la viga fuera de hormigón con $E = 23000 \text{ N/mm}^2$, $\vartheta = 0.17$, ancho 0.20 m, alto 0.30 m y $L = 4.00 \text{ m}$ se tendría:

$$I = \frac{200 (300)^3}{12} = 45 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\Delta_f = \frac{P (4000)^3}{48 \times 23000 \times 45 \times 10^7} = 1.288 \times 10^{-4} P \text{ (mm)}$$

Por otra parte,

$$G = \frac{E}{2 (1 + \nu)}$$

$$\rightarrow G = \frac{23000}{2 (1 + 0.17)} = 9830 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta_v = \frac{1.2 P (4000)}{4 (200 \times 300) \times 9830} = 2.035 \times 10^{-6} P \text{ (mm)}$$

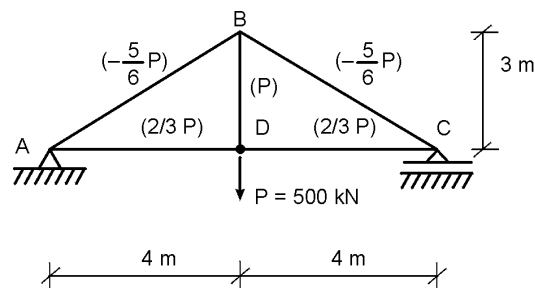
Comparando los dos valores se observa que

$$\Delta_v = 0.01580 \Delta_f$$

o sea que la deflexión por corte no alcanza a ser en este caso ni siquiera un 2% de la deflexión por flexión. Esto justifica el que para vigas normales de sección rectangular rara vez se calculen las deflexiones producidas por el corte.

Ejemplo 4.3

Averigüe la deflexión producida en el punto D de la armadura mostrada por una carga P de 500 kN aplicada en el mismo. Supóngase que para todas las barras $L/A = 1 \text{ mm}^{-1}$ y que el material es acero estructural con $E = 200000 \text{ N/mm}^2$.



Solución

Aplicando el método del trabajo real a armaduras se obtiene:

$$P \frac{\Delta_a}{2} = \sum \frac{S^2 L}{2AE} \quad (a)$$

Por consiguiente, para resolver el problema hay que empezar por evaluar las fuerzas en

las barras. En este caso es muy sencillo hacerlo por el método de los nudos, teniendo en cuenta la simetría de la estructura y de la carga. Los resultados están dados entre paréntesis en la misma figura y sirven para elaborar el cuadro siguiente:

Barra	L/A	S	S ²	S ² L/A
	mm ⁻¹	kN	(kN) ²	(kN) ² /mm
AB	1	-416.7	173639	173639
AD	1	333.3	111089	111089
BD	1	500	250000	250000
BC	1	-416.7	173639	173639
DC	1	333.3	111089	111089
Σ				819456

y llevando este valor a la ecuación (a):

$$\frac{500 \times \Delta_D}{2} = \frac{819456}{2 \times 200}$$

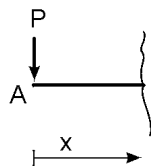
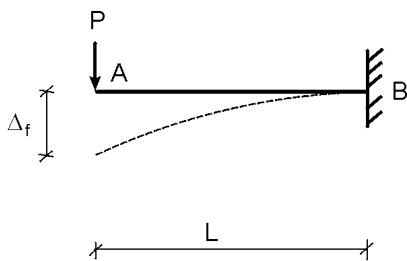
$$\Delta_D = 8.19 \text{ mm}$$

4.2 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO

Como ya se dijo, el Teorema de Castigliano y su corolario resultan muy útiles en el cálculo de deflexiones de estructuras determinadas y de reacciones redundantes en las indeterminadas, según se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.4

Encuentre la flecha máxima, debida a flexión, de la viga en voladizo que se muestra.



Solución

Debajo de la viga aparece un diagrama de cuerpo libre válido en todo el tramo AB. Por la ecuación (3.23):

$$\Delta_f = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$M = -Px$$

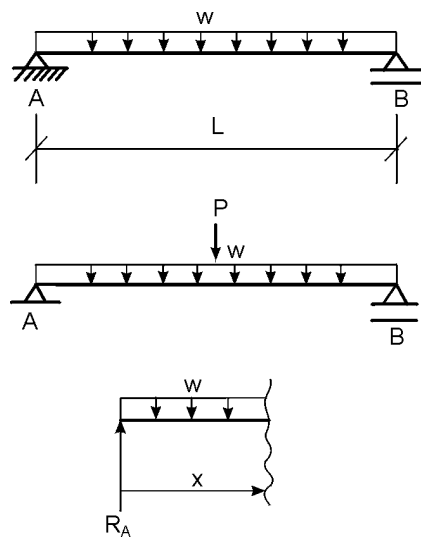
$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

$$\Delta_f = \int_0^L -Px(-x) \frac{dx}{EI} = \frac{Px^3}{3EI} \Bigg|_0^L$$

$$\Delta_f = \frac{PL^3}{3EI}$$

Ejemplo 4.5

Encuentre la flecha máxima debida a flexión, de una viga simplemente apoyada, sometida a una carga uniformemente repartida, w , en toda la luz.



Solución

De la simetría se deduce que la flecha máxima se presenta en el centro de la luz, y como allí no hay cargas concentradas aplicadas, se le coloca una carga ficticia P .

Por estática se sabe que

$$R_A = \frac{wL}{2} + \frac{P}{2}$$

y según el diagrama de cuerpo libre mostrado, válido entre $x = 0$ y $x = L/2$,

$$M = \frac{wL}{2}x + \frac{P}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\delta M}{\delta P} = \frac{x}{2}$$

Ahora sí se puede hacer $P = 0$:

$$\rightarrow M \frac{\delta M}{\delta P} = \frac{wLx^2}{4} + \frac{Px^2}{4} - \frac{wx^3}{4} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{4}x^3$$

y si se tienen en cuenta la ecuación (3.23) y la simetría:

$$\begin{aligned}
\Delta_f &= \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \\
&= 2 \int_0^{L/2} M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \\
\rightarrow \Delta_f &= 2 \int_0^{L/2} \left(\frac{wL}{4} x^2 - \frac{wx^3}{4} \right) \frac{dx}{EI} \\
&= \frac{w}{2EI} \int_0^{L/2} (Lx^2 - x^3) dx \\
&= \frac{w}{2EI} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{L/2} \\
&= \frac{w}{2EI} \left[\frac{L^4}{24} - \frac{L^4}{64} \right] \\
\Delta_f &= \frac{5wL^4}{384EI}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6

Encuentre en la viga del ejemplo anterior la deflexión máxima debida a corte.

Solución

Según la ecuación (3.24):

$$\Delta_v = K \int_0^L V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{AG}$$

Del diagrama de cuerpo libre, para $0 \leq x \leq L/2$:

$$V = \frac{wL}{2} + \frac{P}{2} - wx$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{2}$$

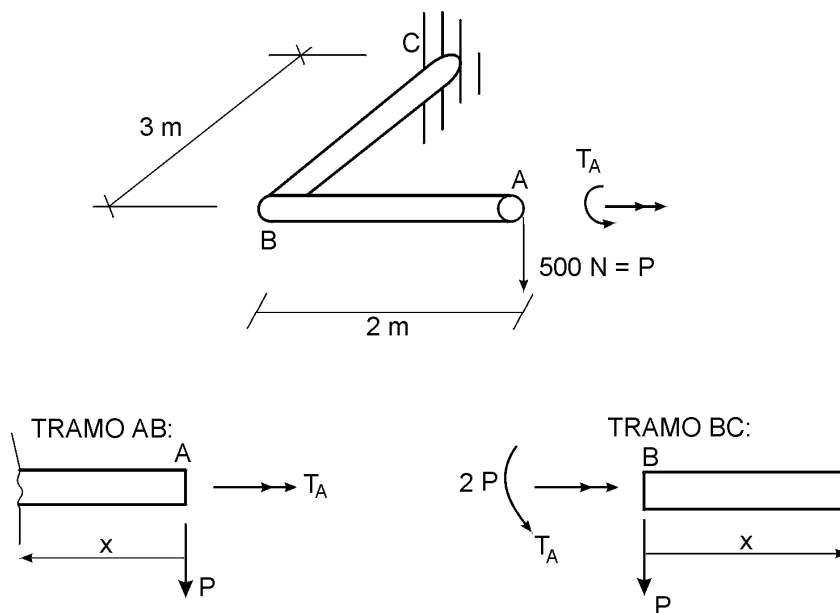
Haciendo $P = 0$ y utilizando simetría:

$$V \frac{\delta V}{\delta P} = \frac{wL}{4} + \frac{P}{4} - \frac{wx}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_v &= 2K \int_0^{L/2} \frac{wL}{4} \frac{dx}{AG} - 2K \int_0^{L/2} \frac{wx}{2} \frac{dx}{AG} = \\ &= 2K \left[\frac{wL}{4AG} x - \frac{wx^2}{4AG} \right] = \frac{K}{2AG} \left[\frac{wL^2}{2} - \frac{wL^2}{4} \right] \\ \Delta_v &= \frac{KwL^2}{8AG}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.7

Un tubo de acero, horizontal, acodado a 90° mediante una unión rígida, tiene 100 mm de diámetro. $A = 2730 \text{ mm}^2$; $I = 282 \times 10^4 \text{ mm}^4$ y $J = 564 \times 10^4 \text{ mm}^4$. En el extremo A se le aplica una carga vertical de 500 N. Averigüe la componente vertical de la deflexión en A y la componente rotacional con respecto al eje de AB. $E = 200000 \text{ N/mm}^2$, $G = 77000 \text{ N/mm}^2$.



Solución

La carga produce corte y flexión en el tramo AB y además de éstos produce torsión en el tramo BC. Por otra parte, como se pide el giro en A con respecto al eje de AB, es necesario introducir un momento torsor ficticio en dicho sitio, T_A , que después de diferenciar se igualará a cero.

Por el Teorema de Castigliano:

$$\Delta_{AV} = K \int V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{AG} + \int M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} + \int T \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{JG} \quad (a)$$

$$\Delta_{AV} = K \int V \left(\frac{\partial V}{\partial T_A} \right) \frac{dx}{AG} + \int M \left(\frac{\partial M}{\partial T_A} \right) \frac{dx}{EI} + \int T \left(\frac{\partial T}{\partial T_A} \right) \frac{dx}{JG} \quad (b)$$

El proceso se facilita ordenando en un cuadro las diferentes expresiones obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre indicados.

Tramo	Orig.	V	M	T	$\frac{\partial V}{\partial P}$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$\frac{\partial T}{\partial P}$	$\frac{\partial V}{\partial T_A}$	$\frac{\partial M}{\partial T_A}$	$\frac{\partial T}{\partial T_A}$
AB	A	P	-Px	T _A	1	-x	0	0	0	1
BC	B	-P	-Px-T _A	2P	-1	-x	2	0	-1	0

Reemplazando en la ecuación (a), y teniendo en cuenta, ahora sí, que T_A = 0

$$\begin{aligned} \Delta_{AV} &= K \int_0^2 \frac{Pdx}{AG} + K \int_0^3 -P(-1) \frac{dx}{AG} + \int_0^2 -Px(-x) \frac{dx}{EI} + \int_0^3 -Px(-x) \frac{dx}{EI} + \int_0^3 2P(2) \frac{dx}{JG} \\ &= \frac{KP}{AG} (2+3) + \frac{P}{3EI} [(2)^3 + (3)^3] + \frac{4P}{JG} (3) = \\ &= \frac{5KP}{AG} + \frac{35P}{3EI} + \frac{12P}{JG} \end{aligned}$$

en donde el primer término representa la deflexión por corte, el segundo la deflexión debida a flexión y el tercero la causada por la torsión. Reemplazando por los valores numéricos respectivos:

$$\begin{aligned} \Delta_{AV} &= \frac{5(10/9)500}{0.002730 \times 77 \times 10^9} + \frac{35 \times 500}{3 \times 200 \times 10^9 \times 282 \times 10^{-8}} + \frac{12 \times 500}{564 \times 10^{-8} \times 77 \times 10^9} = \\ &= 1.321 \times 10^{-5} + 0.01034 + 0.01382 = 0.0242 \text{ m} \end{aligned}$$

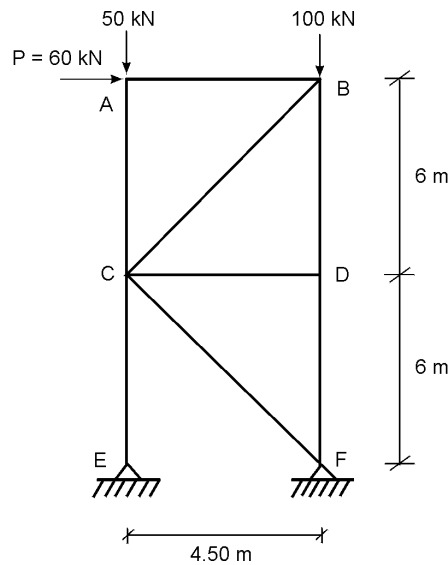
De los valores anteriores se puede ver que, en este caso particular, los porcentajes de contribución del corte, flexión y torsión a la deflexión son 0.05, 42.78 y 57.10%, respectivamente. Nótese la importancia de ser consistente en las unidades, de ahí que los denominadores de los dos últimos términos se hayan multiplicado por las potencias de diez necesarias para convertir todo a metros, ya que los límites de integración se habían tomado en esa unidad.

Para encontrar la rotación pedida se acude al cuadro y a la ecuación (b), que queda reducida a un término:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int_0^3 -Px(-1) \frac{dx}{EI} = \frac{9P}{2EI} = \\ &= \frac{9 \times 500}{2 \times 200 \times 10^9 \times 282 \times 10^{-8}} = 3.99 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8

Encuentre la deflexión horizontal del punto A, producida por el sistema de cargas mostrado. Las dimensiones son tales que para las diagonales $L/A = 10 \text{ mm}^{-1}$ y para las otras barras $L/A = 5 \text{ mm}^{-1}$. El material es acero estructural. $E = 200 \text{ kN/mm}^2$.

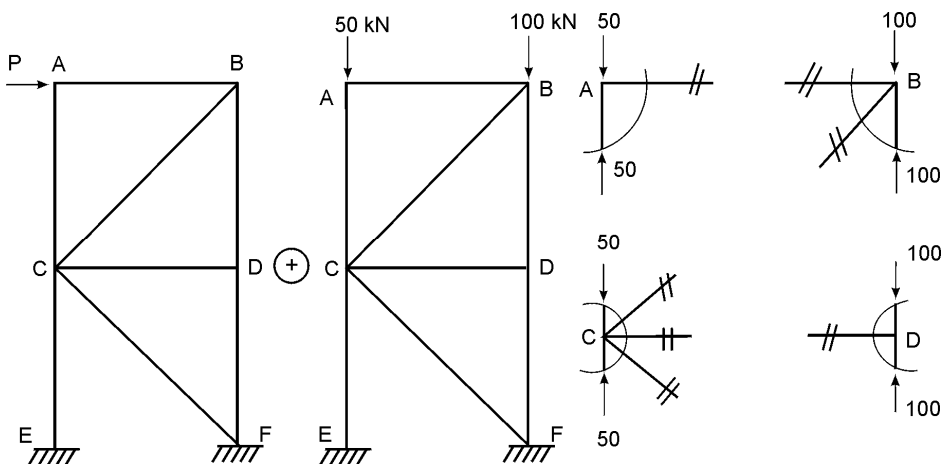


Solución

Como hay varias fuerzas aplicadas, el problema no se podría resolver por el método del trabajo real. En cambio el Teorema de Castigliano resulta muy útil, y como ya hay una fuerza aplicada en el punto y dirección del desplazamiento buscado, bastará con llamarla P. Entonces:

$$\Delta_{Ah} = \sum S \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right) \frac{L}{AE}$$

Para mayor claridad se puede separar en dos el sistema de cargas:



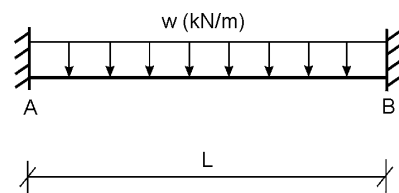
En el extremo derecho se ha ilustrado la solución de la segunda parte. Los resultados de ambas se resumen en el siguiente cuadro:

Barra	L/A	S		$\partial S/\partial P$	$S(\partial S/\partial P)L/A$
AB	5	-P	0	-1	5 P
CD	5	0	0	0	-
AC	5	0	-50	0	-
CE	5	8/3 P	-50	8/3	320/9P - 2000/3
BD	5	-4/3 P	-100	-4/3	80/9P + 2000/3
DF	5	-4/3 P	-100	-4/3	80/9 P + 2000/3
BC	10	5/3 P	0	5/3	250 P/9
CF	10	-5/3 P	0	-5/3	250 P/9
Σ					1025 P/9 + 2000/3

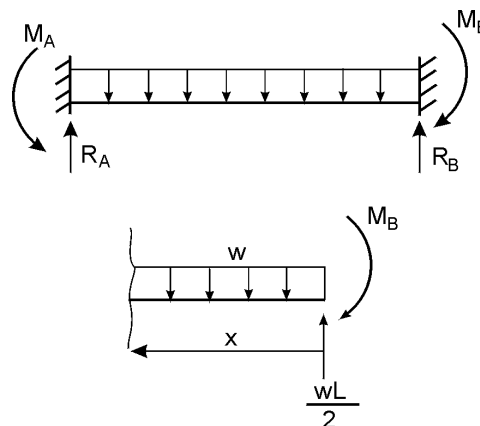
$$\Delta_{Ah} = \frac{1}{200} \left[\frac{1025 \times 60}{9} + \frac{2000}{3} \right] = 37.5 \text{ mm}$$

Ejemplo 4.9

Resuelva por el método de Castigliano la viga indeterminada mostrada.



Solución



Por simetría:

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

$$M_A = M_B$$

Escogiendo como redundante el momento en B, por el corolario de Castigliano:

$$\theta_B = \int M \left(\frac{\partial M}{\partial M_B} \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} - M_B$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = -1$$

$$M \left(\frac{\partial M}{\partial M_B} \right) = -\frac{wL}{2}x + \frac{wx^2}{2} + M_B$$

$$\rightarrow \int_0^L -\left(\frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} + M_B \right) \frac{dx}{EI} = 0$$

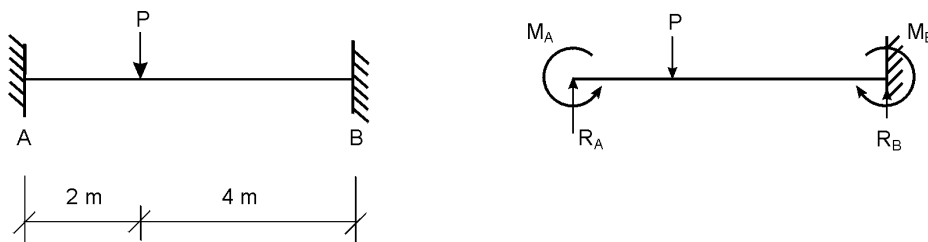
$$-\frac{wL^3}{4} + \frac{wL^3}{6} + M_B L = 0$$

$$M_B = \frac{3wL^3 - 2wL^3}{12L} = \frac{wL^2}{12}$$

el signo positivo indica que el sentido supuesto era el correcto.

Ejemplo 4.10

Resuelva por el método de Castigliano la viga mostrada.



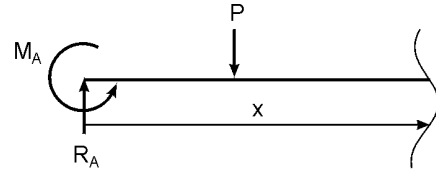
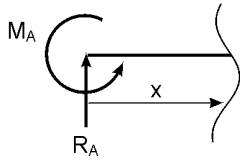
Solución

La viga es de segundo grado de indeterminación y como no hay simetría es preciso escoger dos redundantes, por ejemplo, las componentes de reacción en A. Queda entonces así:

Por el corolario de Castigliano:

$$\Delta_A = \int M \frac{\partial M}{\partial R_A} \frac{dx}{EI} = 0 \quad \text{y} \quad \theta_A = \int M \frac{\partial M}{\partial M_A} \frac{dx}{EI} = 0$$

Hay dos tipos de diagramas de cuerpo libre:



A partir de los cuales se obtienen las ecuaciones de momento que figuran en el siguiente cuadro:

Tramo	M	$\frac{\partial M}{\partial R_A}$	$\frac{\partial M}{\partial M_A}$
A \rightarrow P	$R_A x - M_A$	x	-1
P \rightarrow B	$R_A x - M_A - P(x - 2)$	x	-1

$$\int M \left(\frac{\partial M}{\partial R_A} \right) dx = \int_0^2 (R_A x^2 - M_A x) dx + \int_2^6 (R_A x^2 - M_A x - Px^2 + P2x) dx$$

$$= \frac{R_A}{3} 8 - \frac{M_A}{2} 4 + \frac{R_A}{3} [(6)^3 - (2)^3] - \frac{M_A}{2} (36 - 4) +$$

$$- \frac{P}{3} [(6)^3 - 8] + P(36 - 4) = 0$$

$$\rightarrow 72R_A - 18M_A - 69.33P + 32P = 0$$

$$4R_A - M_A = \frac{56}{27}P \quad (1)$$

$$\int M \left(\frac{\partial M}{\partial M_A} \right) dx = \int_0^2 (-R_A x + M_A) dx + \int_2^6 (-R_A x + M_A + Px - 2P) dx$$

$$= -\frac{R_A}{2} (4) + 2M_A - \frac{R_A}{2} (36 - 4) + M_A (6 - 2) + \frac{P}{2} (36 - 4) - 2P (6 - 2) = 0$$

$$\rightarrow -2R_A + 2M_A - 16R_A + 4M_A + 16P - 8P = 0$$

$$-9R_A + 3M_A = -4P \quad (2)$$

3 Ec. (1) + Ec. (2):

$$3R_A = \frac{20}{9}P$$

$$\rightarrow R_A = \frac{20}{27}P$$

Por equilibrio:

$$R_B = P - \frac{20}{27}P = \frac{7}{27}P$$

De la ecuación (1):

$$M_A = \frac{80}{27}P - \frac{56}{27}P = \frac{8}{9}P$$

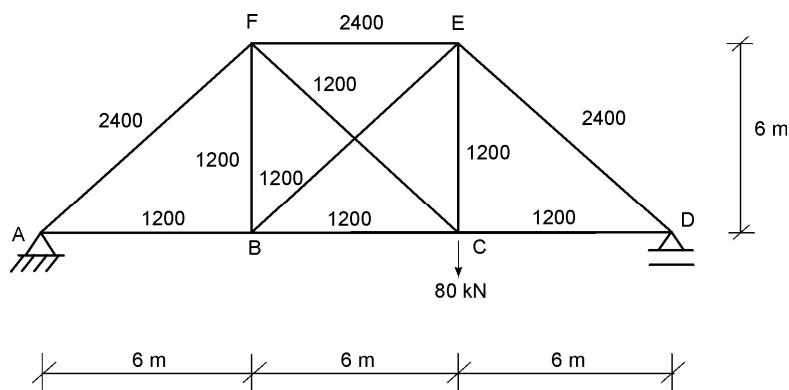
y del primer diagrama de cuerpo libre:

$$M_B = \frac{8}{9}P - \frac{20}{27}P(6) + P(4) = \frac{4}{9}P$$

con lo cual queda resuelto el problema.

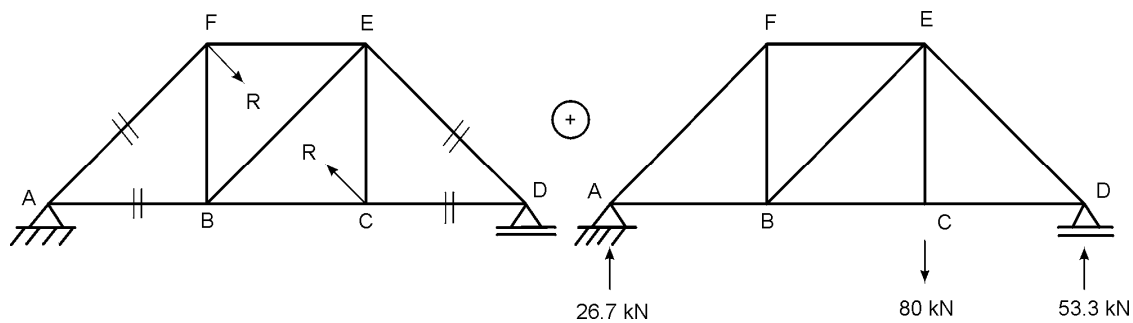
Ejemplo 4.11

Encuentre el esfuerzo a que está sometida la barra FC del puente mostrado. Los números sobre las barras dan las áreas respectivas en mm^2 .



Solución

Considerando redundante la barra FC, se puede suponer que está sometida a tensión, y se analizan las estructuras determinadas mostradas:



La ecuación de condición según el corolario de Castigliano es:

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \sum S \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right) \frac{L}{AE} = 0$$

los resultados del análisis están tabulados a continuación:

Miembro	L (mm)	A (mm ²)	S (kN)	$\frac{\partial S}{\partial R}$	$S \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right) \frac{L}{A}$
AB	6000	1200	0 + 26.7	0	0
AF	8485	2400	0 - 37.7	0	0
BC	6000	1200	-0.707R + 53.3	-0.707	2.500R - 188.4
BE	8485	1200	R - 37.7	1	7.071R - 266.6
BF	6000	1200	-0.707R + 26.7	-0.707	2.500R - 94.4
CD	6000	1200	0 + 53.3	0	0
CE	6000	1200	-0.707R + 80.0	-0.707	2.500R - 282.8
DE	8485	2400	0 - 75.4	0	0
EF	6000	2400	-0.707R - 26.7	-0.707	1.250R + 47.2
FC	8485	1200	R + 0	1	7.071R
Σ					22.892R - 785.0

$$\rightarrow 22.892R - 785.0 = 0$$

$$R = \frac{785.0}{22.892} = 34.3 \text{ kN} \quad (\text{Tensión})$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\rightarrow \sigma_{fc} = \frac{R}{A_{fc}} = \frac{34300}{1200} = 28.6 \frac{N}{mm^2}$$

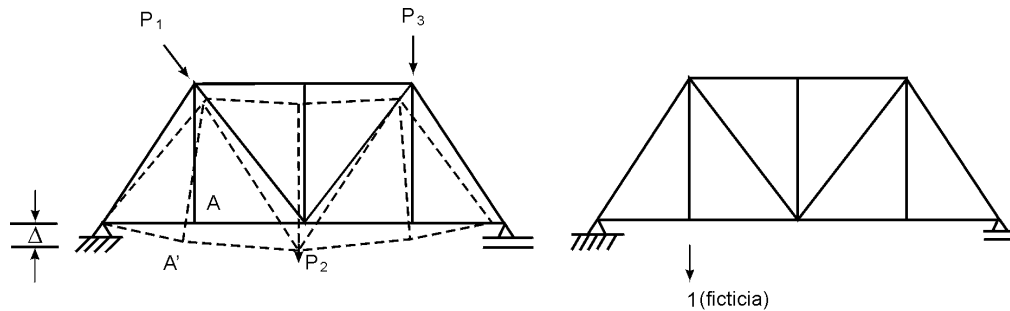
4.3 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

Ya se había mencionado que el método del trabajo virtual es, entre los tradicionales, el procedimiento más versátil para evaluar deflexiones elásticas de estructuras producidas incluso por causas diferentes de la aplicación de cargas, como errores de fabricación o cambios de temperatura. La única restricción es que en su forma finita sólo es aplicable a aquellos casos en los que es válido el Principio de superposición.

Se recordará que, en resumen, el Principio del trabajo virtual decía que si una estructura deformable, en equilibrio bajo un sistema de cargas, era sometida a una deformación virtual como resultado de una acción adicional, el trabajo virtual externo hecho por el sistema de cargas es igual al trabajo virtual interno efectuado por las fuerzas internas causadas por él. Su aplicación se reduce entonces a evaluar ambas expresiones e igualarlas.

4.3.1 Deflexiones resultantes de deformaciones axiales

Suponiendo que se quiere averiguar la deflexión vertical del punto A de la armadura mostrada, producida por las cargas P_1 , P_2 y P_3 , se empieza por remover dichas cargas para aplicar luego una carga ficticia unitaria en el punto y dirección de la deflexión buscada.



La estructura queda en equilibrio bajo la acción de esta fuerza ficticia, que puede considerarse como el *sistema de cargas dado* en el Principio del trabajo virtual. Ahora la armadura se considera sometida a desplazamientos virtuales idénticos a las deflexiones resultantes del sistema real de cargas, o sea que el punto A se deflecta virtualmente una cantidad Δ . En consecuencia, la fuerza unitaria ficticia realizará un trabajo:

$$W_E = 1 \times \Delta \quad (4.3)$$

Por otra parte, si U_i representa la fuerza interna en la barra i inducida por la carga ficticia, al darle a la estructura los desplazamientos producidos por las cargas reales, dicha fuerza tendrá que recorrer la deformación elástica debida a tales cargas y al hacerlo efectuará un trabajo. El trabajo interno de toda la estructura será la suma de los trabajos realizados en las barras, o sea:

$$W_i = \sum U_i \delta_i = \sum U_i \left(\frac{SL}{AE} \right)_i \quad (4.4)$$

donde S representa como antes la fuerza en el miembro producida por las cargas reales. Aplicando ahora el Principio del trabajo virtual:

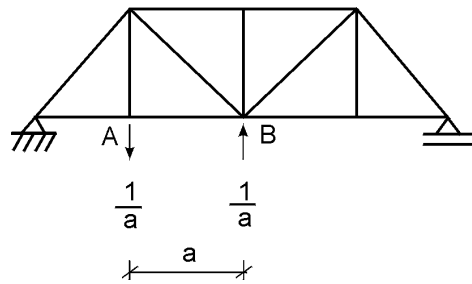
$$W_E = W_i \quad (4.5)$$

$$\rightarrow \Delta = \sum U_i \left(\frac{SL}{AE} \right)_i \quad (4.6)$$

De nuevo, si el signo es negativo, quiere decir que la deflexión es en sentido opuesto al de la carga unitaria aplicada. La tensión se considera positiva porque a ella corresponde un alargamiento.

Si se quiere averiguar la rotación de una barra, basta colocar un momento unitario.

La ecuación (4.6) se convierte entonces en:



$$\theta = \sum U_i \left(\frac{SL}{AE} \right)_i \quad (4.7)$$

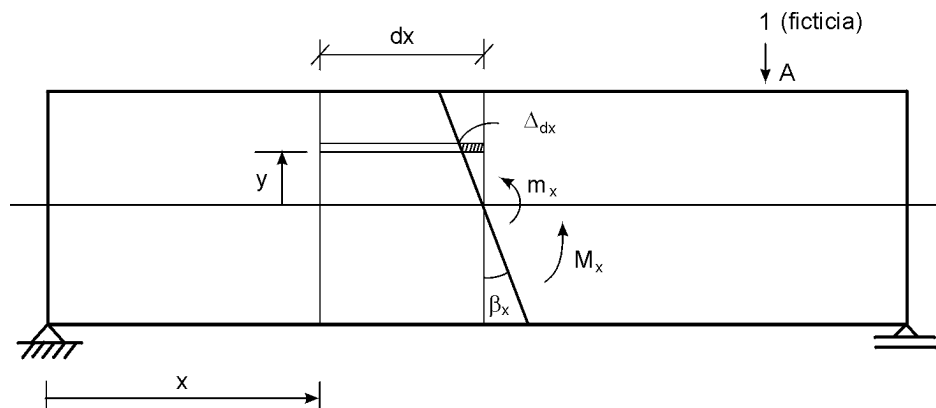
Arriba se ilustra el procedimiento para encontrar la rotación de la barra AB.

Finalmente, comparando las ecuaciones (3.22) y (4.6) se observa que el valor de U_i no es otro que el $(\partial S / \partial P)$ del Teorema de Castigliano. La única diferencia está en el modo de hallarlo y en el fondo los dos métodos son idénticos.

Usualmente, el alumno preferirá uno u otro según se incline por los problemas físicos o por los matemáticos.

4.3.2 Deflexiones debidas a flexión

Las expresiones del trabajo externo continúan siendo $1 \times \Delta$ para deflexiones lineales y $1 \times \theta$ para rotaciones. Para evaluar el trabajo interno debido a flexión, se sigue un proceso similar al anterior:



Con referencia a la figura, si se desea averiguar la deflexión vertical en A se coloca allí una carga virtual unitaria que producirá en una sección a una distancia x del apoyo un momento virtual m_x . Considerando que éste es el *sistema de cargas*, y aplicándole a la viga los desplazamientos producidos por las cargas aplicadas, se realizará en la sección un trabajo interno de magnitud:

$$dW_i = m_x \beta_x \quad (4.8)$$

en donde β_x representa la rotación debida al momento M_x producido por las cargas reales. De Mecánica de sólidos se sabe que a una distancia y del eje neutro el esfuerzo σ_y está dado por:

$$\sigma_y = \frac{M_x y}{I}$$

y, por consiguiente, el cambio en longitud de una fibra a esa distancia es:

$$(\Delta dx)_y = \epsilon_y dx = \frac{\sigma_y}{E} dx = \frac{M_x y}{EI} dx$$

Como la rotación es pequeña, el ángulo β_x se puede reemplazar por su tangente. De ahí que

$$\beta_x = \frac{(\Delta dx)_y}{y} = \frac{M_x dx}{EI} \quad (4.8)$$

y reemplazando en la ecuación (4.8)

$$dW_i = m_x \left(\frac{M_x}{EI} \right) dx \quad (4.8a)$$

El trabajo total se obtendrá integrando la expresión anterior a lo largo de la viga.

$$W_i = \int_0^L m_x \left(\frac{M_x}{EI} \right) dx \quad (4.9)$$

Igualando esta expresión a las que dan el trabajo externo, se obtiene entonces:

Para deflexiones lineales:

$$\Delta = \int_0^L m \left(\frac{M}{EI} \right) dx \quad (4.10)$$

y para rotaciones:

$$\theta = \int_0^L m_\alpha \left(\frac{M}{EI} \right) dx \quad (4.11)$$

en donde el subíndice α indica que los momentos virtuales son debidos a la aplicación de un par unitario en A.

Comparando la ecuación (4.10) con la (3.23), se vuelve a encontrar total equivalencia con el método de Castigliano, en el que el m de ahora es el mismo $(\partial M / \partial P)$ de aquél.

4.3.3 Deflexiones por corte y torsión

Siguiendo un procedimiento completamente análogo se pueden averiguar los trabajos internos debidos a corte y a torsión. Éstos están dados por:

Para corte:

$$W_i = K \int_0^L v \left(\frac{V}{AG} \right) dx \quad (4.12)$$

en donde para una sección x , v es la fuerza de corte resultante de la carga unitaria ficticia

(equivalente al $\partial V / \partial P$ de Castigliano), V es el corte producido por las cargas reales y K el factor de forma definido antes.

Para torsión:

$$W_i = \int_0^L t \left(\frac{T}{JG} \right) dx \quad (4.13)$$

en donde t es la torsión ficticia en una sección x debida a la carga virtual unitaria (equivalente al $\partial T / \partial P$ visto anteriormente), T la torsión producida en la misma sección por las cargas reales y J el momento polar de inercia para elementos de sección circular o su equivalente para secciones rectangulares (cuadro 3.1).

Las expresiones de trabajo externo en ambos casos siguen siendo iguales: $1 \times \Delta$ y $1 \times \theta$ para desplazamientos lineales y rotaciones, respectivamente.

Varias veces se ha dicho que las deflexiones por corte en la mayoría de las vigas comúnmente encontradas en la práctica, son insignificantes si se las compara con las debidas a flexión.

El cuadro 4.1 presenta para una viga $W 12 \times 27$ de acero estructural, la relación entre las dos deflexiones para diferentes luces y dos hipótesis de carga: concentrada en el centro de la luz y uniformemente repartida.

Cuadro 4.1

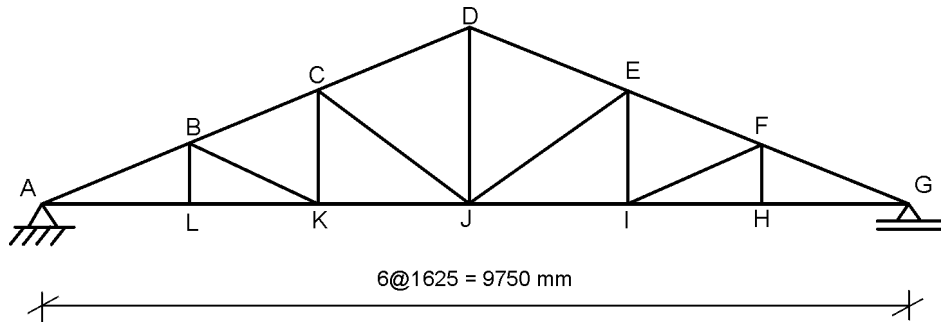
Relación entre las deflexiones en el centro de la luz debidas a corte y a flexión en una viga $W 12 \times 27$ de acero estructural

Luz H	Carga concentrada en el centro de la luz	Carga uniformemente repartida
5	0.60	0.48
10	0.15	0.12
15	0.07	0.05
20	0.04	0.03

Como era de esperarse, el primer caso produce deflexiones de corte relativamente mayores, puesto que su diagrama de corte tiene un área mucho mayor que la del segundo, mientras que en las áreas de los diagramas de momento respectivos pasa lo contrario.

Ejemplo 4.12

La cercha mostrada se quiere utilizar para cubrir un auditorio con luz de 9.75 m y va apoyada sobre columnas que están espaciadas cada 7.50 m. La teja es de asbesto-cemento y la carga viva de diseño especificada es de 500 N/m^2 de proyección horizontal. Se pide encontrar la deflexión en el centro de la luz, causada por el peso propio y la sobrecarga anterior.



Áreas:

Cordón superior: 1500 mm^2

Cordón inferior: 1000 mm^2

Diagonales y montantes: 1200 mm^2

Solución

Se empieza por determinar las cargas:

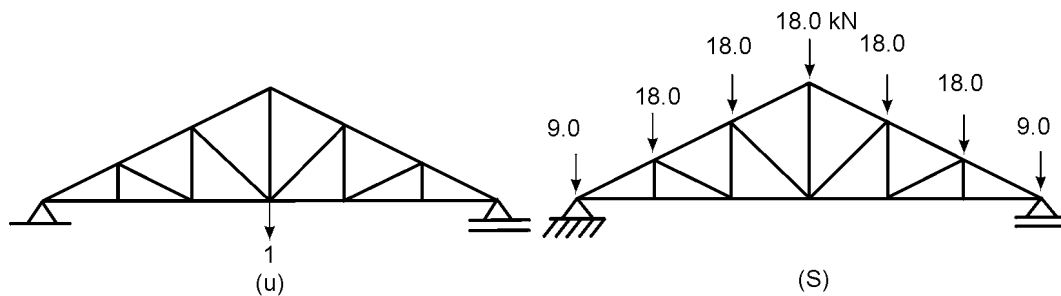
Teja ondulada de asbesto cemento No. 6 y accesorios	0.16 kN/m^2
Cielo raso	0.72 kN/m^2
Peso propio estimado, incluyendo correas y arriostramiento	<u>0.10 kN/m^2</u>
	$q_m = 0.98 \text{ kN/m}^2$
Carga viva	$q_v = \underline{0.50 \text{ kN/m}^2}$
Carga total $q_T = q_m + q_v =$	1.48 kN/m^2

Carga por nudo en una cercha interior:

$$P = 1.48 \times 1.625 \times 7.50 = 18.0 \text{ kN}$$

En el análisis rutinario se hace la simplificación de considerar que tanto el peso del cielo raso como el peso propio se hallan aplicados en los nudos superiores.

De acuerdo con el método de los nudos y aprovechando la simetría se elabora el cuadro siguiente para los dos sistemas de cargas indicados a continuación:



La pendiente mínima recomendada para teja ondulada Eternit es de 27% (15.1°). Aquí se adopta 30% (16.7°), que resulta en correas espaciadas cada 1.694 m, que es aproximadamente la longitud de una teja No. 6.

Barra	L (mm)	A (mm ²)	u	S	u(SL/A)
AB	1694	1500	-1.74	-156.6	307.7
AL	1625	1000	1.67	150.0	407.1
BL	488	1200	0	0	0
BK	1694	1200	0	-31.3	0
BC	1694	1500	-1.74	-125.3	246.2
CK	975	1200	0	9.0	0
CJ	1895	1200	0	-35.0	0
CD	1694	1500	-1.74	-94.0	184.7
DJ	1463	1200	1	36.0	43.9
JK	1625	1000	1.67	120.0	325.7
KL	1625	1000	1.67	150.0	407.1
Σ					1922.3

Por el Teorema del trabajo virtual:

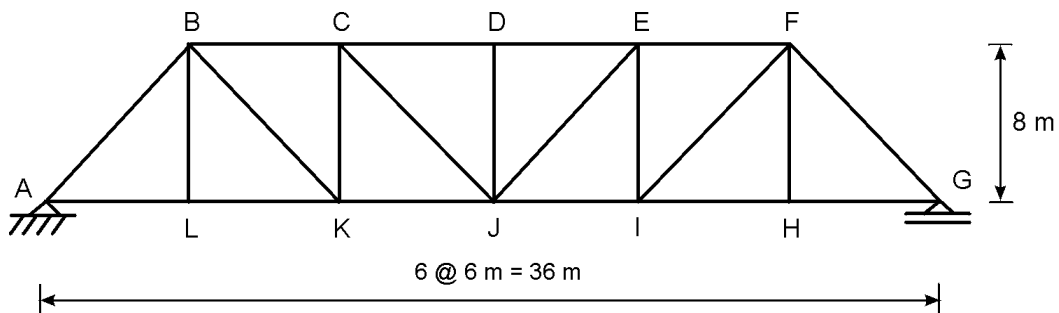
$$W_E = 1 \times \Delta = W_i = \sum u \left(\frac{SL}{AE} \right)$$

$$\rightarrow \Delta = \frac{2(1922.3) - 43.9}{200} = 19.0 \text{ mm} \downarrow$$

Nótese la substracción del valor correspondiente a la barra DJ para evitar duplicarla al considerar la cercha total.

Ejemplo 4.13

El puente de seis paneles mostrado en la figura se construye con andenes exteriores, de manera que los elementos del cordón inferior permanecen bajo sombra. Averigüe la componente vertical de deflexión del punto central de dicho cordón cuando la temperatura en él está 20°C por debajo de la temperatura en los otros elementos. El coeficiente de dilatación térmica del acero es $\alpha = 0.000012(\text{°C})^{-1}$.



Solución

En este caso las deformaciones de los miembros no son debidas a cargas sino a la diferencia de temperatura. La expresión de la deflexión queda, entonces, colocando una carga virtual unitaria y vertical en J (dirigida hacia abajo):

$$W_E = 1 \times \Delta = W_i = \sum u(\delta_T)$$

en donde

$$\delta_T = \alpha L(\Delta T)$$

El problema se simplifica si se toma como temperatura de base la de los elementos que no pertenecen al cordón inferior. Para éstos queda entonces:

$$\delta_T = 0.000012(6000)(-20) = -1.44 \text{ mm}$$

y para los demás $\delta_T = 0$. De ahí que baste averiguar los esfuerzos en los elementos del cordón inferior, como se resume en seguida.

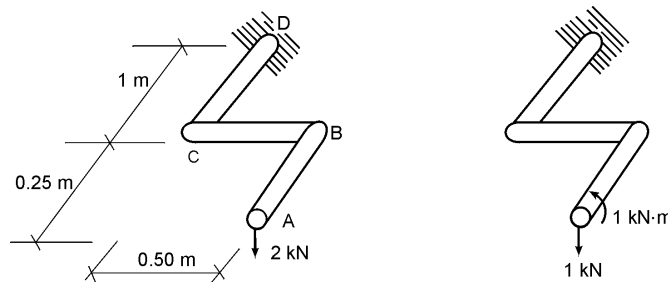
Elemento	u	δ_T (mm)	$u\delta_T$ (mm)
AL	0.375	-1.44	-0.540
LK	0.375	-1.44	-0.540
KJ	0.750	-1.44	-1.080
JI	0.750	-1.44	-1.080
IH	0.375	-1.44	-0.540
HG	0.375	-1.44	-0.540
Σ			-4.320

Como la sumatoria dio negativa, la deflexión es en sentido opuesto a la carga unitaria aplicada, o sea hacia arriba:

$$\Delta = 4.320 \text{ mm} \uparrow$$

Ejemplo 4.14

Se tiene un tubo de acero de 102 mm de diámetro localizado en un plano horizontal y formando ángulos de 90° en B y en C. Averigüe la deflexión vertical de A y la rotación del mismo extremo con respecto al eje AB cuando se aplica en A una carga vertical de 2 kN. Despréciense las deflexiones debidas a corte.



Propiedades del tubo:

$$I = 298 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J = 596 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2$$

$$G = 77 \text{ kN/mm}^2$$

Solución

En el sitio y direcciones de las deflexiones pedidas se colocan las cargas unitarias ficticias correspondientes, como se indica en la figura anterior.

Por el Principio del trabajo virtual, e ignorando las deformaciones por corte como se estableció en el enunciado:

$$1 \times \Delta = \int m \left(\frac{Mdx}{EI} \right) + \int t \left(\frac{Tdx}{JG} \right)$$

y

$$1 \times \theta = \int m_{\alpha} \left(\frac{Mdx}{EI} \right) + \int t_{\alpha} \left(\frac{Tdx}{JG} \right)$$

en donde M y T son el momento y la torsión debidos a la carga aplicada real (2 kN), m y t el momento y la torsión debidos a la carga ficticia de un kilonewton, y m_{α} y t_{α} los correspondientes al momento ficticio unitario.

Mediante diagramas de cuerpo libre apropiados se llega al siguiente cuadro:

Elemento	Origen	M	T	m	t	m_{α}	t_{α}
AB	A	-2.0 x	0	-x	0	0	1
BC	B	-2.0 x	0.50	-x	0.25	1	0
CD	C	-0.50 - 2.0 x	-1	-0.25 - x	-0.50	0	1

y reemplazando:

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{EI} \left[\int_0^{0.25} (-x)(-2.0x) dx + \int_0^{0.50} (-x)(-2.0x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^1 (-0.25 - x)(-0.50x - 2.0x) dx \right] \\ & + \frac{1}{JG} \left[\int_0^{0.50} (0.25)(0.50) dx + \frac{1}{JG} \int_0^1 (-0.50)(-1) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{EI} \left[\frac{2x^3}{3} \Big|_0^{0.25} + \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{0.50} + \left(0.125 + 0.500 + \frac{2}{3} \right) \right] + \frac{1}{JG} \left[0.125x \Big|_0^{0.50} + 0.50 \right] = \\
\Delta &= \frac{1.3854}{200 \times 10^6 \times 298 \times 10^{-8}} + \frac{0.5625}{77 \times 10^6 \times 596 \times 10^{-8}} = \\
&= 0.002324 + 0.001226 = 0.003550 \text{ m} \\
\rightarrow \Delta &= 3.550 \text{ mm} \downarrow
\end{aligned}$$

Para la rotación:

$$\begin{aligned}
\theta_A &= \int_0^{0.5} \frac{1(-2x)dx}{2EI} + \int_0^1 \frac{1(-1)dx}{JG} \\
&= \frac{(0.5)^2}{EI} - \frac{1}{JG} = \\
&= \frac{0.25}{200 \times 10^6 \times 298 \times 10^{-8}} + \frac{1}{77 \times 10^6 \times 596 \times 10^{-8}} = \\
&= -0.000419 - 0.002179 = -0.002598 \text{ rad}
\end{aligned}$$

el signo menos indica que la rotación tiene sentido contrario al del momento ficticio aplicado, o sea:

$$\theta_A = 0.002598 \text{ radianes } \curvearrowright$$

4.4 MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

4.4.1 Fundamentos

En el segundo curso de Mecánica de sólidos se vio que la curvatura de una viga sometida a flexión pura está dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.14)$$

en donde ρ es el radio de curvatura, M el momento aplicado, E el módulo de elasticidad del material e I el momento de inercia de la sección transversal, con respecto a un eje normal al plano de las cargas.

Definiendo como *línea elástica* la curva que forma el eje neutro de la viga, se dijo también que por los principios del cálculo la relación entre la curvatura y la pendiente de la curva se puede expresar como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (4.15)$$

En las vigas que se presentan normalmente en la Ingeniería civil, se requiere que las deflexiones sean inferiores a 1/360 de la luz, lo cual obliga a que las pendientes sean muy pequeñas. De ahí que la ecuación anterior se puede aproximar por la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4.16)$$

Igualando las ecuaciones (4.14) y (4.16), se obtiene entonces:

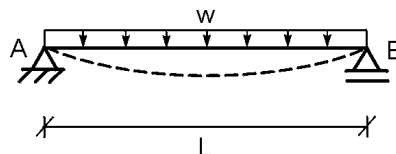
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.17)$$

que es la ecuación diferencial de la línea elástica de una viga en flexión pura. La mayoría de las vigas, sin embargo, están sometidas a corte y la ecuación (4.17) sólo serviría para evaluar la parte correspondiente a flexión. Pero también en la mayoría de ellas, como ya se dijo, las deflexiones por corte son relativamente pequeñas y pueden despreciarse.

Una primera integración de la ecuación (4.17) da la pendiente de la elástica en cualquier punto, y al integrar por segunda vez se obtiene la ecuación de la elástica misma. Las constantes de integración se obtienen a partir de las condiciones en los apoyos o de continuidad de la viga, como se recordará con los siguientes ejemplos.

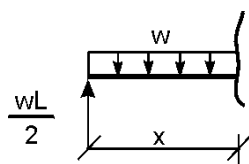
Ejemplo 4.15

Encuentre la pendiente en el apoyo y la flecha (deflexión máxima) de una viga simplemente apoyada sometida a carga uniforme:



Solución

Del diagrama de cuerpo libre:



$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

Por la ecuación (4.17):

$$EI \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

Integrando:

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{wL}{4} x^2 - \frac{wx^3}{6} + C_1 \quad (a)$$

Por simetría, la pendiente es cero en el centro de la luz.

$$\rightarrow C_1 = \frac{w}{6} \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{wL}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = -\frac{wL^3}{24}$$

reemplazando este valor en (a)

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{wL}{4} x^2 - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^3}{24} \quad (b)$$

en el apoyo A, $x = 0$

$$\rightarrow \theta_A = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = -\frac{wL^3}{24EI} \quad \text{Respuesta}$$

integrando ahora la ecuación (b):

$$EIy = \frac{wL}{12} x^3 - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^3}{24} x + C_2$$

y la ecuación de la elástica queda:

$$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

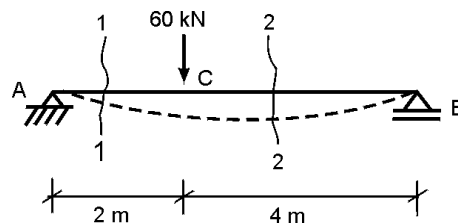
Debido a la simetría, la flecha o deflexión máxima se presenta en el centro de la luz.

$$f = (y)_{x=L/2} = -\frac{w}{24EI} \left(\frac{L^4}{16} - \frac{2L^4}{8} + \frac{L^4}{2} \right)$$

$$f = -\frac{5wL^4}{384EI} \quad \text{Respuesta}$$

Ejemplo 4.16

Encuentre la deflexión máxima, por flexión, de la viga mostrada.



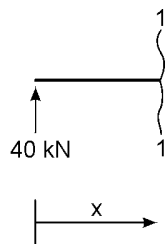
Solución

Por equilibrio:

$$R_A = \frac{60 \times 4}{6} = 40 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_B = 60 - 40 = 20 \text{ kN } \uparrow$$

Para $0 \leq x \leq 2$ es válido el siguiente diagrama de cuerpo libre:



$$M = 40x$$

$$\rightarrow EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 40x \quad (\text{a})$$

integrando:

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = 20x^2 + C_1 \quad (\text{b})$$

volviendo a integrar:

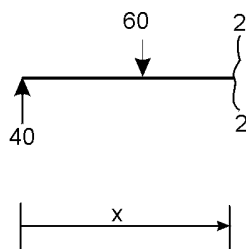
$$EIy = \frac{20x^3}{3} + C_1x + C_2$$

en

$$x = 0, y = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (\text{c})$$

$$\rightarrow EIy = \frac{20x^3}{3} + C_1x$$

Para $2 \leq x \leq 6$ se tiene otro diagrama de cuerpo libre:



$$M = 40x - 60(x - 2) = -20x + 120 \quad (\text{d})$$

$$\rightarrow EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -20x + 120$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -10x^2 + 120x + C_3 \quad (\text{e})$$

integrando de nuevo:

$$EIy = -\frac{10x^3}{3} + 60x^2 + C_3x + C_4 \quad (\text{f})$$

en el apoyo B: $y = 0, \quad x = 6$

$$\rightarrow C_4 = \frac{10(6)^3}{3} - 60(6)^2 - 6C_3 = -6C_3 - 1440$$

y reemplazando este valor en la ecuación (f):

$$EIy = -\frac{10x^3}{3} + 60x^2 + C_3x - 6C_3 - 1440 \quad (g)$$

Para evaluar las constantes C_1 y C_3 es preciso acudir a la continuidad de la viga en $x = 2$. Igualando en dicho punto las ecuaciones (b) y (e):

$$20(2)^2 + C_1 = -10(2)^2 + 120(2) + C_3$$

$$\rightarrow C_1 - C_3 = 120 \quad (h)$$

haciendo lo mismo con las ecuaciones (c) y (g):

$$\frac{20(2)^3}{3} + C_1(2) = -\frac{10(2)^3}{3} + 60(2)^2 + C_3(2) - 6C_3 - 1440$$

$$\rightarrow C_1 + 2C_3 = -640 \quad (i)$$

Restando la ecuación (h) de la ecuación (i):

$$3C_3 = -760 \quad \rightarrow \quad C_3 = -\frac{760}{3}$$

y de la ecuación (h):

$$C_1 = -\frac{400}{3}$$

Con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones:

Tramo	x	EI (dy/dx)	EI(y)
AC	0 → 2	$20x^2 - \frac{400}{3}$	$\frac{20}{3}x^3 - \frac{400x}{3}$
CB	2 → 6	$-10x^2 + 120x - \frac{760}{3}$	$-\frac{10x^3}{3} + 60x^2 - \frac{760x}{3} + 80$

La deflexión máxima se presenta en el punto de pendiente cero. Observando las ecuaciones anteriores se percibe qué ocurre entre C y B.

$$10x^2 - 120x + \frac{760}{3} = 0$$

$$\rightarrow x = 6 - \sqrt{36 - \frac{76}{3}} = 2.73 \text{ m} > 2 \quad \beta$$

y reemplazando en la ecuación correspondiente a la deflexión:

$$EI f = -\frac{10(2.73)^3}{3} + 60(2.73)^2 - \frac{760}{3}(2.73) + 80 = -232.2$$

$$f = -\frac{232.2}{EI} \quad \text{Respuesta}$$

Método alterno

Puede observarse que el método anterior conlleva la solución de cuatro ecuaciones para encontrar las cuatro constantes de integración. Esto se debe a que por cada diagrama distinto de cuerpo libre se presentan dos constantes, así que mientras mayor sea el número de aquellos más engorrosa será la solución. Sin embargo, observando las ecuaciones (a) y (d), se ve que éstas sólo difieren en el segundo término y la solución se puede simplificar mediante el uso de *funciones de singularidad* que se indican con paréntesis angulares, conviniendo que no existen para valores de x que vuelvan negativo el valor del paréntesis. En este caso particular basta escribir la ecuación (d) en la forma:

$$M = 40x - 60\langle x - 2 \rangle$$

$$\rightarrow EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 40x - 60\langle x - 2 \rangle \quad (j)$$

integrando:
$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right) = 20x^2 - 30\langle x - 2 \rangle^2 + C_1 \quad (k)$$

y volviendo a integrar:

$$EI y = \frac{20}{3} x^3 - 10\langle x - 2 \rangle^3 + C_1 x + C_2 \quad (l)$$

Aplicando ahora las condiciones de los apoyos:

$$y = 0 \text{ en } x = 0, \text{ de ahí resulta } C_2 = 0$$

$$y = 0 \text{ en } x = 6$$

$$\rightarrow 0 = \frac{20}{3}(6)^3 - 10(4)^3 + 6C_1$$

$$\rightarrow C_1 = -\frac{400}{3}$$

y reemplazando este valor en las ecuaciones (k) y (l), queda:

Para $0 \leq x \leq 2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left[20x^2 - \frac{400}{3} \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} x^3 - \frac{400}{3} x \right]$$

Para $2 \leq x \leq 6$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EI} \left[20x^2 - 30(x-2)^2 - \frac{400}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[20x^2 - 30x^2 + 120x - 120 - \frac{400}{3} \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[-10x^2 + 120x - \frac{760}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{EI} \left[\frac{20}{3} x^3 - 10x^3 + 60x^2 - 120x + 80 - \frac{400}{3} x \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{10x^3}{3} + 60x^2 - \frac{760}{3} x + 80 \right] \end{aligned}$$

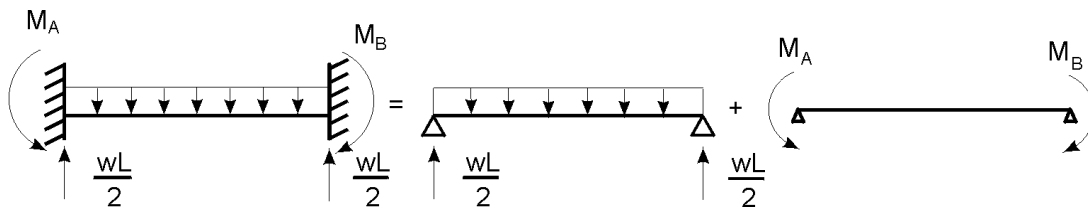
Puede observarse que las ecuaciones para dy/dx y y son idénticas a las del cuadro anterior, pero en su deducción sólo se necesitó averiguar dos constantes.

4.4.2 Cálculo directo de la ecuación de la elástica de vigas indeterminadas

El método de la doble integración puede emplearse también para resolver vigas indeterminadas, según se ilustra en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.17

Resuelva una viga doblemente empotrada, sometida a carga uniforme.



Solución

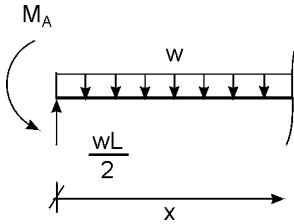
Por el Principio de superposición, la viga dada es igual a la suma de las dos vigas de la derecha.

Por simetría

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$M_A = -M_B$$

Para una sección típica:



$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - M_A$$

$$EIy'' = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - M_A \quad (a)$$

$$EIy' = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} - M_A x + C_1 \quad (b)$$

Para

$$x = 0, \quad y' = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Por simetría para $x = \frac{L}{2}$, $y' = 0$

$$\rightarrow 0 = \frac{wL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{w}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - M_A \frac{L}{2}$$

Despejando: $M_A = \frac{wL^2}{12}$ **Respuesta:** $M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$

el signo positivo indica que la dirección supuesta es la correcta. Reemplazando este valor en (b):

$$EIy = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^2}{12}x$$

$$\rightarrow EIy = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^2}{24}x^2 + C_2$$

en $x = 0$, $y = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$

$$y = \frac{w}{24EI} [2Lx^3 - x^4 - L^2x^2]$$

la deflexión máxima se presenta en el centro de la luz:

$$f = \frac{w}{24EI} \left[2L\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{L}{2}\right)^4 - L^2\left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{w}{24EI} \left[\frac{2L^4}{8} - \frac{L^4}{16} - \frac{L^4}{4} \right] =$$

$$= \frac{wL^4}{384EI} (4 - 1 - 4)$$

Respuesta: $f = -\frac{wL^4}{384EI}$

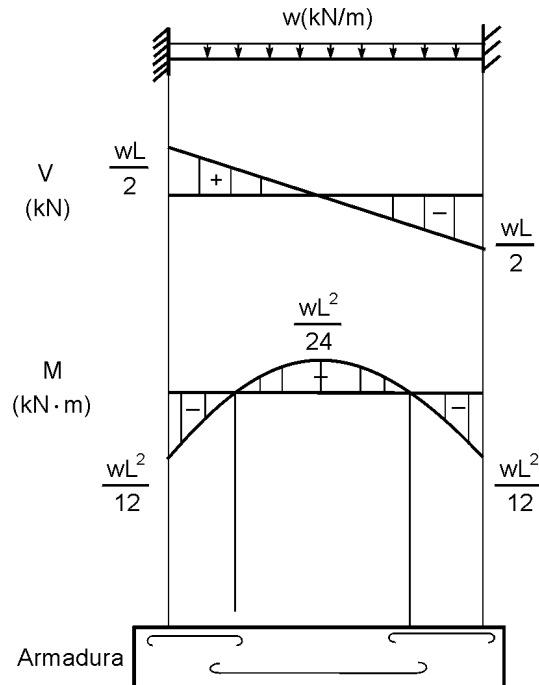
Para el diseño se requiere conocer el momento máximo positivo. Éste se presenta en el punto de corte cero, en este caso en el centro de la luz.

$$M_{C_L} - M_A = \int_0^{L/2} V \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

$$\rightarrow M_{C_L} = \frac{wL^2}{8} - \frac{wL^2}{12} = \frac{wL^2}{24}$$

Para completar el ejemplo, se ha dibujado la disposición que debe tener la armadura si la viga es de hormigón. Los puntos de anulación del momento se obtienen igualando a cero la ecuación (a):



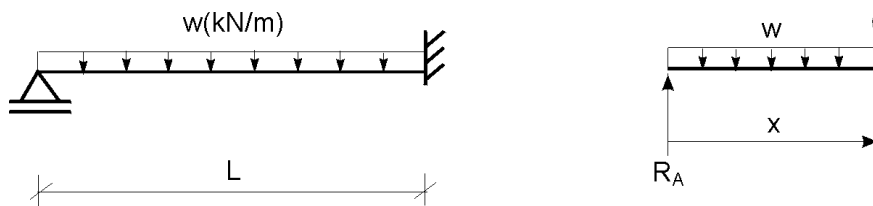
$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{12} = 0$$

$$6x^2 - 6Lx + L^2 = 0$$

$$x = \frac{L(3 \pm \sqrt{3})}{6}$$

Ejemplo 4.18

Resuelva la viga mostrada utilizando el método directo y encuentre la deflexión máxima.



Solución

Escogiendo como redundante la reacción en A, el momento en cualquier sección está dado por:

$$M = R_A x - \frac{wx^2}{2} \quad (a)$$

De ahí que

$$EIy'' = R_A x - \frac{wx^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{R_A x^2}{2} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

en B:

$$x = L, \quad y' = 0$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{wL^3}{6} - R_A \frac{L^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{R_A}{2} x^2 - \frac{wx^3}{6} + \frac{wL^3}{6} - \frac{R_A L^2}{2} \quad (b)$$

Integrando:

$$EIy = \frac{R_A}{6} x^3 - \frac{wx^4}{24} + \frac{wL^3}{6} x - \frac{R_A L^2}{2} x + C_2 \quad (c)$$

en A:

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

en B:

$$x = L, \quad y = 0$$

$$\rightarrow 0 = \frac{R_A}{6} L^3 - \frac{wL^4}{24} + \frac{wL^4}{6} - \frac{R_A L^3}{2}$$

Y despejando:

$$R_A = \frac{3}{8} wL$$

Reemplazando este valor en las ecuaciones (b) y (c):

$$EIy' = \frac{3}{16} wLx^2 - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^3}{48} \quad (d)$$

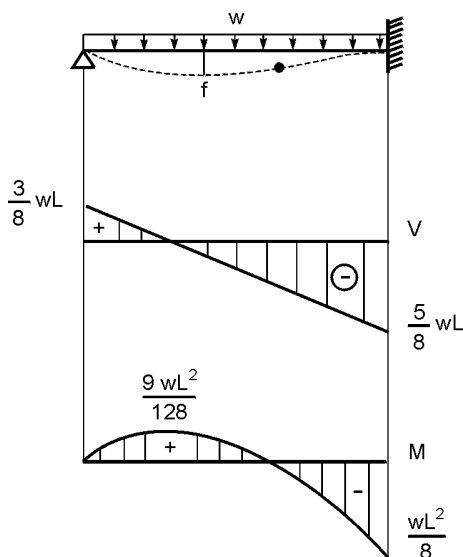
$$EIy = \frac{3}{48} wLx^3 - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^3}{48} x \quad (e)$$

De equilibrio:

$$R_B = wL - R_A = \frac{5}{8} wL$$

En B:

$$M_B = \frac{3}{8} wL \times L - \frac{wL^2}{2} = -\frac{wL^2}{8}$$



Para hallar el momento positivo máximo:

$$x = \frac{R_A}{w} = \frac{3}{8} L$$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} wL \right) \left(\frac{3}{8} L \right) = \\ &= \frac{9wL^2}{128} \end{aligned}$$

Para hallar la flecha máxima se acude a la ecuación (d), pues es necesario determinar el punto en que la pendiente de la elástica es cero.

$$EIy' = 0 = \frac{3}{16} wLx^2 - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^3}{48}$$

$$\rightarrow 8x^3 - 9Lx^2 + L^3 = 0$$

resolviendo esta ecuación cúbica por tanteos:

$$x(8x^2 - 9Lx) = -L^3$$

$$\rightarrow x = \frac{L^3}{9Lx - 8x^2}$$

llamando x' el valor calculado de la expresión de la derecha, se obtuvo el siguiente cuadro:

x (supuesto)	$9Lx$	$8x^2$	x' (calculado)
0.4 L	3.60 L ²	1.28 L ²	0.431 L
0.42 L	3.78 L ²	1.41 L ²	0.422 L
0.421 L	3.79 L ²	1.42 L ²	0.422 L
0.4215 L	3.794 L ²	1.421 L ²	0.4215 L

Por consiguiente, la deflexión máxima se presenta en $x = 0.4215 L$; reemplazando este valor en la ecuación (e):

$$EIf = \frac{3}{48} wL(0.4215L)^3 - \frac{w}{24} (0.4215L)^4 - \frac{wL^3}{48} (0.4215L)$$

$$\rightarrow f = -\frac{0.005416wL^4}{EI}$$

4.5 MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

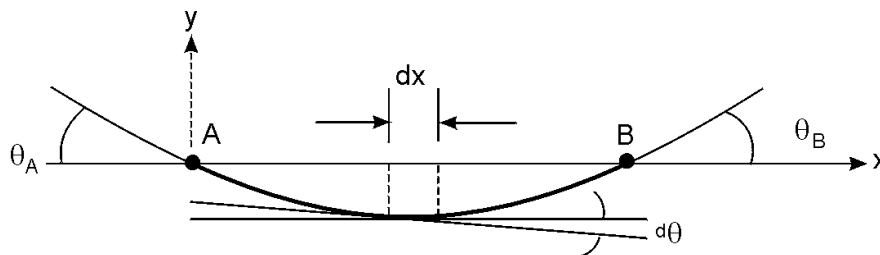
Los dos teoremas que constituyen la base de este método fueron enunciados en la Universidad de Michigan en 1873 y resultan muy útiles para el cálculo de pendientes y deflexiones de vigas y pórticos, especialmente cuando se analiza su respuesta a cargas concentradas. Los teoremas citados son:

Teorema 1

Si se tienen dos puntos A y B de la curva elástica de un elemento sometido a flexión, la diferencia en pendiente de las tangentes a la curva en esos dos puntos es igual al área del diagrama M/EI entre ellos.

Demostración

Ya se vio que para pendientes pequeñas:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M}{EI}$$

pero con el mismo supuesto:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{dy}{dx} \\ \rightarrow \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \\ d\theta &= \frac{Mdx}{EI} \\ \rightarrow \theta_B - \theta_A &= \int_A^B \left(\frac{M}{EI}\right) dx\end{aligned}\quad (4.18)$$

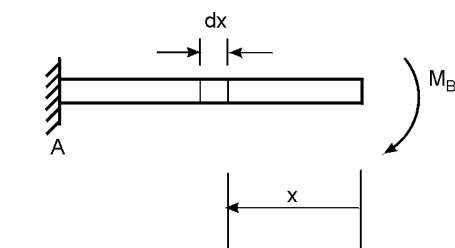
que era lo que se quería demostrar.

Teorema 2

La distancia medida verticalmente de un punto B, sobre la curva elástica de una viga a la tangente trazada en otro punto A de la misma, es igual al momento estático con respecto a B del área del diagrama M/EI entre dichos puntos.

Demostración

Considerando la viga en voladizo de la figura, y suponiendo que es rígida excepto en un tramo diferencial de longitud dx , se observa que bajo la acción del momento en B la viga se deflectará de la manera indicada. Por la ecuación (4.18):

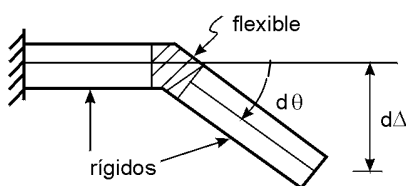


$$d\theta = \frac{M_B dx}{EI}$$

Por consiguiente:

$$d\Delta = x d\theta =$$

$$= x \frac{M_B dx}{EI}$$



La deflexión total de B al considerar toda la viga flexible es obviamente la integral de la expresión anterior a lo largo de la viga, o sea:

$$\Delta = \int_A^B d\Delta = \int_A^B x \left(\frac{M_B}{EI} \right) dx \quad (4.19)$$

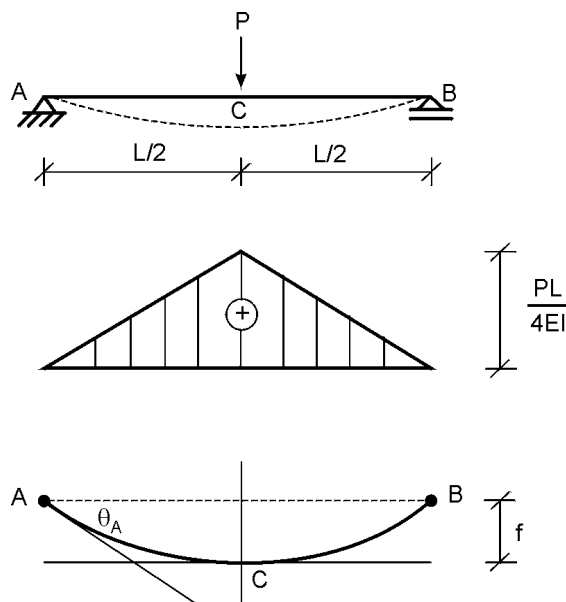
es decir, el momento del área del diagrama (M/EI) entre A y B con respecto a B. La expresión anterior se puede generalizar cuando el momento no es constante, en cuyo caso sólo sirve para evaluar la parte de la deflexión que corresponde a flexión. Además, debe tenerse en cuenta que el valor obtenido no da la deflexión absoluta, sino simplemente la distancia vertical a la tangente trazada en A, que no siempre es horizontal. Se necesitará, entonces, acudir a la geometría del conjunto para hallar la deflexión verdadera, como se explica más adelante. La expresión general queda:

$$d_{B \rightarrow \text{tg } A} = \int_A^B \left(\frac{M}{EI} \right) x dx \quad (4.20)$$

Es evidente que para aplicar exitosamente el método es imprescindible calcular correctamente los diagramas de momento, por lo cual se sugiere al estudiante repasar la parte pertinente de sus cursos de Mecánica de sólidos.

Ejemplo 4.19

Encuentre la pendiente en el apoyo y la deflexión máxima de la viga indicada.



Solución

Debajo de la viga se ha dibujado el diagrama M/EI correspondiente.

Por simetría $\theta_C = 0$; aplicando el primer teorema entre A y C:

$$\theta_C - \theta_A = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \times \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow \theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$$

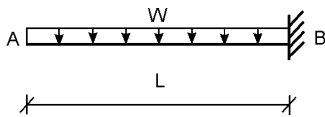
aplicando ahora el segundo teorema entre A y C, con la tangente trazada en C:

$$f = \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \times \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{48EI}$$

en que el signo positivo indica que el punto A está por encima de la tangente trazada en C.

Ejemplo 4.20

Calcule la rotación y la deflexión del extremo del voladizo mostrado.



Solución

El diagrama $\frac{M}{EI}$ es una parábola de segundo grado cuya ordenada máxima se presenta en B y vale:

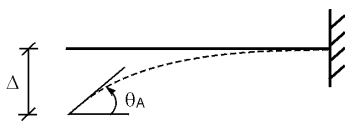
$$\frac{-wL^2}{2EI}$$

Aplicando el primer teorema entre A y B:

$$\theta_B - \theta_A = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) \times L$$

pero $\theta_B = 0$ por ser B un empotramiento

$$\rightarrow \theta_A = \frac{wL^3}{6EI}$$



y por el segundo teorema aplicado entre esos mismos puntos, con la tangente trazada en B:

$$\Delta = -\frac{wL^3}{6EI} \times \frac{3}{4} L = -\frac{wL^4}{8EI}$$

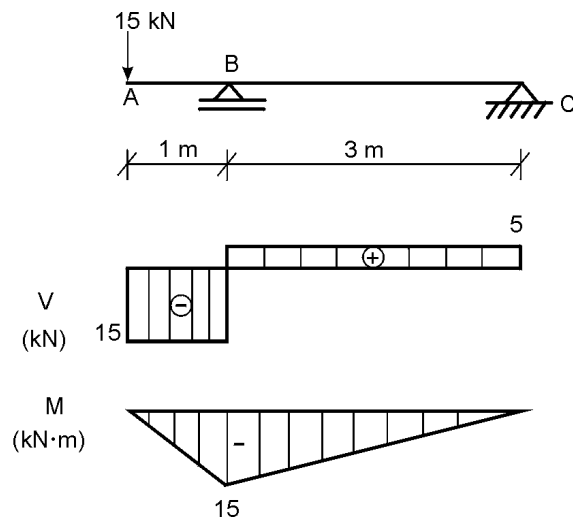
el signo negativo indica que el punto A queda por debajo de la tangente trazada en B.

Ejemplo 4.21

Una viga de madera de 100×200 mm debe soportar una carga de 15 kN aplicada en el extremo de un voladizo, como se indica en la figura. Compruebe si el diseño es apropiado, de acuerdo con los siguientes criterios:

Esfuerzo admisible en tensión o compresión	25 N/mm ²
Esfuerzo admisible en corte	18 N/mm ²
Deflexión máxima admisible	L/360
Módulo elástico	20000 N/mm ²

Despréciase el efecto del peso propio.



Solución

Con base en los diagramas de corte y momento se calculan los esfuerzos máximos. El máximo momento se presenta en B:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_B c}{I} = \frac{6M}{bh^2}$$

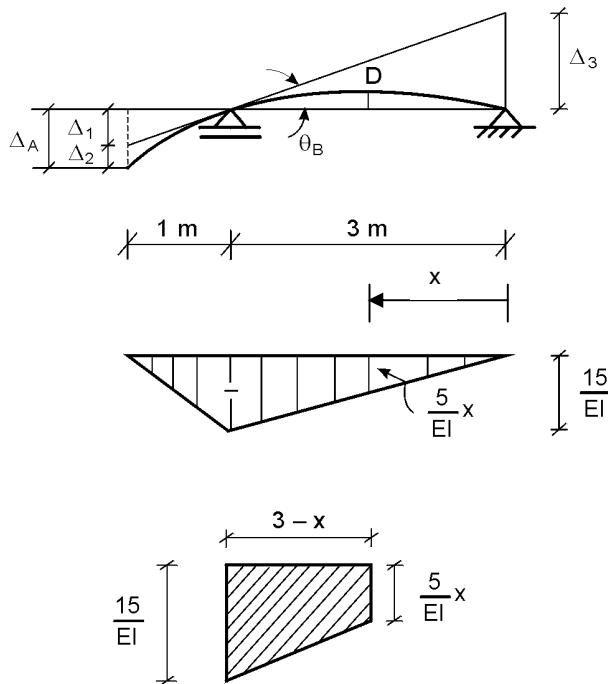
$$\rightarrow \sigma_{\max} = \frac{6 \times 15 \times 10^6}{100 \times (200)^2}$$

$$= 22.5 \text{ N/mm}^2 < 25 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \beta$$

el voladizo está sometido en toda su longitud al máximo corte. Por ser rectangular la sección:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{15000}{100 \times 200} = 1.125 \text{ N/mm}^2 \ll 18 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \beta$$

Para comprobar si se cumplen los requisitos de deflexión máxima, se puede observar de la figura siguiente que ésta no se puede determinar en forma directa, pues no se conoce de antemano ningún punto de pendiente cero.



Aplicando el segundo teorema entre B y C con tangente trazada en B:

$$\Delta_3 = \left(\frac{1}{2} \frac{15}{EI} \times 3 \right) \times \frac{2}{3} \times 3$$

$$= \frac{45}{EI}$$

y por geometría:

$$\theta_B = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{15}{EI}$$

utilizando este valor:

$$\Delta_1 = \theta_B \times 1 = \frac{15}{EI}$$

Aplicando el mismo teorema entre A y B con tangente trazada en B:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{EI} \right) \times 1 \times \frac{2}{3} (1) = \frac{5}{EI}$$

de manera que

$$\Delta_A = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{20}{EI}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{100 (200)^3}{12} = 6667 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\Delta_A = \frac{20}{2 \times 10^7 \times 6667 \times 10^{-8}} = 0.0150 \text{ m}$$

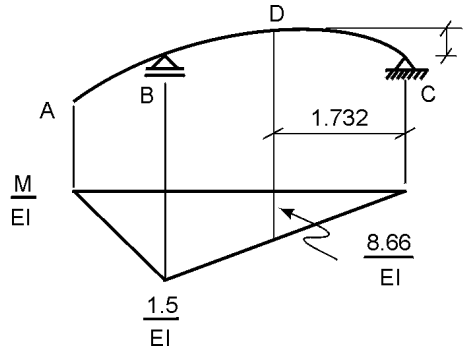
$$\frac{\Delta_A}{L} = \frac{0.0150}{1} = \frac{1}{67} > \frac{1}{360} \rightarrow \text{Inadmisibile}$$

Para encontrar la deflexión máxima entre B y C es preciso hallar primero el punto de pendiente cero, D. Esto se logra utilizando el primer teorema entre B y D y el valor hallado antes de θ_B . Con referencia a la porción achurada del diagrama M/EI:

$$\theta_D - \theta_B = -\frac{1}{2} \left(\frac{15}{EI} + \frac{5x}{EI} \right) (3-x)$$

$$0 - \frac{15}{EI} = -\frac{1}{2EI}(45 - 15x + 15x - 5x^2)$$

$$\rightarrow x = \sqrt{3} = 1.732 \text{ m}$$



Aplicando el segundo teorema entre D y C con tangente trazada en D:

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{8.66}{EI} \right) (1.732) \times \frac{2}{3} 1.732 = \frac{8.66}{EI}$$

y reemplazando valores:

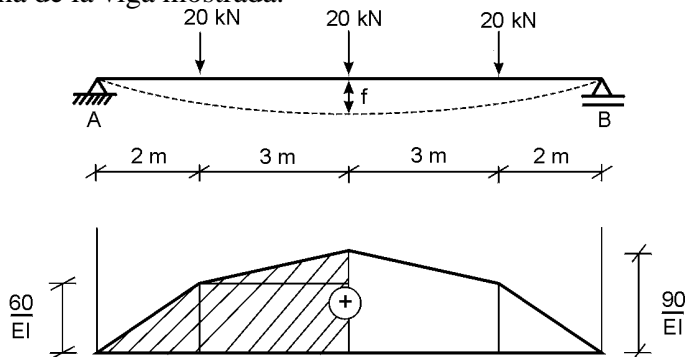
$$f = \frac{8.66}{2 \times 10^7 \times 6667 \times 10^{-8}} = 0.00650 \text{ m}$$

$$\frac{f}{L} = \frac{0.00650}{3} = \frac{1}{462} < \frac{1}{360} \quad \beta$$

En conclusión, la viga cumple los requisitos de esfuerzos y el de deflexión máxima en la luz BC, pero presenta una deflexión excesiva en el voladizo, de más de cinco veces el máximo permitido.

Ejemplo 4.22

Encuentre la flecha de la viga mostrada.



Solución

Por simetría la flecha se presenta en el centro de la luz.

$$R_A = R_B = 30 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_1 = 3 \times 20 = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = 30 \times 5 - 20 \times 3 = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

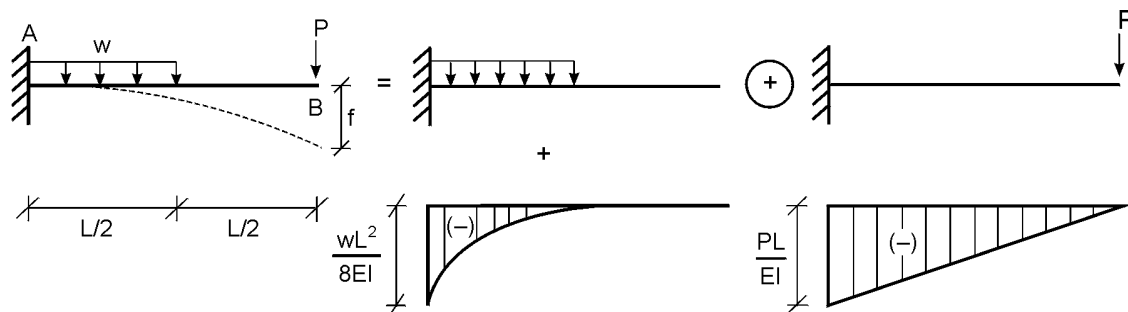
Suele ser más cómodo descomponer los trapecios en dos triángulos, o en un triángulo y un rectángulo, como se ha hecho antes.

Aplicando el segundo teorema entre A y el centro de la luz, con tangente trazada en este último punto:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \left(\frac{60}{EI} \times 2 \right) \times \frac{2}{3} (2) + \left(\frac{60}{EI} \times 3 \right) (2 + 1.5) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{30}{EI} \times 3 \right) \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{(80 + 630 + 180)}{EI} = \frac{890}{EI} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.23

Encontrar la deflexión máxima de la viga en voladizo que se indica.



Solución

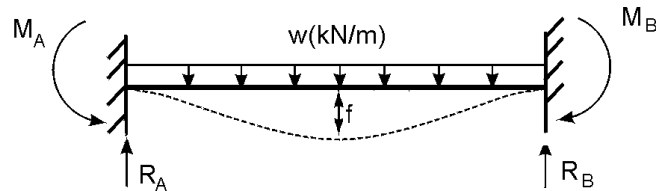
Aquí conviene emplear el Principio de superposición para facilitar la evaluación de áreas y determinación de centroides.

Aplicando el segundo teorema entre A y B, con tangente trazada en A:

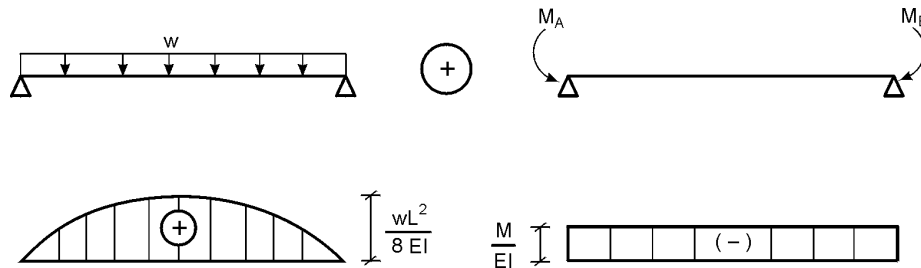
$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{3} \left(-\frac{wL^2}{8EI} \times \frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{PL}{EI} \times L \right) \times \frac{2}{3} L = \\ f &= \frac{L^3}{EI} \left(\frac{7wL}{384} + \frac{P}{3} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.24

Resuelva, por el método del Área de momentos, una viga doblemente empotrada sometida a carga uniforme.

**Solución**

Esta viga es la misma del ejemplo 4.17 y de nuevo conviene usar el Principio de superposición.



Por simetría $M_A = -M_B = M$

Aplicando el primer teorema entre A y B:

$$\theta_B - \theta_A = \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8EI} \times L - \frac{M}{EI} \times L = 0$$

$$\rightarrow M = \frac{wL^2}{12}$$

El resultado positivo indica que los signos supuestos eran los correctos.

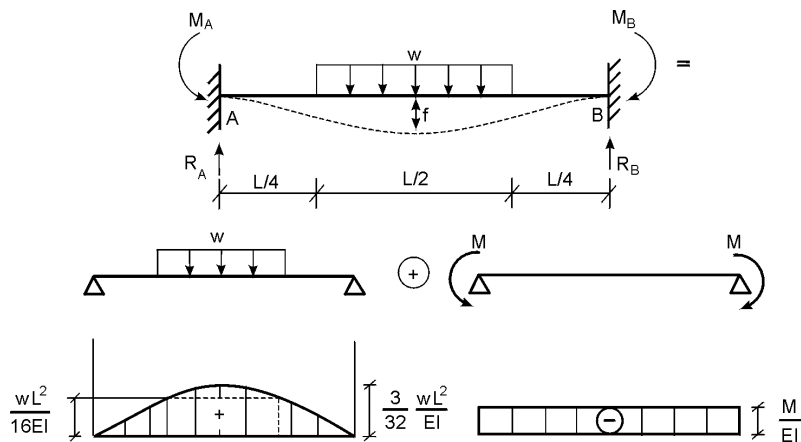
Para hallar la deflexión máxima se puede aplicar el segundo teorema entre A y el centro de la luz, con tangente trazada en A

$$f = \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{3}{8} \frac{L}{2} - \frac{M}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4} =$$

$$= \frac{wL^4}{128EI} - \frac{wL^4}{96EI} = -\frac{wL^4}{384EI}$$

Ejemplo 4.25

Resuelva la viga indicada y encuentre la deflexión máxima.



Solución

Por simetría $M_A = -M_B = M$

Utilizando la superposición indicada, se tiene para el primer caso:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \frac{wL}{2} = \frac{wL}{4} \uparrow$$

$$M_1 = \frac{wL}{4} \times \frac{L}{4} = \frac{wL^2}{16}$$

$$M_{CL} = \frac{wL}{4} \times \frac{L}{2} - \frac{w}{2} \left(\frac{L}{4} \right)^2 = \frac{3wL^2}{32}$$

Descomponiendo el diagrama M/EI en la forma indicada anteriormente y utilizando el primer teorema entre A y B:

$$\theta_B - \theta_A = 2 \times \frac{1}{2} \frac{wL^2}{16EI} \times \frac{L}{4} + \frac{wL^2}{16EI} \times \frac{L}{2} + \frac{2}{3} \frac{wL^2}{32EI} \times \frac{L}{2} - \frac{ML}{EI} = 0$$

$$\rightarrow M = wL^2 \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} \right) = \frac{11wL^2}{192}$$

El momento máximo positivo será entonces:

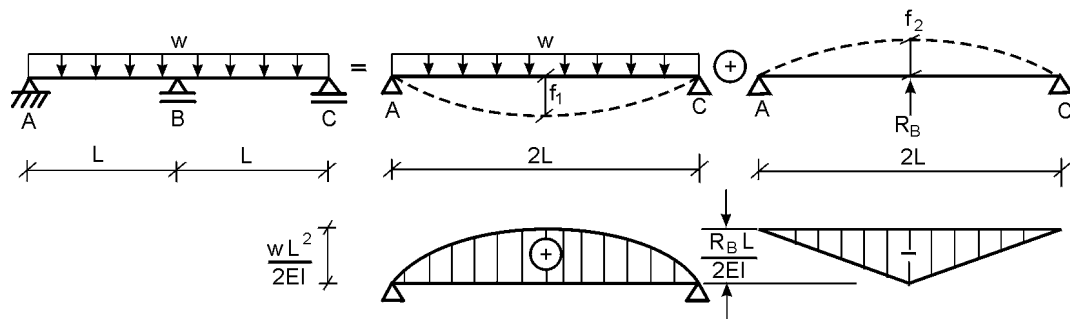
$$M_{CL} = \frac{3wL^2}{32} - \frac{11wL^2}{192} = \frac{7wL^2}{192}$$

Aplicando ahora el segundo teorema entre A y el centro de la luz con tangente en el primer punto:

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{2} \left(\frac{wL^2}{16EI} \times \frac{L}{4} \right) \times \left(\frac{L}{4} + \frac{1L}{3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{wL^2}{16EI} \times \frac{L}{4} \right) \times \frac{L}{8} + \\
 &+ \frac{2}{3} \left(\frac{wL^2}{32EI} \times \frac{L}{4} \right) \times \frac{3L}{8 \cdot 4} - \frac{11wL^2}{192} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4} = \\
 &= \frac{wL^4}{128EI} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{11}{12} \right) = -\frac{13wL^4}{6144EI}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.26

Resuelva la viga indicada por el método del Área de momentos.



Solución

Por las condiciones de apoyo y con referencia a la descomposición anterior:

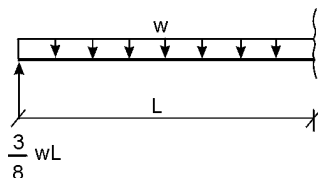
$$\Delta_B = f_1 + f_2 = 0$$

Aplicando a cada caso el segundo teorema entre A y B con tangente trazada en B:

$$0 = \frac{2}{3} \frac{wL^2}{2EI} \times L \times \frac{5}{8}L - \frac{1}{2} \frac{R_B L}{2EI} \times L \times \frac{2}{3}L$$

$$\rightarrow R_B = \frac{5}{4}wL \uparrow$$

$$R_A = R_C = \frac{1}{2} \left[w(2L) - \frac{5}{4}wL \right] = \frac{3}{8}wL \uparrow$$

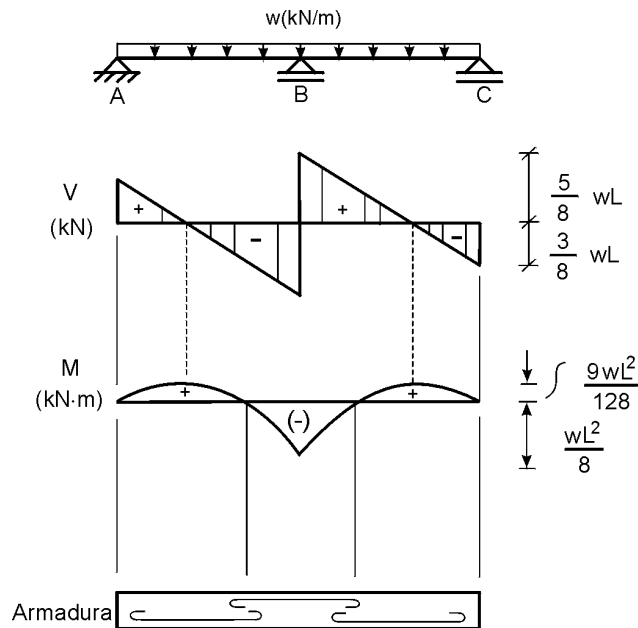


$$M_B = \frac{3}{8}wL \times L - \frac{wL^2}{2} = -\frac{wL^2}{8}$$

Para hallar el momento máximo:

$$x = \frac{R_A}{w} = \frac{3}{8}L$$

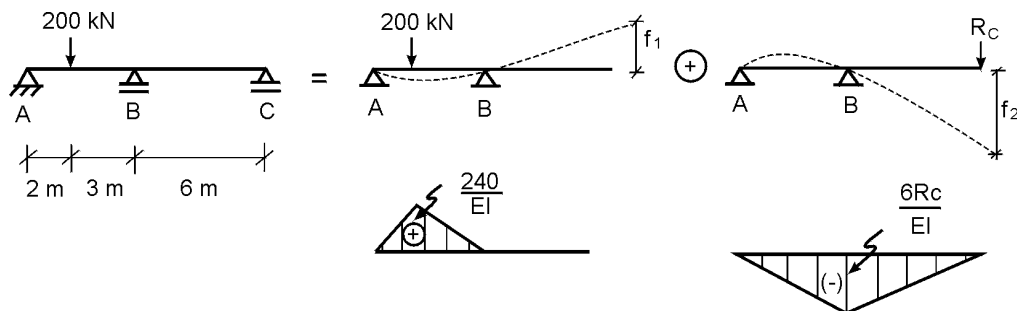
$$M_{\max (+)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}wL \times \frac{3}{8}L \right) = \frac{9wL^2}{128}$$



En la última figura se indica la localización de la armadura, suponiendo que la viga se hace de hormigón reforzado. Nótese que siempre va del lado de los esfuerzos de tensión. Obsérvese que por la simetría de la estructura y de las cargas la pendiente en B tiene que ser cero; de ahí que esta viga es equivalente a la del ejemplo 4.18, o sea una viga con un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado.

Ejemplo 4.27

Resuelva la viga mostrada considerando como redundante la reacción en C.

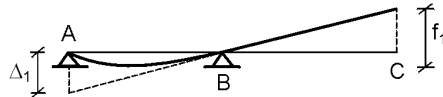


Solución

Por las condiciones de apoyo:

$$\Delta_C = 0, \quad \rightarrow \quad f_1 = f_2 \quad (a)$$

Como no se conoce en ninguno de los dos casos el punto de pendiente cero, es necesario combinar los teoremas con la geometría.

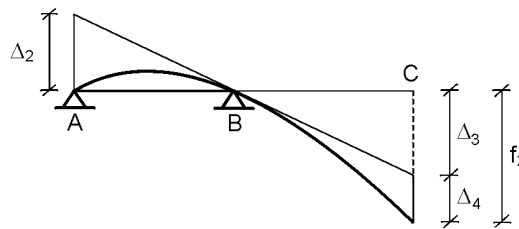


Aplicando el segundo teorema entre A y B, con tangente trazada en B:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \frac{240}{EI} \times 2 \times \frac{2}{3} (2) + \frac{1}{2} \frac{240}{EI} \times 3 \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \frac{1400}{EI}$$

y por triángulos semejantes:

$$f_1 = \frac{6}{5} \Delta_1 = \frac{1680}{EI} \quad (b)$$



Considerando ahora el segundo caso y aplicando el mismo teorema entre A y B, con tangente trazada en B:

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \frac{6R_c}{EI} \times 5 \times \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{50R_c}{EI}$$

de nuevo por triángulos semejantes:

$$\Delta_3 = \frac{6}{5} \Delta_2 = \frac{60R_c}{EI}$$

Aplicando el segundo teorema entre B y C, con tangente en B:

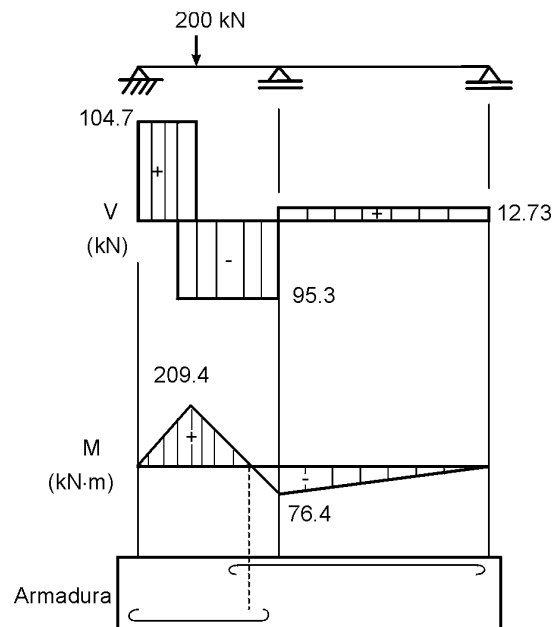
$$\Delta_4 = \frac{1}{2} \frac{6R_c}{EI} \times 6 \times \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72R_c}{EI}$$

De la figura anterior:

$$f_2 = \Delta_3 + \Delta_4 = \frac{132R_c}{EI} \quad (c)$$

e igualando las ecuaciones (b) y (c) para cumplir con lo establecido en (a)

$$\frac{1680}{EI} = \frac{132R_c}{EI} \rightarrow R_c = 12.73 \text{ kN} \downarrow$$



Por sumatoria de momentos con respecto a A:

$$R_B = \frac{12.73 \times 11 + 200 \times 2}{5} = 108.0 \text{ kN} \uparrow$$

y sumando fuerzas verticales:

$$R_A = 200 - 108 + 12.7 = 104.7 \text{ kN} \uparrow$$

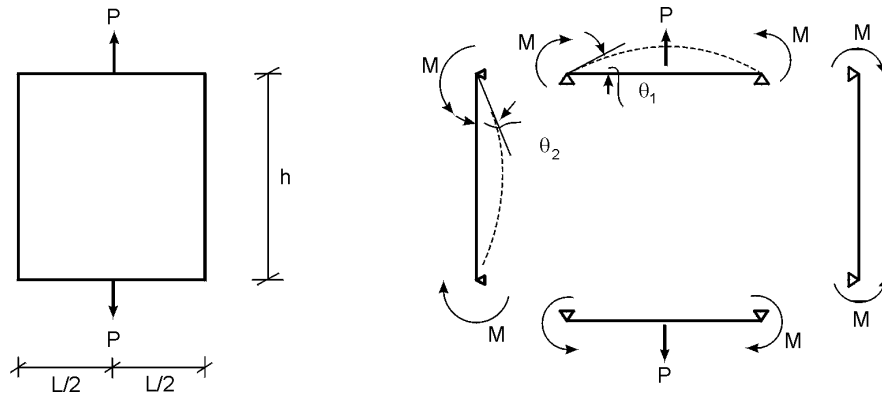
El momento máximo se presenta bajo la carga:

$$M_{\max} (+) = 104.7 \times 2 = 209.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = -12.73 \times 6 = -76.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Ejemplo 4.28

Calcule los momentos en las esquinas del marco mostrado.



Solución

El marco puede descomponerse en los cuatro elementos mostrados. Por ser rígidos los nudos:

$$\theta_2 = \theta_1 \tag{a}$$



Para el elemento horizontal, teniendo en cuenta la simetría y aplicando el primer teorema entre la esquina y el centro:

$$0 - \theta_1 = \frac{M}{EI} \times \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \times \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow \theta_1 = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{2EI}$$

que está de acuerdo con el signo de la figura.

Para el elemento vertical, con el mismo teorema aplicado entre la esquina y la mitad de la altura:



y aplicando la condición (a) a las dos expresiones anteriores:

$$\frac{Mh}{2EI} = \frac{PL^2}{16EI} - \frac{ML}{2EI}$$

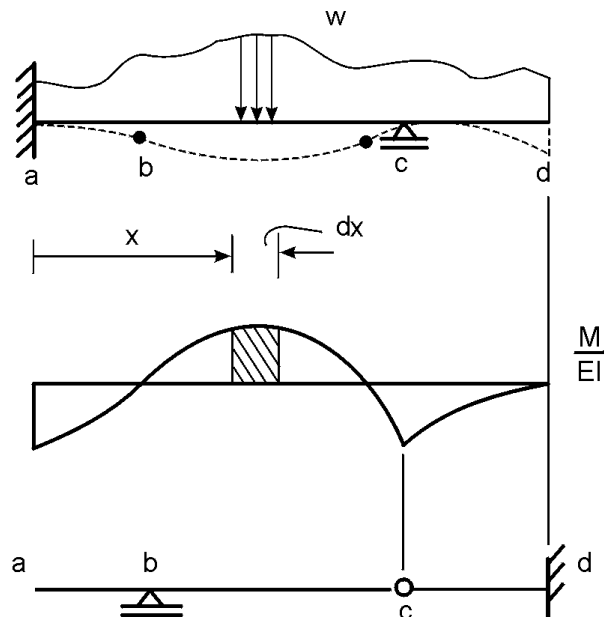
$$\rightarrow M = \frac{PL^2}{8(h+L)} = \frac{PL}{8} \left(\frac{1}{1+h/L} \right)$$

4.6 MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Este método consiste en cambiar el problema de encontrar las pendientes y deflexiones causadas en una viga por un sistema de cargas aplicadas, por otro problema en que se averiguan las fuerzas de corte y momentos de una viga especial, llamada viga conjugada, que está cargada con el diagrama M/EI de la viga original.

En relación con el método de Área de momentos, tiene la ventaja de que no necesita conocer previamente un punto de tangente cero y, por consiguiente, en todos los casos se puede averiguar directamente la pendiente y deflexión de cualquier punto de la elástica. Por otra parte muchos ingenieros de estructuras prefieren trabajar con fuerzas de corte y momentos en lugar de integrales.

En la figura de abajo se presenta una viga sometida a una carga de intensidad variable, la cual produce el diagrama M/EI indicado. En la deducción de los teoremas de Área de momentos se llegó a la ecuación:



$$\Delta\theta = \int d\theta = \int \frac{Mdx}{EI} \quad (4.19)$$

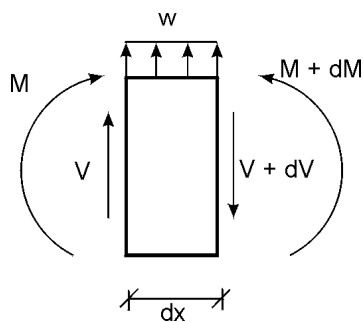
y también:

$$dy = \theta(dx) = \int \left(\frac{M dx}{EI} \right) dx$$

Si se integra esta última expresión:

$$\Delta y = \int_A^B dy = \iint \left(\frac{M}{EI} dx \right) dx \quad (4.21)$$

Recordando ahora que en un elemento de viga de longitud dx la carga, fuerza de corte y momento están relacionados por las expresiones.



$$\frac{dV}{dx} = w$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

y que integrándolas se obtiene:

$$\Delta V = \int w dx$$

$$\Delta M = \int V dx$$

Se puede suponer que si se tiene una viga ficticia llamada *viga conjugada*, de longitud igual a la de la viga real, y sometida a una carga denominada *carga elástica* de intensidad $\bar{w} = M/EI$, las expresiones del cambio en fuerza de corte y en momento para dicha viga serán:

$$\Delta \bar{V} = \int \bar{w} dx = \int \left(\frac{M dx}{EI} \right)$$

y

$$\Delta \bar{M} = \int \bar{V} dx = \iint \left(\frac{M}{EI} dx \right) dx$$

Comparando estas ecuaciones con las (4.19) y (4.21), se ve que los lados derechos son iguales; de ahí que los izquierdos también deban serlo. Por consiguiente:

$$\Delta \theta = \Delta \bar{V}$$

$$\Delta y = \Delta \bar{M}$$

y si se prescriben condiciones de apoyo adecuadas se puede lograr que en cada caso los puntos de referencia sean cero, pudiendo escribirse entonces:

$$\theta = \bar{V} \quad (4.22)$$

y

$$y = \bar{M} \quad (4.23)$$

que en palabras se pueden expresar así:

Proposición 1

La pendiente de la elástica en cualquier sección de la viga real (θ) es igual a la fuerza de corte en la misma sección de la viga conjugada correspondiente (\bar{V}).

Proposición 2

La deflexión de cualquier punto de la viga real (y) es igual al momento en la sección correspondiente de su viga conjugada (\bar{M}).

Utilizando estas proposiciones se pueden establecer las condiciones de apoyo que debe tener la viga conjugada para que se produzca la equivalencia. Los resultados se resumen en el cuadro 4.2.

El cuadro de equivalencias se puede explicar como sigue: si el apoyo es simple habrá rotación pero no deflexión, lo cual implica que en la viga conjugada debe haber corte pero no momento, o sea las condiciones que ofrece el mismo apoyo simple. En el caso de empotramiento, en cambio, no hay ni giro ni deflexión, de tal manera que en la viga conjugada no puede haber ni corte ni momento, lo cual sólo se logra dejando dicho extremo libre. Por el contrario, si el extremo de la viga real está libre por ser un voladizo, tendrá rotación y deflexión, obligando a empotrarlo en la viga conjugada para que allí se presenten corte y momento.

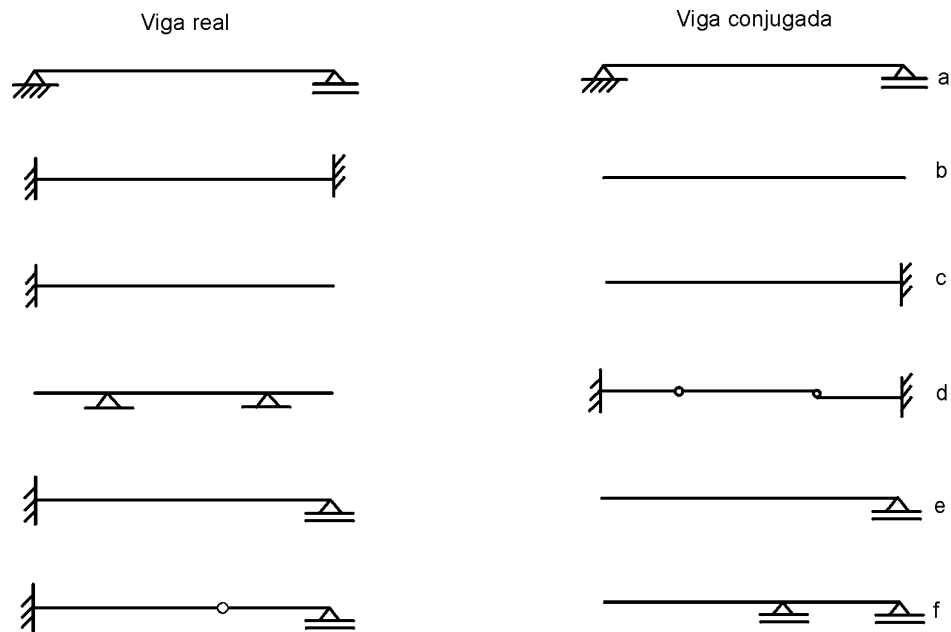
Cuadro 4.2

Equivalencia entre los apoyos de la viga real y los de la viga conjugada correspondiente

Viga real		Viga conjugada	
Tipo de apoyo	Condición	Condición equivalente	Tipo de apoyo
Simple	$\theta \neq 0$ $y = 0$	$\bar{V} \neq 0$ $\bar{M} = 0$	Simple
Empotramiento	$\theta = 0$ $y = 0$	$\bar{V} = 0$ $\bar{M} = 0$	Libre
Libre	$\theta \neq 0$ $y \neq 0$	$\bar{V} \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	Empotramiento
Apoyo interior	$\theta \neq 0$ $y = 0$	$\bar{V} \neq 0$ $\bar{M} = 0$	Articulación
Articulación interior	$\theta \neq 0$ $y \neq 0$	$\bar{V} \neq 0$ $\bar{M} \neq 0$	Apoyo interior

En los apoyos interiores de la viga real no hay deflexión, pero la pendiente debe ser la misma a lado y lado de cada uno de ellos; por consiguiente, este tipo de apoyo se debe reemplazar, en la viga conjugada, por una articulación que brinda momento nulo e igual fuerza de corte a uno y otro lados. Cuando se presenta una articulación en la viga real, el raciocinio inverso es completamente válido, de ahí que deba reemplazarse por un apoyo interior en la viga conjugada.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las reglas establecidas en el cuadro citado.



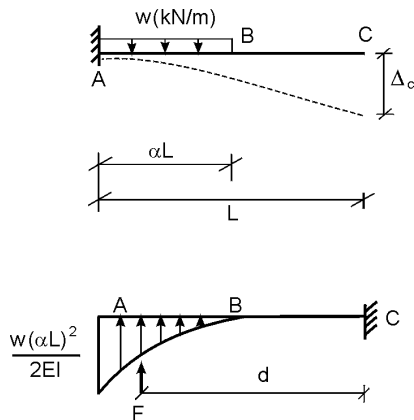
Se observa que, a diferencia de la viga real, la viga conjugada puede ser inestable en sí misma (casos b y e). Una vez cargada con el diagrama M/EI , se mantendrá en equilibrio inestable bajo su acción. También conviene anotar que en todos los casos la viga conjugada debe ser determinada, pues una viga conjugada indeterminada requeriría una viga real inestable.

Si la viga conjugada se carga con el diagrama (M/EI) del lado de compresión de la viga real, a un momento positivo en aquella corresponde una deflexión hacia abajo (negativa) de ésta, y a un corte positivo en la viga conjugada un giro en sentido horario (pendiente negativa) de la viga real. Es importante recordar esto para evitar confusiones, especialmente cuando se trata de establecer ecuaciones de compatibilidad de deformaciones en la solución de vigas indeterminadas.

La extensión del método de la viga conjugada a la solución de pórticos simples recibe el nombre de Método de la estructura conjugada.

Ejemplo 4.29

Mediante el método de la viga conjugada, encuentre la deflexión en el punto C del voladizo mostrado, suponiendo EI constante.

Solución

Al lado se muestra la viga conjugada correspondiente. Calculando la fuerza equivalente y tomando momentos con respecto al punto C, se obtiene:

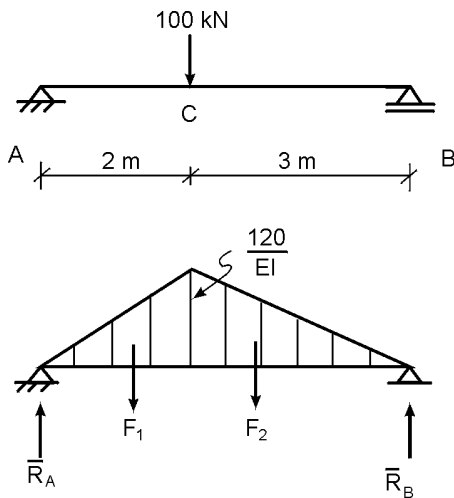
$$F = \frac{1}{3} \frac{w(\alpha L)^2}{2EI} \times \alpha L = \frac{w(\alpha L)^3}{6EI}$$

$$d = L - \frac{\alpha L}{4}$$

$$\rightarrow \Delta_C = \bar{M}_C = \frac{w(\alpha L)^3}{6EI} \left(L - \frac{\alpha L}{4} \right)$$

Ejemplo 4.30

Encuentre θ_A , θ_C y Δ_C para la viga mostrada. Halle también la deflexión máxima.

**Solución**

De estática:

$$R_A = \frac{100 \times 3}{5} = 60 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_B = 100 - 60 = 40 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_C = 60 \times 2 = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Conviene dividir el diagrama M/EI en dos triángulos y evaluar las fuerzas equivalentes:

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{120}{EI} \times 2 = \frac{120}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{120}{EI} \times 3 = \frac{180}{EI}$$

Las rotaciones en los apoyos de la viga real son iguales a las reacciones de la viga conjugada:

$$\theta_A = \bar{R}_A = \frac{120}{EI} \left[\frac{3 + 1/3(2)}{5} \right] + \frac{180}{EI} \times \frac{2}{5} =$$

$$= \frac{440}{5EI} + \frac{360}{5EI} = \frac{800}{5EI} = \frac{160}{EI}$$

$$\theta_B = \bar{R}_B = \left[\frac{120}{EI} + \frac{180}{EI} \right] - \frac{160}{EI} = \frac{140}{EI}$$

$$\Delta_C = \bar{M}_C = \frac{160}{EI} \times 2 - \frac{120}{EI} \times \frac{1}{3} (2) = \frac{1}{EI} (320 - 80) = \frac{240}{EI}$$

La deflexión máxima corresponde al máximo momento en la viga conjugada. Éste, a su vez, se presenta donde el corte es cero. Por inspección se ve qué ocurrirá entre C y B. Tomando como origen el punto B:

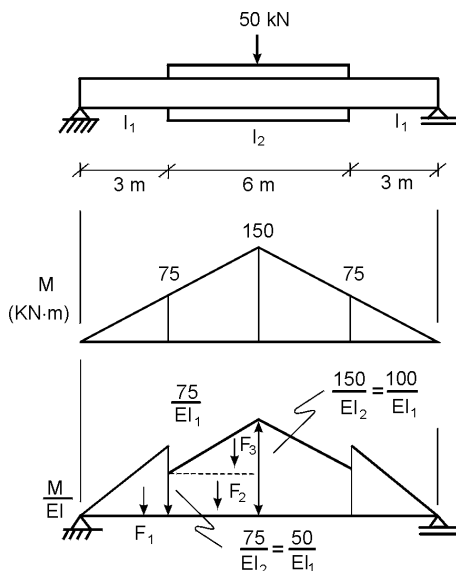
$$\bar{V} = \frac{140}{EI} - \frac{40x}{EI} \times \frac{x}{2} = 0$$

$$x = \sqrt{7} = 2.65 \text{ m}$$

$$f = \Delta_{\max} = \frac{140}{EI} \times \frac{2}{3} (2.65) = \frac{247}{EI}$$

Ejemplo 4.31

Una viga de acero se refuerza con platabandas en su mitad central, incrementando allí su inercia en un 50%. Encuentre la flecha cuando se halla sometida a una carga P de 50 kN. Despréciase el efecto del peso propio. La inercia original es $41200 \times 10^4 \text{ mm}^4$.



Solución:

Del enunciado

$$I_2 = 1.5 I_1$$

Es conveniente expresar los valores de la viga conjugada referidos a una sola inercia, en este caso I_1 .

Para mayor facilidad, la carga de ésta se ha dividido en las porciones mostradas.

$$F_1 = \frac{75}{EI_1} \times \frac{3}{2} = \frac{112.5}{EI_1}$$

$$F_2 = \frac{50}{EI_1} \times 3 = \frac{150}{EI_1}$$

$$F_3 = \frac{50}{EI_1} \times \frac{3}{2} = \frac{75}{EI_1}$$

$$\theta_A = \bar{R}_A = \frac{1}{EI_1} (112.5 + 150 + 75) = \frac{337.5}{EI_1}$$

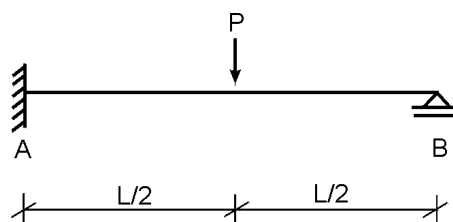
$$\begin{aligned} f = \bar{M}_{CL} &= \frac{337.5}{EI_1} \times 6 - \frac{112.5}{EI_1} \times 4 - \frac{150}{EI_1} \times \frac{3}{2} - \frac{75}{EI_1} \times 1 = \\ &= \frac{1275}{EI_1} \end{aligned}$$

y reemplazando los valores numéricos, con $E = 200000 \text{ N/mm}^2$:

$$f = \frac{1275}{200 \times 10^6 \times 41200 \times 10^{-8}} = 0.01547 \text{ m}$$

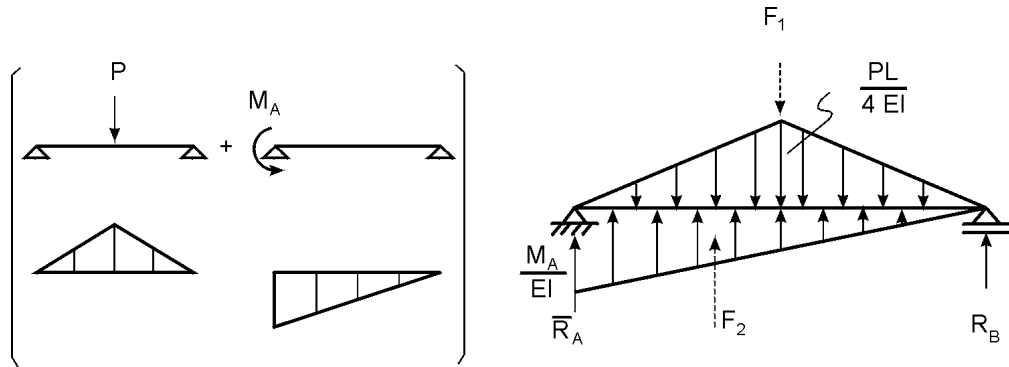
Ejemplo 4.32

Resuelva la viga indeterminada mostrada.



Solución

Considerando como redundante el momento en A, mediante el Principio de superposición se llega a la viga conjugada mostrada.



$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI} \times L = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{M_A}{EI} \times L = \frac{M_A L}{2EI}$$

Por estar empotrada en A:

$$\theta_A = \bar{R}_A = \frac{F_1}{2} - \frac{2}{3} F_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{PL^2}{8EI} = \frac{2}{3} \frac{M_A L}{2EI}$$

$$\rightarrow M_A = \frac{3PL}{16}$$

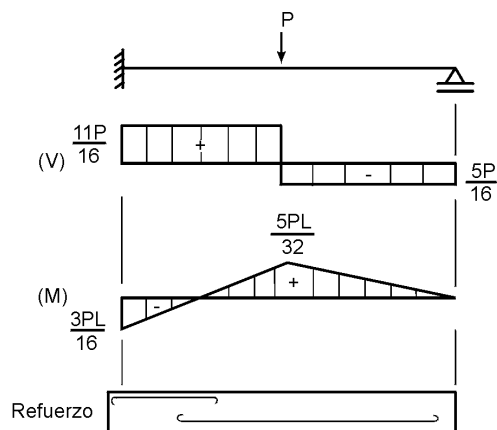
Volviendo a la viga real.

$$R_A = \frac{P}{2} + \frac{M_A}{L} = \frac{P}{2} + \frac{3P}{16} = \frac{11P}{16} \uparrow$$

$$R_B = P - R_A = \frac{5P}{16} \uparrow$$

El momento positivo máximo se presenta bajo la carga:

$$M_{\max (+)} = R_B \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5PL}{32}$$



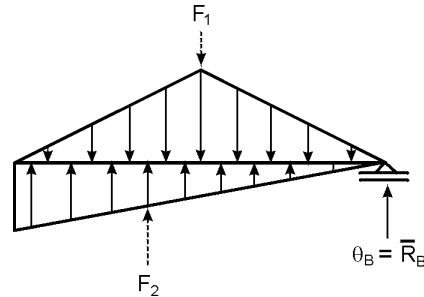
Una forma alterna de solución es trabajar con la viga conjugada de la viga original, como se ilustra al lado. En este caso se utiliza la condición de que la deflexión en B es cero.

$$\Delta_B = \bar{M}_B = F_2 \times \frac{2}{3} L - F_1 \times \frac{L}{2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{M_A L}{2EI} \times \frac{2}{3} L = \frac{PL^2}{8EI} \times \frac{L}{2}$$

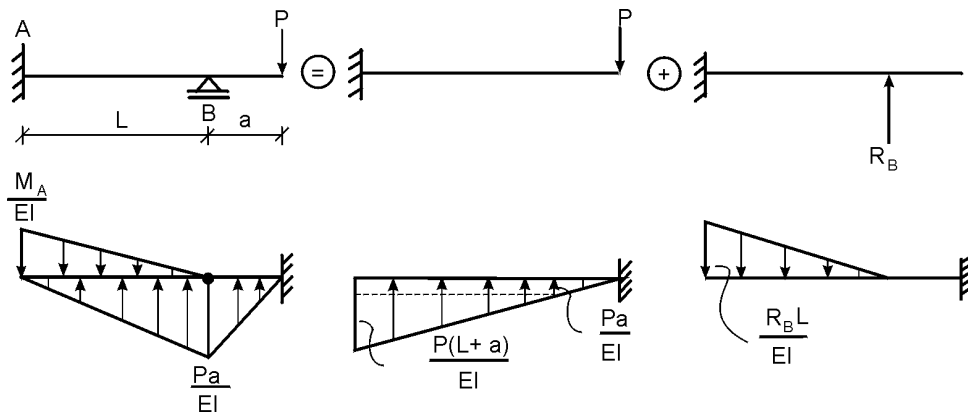
$$\rightarrow M_A = \frac{3PL}{16}$$

como antes.



Ejemplo 4.33

Resuelva la viga mostrada.



Solución

En la figura anterior se ha utilizado el Principio de superposición con R_B como redundante. La deflexión en B es cero:

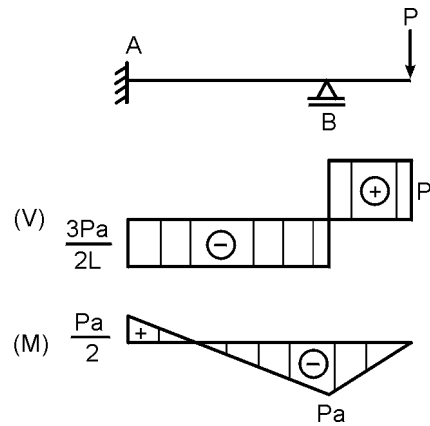
$$y_B = \bar{M}_B = \frac{R_B L}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L - \frac{Pa}{EI} \times \frac{L^2}{2} - \frac{PL}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L = 0$$

$$\rightarrow R_B = \frac{L}{3} = \frac{Pa}{2} + \frac{PL}{3}$$

$$R_B = \frac{3Pa}{2L} + P$$

$$R_A = P - R_B = -\frac{3Pa}{2L}$$

$$M_A = R_B L - P(L + a) = \frac{Pa}{2}$$



Método alternativo:

Si se trabaja con la viga indeterminada,

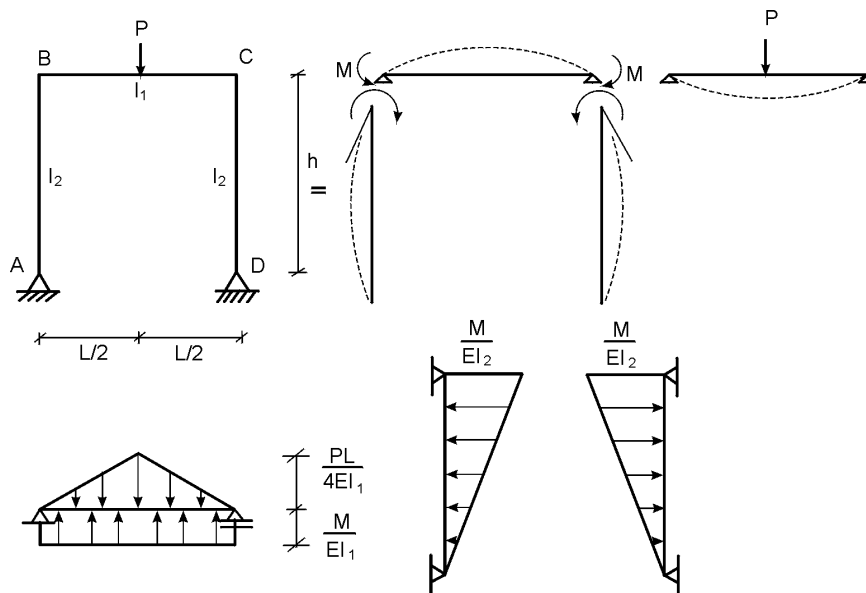
$$\bar{M}_B = \frac{M_A}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L - \frac{Pa}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} = 0$$

$$\rightarrow M_A = 3 \frac{Pa}{6} = \frac{Pa}{2}$$

como antes.

Ejemplo 4.34

Resuelva el pórtico mostrado anteriormente.



Utilizando simetría y la descomposición mostrada, resulta:

$$R_{VA} = R_{VD} = P/2$$

$$M_B = M_C = M$$

Para la viga:

$$\theta_{BV} = \bar{R}_{BV} = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI_1} \times \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{ML}{EI_1} = \frac{PL^2}{16EI_1} - \frac{ML}{2EI_1}$$

Para la columna:

$$\theta_{BC} = \bar{R}_{BC} = \frac{2}{3} \frac{M}{EI_2} \times \frac{h}{2} = \frac{Mh}{3EI_2}$$

Como el nudo es rígido:

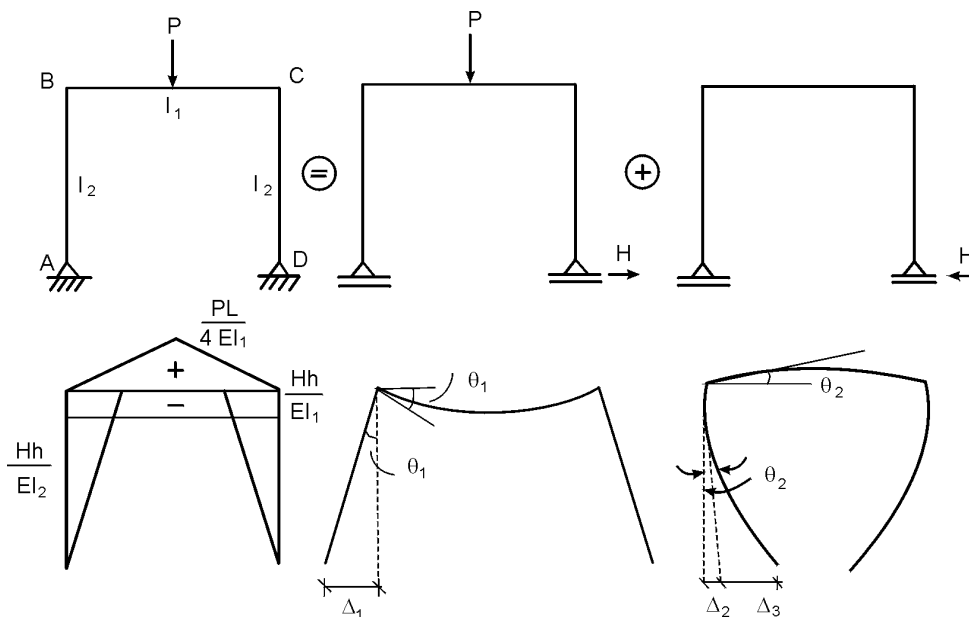
$$\theta_{BV} = \theta_{BC}$$

$$\rightarrow \frac{PL^2}{16EI_1} - \frac{ML}{2EI_1} = \frac{Mh}{3EI_2}$$

$$\rightarrow M = \frac{PL^2}{16I_1} \left[\frac{1}{h/3I_2 + L/2I_1} \right] = \frac{PL}{8} \left[\frac{1}{2hI_1/3LI_2 + 1} \right]$$

Se puede observar que si I_2 es mucho mayor que I_1 , M tiende a $PL/8$, que es el valor correspondiente a una viga doblemente empotrada, como debía ser.

También se podrían haber considerado las reacciones horizontales como redundantes. A continuación se indica el procedimiento utilizando Área de momentos.



Se tendrá entonces al considerar la viga en el primer caso:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{PL}{4EI_1} \times \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI_1}$$

$$\Delta_1 = \theta_1 h = \frac{PL^2 h}{16EI_1}$$

Y en el segundo:

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{Hh}{EI_1} \times L = \frac{HhL}{2EI_1}$$

$$\rightarrow \Delta_2 = \theta_2 h = \frac{Hh^2 L}{2EI_1}$$

Por el segundo teorema con tangente en B:

$$\Delta_3 = \left[\frac{1}{2} \frac{Hh}{EI_2} \times h \times \frac{2}{3} h \right] = \frac{Hh^3}{3EI_2}$$

Como el apoyo está fijo debe cumplirse:

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3$$

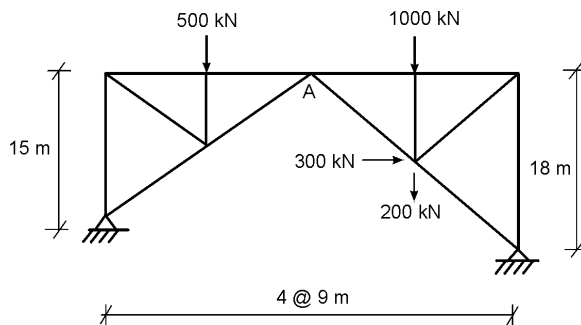
$$\frac{PL^2 h}{16EI_1} = \frac{Hh^2 L}{2EI_1} + \frac{Hh^3}{3EI_2}$$

$$\rightarrow H = \frac{PL^2}{16I_1} \left[\frac{1}{h^2 / 3I_2 + hL / 2I_1} \right]$$

$$M = Hh = \frac{PL^2}{16I_1} \left[\frac{1}{h / 3I_2 + L / 2I_1} \right] \text{ como antes.}$$

EJERCICIOS

4.1 Utilice el Teorema de Castigliano para hallar la deflexión vertical en el punto A de la siguiente armadura:



Áreas (mm^2)

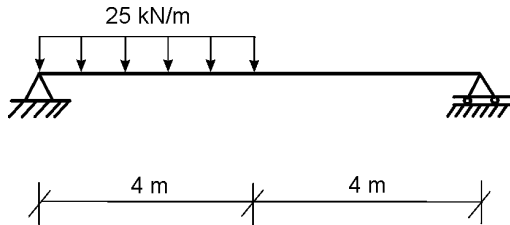
Cordón superior: 25000

Cordón inferior: 15000

Montantes y diagonales: 36000

$E = 200000 \text{ N/mm}^2$

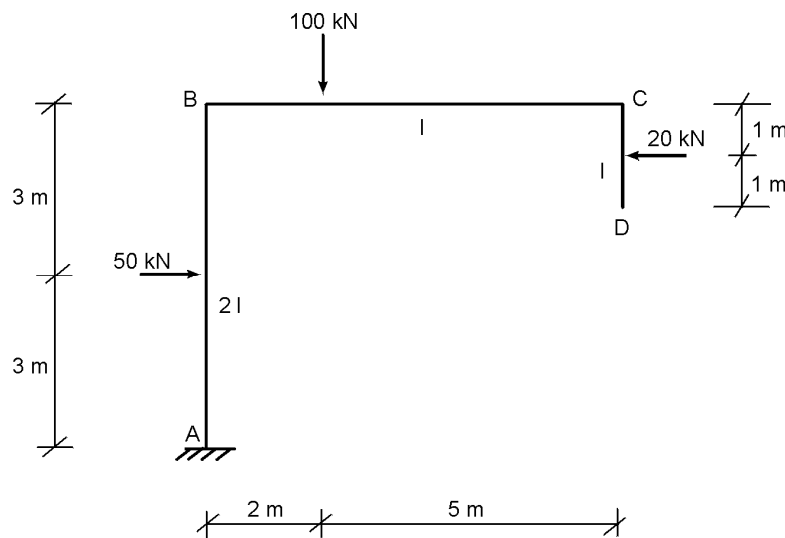
4.2 Halle con el Teorema de Castigliano el giro en el apoyo izquierdo y la deflexión en el centro de la luz de la siguiente viga:



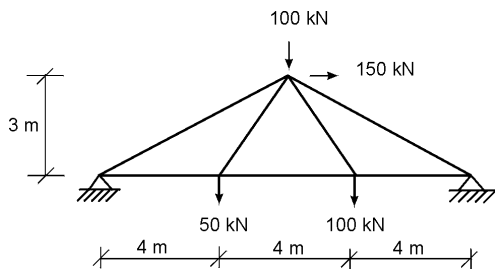
$$\begin{aligned} b &= 300 \text{ mm} \\ h &= 400 \text{ mm} \\ E &= 20000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

4.3 Verifique que al aplicar el método del trabajo virtual en los problemas 4.1 y 4.2, resulten las mismas ecuaciones obtenidas por el método de Castigliano.

4.4 Encuentre, por el Teorema de Castigliano o el método del trabajo virtual (carga unitaria), el giro en B y las deflexiones horizontal y vertical en D del pórtico mostrado. Considere únicamente los efectos de flexión.



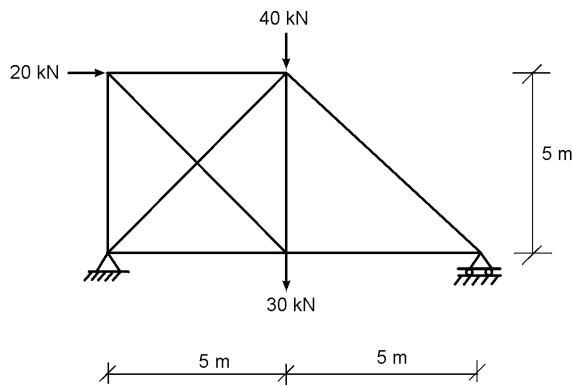
4.5 Utilice el método de energía, Castigliano o trabajo virtual, para resolver las estructuras siguientes. En las vigas y pórticos considere únicamente los efectos de flexión.



$$\begin{aligned} \text{Áreas (mm}^2\text{)} \\ \text{Cordón superior: } &10000 \\ \text{Cordón inferior: } &5000 \\ \text{Diagonales: } &8000 \end{aligned}$$

$$E = 200000 \text{ N/mm}^2$$

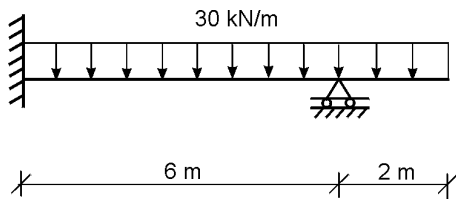
(a)



(b)

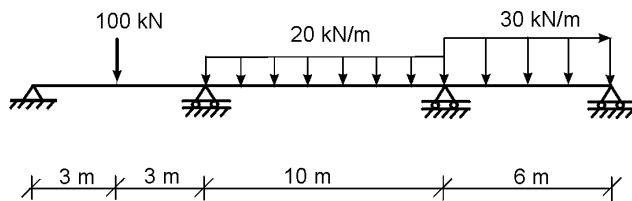
Áreas (mm^2)
 Barras exteriores: 20000
 Barras interiores: 30000

$E = 200000 \text{ N/mm}^2$



(c)

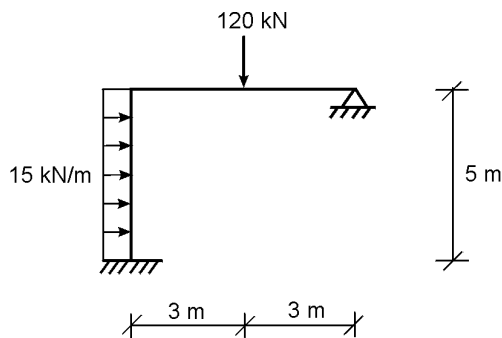
EI constante



(d)

Dimensiones ($b \times h$, mm)
 Luces extremas: 300×400
 Luz central: 300×500

$E = 20000 \text{ N/mm}^2$

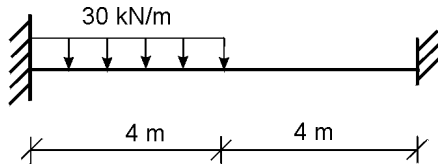


(e)

Dimensiones ($b \times h$, mm)
 Columna: 300×300
 Viga: 300×400

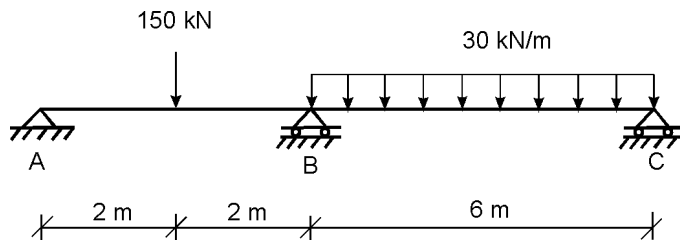
$E = 19000 \text{ N/mm}^2$

4.6 La viga de la figura tiene 300 mm de ancho y 400 mm de alto. Utilice un método de energía para resolverla y encontrar su deflexión en el centro de la luz.



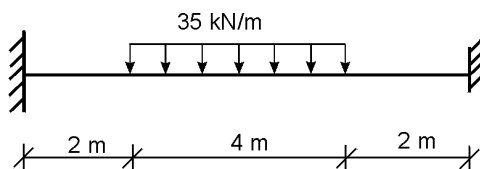
$$\begin{aligned} b &= 300 \text{ mm} \\ h &= 400 \text{ mm} \\ E &= 19000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

4.7 Resuelva, por el método de la doble integración, la viga siguiente y dibuje su elástica calculando por lo menos cuatro puntos en cada luz.



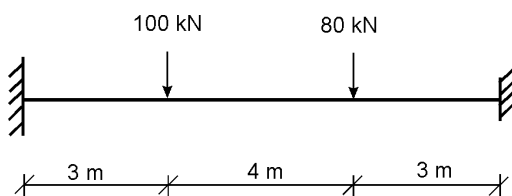
$$\begin{aligned} EI &(\text{ kN}\cdot\text{m}^2) \\ AB &= 100000 \\ BC &= 200000 \end{aligned}$$

4.8 Utilice el método de la doble integración para resolver la viga de la figura y calcular su flecha (deflexión máxima).



$$\begin{aligned} b &= 300 \text{ mm} \\ h &= 400 \text{ mm} \\ E &= 19000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

4.9 Resuelva por el método de la doble integración con funciones de singularidad, las vigas siguientes. Encuentre en cada caso la deflexión máxima.

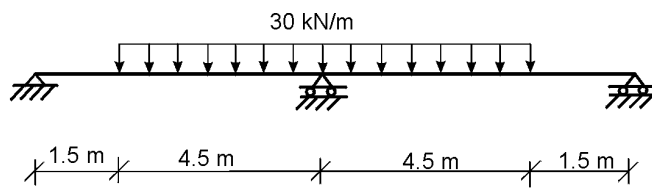


$$\begin{aligned} b \times h &= 400 \text{ mm} \times 600 \text{ mm} \\ E &= 20000 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

(a)

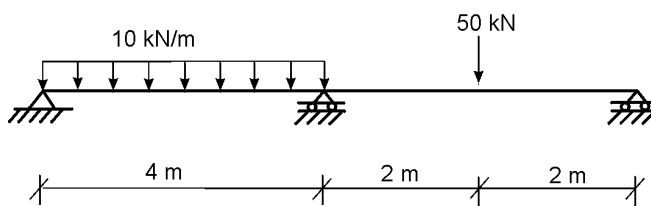
(b) La viga del ejercicio 4.6.

4.10 Resuelva por el método del área de momentos o el de la viga conjugada, las vigas siguientes:



EI constante

(a)



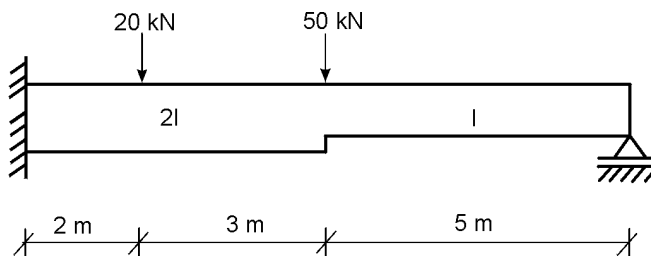
EI constante

(b)

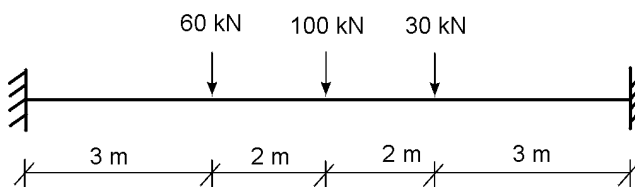
(c) La viga del ejercicio 4.8.

4.11 Utilice el método del área de momentos o el de la viga conjugada para calcular la flecha de la viga del ejercicio 4.8.

4.12 Resuelva las siguientes vigas por el método del área de momentos o el de la viga conjugada, y calcule sus deflexiones máximas.

 $EI = 120000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

(a)

 $EI = 200000 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$

(b)

REFERENCIAS

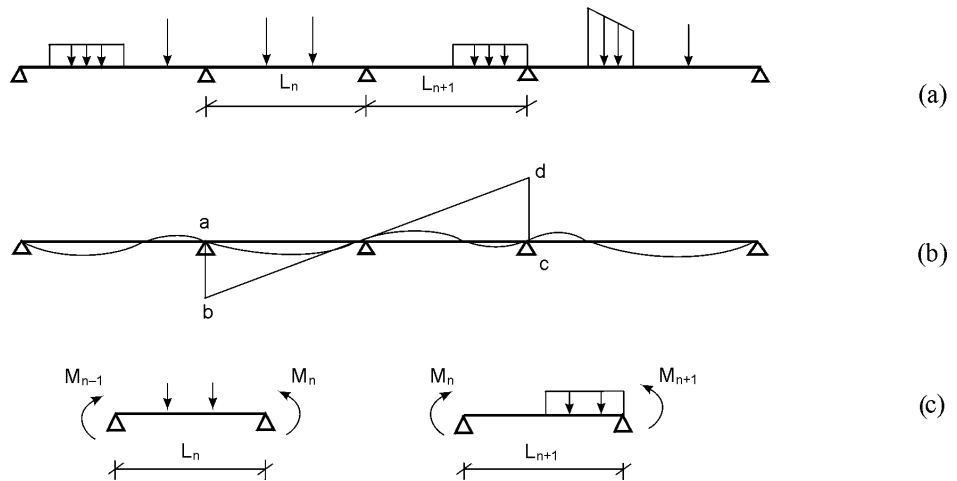
- 4.1 Kinney, J.S. - *Indeterminate Structural Analysis*, Addison - Wesley, 1957.
- 4.2 White, R.N., Gergely, P. y Sexsmith, R.G. - *Structural Engineering*. Combined Edition, John Wiley & Sons, 1976.
- 4.3 Wang, C.K. - *Indeterminate Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1983.
- 4.4 Norris, C.H., Wilbur, J.B., y Utku, S. - *Análisis elemental de estructuras*, 2a. edición, McGraw-Hill, 1982.
- 4.5 Laible, J.P. - *Análisis estructural*, McGraw-Hill, 1988.
- 4.6 Hsieh, Y.Y. - *Elementary Theory of Structures*, 3rd. edition, Prentice-Hall International, 1988.
- 4.7 West, H.H. - *Analysis of Structures*, John Wiley & Sons, 1980.

Este capítulo comprende dos métodos de particular importancia. La ecuación de los tres momentos es sumamente útil en la solución de vigas continuas, y el método de *Ángulos de giro y deflexión* introduce conceptos fundamentales, indispensables para una mejor comprensión de otros métodos que se verán más adelante.

5.1 ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

5.1.1 Teoría

Supóngase la viga mostrada en la figura, de la cual se sabe que en los apoyos extremos no existe momento.



Considerando la pendiente de la elástica en un apoyo intermedio cualquiera, de la semejanza de los triángulos formados en la figura (b) se obtiene:

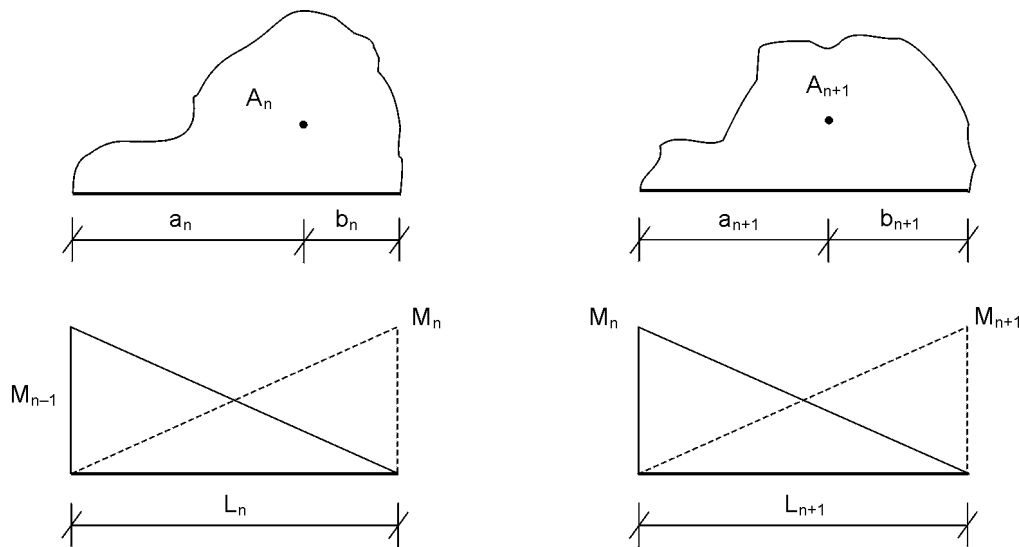
$$\frac{\overline{ab}}{L_n} = -\frac{\overline{cd}}{L_{n+1}}$$

$$\rightarrow (\overline{ab})L_{n+1} = -(\overline{cd})L_n \tag{a}$$

Nótese que es indispensable tener en cuenta los signos. En la figura (c) se presentan separados los tramos respectivos de viga, que se pueden tratar entonces como vigas simplemente apoyadas con momentos redundantes en sus extremos.

En el caso general, los diagramas de momentos debidos a las cargas aplicadas tendrán áreas A_n y A_{n+1} con sus centroides localizados como se indica en las siguientes figuras.

En la parte inferior, a su vez, se han dibujado los diagramas correspondientes a los momentos en los apoyos. Obsérvese que los signos empleados son los correspondientes a momentos internos de las vigas.



Aplicando el segundo teorema del área de momentos, se obtiene:

$$\overline{ab} (EI)_n = (A_n a_n) + M_{n-1} \frac{L_n}{2} \times \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_n}{2} \times \frac{2}{3} L_n$$

$$\overline{cd} (EI)_{n+1} = (A_{n+1} b_{n+1}) + M_n \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{2}{3} L_{n+1} + M_{n+1} \times \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{L_{n+1}}{3}$$

Si la viga tiene inercia constante en todas las luces, al reemplazar estos valores en la ecuación (a) y simplificar se llega a:

$$\begin{aligned} & (A_n a_n) L_{n+1} + M_{n-1} \frac{(L_n)^2}{6} L_{n+1} + M_n \frac{(L_n)^2}{3} L_{n+1} \\ & = -A_{n+1} b_{n+1} L_n - \frac{M_n (L_{n+1})^2}{3} L_n - M_{n+1} \frac{(L_{n+1})^2}{6} L_n \end{aligned}$$

y dividiendo ambos lados por $L_n L_{n+1}$:

$$M_{n-1} \frac{L_n}{6} + M_n \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_{n+1}}{3} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{6} = -A_n \frac{a_n}{L_n} - A_{n+1} \frac{b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

Finalmente, al multiplicar todos los términos por seis se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} \\
 &= -\frac{6A_n a_n}{L_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

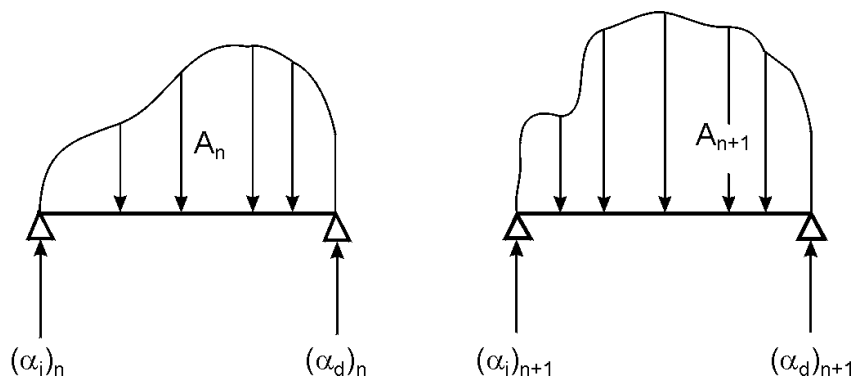
que constituye la Ecuación de los tres momentos para vigas continuas de sección constante.

El procedimiento consiste, entonces, en tomar porciones de viga formadas por dos tramos consecutivos y aplicarles la ecuación (5.1).

Resulta, así, un sistema de ecuaciones cuya solución da los momentos en los apoyos.

Una forma alterna de la Ecuación de los tres momentos se obtiene al observar que los términos de la derecha de la ecuación son simplemente las reacciones de las vigas conjugadas correspondientes, multiplicadas por EI.

Queda entonces:



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}
 \tag{5.2}$$

Para aplicar la ecuación anterior resultan útiles tablas como la (5.1), que dan de una vez las reacciones de la viga conjugada para diversas solicitaciones de carga.

Cuando los extremos de las vigas descansan sobre apoyos simples o están en voladizo, se empieza por establecer los valores de los momentos correspondientes; por el contrario, en un extremo empotrado no se puede determinar *a priori* el valor del momento. En este caso, dado que la condición geométrica requerida es que la pendiente en dicho apoyo debe ser cero, se puede añadir una luz imaginaria adyacente al empotramiento de cualquier longitud L_o , simplemente apoyada en el apoyo opuesto y de inercia infinita, como se observa en la primera figura de la página 166.

Tabla 5.1

Momentos de empotramiento y rotaciones en los apoyos para casos comunes de carga

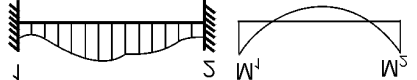
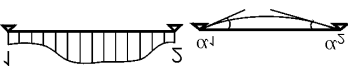
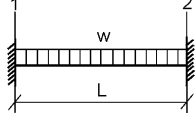
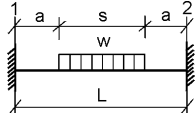
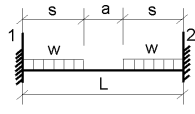
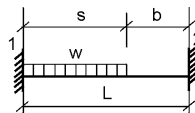
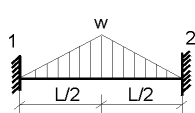
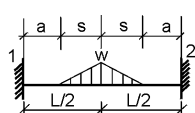
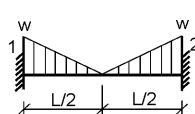
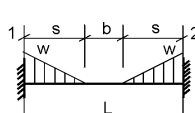
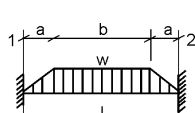
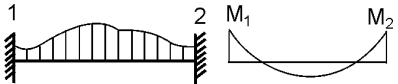
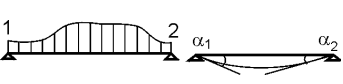
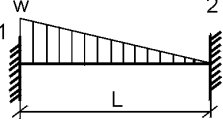
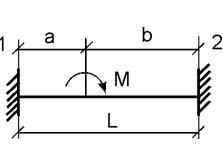
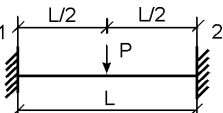
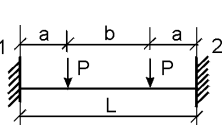
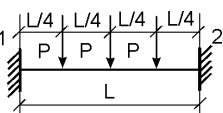
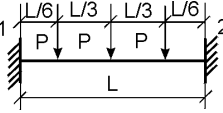
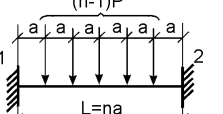
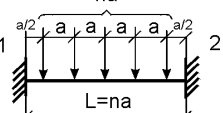
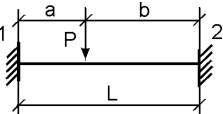
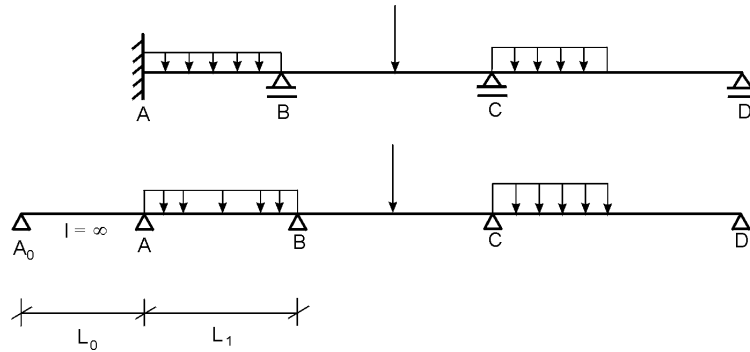
Diagramas de carga		
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{12}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{24}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws}{24L}(3L^2 - s^2)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - s^2)$
	$M_1 = M_2 = \frac{ws^2}{6L}(2L + a)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{12}(2L + a)$
	$M_1 = \frac{ws^2}{12L^2}[2L(3L - 4s) + 3s^2]$ $M_2 = -\frac{ws^3}{12L^2}(4L - 3s)$	$\alpha_1 = \frac{ws^2}{24L}(2L - s)^2$ $\alpha_2 = \frac{ws^2}{24L}(2L^2 - s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5wL^2}{96}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5wL^3}{192}$
	$M_1 = M_2 = \frac{ws}{24L}(3L^2 - 2s^2)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws}{48}(3L^2 - 2s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{32}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{wL^3}{64}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws^2}{12L}(2L - s)$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ws^2}{24}(2L - s)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{w}{12L}[L^3 - a^2(2L - a)]$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{w}{24}[L^3 - a^2(2L - a)]$

Tabla 5.1

Momentos de empotramiento y rotaciones en los apoyos para casos comunes de carga (cont.)

Diagramas de carga		
	$M_1 = \frac{wL^2}{20}$ $M_2 = -\frac{wL^2}{30}$	$\alpha_1 = \frac{wL^3}{45}$ $\alpha_2 = \frac{7wL^3}{360}$
	$M_1 = M \frac{b}{L} \left(2 - \frac{3b}{L} \right)$ $M_2 = M \frac{a}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right)$	$\alpha_1 = M \frac{L}{6} \left(\frac{3b^2}{L^2} - 1 \right)$ $\alpha_2 = M \frac{L}{6} \left(1 - \frac{3a^2}{L^2} \right)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{8}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{16}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{Pa(L-a)}{L}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Pa(L-a)}{2}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5PL}{16}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5PL^2}{32}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{19PL}{72}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{19PL^2}{144}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{12} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{24} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{24} \cdot \frac{2n^2 + 1}{n}$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{PL^2}{48} \cdot \frac{2n^2 + 1}{n}$
	$M_1 = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_2 = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$\alpha_1 = \frac{Pab}{6L} (b + L)$ $\alpha_2 = \frac{Pab}{6L} (a + L)$



Al aplicarle a la porción A_0 AB la forma generalizada de la ecuación (5.1), que incluye inercias diferentes, resulta:

$$\left(M_0 \frac{L_0}{\infty} \right) + 2M_A \left(\frac{L_0}{\infty} + \frac{L_1}{I} \right) + M_B \left(\frac{L_1}{I} \right) = -\frac{6A_1 b_1}{I L_1}$$

y al tener en cuenta que $M_0 = 0$ y $L_0/\infty = 0$, se reduce a:

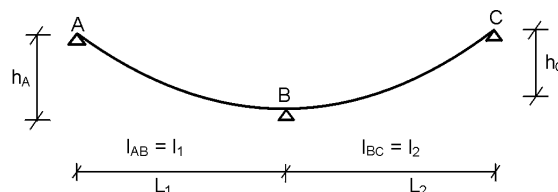
$$2M_A L_1 + M_B L_1 = -\frac{6A_1 b_1}{L_1} \quad (5.3)$$

Desde el punto de vista de aplicación, la misma ecuación resultaría si se considera que la luz imaginaria tiene longitud cero, pero vale la pena entender el por qué de la equivalencia.

La Ecuación de los tres momentos se puede extender para incluir el efecto de asentamientos diferenciales de los apoyos, llegándose a la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} M_A \left(\frac{L_1}{I_1} \right) + 2M_B \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + M_C \left(\frac{L_2}{I_2} \right) = \\ = -\frac{6A_1 a_1}{I_1 L_1} - \frac{6A_2 b_2}{I_2 L_2} + \frac{6Eh_A}{L_1} + \frac{6Eh_C}{L_2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

El significado de los últimos términos se ilustra en la figura adyacente.

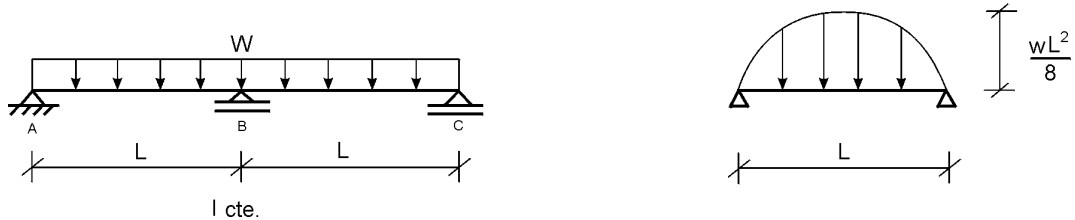


La ecuación (5.4) ha sido tomada del libro de Wang (referencia 5.1) y a él se remite al lector interesado en su deducción.

Vale la pena anotar que la Ecuación de los tres momentos es relativamente fácil de programar, incluso para el caso de tramos de sección variable como los que se suelen presentar en puentes.

Ejemplo 5.1

Resuelva, utilizando la Ecuación de los tres momentos, una viga continua de dos luces iguales sometida a carga uniforme.



Solución

En este caso se tiene:

$$A_n = A_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{wL^3}{8} = \frac{wL^3}{12}$$

$$a_n = b_{n+1} = L/2$$

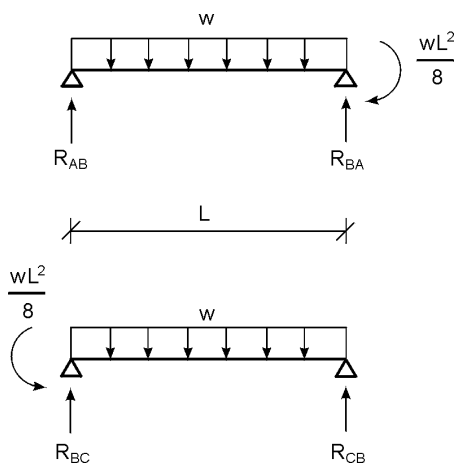
$$M_A = M_C = 0$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (5.1):

$$2M_B(L + L) = -\frac{6(wL^3/12)(L/2)}{L} - \frac{6(wL^3/12)(L/2)}{L}$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{wL^2}{8}$$

Para encontrar las reacciones se considera cada tramo:



$$R_{AB} = \frac{wL}{2} - \frac{wL^2/8}{L} = \frac{3}{8} wL \uparrow$$

$$R_{BA} = wL - \frac{3}{8} wL = \frac{5}{8} wL \uparrow$$

Por simetría:

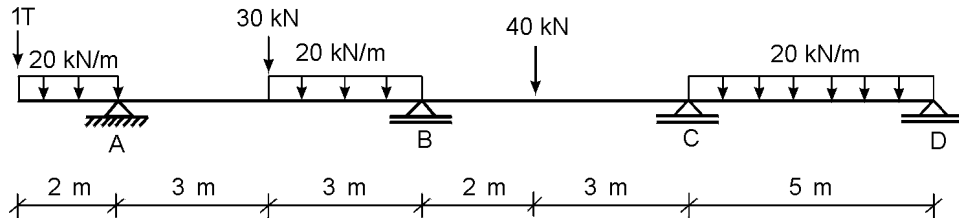
$$R_{BC} = R_{BA} = \frac{5}{8} wL \uparrow$$

$$R_{CB} = R_{AB} = \frac{3}{8} wL \uparrow$$

Se observará que todos estos valores coinciden, como era de esperarse, con los encontrados antes en el ejemplo 4.26.

Ejemplo 5.2

Resuelva la viga mostrada:



Solución

Los momentos en A y D son conocidos:

$$M_A = -10 \times 2 - 20 \times 2 \times 1 = -60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 0$$

en que el signo es el correspondiente a fuerzas internas.

Aplicando la ecuación (5.2) con la ayuda de la tabla 5.1 al sector ABC, resulta:

$$M_A L_{AB} + 2M_B (L_{AB} + L_{BC}) + M_C L_{BC} = -6\alpha_{BA} - 6\alpha_{BC}$$

$$(-60)6 + 2M_B (6 + 5) + M_C \times 5 =$$

$$= -6 \left[\frac{30 \times 36}{16} + \frac{20 \times 9}{24 \times 6} (12 - 3)^2 \right] - 6 \left[\frac{40 \times 2 \times 3}{6 \times 5} (3 + 5) \right]$$

$$-360 + 22M_B + 5M_C = -1012.5 - 384.0 = -1397$$

$$\rightarrow 22M_B + 5M_C = -1037 \quad (1)$$

Aplicando ahora la ecuación (5.2) al sector BCD, teniendo en cuenta que $M_D = 0$

$$M_B L_{BC} + 2M_C (L_{BC} + L_{CD}) + M_D L_{CD} = -6\alpha_{CB} - 6\alpha_{CD}$$

$$\rightarrow 5M_B + 20M_C = -6 \left[\frac{40 \times 2 \times 3}{6 \times 5} (2 + 5) \right] - 6 \left[\frac{20 \times 125}{24} \right]$$

$$\rightarrow 5M_B + 20M_C = -961 \quad (2)$$

Restando la ecuación (2) a cuatro veces la ecuación (1), resulta:

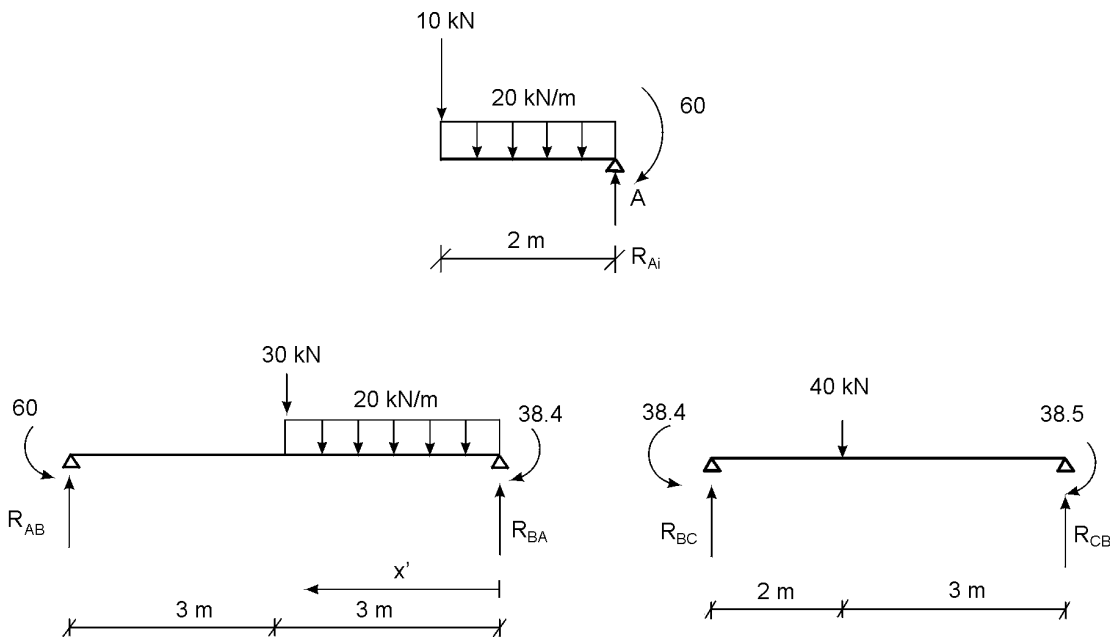
$$83 M_B = -3187$$

$$\rightarrow M_B = -\frac{3187}{83} = -38.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C = \frac{-1037 - 22M_B}{5} = \frac{-1037 - 22(-38.4)}{5}$$

$$M_C = -38.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para calcular las reacciones, de nuevo se aíslan los tramos:



$$R_{Ai} = 10 + 20 \times 2 = 50 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{AB} = \frac{30}{2} + (20 \times 3) \frac{1.5}{6} + \frac{60 - 38.4}{6} = 33.6 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{BA} = \frac{30}{2} + 60 \times \frac{4.5}{6} - \frac{21.6}{6} = 56.4 \text{ kN } \uparrow$$

Punto de anulación del corte en la primera luz:

$$x' = \frac{56.4}{20} = 2.82 \text{ m}$$

$$\rightarrow M_{\max}(+) = \frac{56.4 \times 2.82}{2} - 38.4 = 41.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

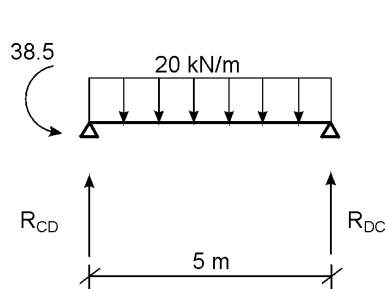
$$R_{BC} = \frac{40 \times 3}{5} - \frac{38.5 - 38.4}{5} = 24.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{CB} = 40 - 24.0 = 16.0 \text{ kN } \uparrow$$

En la segunda luz el corte se anula bajo la carga. Por consiguiente:

$$M_{\max}(+) = 24.0 \times 2 - 38.4 = 9.60 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para el último tramo:



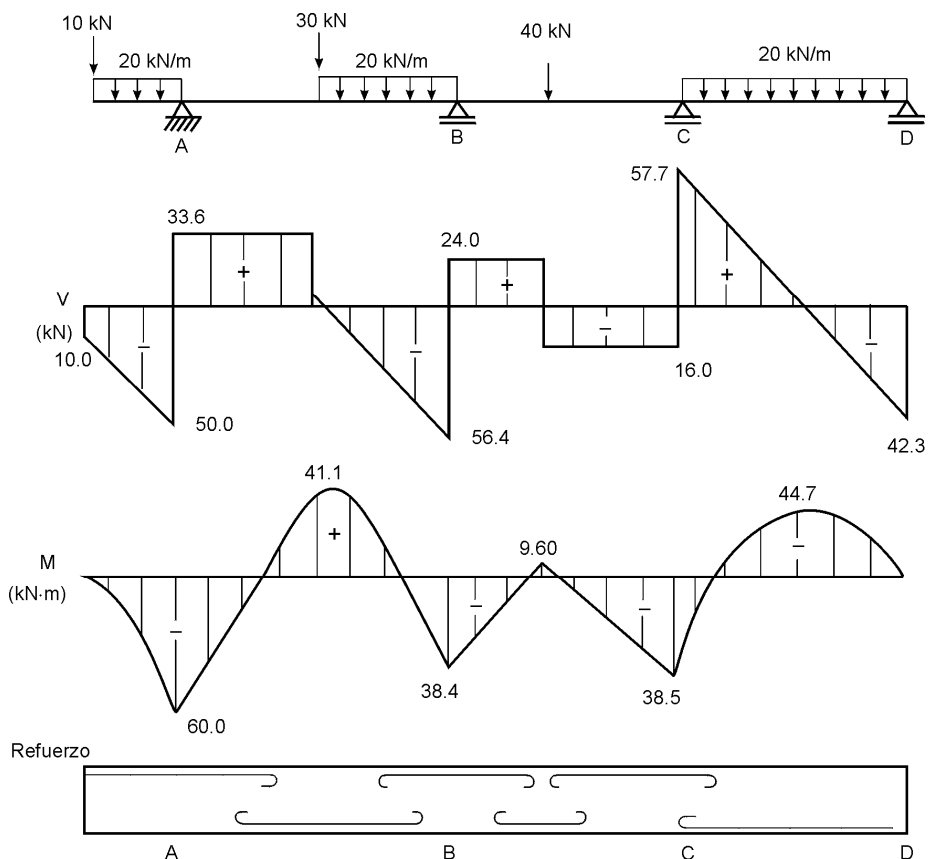
$$R_{CD} = \frac{20 \times 5}{2} + \frac{38.5}{5} = 57.7 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{DC} = 20 \times 5 - 57.7 = 42.3 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max}(+) = \frac{(R_{CD})^2}{2w} - M_C =$$

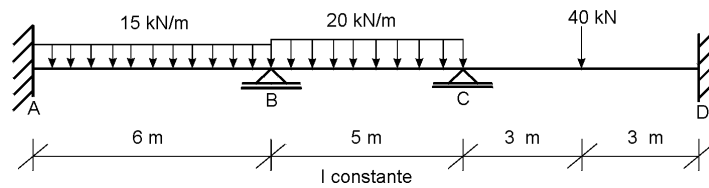
$$= \frac{(57.7)^2}{2 \times 20} - 38.5 = 44.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Los diagramas totales de corte, momento y refuerzo quedan como sigue:



Ejemplo 5.3

Resolver la viga continua con extremos empotrados que se muestra en la figura de la página siguiente.



Solución

Se aplicará la ecuación (5.3) a los tramos A_0 AB y CDD_0 y la ecuación (5.2) a los demás.

Considerando el tramo A_0 AB:

$$2M_A L_{AB} + M_B L_{AB} = -6\alpha_{AB}$$

$$2M_A \times 6 + M_B \times 6 = -6 \frac{15 \times (6)^3}{24}$$

$$\rightarrow 2M_A + M_B = -135.0 \tag{1}$$

Considerando luego el tramo ABC:

$$M_A L_{AB} + 2M_B (L_{AB} + L_{BC}) + M_C (L_{BC}) = -6\alpha_{BA} - 6\alpha_{BC}$$

$$\rightarrow M_A \times 6 + 2M_B (6 + 5) + M_C (5) = -6 \frac{15 (6)^3}{24} - 6 \frac{20 (5)^3}{24}$$

$$\rightarrow 6M_A + 22M_B + 5M_C = -1435 \tag{2}$$

Tomando ahora el tramo BCD:

$$M_B L_{BC} + 2M_C (L_{BC} + L_{CD}) + M_D (L_{CD}) = -6\alpha_{CB} - 6\alpha_{CD}$$

$$M_B \times 5 + 2M_C (5 + 6) + M_D (6) = -6 \frac{20 (5)^3}{24} - 6 \frac{40 (6)^2}{16}$$

$$\rightarrow 5M_B + 22M_C + 6M_D = -1165 \tag{3}$$

Finalmente se toma el tramo CDD_0 :

$$M_C L_{CD} + 2M_D (L_{CD}) = -6\alpha_{DC}$$

$$M_C \times 6 + 2M_D (6) = -6 \frac{40 (6)^2}{16}$$

$$\rightarrow M_C + 2M_D = -90.0 \tag{4}$$

Restando tres veces la ecuación (1) de la ecuación (2), resulta:

$$19M_B + 5M_C = -1030 \tag{5}$$

Restando ahora a la ecuación (3) tres veces la ecuación (4):

$$5M_B + 19M_C = -895 \tag{6}$$

Multiplicando la ecuación (5) por cinco y la ecuación (6) por 19:

$$95M_B + 25M_C = -5150$$

Restando la primera de la segunda:

$$336M_C = -11850 \quad \rightarrow \quad M_C = -35.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

De la ecuación (4):

$$M_D = -\frac{-90.0 - (-35.3)}{2} = -27.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

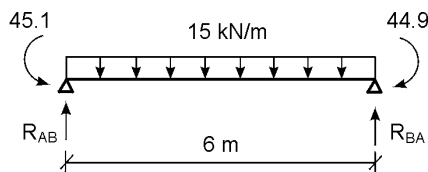
De la ecuación (6):

$$M_B = \frac{-895 - 19(-35.3)}{5} = -44.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por último, de la ecuación (1):

$$M_A = \frac{-135.0 - (-44.9)}{2} = -45.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

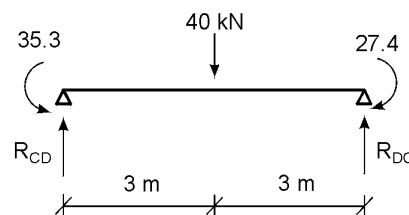
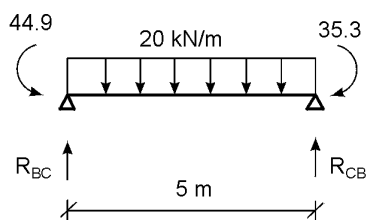
Con estos valores ya se pueden calcular las reacciones:



$$R_{AB} = 15 \times 3 + \frac{0.20}{6} = 45.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{BA} = 15 \times 3 - \frac{0.20}{6} = 45.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max (+)} = \frac{(45.0)^2}{2 \times 15} - 45.1 = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



$$R_{BC} = 20 \times 2.50 + \frac{44.9 - 35.3}{5} = 51.9 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{CB} = 100 - 51.9 = 48.1 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max (+)} = \frac{(51.9)^2}{2 \times 20} - 44.9 = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$R_{CD} = \frac{40}{2} + \frac{35.3 - 27.4}{6} = 21.3 \text{ kN } \uparrow$$

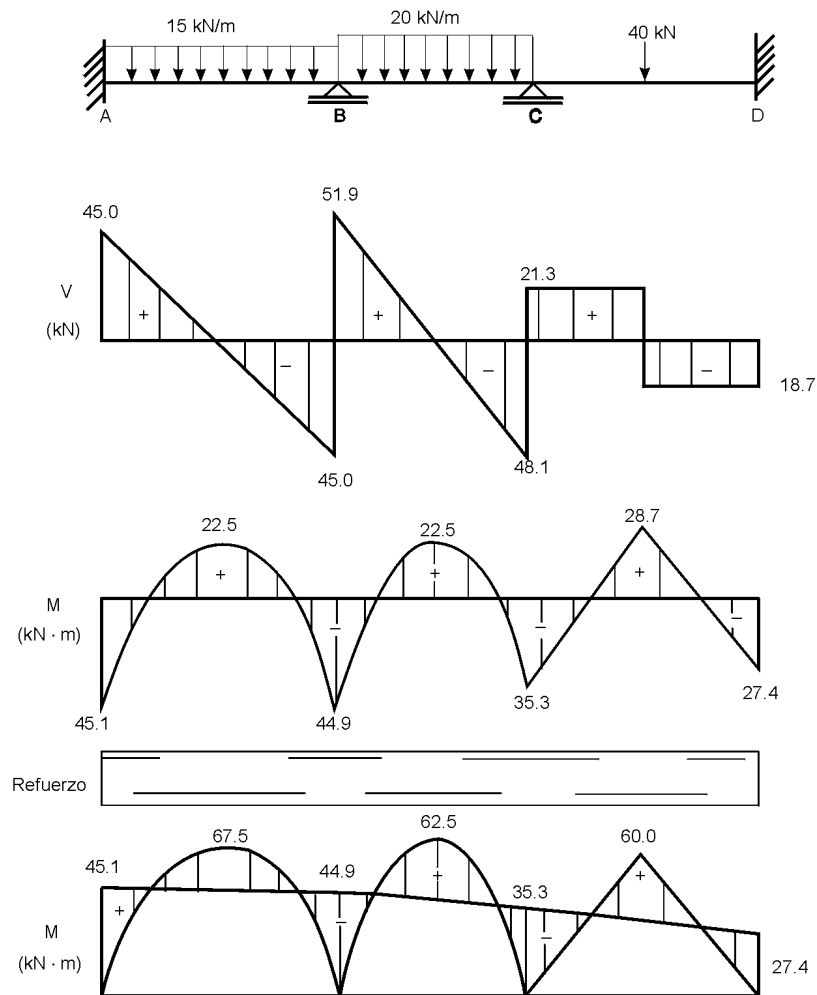
$$R_{DC} = 40 - 21.3 = 18.7 \text{ kN } \uparrow$$

El corte se anula bajo la carga. Por lo tanto:

$$\rightarrow M_{\max} (+) = 21.3 \times 3 - 35.3 = 28.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Los resultados se resumen en las gráficas siguientes.

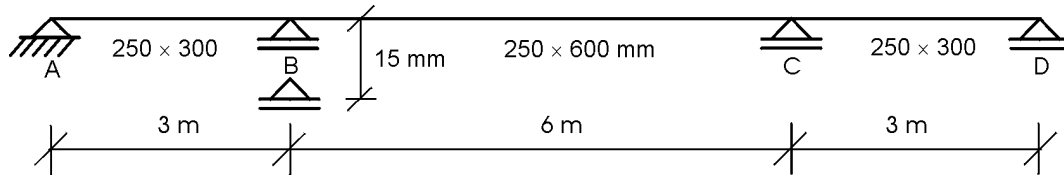
En la última figura se presenta una forma alterna de llegar al diagrama de momentos final, mediante superposición gráfica.



Ejemplo 5.4

La viga continua de la figura se hace de hormigón reforzado ($f'c = 21 \text{ N/mm}^2$) y tiene las secciones indicadas. Estúdiense el efecto de un asentamiento de 15 mm en el apoyo B.

Considérese que la inercia efectiva en cada tramo se reduce a un medio de la inercia bruta como consecuencia del agrietamiento. Verifique sus respuestas mediante las condiciones de compatibilidad, y dibuje la elástica de la viga.



Solución

Cálculo de inercias efectivas:

$$I_{AB} = I_{CD} = \frac{1}{2} \frac{250 \times (300)^3}{12} = 28125 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{BC} = \frac{1}{2} \frac{250 \times (600)^3}{12} = 225000 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Para simplificar la solución se utilizará el menor de estos valores como referencia.

$$\rightarrow I_{AB} = I_{CD} = I$$

$$I_{BC} = \frac{225000}{28125} I = 8I$$

Aplicando la ecuación (5.4) al tramo ABC, teniendo en cuenta que no hay cargas aplicadas se obtiene:

$$\frac{M_A L_{AB}}{I_{AB}} + 2M_B \left(\frac{L_{AB}}{I_{AB}} + \frac{L_{BC}}{I_{BC}} \right) + M_C \left(\frac{L_{BC}}{I_{BC}} \right) = \frac{6Eh_a}{L_{AB}} + \frac{6Eh_c}{L_{BC}}$$

$$\rightarrow \frac{M_A \times 3}{I} + 2M_B \left(\frac{3}{I} + \frac{6}{8I} \right) + M_C \left(\frac{6}{8I} \right) = \frac{6E \times 0.015}{3} + \frac{6E \times 0.015}{6}$$

$$\rightarrow 7.50M_B + 0.75M_C = 0.045EI \quad (1)$$

Considerando ahora el tramo BCD:

$$\frac{M_B L_{BC}}{I_{BC}} + 2M_C \left(\frac{L_{BC}}{I_{BC}} + \frac{L_{CD}}{I_{CD}} \right) + M_D \left(\frac{L_{CD}}{I_{CD}} \right) = \frac{6Eh_B}{L_{BC}} + \frac{6Eh_D}{L_{CD}}$$

$$\frac{M_B \times 6}{8I} + 2M_C \left(\frac{6}{8I} + \frac{3}{I} \right) + M_D \left(\frac{3}{I} \right) = \frac{6E(-0.015)}{6}$$

$$\rightarrow 0.75M_B + 7.50M_C = -0.015EI \quad (2)$$

Restando diez veces la ecuación (2) de la ecuación (1):

$$-74.25M_C = 0.195EI$$

$$\rightarrow M_C = 0.00263EI \quad (3)$$

y de la ecuación (1):

$$M_B = \frac{0.045EI - 0.75(-0.00263EI)}{7.50} = 0.00626EI \quad (4)$$

Según las *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98*, el valor de E está dado por:

$$E = 3900\sqrt{f'_c} \text{ N/mm}^2$$

$$E = 3900\sqrt{21} = 17900 \text{ N/mm}^2$$

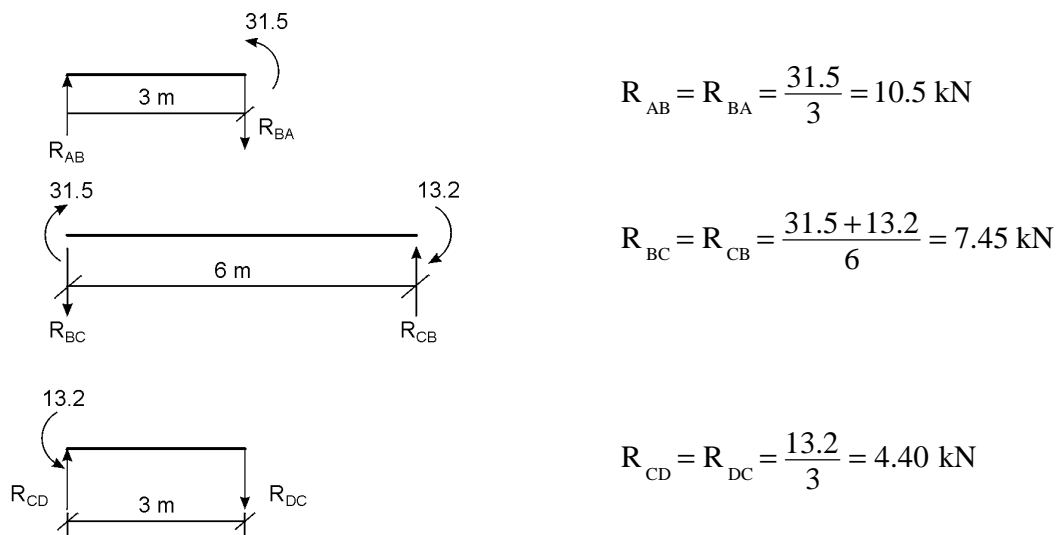
$$EI = 17900 \times 28125 \times 10^{-2} = 5030 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Reemplazando este valor en (3) y (4), se obtiene:

$$M_C = -0.00263 \times 5030 = -13.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 0.00626 \times 5030 = 31.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y con estos valores se calculan las reacciones:

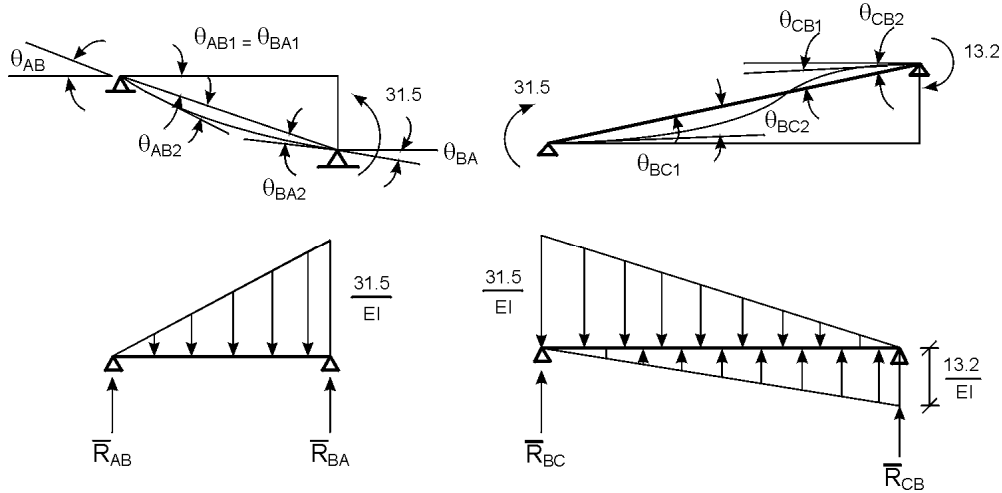


$$R_{AB} = R_{BA} = \frac{31.5}{3} = 10.5 \text{ kN}$$

$$R_{BC} = R_{CB} = \frac{31.5 + 13.2}{6} = 7.45 \text{ kN}$$

$$R_{CD} = R_{DC} = \frac{13.2}{3} = 4.40 \text{ kN}$$

Para el cálculo de los giros en los apoyos se utilizará el método de la viga conjugada.



$$\theta_{AB1} = \theta_{BA1} = \frac{15}{3000} = 0.00500 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\theta_{AB2} = \bar{R}_{AB} = \frac{1}{3} \frac{31.5}{EI} \times \frac{3}{2} = \frac{15.75}{EI} = 0.00313 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\rightarrow \theta_{AB} = \theta_{AB1} + \theta_{AB2} = 0.00813 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\theta_{BA2} = \bar{R}_{BA} = \frac{2}{3} \frac{31.5}{EI} \times \frac{3}{2} = \frac{31.5}{EI} = 0.00626 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\rightarrow \theta_{BA} = \theta_{BA1} - \theta_{BA2} = -0.00126 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\theta_{BC1} = \theta_{CB1} = \frac{15}{6000} = 0.00250 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\theta_{BC2} = \bar{R}_{BC} = \frac{2}{3} \frac{31.5}{8EI} \times \frac{6}{2} - \frac{1}{3} \frac{13.2}{8EI} \times \frac{6}{2} = \frac{6.225}{EI} = 0.00124 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\rightarrow \theta_{BC} = \theta_{BC1} - \theta_{BC2} = 0.00126 \text{ rad. } \curvearrowright$$

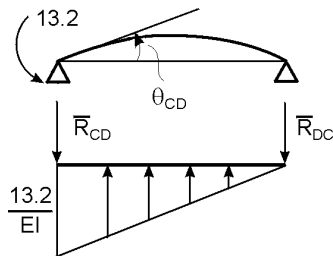
$$\theta_{CB2} = \bar{R}_{CB} = \frac{1}{3} \frac{31.5}{8EI} \times \frac{6}{2} - \frac{2}{3} \frac{13.2}{8EI} \times \frac{6}{2} = \frac{0.6375}{EI} = 0.00013 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CB1} + \theta_{CB2}$$

$$\theta_{CB1} = \theta_{BC1} = 0.00250 \text{ rad. } \curvearrowright$$

$$\rightarrow \theta_{CB} = 0.00250 + 0.00013 = 0.00263 \text{ rad. } \curvearrowright$$

En el último tramo no hay desplazamiento relativo de los apoyos.

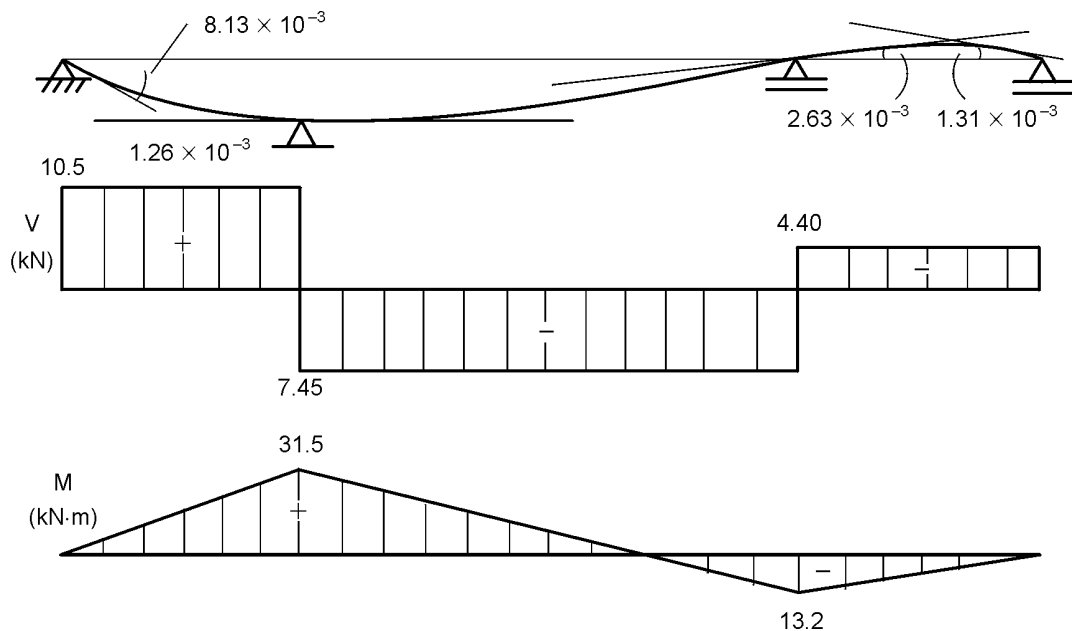


$$\theta_{CD} = \bar{R}_{CD} = \frac{2}{3} \frac{13.2}{EI} \times \frac{3}{2} = \frac{13.2}{EI}$$

$$= \frac{13.2}{5030} = 0.00262 \text{ rad.} \curvearrowright$$

$$\theta_{DC} = \bar{R}_{DC} = \frac{1}{3} \frac{13.2}{EI} \times \frac{3}{2} = \frac{6.6}{EI} = 0.00131 \text{ rad.} \curvearrowleft$$

Se puede observar que $\theta_{BA} = \theta_{BC}$ y $\theta_{CB} = \theta_{CD}$, comprobándose la continuidad de la viga en los apoyos. Los diagramas finales se presentan a continuación:



Estos diagramas se superponen a los producidos por las cargas aplicadas para obtener los diagramas de diseño.

5.1.2 Programación del método de la ecuación de los tres momentos

La programación de este método es muy sencilla, pues su planteamiento conduce inmediatamente a un sistema de ecuaciones cuya solución da directamente las respuestas buscadas. En efecto, para programar la solución de una viga prismática continua en el caso general, que incluye desplazamientos de uno o más apoyos, se toman porciones de viga formados por dos tramos consecutivos, procediendo secuencialmente de izquierda a derecha. A cada tramo se le aplica entonces la ecuación (5.4).

En el caso de una viga empotrada en ambos extremos, resulta un sistema de la forma:

$$\begin{array}{rcl}
2F_1 M_1 + F_1 M_2 & = & B_1 \\
F_1 M_1 + 2(F_1 + F_2)M_2 + F_2 M_3 & = & B_2 \\
F_2 M_2 + 2(F_2 + F_3)M_3 + F_3 M_4 & = & B_3 \\
\cdots & & \cdots \\
F_{i-1} M_{i-1} + 2(F_{i-1} + F_i)M_i + F_i M_{i+1} & = & B_i \\
\cdots & & \cdots \\
2F_m M_m + F_m M_n & = & B_n
\end{array}$$

en donde $F_i = (L/D)_i$, n es el número de apoyos y m el número de luces. Este sistema de ecuaciones puede escribirse en forma compacta así:

$$[A] \{M\} = \{B\}$$

Cuya solución da los momentos desconocidos en los apoyos, con lo cual queda resuelta la viga.

En el disco que viene con este libro se presenta un programa en QUICK BASIC que resuelve vigas continuas siguiendo este método. En la solución del sistema de ecuaciones se utilizó el procedimiento conocido como eliminación gaussiana, que se describe en el apéndice C.

5.2 MÉTODO DE ÁNGULOS DE GIRO Y DEFLEXIÓN

5.2.1 Teoría

Se dijo que Mohr fue el precursor de este método, al aplicarlo en 1892 a la solución de un problema de esfuerzos secundarios. Parece que llamó poco la atención y sólo en 1915 G.A. Maney, profesor de la Universidad de Minnesota, presentó un desarrollo independiente del mismo, calificándolo como una herramienta poderosa para el análisis de pórticos continuos. Se utilizó ampliamente antes de la aparición del *Método de Cross* y ha vuelto a ganar aceptación por la facilidad de resolver sistemas grandes de ecuaciones mediante la computadora digital. El método considera como incógnitas las rotaciones y desplazamientos de los nudos, y con base en ellos se plantean las ecuaciones de condición. A continuación se deducen las ecuaciones básicas del método y se explica el procedimiento que debe seguirse en su aplicación.

Es bien sabido que las cargas, al actuar sobre una estructura aporricada, producen rotaciones y desplazamientos de los nudos.

La esencia del método de *Ángulos de giro y deflexión* radica en relacionar tales cambios geométricos con los momentos que actúan sobre los nudos. Al aplicar las condiciones de equilibrio a cada nudo y resolver el sistema de ecuaciones resultante, se obtiene la solución del problema.

Se parte del supuesto de conexiones rígidas y, como se dijo antes, las rotaciones y desplazamientos de los nudos se consideran como incógnitas. En cualquier elemento los momentos en sus extremos pueden expresarse en función de las cargas aplicadas y de los giros y desplazamientos respectivos.

Ahora bien, para que haya equilibrio la suma de los momentos en los extremos de los elementos que se encuentran en un nudo debe ser cero y esta condición, aplicada sucesivamente a todos los nudos, junto con cualesquiera otras condiciones de equilibrio que sea necesario plantear, proporcionan las ecuaciones necesarias para resolver los giros y desplazamientos desconocidos. Una vez hallados éstos, se reemplazan sus valores en las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión* para encontrar los momentos en los extremos de los miembros, con lo cual queda resuelto el problema.

En la figura 5.1(a) se presenta aislado un miembro de un pórtico antes de ser sometido a carga, y en la (b) el mismo miembro después de deformarse por las cargas impuestas sobre el pórtico. Se han dibujado las cargas externas que actúan sobre el miembro y los momentos que se han desarrollado en sus extremos por la acción de todas las cargas del pórtico. A estos momentos se los denomina M_i y M_j , para indicar el nudo en que actúan. Se puede suponer que a la situación mostrada en (b) se ha llegado mediante los cuatro pasos mostrados en (c), (d), (e) y (f). Para empezar se estudia el efecto de las cargas aplicadas sobre el miembro, independientemente de los giros y desplazamientos, para lo cual es necesario impedirlos mediante unas *fuerzas de empotramiento*, equivalentes a las que aparecerían si el miembro estuviera realmente empotrado en ambos extremos; de ahí su nombre. Los momentos correspondientes a dichas fuerzas son los llamados *momentos de empotramiento*, M_i^F y M_j^F ; su valor se puede hallar mediante los métodos ya vistos (Área de momentos, Viga conjugada, etc.) o con la ayuda de tablas como la 5.1.

Luego, despreciando las deformaciones axiales, se estudia el efecto del giro en cada nudo y finalmente el de su desplazamiento relativo, normal al eje del miembro en su posición original, todos ellos independientemente unos de otros. Aplicando entonces el Principio de superposición, se obtiene:

$$M_i = M_i^F + M_{ii}' + M_{ij}' + M_{ij}'' \quad (5.5)$$

$$M_j = M_j^F + M_{ji}' + M_{jj}' + M_{ji}'' \quad (5.6)$$

Estas ecuaciones son completamente generales, si se exceptúa la simplificación señalada antes. En ellas:

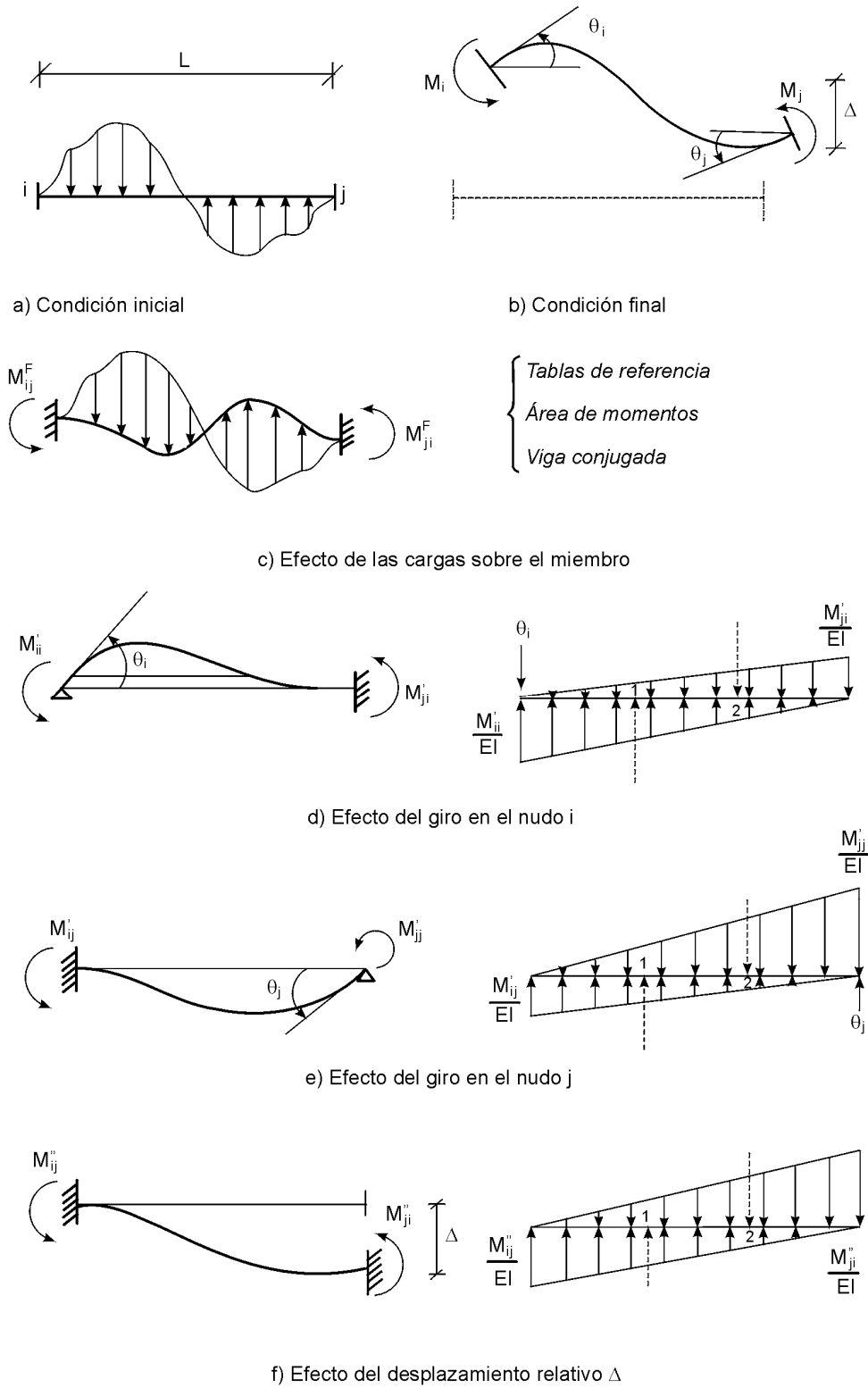


Figura 5.1 Deducción de las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*.

M_i = momento definitivo en el nudo i.

M_i^F = momento de empotramiento en el nudo i, causado por las cargas aplicadas sobre el miembro ij.

M_{ii}' = momento en el nudo i que causa un giro θ_i en dicho nudo.

M_{ij}' = momento en el nudo i que surge por la aplicación de un momento M_{jj}' en el nudo j.

M_{ij}'' = momento en el nudo i causado por un desplazamiento relativo Δ entre los extremos del miembro ij.

M_j = momento definitivo en el nudo j.

M_j^F = momento de empotramiento en el nudo j, causado por las cargas aplicadas sobre el miembro ij.

M_{ji}' = momento en el nudo j que surge por la aplicación de un momento M_{ii}' en el nudo i.

M_{jj}' = momento en el nudo j que causa un giro θ_j en dicho nudo.

M_{jj}'' = momento en el nudo j causado por un desplazamiento relativo Δ entre los extremos del miembro ij.

En el caso de elementos prismáticos, la evaluación de los términos anteriores se puede hacer fácilmente utilizando las vigas conjugadas de las figuras 5.1 (c) a (f). Considerando la primera y tomando momento con respecto al punto 2, resulta:

$$\begin{aligned} \theta_i \times (2L/3) &= (M_{ii}' L / 2EI) \times (L/3) \\ \rightarrow M_{ii}' &= \frac{4EI}{L} \theta_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tomando ahora momentos con respecto al punto 1, se obtiene.

$$\begin{aligned} \theta_i \times (L/3) &= (M_{ji}' L / 2EI) \times (L/3) \\ \rightarrow M_{ji}' &= \frac{2EI}{L} \theta_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

Procediendo de manera similar con la figura (e), se obtiene:

$$M_{jj}' = \frac{4EI}{L} \theta_j \quad (5.9)$$

$$M'_{ij} = \frac{2EI}{L} \theta_j \quad (5.10)$$

Considerando ahora la figura (f), es evidente que por equilibrio de fuerzas verticales:

$$M''_{ij} = M''_{ji}$$

y aplicando el segundo teorema de la viga conjugada:

$$\begin{aligned} (M''_{ij} L / 2EI) \times (L/3) &= \Delta \\ M''_{ij} &= M''_{ji} = \frac{6EI}{L^2} \Delta \end{aligned} \quad (5.11)$$

Finalmente, reemplazando en las ecuaciones (5.5) y (5.6) los valores encontrados, se obtiene:

$$M_i = M_i^F + \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (5.12)$$

$$M_j = M_j^F + \frac{2EI}{L} \theta_i + \frac{4EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \Delta \quad (5.13)$$

que son las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión* buscadas.

Al término I/L se le denomina *rigidez relativa* y se le designa con la letra K . Utilizando esta nomenclatura en las ecuaciones (5.12) y (5.13), y factorizando, se llega a una forma alterna:

$$M_i = M_i^F + EK (4\theta_i + 2\theta_j + 6\Delta/L) \quad (5.12a)$$

$$M_j = M_j^F + EK (2\theta_i + 4\theta_j + 6\Delta/L) \quad (5.13a)$$

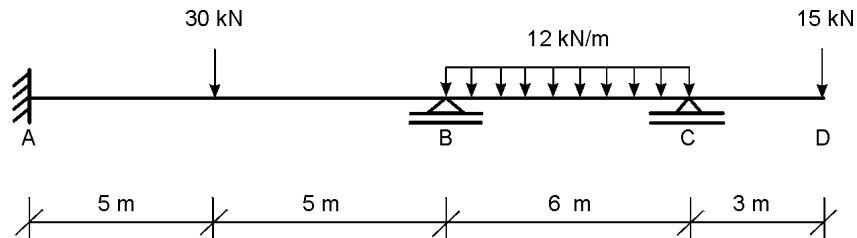
Como se dijo anteriormente, estas ecuaciones se aplican a todos los elementos; luego se plantea el equilibrio de cada nudo y, si es necesario, el equilibrio general de la estructura o de parte de ella hasta lograr un número suficiente de ecuaciones. Se resuelve luego el sistema de ecuaciones resultante para hallar los giros y desplazamientos desconocidos, y finalmente se vuelve a las ecuaciones originales para encontrar los momentos en los extremos respectivos.

Suele resultar conveniente, para simplificar las operaciones numéricas, tomar como valor de E la unidad y utilizar un K o I de referencia, en lugar de los valores reales. En tal caso se obtienen valores verdaderos de momento, pero los giros y desplazamientos estarán errados en la misma proporción del reemplazo. Es decir, que para obtener las verdaderas magnitudes de θ y Δ deberán dividirse por E y α los valores obtenidos, en donde:

$$\alpha = K/K_0 = I/I_0, \text{ siendo } K_0 \text{ e } I_0 \text{ los valores de referencia.}$$

Ejemplo 5.5

Resuelva, mediante las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*, la viga de sección constante mostrada.



Solución

Si no interesa averiguar la magnitud verdadera de los giros, puede tomarse $E = 1$ y utilizar un I_0 de referencia. Suponiéndolo igual a 10:

$$K_{AB} = \frac{10}{10} = 1.00 \qquad K_{BC} = \frac{10}{6} = 1.667$$

Mediante la tabla 5.1 se encuentran los momentos de empotramiento:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{30 \times 10}{8} = 37.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{12 \times (6)^2}{12} = 36.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

M_{CD} es conocido por tratarse de un voladizo:

$$M_{CD} = 15 \times 3 = 45.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \tag{1}$$

Las condiciones de los apoyos son tales que:

$$\theta_{AB} = 0, \theta_{BA} = \theta_{BC} = \theta_B \text{ por continuidad,}$$

y si los apoyos no ceden todos los $\Delta = 0$. Aplicando ahora las ecuaciones (5.12a) y (5.13a) al tramo AB, resulta:

$$M_{AB} = M_{AB}^F + EK \left(4\theta_A + 2\theta_B + 6\Delta/L \right) = 37.5 + 1 \times 1 \left(2\theta_B \right) =$$

$$M_{AB} = 37.5 + 2\theta_B \tag{2}$$

$$M_{BA} = M_{BA}^F + EK \left(2\theta_A + 4\theta_B + \frac{6\Delta}{L} \right)$$

$$\rightarrow M_{BA} = -37.5 + 1 \times 1 \left(4\theta_B \right) =$$

$$M_{BA} = -37.5 + 4\theta_B \tag{3}$$

Pasando ahora al tramo BC, se obtiene similarmente:

$$M_{BC} = 36.0 + 1 \times 1.667 (4\theta_B + 2\theta_C) =$$

$$M_{BC} = 36.0 + 6.67 \theta_B + 3.33 \theta_C \quad (4)$$

$$M_{CB} = -36.0 + 1 \times 1.667 (2\theta_B + 4\theta_C) =$$

$$M_{CB} = -36.0 + 3.33 \theta_B + 6.67\theta_C \quad (5)$$

Aplicando ahora la condición de equilibrio

$$\sum M_{ij} = 0 \text{ a los nudos B y C:}$$

Nudo B:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

y reemplazando los valores respectivos de las ecuaciones (3) y (4) se llega a

$$10.67 \theta_B + 3.33 \theta_C = 1.50 \quad (6)$$

Para el *nudo C*:

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

Reemplazando los valores de las ecuaciones (5) y (1) resulta:

$$3.33 \theta_B + 6.67\theta_C = -9.00 \quad (7)$$

Restándole a la ecuación (7) dos veces la ecuación (6):

$$-18.01 \theta_B = -12.00$$

$$\rightarrow \theta_B = 0.666$$

y reemplazando este valor en la ecuación (6):

$$\theta_C = \frac{1.50 - 10.67 (0.666)}{3.33} = -1.684$$

Volviendo ahora a las ecuaciones (2) a (5) se obtiene:

$$M_{AB} = 37.5 + 20 (0.666) = 38.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = -37.5 + 40 (0.666) = -34.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

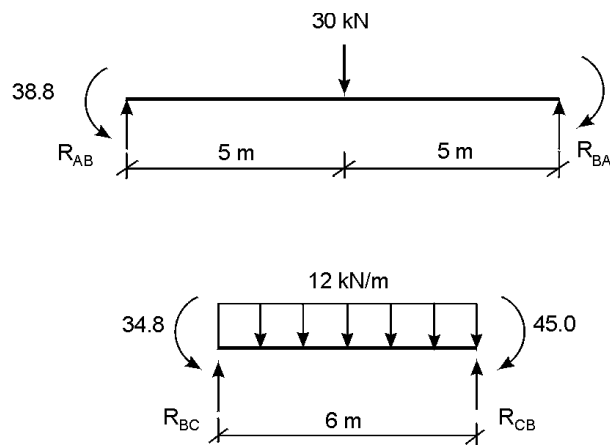
$$M_{BC} = 36.0 + 6.67 (0.666) + 3.33 (-1.684) = 34.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Comprobación: $M_{BA} + M_{BC} = 0$, β

$$M_{CB} = -36.0 + 3.33 (0.666) + 6.67 (-1.684) = -45.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Comprobación: $M_{CB} + M_{CD} = 0$, β

Conocidos los momentos se pueden evaluar las reacciones y momentos máximos positivos. Con estos valores se pueden dibujar los diagramas de corte, momento y refuerzo de la página siguiente:



$$R_{AB} = \frac{30}{2} + \frac{38.8 - 34.8}{10} = 15.4 \text{ kN } \uparrow$$

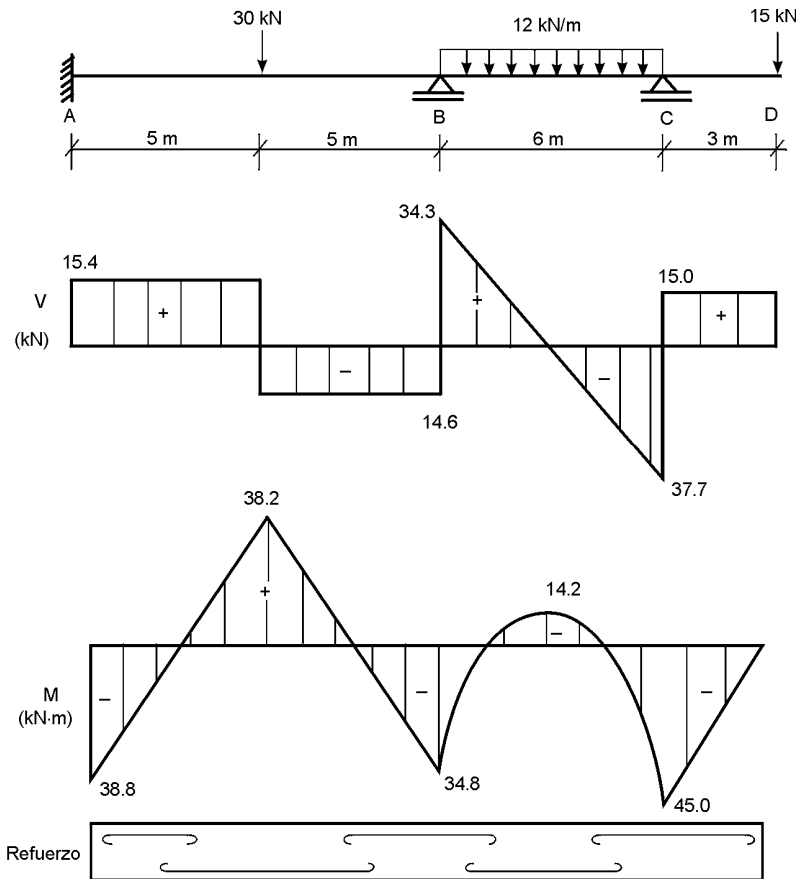
$$R_{BA} = 30 - 15.4 = 14.6 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max (+)} = 15.4 \times 5 - 38.8 = 38.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$R_{BC} = 12 \times 3 - \frac{45.0 - 34.8}{6} = 34.3 \text{ kN } \uparrow$$

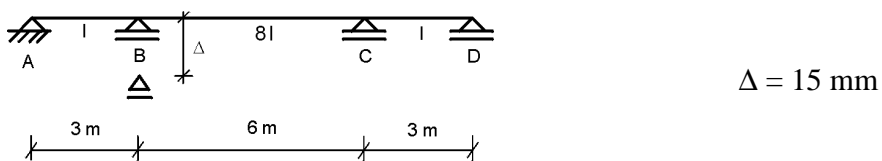
$$R_{CB} = 12 \times 6 - 34.3 = 37.7 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max (+)} = \frac{(34.3)^2}{2 \times 12} - 34.8 = 14.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Ejemplo 5.6

Resuelva el problema del ejemplo 5.4 por medio del método de *Ángulos de giro y deflexión*.



Solución

Se tenía $E = 17900 \text{ N/mm}^2$ $I_{AB} = 28125 \times 10^4 \text{ mm}^4$

$$I_{BC} = 225000 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Por comodidad se trabajará en m y kN:

$$\rightarrow K_{AB} = \frac{28125 \times 10^{-8}}{3} = 9375 \times 10^{-8}$$

$$K_{BC} = \frac{225000 \times 10^{-8}}{6} = 37500 \times 10^{-8}$$

Aplicando la ecuación (5.12a):

$$M_i = M_i^F + EK \left(4\theta_i + 2\theta_j + \frac{6\Delta}{L} \right)$$

a cada tramo se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 17.9 \times 10^6 \times 9375 \times 10^{-8} \left(4\theta_A + 2\theta_B + \frac{6(0.015)}{3} \right) = \\ &= 67120\theta_A + 33560\theta_B + 50.34 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_{BA} &= 1678 \left(2\theta_A + 4\theta_B + \frac{6(0.015)}{3} \right) = \\ &= 33560\theta_A + 67120\theta_B + 50.3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= 17.9 \times 10^6 \times 37500 \times 10^{-8} \left(4\theta_B + 2\theta_C - \frac{6(0.015)}{6} \right) = \\ &= 268500\theta_B + 134250\theta_C - 100.69 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M_{CB} &= 6712.5 \left(2\theta_B + 4\theta_C - \frac{6(0.015)}{6} \right) = \\ &= 134250\theta_B + 268500\theta_C - 100.69 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_{CD} &= 17.9 \times 10^6 \times 9375 \times 10^{-8} (4\theta_C + 2\theta_D) = \\ &= 67120\theta_C + 33560\theta_D \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{DC} &= 1678 (2\theta_C + 4\theta_D) = \\ &= 33560\theta_C + 67120\theta_D = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Planteando ahora el equilibrio de cada nudo:

$$\begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ \rightarrow 33560\theta_A + 33562\theta_B + 134250\theta_C &= 50.34 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ \rightarrow 134250\theta_B + 33562\theta_C + 3356\theta_D &= 100.69 \end{aligned} \quad (8)$$

Las ecuaciones (1), (7), (8) y (6) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Reescribiéndolo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 6712 & 3356 & 0 & 0 \\ 3356 & 33562 & 13425 & 0 \\ 0 & 13425 & 33562 & 3356 \\ 0 & 0 & 3356 & 6712 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50.34 \\ 50.34 \\ 100.69 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00813 \\ 0.00126 \\ 0.00263 \\ -0.00131 \end{bmatrix} \text{radianes}$$

que coincide con la obtenida antes.

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2), (3), (4) y (5), se obtienen los momentos en los apoyos:

$$M_{BA} = 3356 (-0.00813) + 6712 (0.00126) + 50.34 = 31.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 26850 (0.00126) + 13425 (0.00263) - 100.69 = -31.5 \text{ kN}\cdot\text{m} = -M_{BA} \quad \beta$$

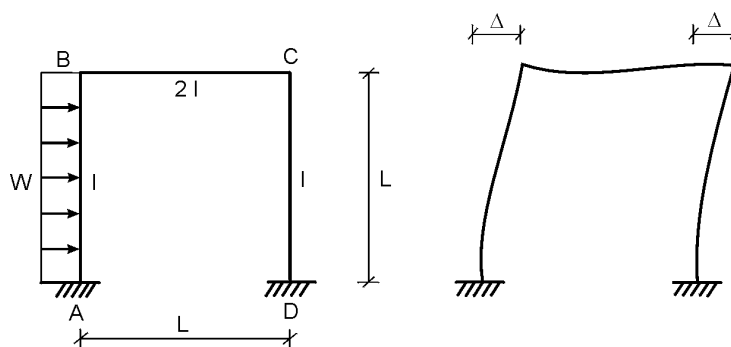
$$M_{CB} = 13425 (0.00126) + 26850 (0.00263) - 100.69 = -13.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 6712 (0.00263) + 3356 (-0.00131) = 13.26 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

el error de cierre en el nudo C es del 0.8%, perfectamente aceptable.

Ejemplo 5.7

Resuelva el pórtico mostrado y dibuje en forma aproximada su elástica (referencia 5.2).



Solución

Debido a la carga lateral se produce un desplazamiento Δ de los nudos B y C:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{wL^2}{12}$$

Aplicando las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*:

$$M_{AB} = \frac{wL^2}{12} + \frac{EI}{L} \left(2\theta_B - \frac{6\Delta}{L} \right)$$

$$M_{BA} = -\frac{wL^2}{12} + \frac{EI}{L} \left(4\theta_B - \frac{6\Delta}{L} \right)$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{L} (4\theta_B + 2\theta_C)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_B + 4\theta_C)$$

$$M_{CD} = \frac{EI}{L} \left(4\theta_C - \frac{6\Delta}{L} \right)$$

$$M_{DC} = \frac{EI}{L} \left(2\theta_C - \frac{6\Delta}{L} \right)$$

Planteando ahora el equilibrio de los nudos:

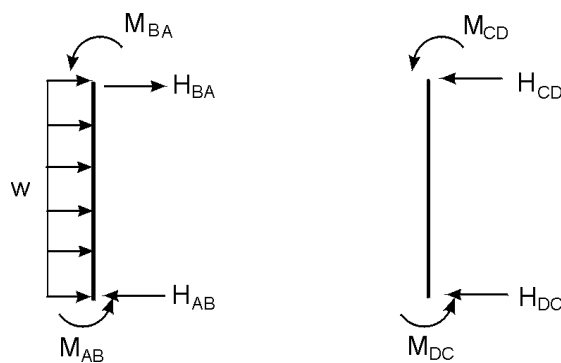
$$\sum M_B = 0; \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\rightarrow 6\theta_B + 2\theta_C - \frac{3}{L} \Delta = \frac{wL^3}{24EI} \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0: \quad M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$\rightarrow 2\theta_B + 6\theta_C - \frac{3}{L} \Delta = 0 \quad (2)$$

Como hay tres incógnitas, se requiere una tercera ecuación. Ésta se obtiene del equilibrio de fuerzas horizontales mediante los diagramas de cuerpo libre de las columnas.



$$\sum F_X = 0: wL - H_{AB} - H_{DC} = 0 \quad (3)$$

$$H_{AB} = \frac{wL}{2} + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L}$$

$$H_{DC} = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L}$$

Expresando los momentos en función de los desplazamientos y substituyendo en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} & -\frac{wL}{2} - \frac{1}{L} \left\{ \left[\frac{wL^2}{12} - \frac{EI}{L} \left(2\theta_B - \frac{6}{L}\Delta \right) \right] + \left[-\frac{wL^2}{12} + \frac{EI}{L} \left(4\theta_B - \frac{6}{L}\Delta \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{EI}{L} \left(4\theta_C - \frac{6}{L}\Delta \right) + \frac{EI}{L} \left(2\theta_C - \frac{6}{L}\Delta \right) \right\} + wL = 0 \end{aligned}$$

que al simplificar se convierte en:

$$\theta_B + \theta_C - \frac{4}{L}\Delta = \frac{wL^3}{12EI} \quad (3a)$$

Resolviendo las ecuaciones (1), (2) y (3a) se obtiene:

$$\theta_B = -0.0012 \frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_C = -0.0115 \frac{wL^3}{EI}$$

$$\Delta = -0.0241 \frac{wL^4}{EI}$$

y al substituir estos valores en las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión* resulta:

$$M_{AB} = 0.225 wL^2$$

$$M_{BA} = -M_{BC} = 0.056 wL^2$$

$$M_{CB} = -M_{CD} = -0.097 wL^2$$

$$M_{DC} = 0.121 wL^2$$

$$H_{AB} = 0.782 wL$$

$$H_{DC} = 0.218 wL$$

Con estos valores se pueden dibujar los diagramas de corte y momento y completar el análisis del pórtico.

5.2.2 Programación del método de ángulos de giro y deflexión

La programación del método de *Ángulos de giro y deflexión* no es tan sencilla como la de la *Ecuación de los tres momentos*, pues en este caso el planteamiento inicial sólo produce las ecuaciones correspondientes a los momentos en los extremos de cada barra. Es necesario, a continuación, plantear el equilibrio de nudos y en el caso de una viga

continua esto conduce a un sistema de ecuaciones suficiente para encontrar las incógnitas básicas que en ella son los giros en los nudos. Posteriormente es necesario volver a las ecuaciones originales para hallar los momentos.

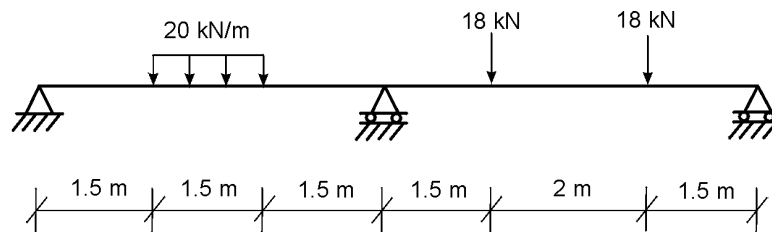
En el caso de pórticos, la programación es todavía más difícil pues los desplazamientos son entonces desconocidos y se requiere plantear ecuaciones adicionales de equilibrio de fuerzas.

En ambos casos los sistemas de ecuaciones obtenidas son similares a los logrados más fácilmente mediante los métodos matriciales del capítulo 11 y por ello en este libro no se incluye un programa de ángulos de giro y deflexión.

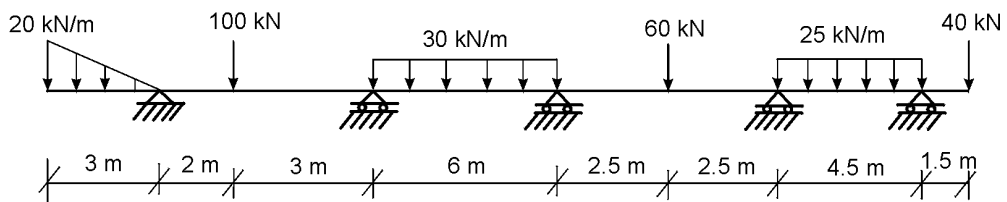
EJERCICIOS

5.1 Resuelva, por el método de la *Ecuación de los tres momentos*, las vigas de los ejercicios 4.5 (c), 4.5 (d) y 4.6.

5.2 Resuelva completamente las vigas mostradas, mediante la *Ecuación de los tres momentos*. Dibuje todos los diagramas. EI es constante.

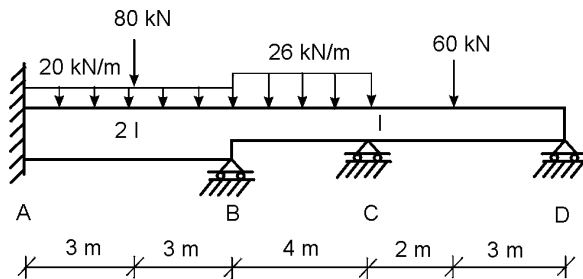


(a)



(b)

5.3 La viga de la figura sufre un asentamiento relativo de 12 mm en el apoyo B. Analízala por el método de la *Ecuación de los tres momentos* y dibuje todos los diagramas.

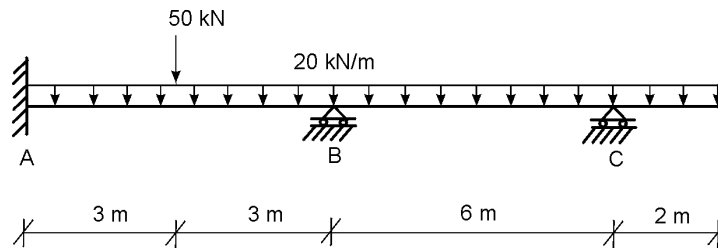


$$I = 80 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

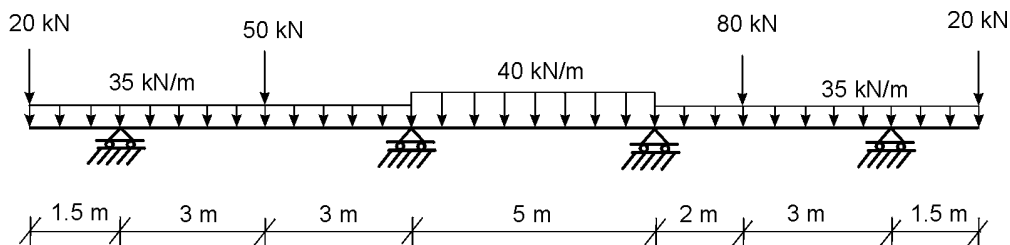
$$E = 200 \text{ kN/mm}^2$$

5.4 Resuelva las vigas de los ejercicios 4.8, 4.12 (b) y 5.2 por el método de los *Ángulos de giro y deflexión*.

5.5 Utilice el método de *Ángulos de giro y deflexión* para resolver la viga siguiente. En el apoyo A se produjo una falla que resultó en un giro de 0.002 radianes en sentido anti-horario y un asentamiento diferencial de 30 mm con respecto a los otros apoyos (A queda por debajo de ellos). Suponga $E = 200 \text{ kN/mm}^2$, $I_{AB} = 21 \times 10^7 \text{ mm}^4$, $I_{BC} = I_{\text{voladizo}} = 15 \times 10^7 \text{ mm}^4$.

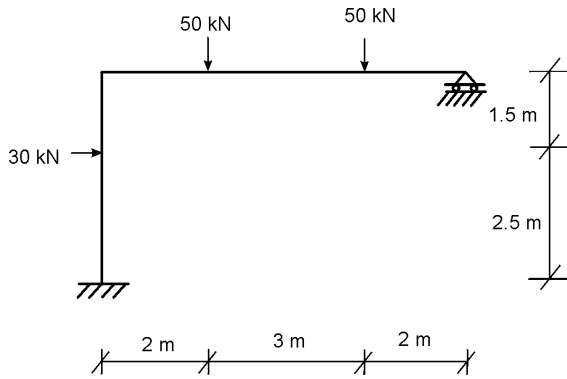


5.6 Analice completamente la siguiente viga, por el método de *Ángulos de giro y deflexión*. Dibuje todos los diagramas, sin olvidar la evaluación de los momentos máximos positivos. Suponga $b \times h = 0.30 \text{ m} \times 0.35 \text{ m}$, $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.



5.7 Resuelva los siguientes pórticos por el método de *Ángulos de giro y deflexión*. Dibuje todos los diagramas.

a) El pórtico del ejercicio 4.5 (e)

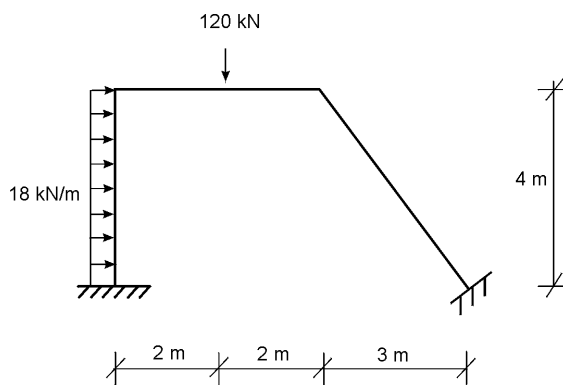


Viga: 300 mm × 400 mm

Columna: 300 mm × 500 mm

$E = 200 \text{ kN/mm}^2$

(b)



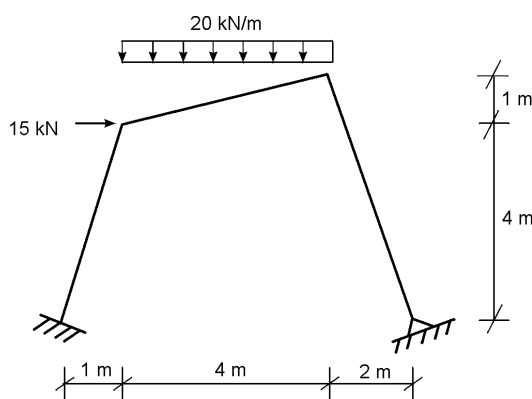
Para todos los casos

$b = 400 \text{ mm}$

$h = 500 \text{ mm}$

$E = 200 \text{ kN/mm}^2$

(c)



$EI \text{ (kN}\cdot\text{m}^2)$

Viga: 150000

Columna: 250000

(d)

REFERENCIAS

- 5.1 Wang, C.K. - *Statically Indeterminate Structures*, McGraw-Hill, 1953.
- 5.2 Gerstle, K.H. - *Basic Structural Analysis*, Prentice-Hall, 1974.

6.1 INTRODUCCIÓN

Este método, sumamente útil en el análisis de pórticos, fue ideado por el profesor Hardy Cross, quien empezó a enseñarlo a sus alumnos de la Universidad de Illinois en 1924. Posteriormente lo publicó en una revista de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE) en 1930 (referencia 6.1), despertando inmediatamente el interés de la profesión de tal manera, que en pocos años fueron presentados numerosos artículos por diversos autores que lo llevaron al grado de refinamiento con que se lo conoce hoy en día.

El método de distribución de momentos puede ser utilizado para analizar cualquier tipo de viga indeterminada o de pórtico rígido, e hizo posible resolver de manera sencilla y segura muchas estructuras que antes se diseñaban únicamente mediante reglas empíricas o métodos aproximados.

Esencialmente, el método consiste en resolver las ecuaciones simultáneas que resultan en el de *Ángulos de giro y deflexión* mediante aproximaciones sucesivas. Esta característica permite obtener la solución con la precisión que se desee, dentro de las limitaciones del modelo matemático escogido.

6.2 CONVENCION DE SIGNOS PARA LOS MOMENTOS

De acuerdo con el tratamiento unificado seguido en estas conferencias (sistema ortogonal cartesiano de mano derecha), el momento en los nudos se considera positivo cuando su sentido es contrahorario. Esto implica que al compararlos con los momentos internos en la viga, los signos coinciden en el extremo derecho, pero son opuestos en el extremo izquierdo. Es preciso advertir de nuevo que esta convención es opuesta a la dada en la mayoría de los textos que fueron escritos antes del desarrollo de la computación electrónica.

6.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES: RIGIDEZ ABSOLUTA Y COEFICIENTE DE DISTRIBUCIÓN

El concepto de rigidez absoluta es esencial para el cabal entendimiento del método. Es simplemente una medida de la capacidad de un elemento para oponerse al giro de uno de sus extremos cuando se le aplica en él un momento, y se define así:

Rigidez absoluta es el valor del momento que, aplicado en un extremo simplemente apoyado de un elemento, produce en él una rotación de un radián, estando el otro extremo simplemente apoyado, parcialmente restringido o fijo, y sin que haya ninguna translación de los apoyos.

Los tres casos contemplados en la definición se ilustran gráficamente en la figura 6.1.

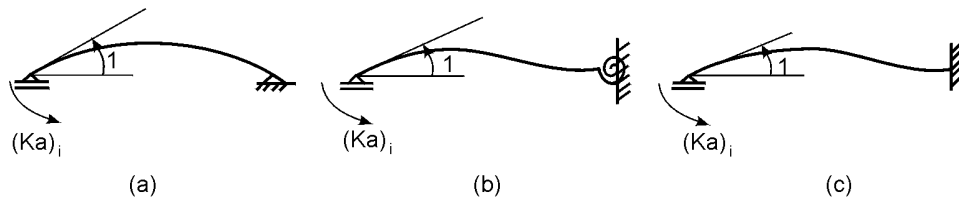


Figura 6.1 Definición de rigidez absoluta.

Para empezar, Cross supuso que en la estructura todos los nudos están fijos y luego comenzó a soltarlos uno por uno, estudiando el efecto de cada liberación sobre todos los elementos, hasta lograr equilibrar los nudos por completo.

En la figura 6.2 (a) se muestra una estructura cruciforme de cuatro elementos que se unen en el nudo E y con los extremos opuestos empotrados. Al aplicarle a la estructura un momento M en E, ésta se deflecta hasta encontrar la posición de equilibrio indicada en (b). Para facilitar la explicación, los cuatro elementos se presentan separados en la parte (c) de la misma figura.

Es evidente que la suma de las rigideces de todos los elementos que llegan al nudo medirá la resistencia del mismo a la rotación y que el momento M se repartirá entre los elementos proporcionalmente a sus rigideces, ya que suponemos el nudo rígido y, en consecuencia, la rotación en todos ellos debe ser igual. Es decir, que por la definición de rigidez absoluta:

$$M_{EA} = (K_a)_{EA} \theta_E$$

$$M_{EB} = (K_a)_{EB} \theta_E$$

$$M_{EC} = (K_a)_{EC} \theta_E$$

$$M_{ED} = (K_a)_{DE} \theta_E$$

y en general:

$$M_{ij} = (K_a)_{ij} \theta_i \quad (6.1)$$

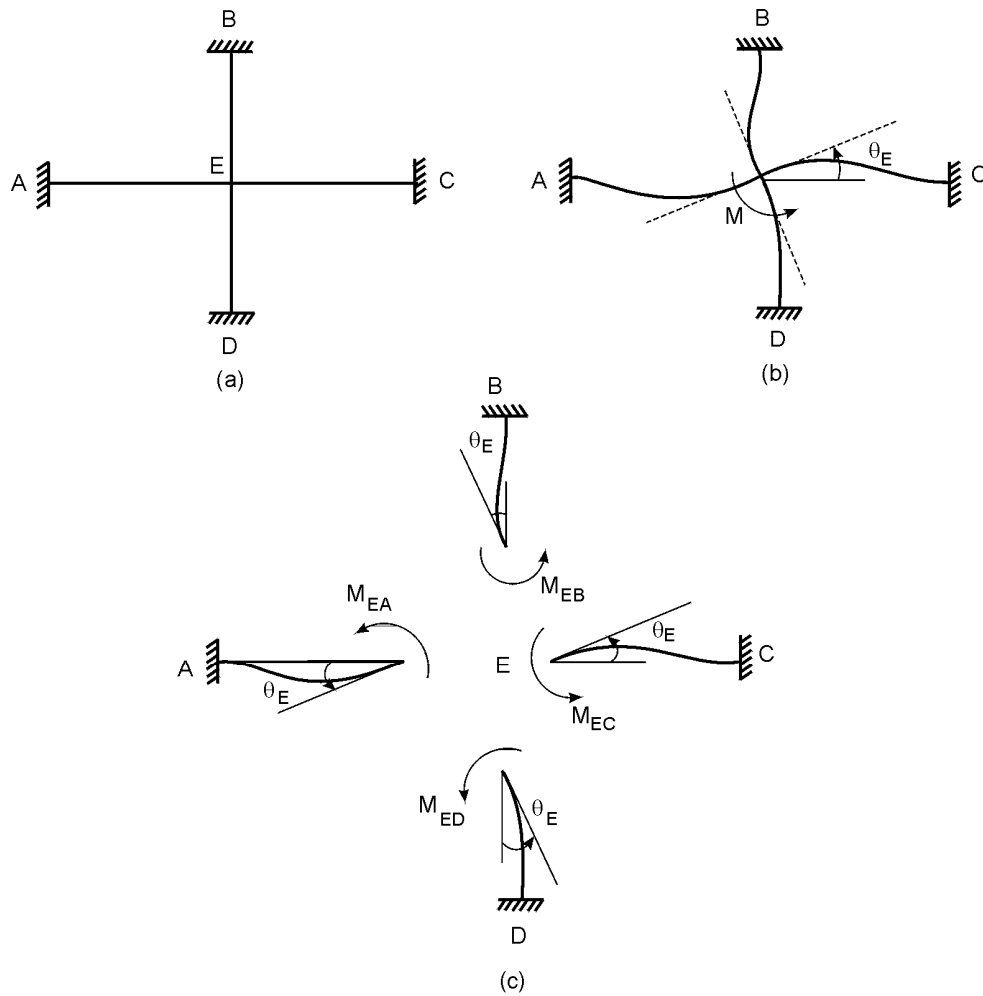


Figura 6.2 Efecto de la liberación de un nudo.

Por otra parte, la suma de los momentos desarrollados en los extremos que se unen en el nudo debe ser igual al momento aplicado, puesto que por equilibrio:

$$M_i = \sum_{(i)} M_{ij} = \sum_{(i)} [(Ka)_{ij} \theta_i] =$$

$$M_i = \theta_i \sum_{(i)} (Ka)_{ij} \quad (6.2)$$

Definiendo el *coeficiente de distribución*, δ_{ij} , en el extremo i de un elemento ij como la relación entre el momento M_{ij} desarrollado en dicho extremo y el momento M_i aplicado en el nudo correspondiente, resulta al dividir la ecuación (6.1) por la ecuación (6.2):

$$\delta_{ij} = \frac{M_{ij}}{M_i} = \frac{(Ka)_{ij} \theta_i}{\theta_i \sum_{(i)} (Ka)_{ij}} \quad (6.3)$$

$$\rightarrow \delta_{ij} = \frac{(Ka)_{ij}}{\sum_{(i)} (Ka)_{ij}} \quad (6.4)$$

o sea, que el coeficiente de distribución de cualquier elemento en un nudo es igual a la rigidez del elemento para ese extremo, dividida por la suma de las rigideces correspondientes de todos los elementos que llegan a ese nudo.

Cuando todos los elementos involucrados son prismáticos y tienen las mismas condiciones de apoyo, las rigideces absolutas tendrán un factor común y resulta más fácil trabajar con las rigideces relativas ($K = I/L$) definidas en el capítulo anterior. Los coeficientes de distribución se pueden calcular, entonces, mediante la siguiente ecuación:

$$\delta_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum_{(i)} K_{ij}} \quad (6.5)$$

Obviamente, la suma de los coeficientes de distribución en un nudo debe ser igual a la unidad y conviene comprobarla antes de iniciar el proceso de distribución.

6.4 RIGIDEZ ABSOLUTA DE ELEMENTOS PRISMÁTICOS

Volviendo a la definición de rigidez absoluta, en el caso de extremo opuesto simplemente apoyado, se tiene la situación de la figura 6.3.

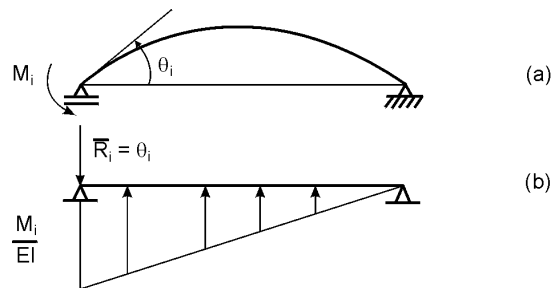


Figura 6.3 Rigidez de un elemento con extremo opuesto articulado.

Utilizando la viga conjugada correspondiente, ilustrada en la parte (b) de la misma figura, se obtiene:

$$\theta_i = \bar{R}_i = \frac{M_i}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{(2/3L)}{L} = \frac{M_i L}{3EI}$$

$$\rightarrow M_i = \frac{3EI}{L} \theta_i$$

De ahí que la rigidez absoluta en este caso es:

$$Ka = \frac{M_i}{\theta_i} = \frac{3EI}{L} \quad (6.6)$$

Considerando ahora un elemento con el extremo opuesto empotrado, se tiene la siguiente situación:

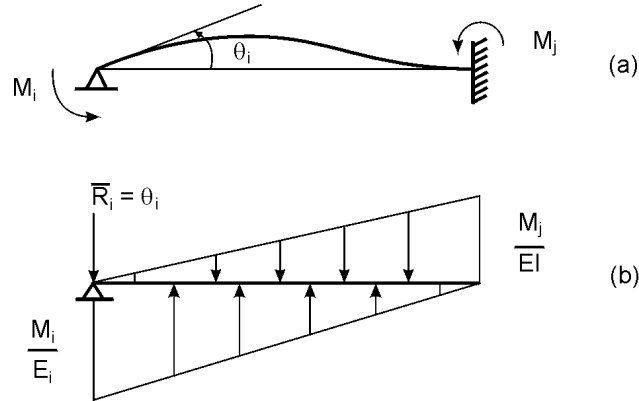


Figura 6.4 Rigidez de un elemento con extremo opuesto empotrado.

Como en i no hay desplazamiento, el momento de la viga conjugada –figura 6.4 (b)– en dicho punto debe ser cero.

$$\frac{M_i}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} - \frac{M_j}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L = 0$$

$$M_j = \frac{1}{2} M_i \quad (6.7)$$

$$\theta_i = \bar{R}_i = \frac{M_i}{EI} \times \frac{L}{2} - \frac{M_j}{EI} \times \frac{L}{2}$$

$$\theta_i = \frac{L}{2EI} \left(M_i - \frac{1}{2} M_i \right) = \frac{M_i L}{4EI}$$

$$\rightarrow M_i = \frac{4EI}{L} \theta_i \quad (6.8)$$

y de acuerdo con la definición de rigidez absoluta:

$$K_a = \frac{M_i}{\theta_i} = \frac{4EI}{L} \quad (6.9)$$

que no es otra cosa que el coeficiente de la rotación θ_i en las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*.

Comparando las ecuaciones (6.6) y (6.9) se observa que la rigidez (absoluta o relativa) de un elemento prismático con extremo opuesto simplemente apoyado equivale a las tres cuartas partes de la rigidez del mismo elemento con su extremo opuesto empotrado.

En el caso de elementos no prismáticos, los diagramas de carga de la viga conjugada deberán dividirse por una I_x variable. El procedimiento para encontrar las rigideces absolutas será idéntico, pero la evaluación de áreas y centroides se complicará. En tal

caso se utilizan generalmente tablas o gráficos (referencias 6.2 a 6.4) o métodos numéricos de integración como el de Newmark (referencia 6.5), que se verá más adelante en el capítulo 9.

6.5 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

En la figura 6.4 (a) se observa que al aplicar un momento M_i en el apoyo respectivo del elemento, surge un momento M_j en el extremo opuesto a dicho nudo.

Se puede demostrar que siempre hay una relación fija entre el momento inducido en el extremo empotrado y el momento aplicado en el extremo girado. Se define entonces el *coeficiente de transmisión* como:

Coeficiente por el cual se debe multiplicar el momento aplicado en un apoyo simple de un miembro estructural para obtener el momento inducido en el extremo opuesto.

La ecuación (6.7) permite concluir que el coeficiente de transmisión para un elemento prismático con el extremo opuesto empotrado es 0.5.

Por otra parte, reemplazando la ecuación (6.8) en la ecuación (6.7), se obtiene:

$$M_j = \frac{2EI}{L} \theta_i \quad (6.10)$$

que también se identifica claramente con un término de las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*.

Observando ahora la figura 6.3, es evidente que en el extremo j , obviamente, no puede inducirse ningún momento al aplicar M_i , lo cual equivale a decir que el coeficiente de transmisión para un elemento con el extremo opuesto simplemente apoyado (o articulado) es cero.

6.6 MOMENTOS DEBIDOS A DESPLAZAMIENTOS DE LOS EXTREMOS DEL ELEMENTO

En el método de distribución de momentos, el desplazamiento de los extremos del elemento se trata de manera similar a la vista en el de *Ángulos de giro y deflexión*. Generalmente se desprecia el efecto de las cargas axiales y sólo se consideran los momentos inducidos por el desplazamiento normal al eje de los extremos del mismo.

Para independizar el efecto de los desplazamientos se considera que los extremos no giran, como se hizo al plantear el método citado, encontrando entonces el valor de la figura 6.5 (a).

Como se verá más adelante, el proceso se puede simplificar en el caso de apoyos articulados, considerando desde el principio la verdadera condición del extremo del elemento que llega a él.

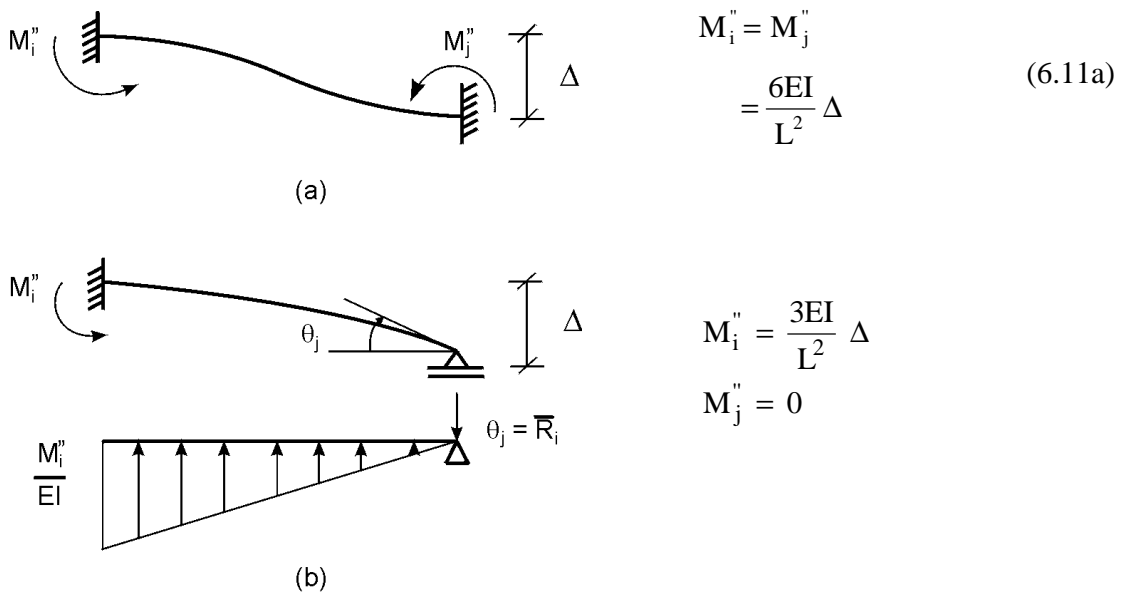


Figura 6.5 Momentos causados por un desplazamiento
a) extremo opuesto empotrado
b) extremo opuesto articulado.

Aprovechando la viga conjugada de la figura 6.5 (b) se obtiene:

$$\sum F_y = 0; \quad \rightarrow \quad \bar{R}_j = \theta_j = \frac{1}{2} \frac{M_i'' L}{EI}$$

$$\sum M_j = \Delta; \quad \rightarrow \quad \frac{M_i''}{EI} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} L = \Delta$$

$$\rightarrow \quad M_i'' = \frac{3EI}{L^2} \Delta \quad (6.11b)$$

que, como se ve, es la mitad del obtenido anteriormente cuando la rotación era nula en ambos extremos.

6.7 MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

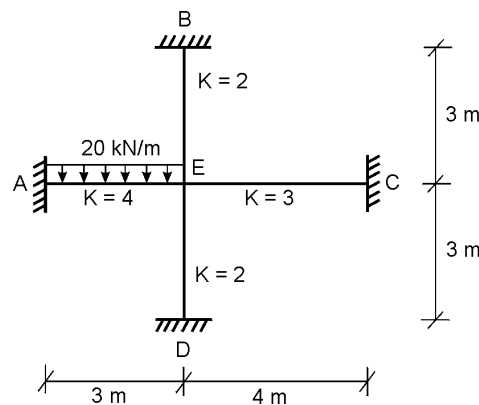
En el numeral 6.3 se dijo que Cross empezó por suponer que todos los nudos están fijos. En consecuencia, en los extremos de los elementos que se hallan sometidos a cargas intermedias surgen unos momentos para anular los giros que producirían tales cargas si los extremos pudiesen rotar libremente. Éstos son los llamados *momentos de empotramiento*, vistos ya en el capítulo 5 y obtenibles, como se dijo entonces, por cualquiera de los métodos tradicionales, especialmente los de área de momentos y viga conjugada, o de ayudas de diseño como la tabla 5.1 (páginas 164 y 165).

6.8 PROCEDIMIENTO PARA ESTRUCTURAS CUYOS NUDOS NO SE DESPLAZAN

Cuando no hay desplazamientos relativos de los extremos de los elementos que conforman la estructura, basta con considerar los nudos fijos calculando los momentos de empotramiento de los elementos que reciben cargas y luego soltar los nudos uno por uno. Se estudia en cada caso el efecto de la liberación en los extremos de los elementos que concurren al nudo, mediante los coeficientes de distribución, y en los extremos opuestos utilizando los coeficientes de transmisión. El proceso se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1

Resuelva la estructura mostrada. Los valores indicados sobre los elementos corresponden a los K relativos (I/L) de los mismos.



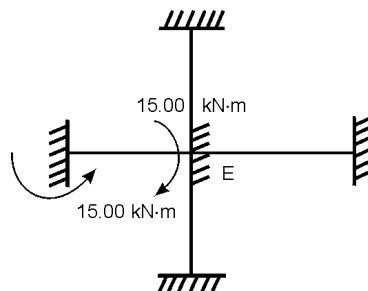
Solución

El único nudo que puede girar es el E. Siguiendo el procedimiento indicado atrás, se comienza por suponer que dicho nudo está fijo, para lo cual se le debe aplicar el momento de empotramiento M_{EA}^F que anule la tendencia al giro del elemento AE debida a las cargas aplicadas sobre el mismo.

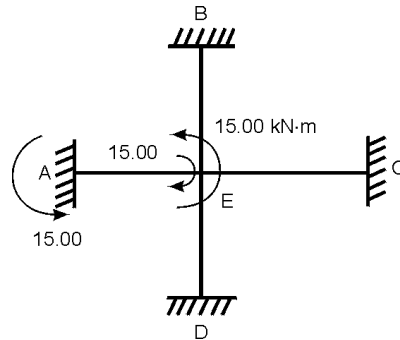
Para una viga prismática sometida a carga uniformemente repartida:

$$M_{AE}^F = -M_{EA}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{20 \times 9}{12} = 15.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

La estructura queda entonces en la siguiente situación:



El segundo paso es liberar el nudo E, lo cual se logra aplicándole un momento igual y de sentido contrario a la suma de los momentos de empotramiento de los extremos de los elementos que concurren a él, en este caso 15.00 kN·m (contrahorario).



Al soltar el nudo, dicho momento se reparte entre los elementos, proporcionalmente a sus rigideces. Los respectivos coeficientes de distribución son:

$$\delta_{EA} = \frac{K_{EA}}{K_{EA} + K_{EB} + K_{EC} + K_{ED}} = \frac{4}{4 + 2 + 3 + 2} = 0.363$$

$$\delta_{EB} = \frac{2}{11} = 0.182 = \delta_{ED}$$

$$\delta_{EC} = \frac{3}{11} = 0.273 \quad \text{Comprobación: } \Sigma \delta = 1$$

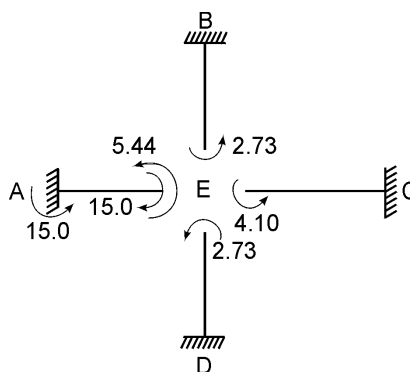
Por consiguiente, los momentos debidos al giro de E serán:

$$M'_{EA} = \delta_{EA} \left[-\sum_E M_{ij}^F \right] = 0.363 \times 15.0 = 5.44 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M'_{EB} = M'_{ED} = 0.182 \times 15.0 = 2.73 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M'_{EC} = 0.273 \times 15.0 = 4.10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y la estructura queda entonces así:



Pero el giro de E induce también momentos en los extremos opuestos de los elementos, como se vio en el numeral 6.5. Dichos momentos son iguales a los anteriores, multiplicados por el coeficiente de transmisión, en este caso 0.5, por tratarse de elementos prismáticos. Esto es:

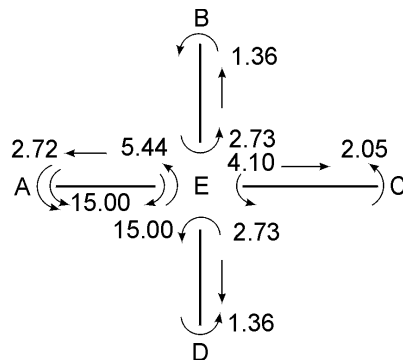
$$M'_{AE} = 0.5M'_{EA} = 0.5 \times 5.44 = 2.72 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M'_{BE} = 0.5M'_{EB} = 0.5 \times 2.73 = 1.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

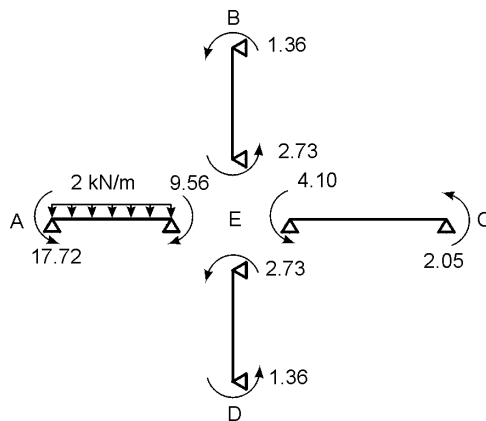
$$M'_{CE} = 0.5M'_{EC} = 0.5 \times 4.10 = 2.05 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M'_{DE} = 0.5M'_{ED} = 0.5 \times 2.73 = 1.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con lo cual el estado final de los elementos de la estructura viene a quedar así:



y aplicando superposición:



Comprobación:

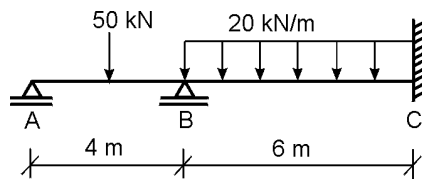
$$\Sigma M_E = -9.56 + 2(2.73) + 4.10 = 0$$

Como el nudo E es el único que puede girar, con lo anterior queda terminado el proceso, y los momentos indicados son los momentos definitivos en los extremos de los elementos.

En el ejemplo siguiente se explica el procedimiento para el caso en que varios pueden girar.

Ejemplo 6.2

Resuelva la viga de sección constante mostrada.



Solución

Como se trata de una viga de sección constante, se puede suponer $I = 100$ y trabajar con K relativos.

$$K_{AB} = \frac{100}{4} = 25; \quad K_{BC} = \frac{100}{6} = 16.67$$

Coefficientes de distribución

$$\delta_{BA} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{25}{25 + 16.67} = 0.600$$

$$\delta_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{AB} + K_{BC}} = \frac{16.67}{41.67} = 0.400$$

Comprobación:

$$\Sigma \delta_{Bj} = 1.000 \quad \beta$$

En A, por ser apoyo simple, $\delta_{AB} = 1$.

En C, por ser empotramiento, $\delta_{CB} = 0$, que físicamente equivale a no poder absorber ningún momento en A y, por el contrario, poder absorber en C todo el que le llegue.

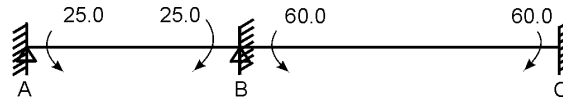
Momentos de empotramiento

Para los casos mostrados se obtiene:

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{50 \times 4}{8} = 25.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

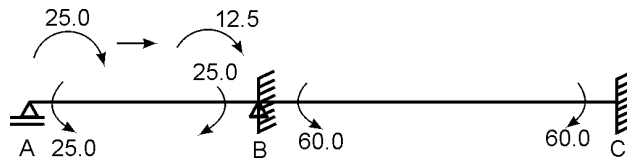
$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{20 \times 36}{12} = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se empieza, como antes, por suponer los nudos fijos. Para lograrlo, a cada extremo se le deben aplicar los momentos de empotramiento encontrados atrás.

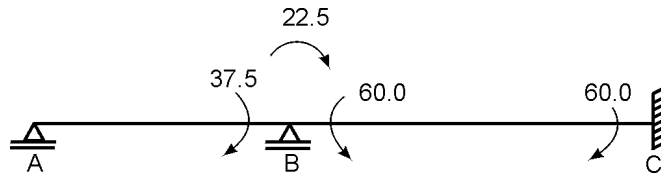


Sin embargo estos momentos no pueden permanecer, pues se alterarían las condiciones del problema. De ahí que a cada nudo que pueda girar debe aplicársele un momento igual y de sentido contrario al de desbalance.

Al soltar primero el nudo A, dicho momento es tomado íntegramente por el extremo correspondiente de AB, y a B se transmite la mitad del mismo.



El momento de desbalance en B queda ahora igual a 22.5 kN·m (contrahorario). Para lograr el equilibrio se le agregará un momento de 22.5 kN·m (horario).

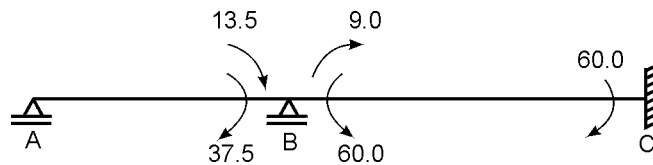


Al soltar ahora el nudo B, dicho momento balanceador se repartirá proporcionalmente a las rigideces:

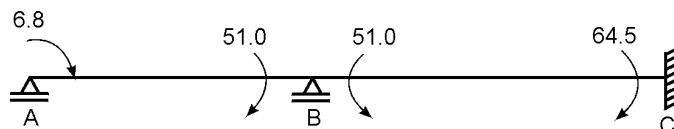
$$M'_{BA} = 0.600 \times 22.5 = 13.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M'_{BC} = 0.400 \times 22.5 = 9.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

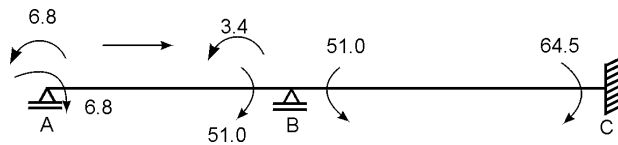
con lo cual la situación queda así:



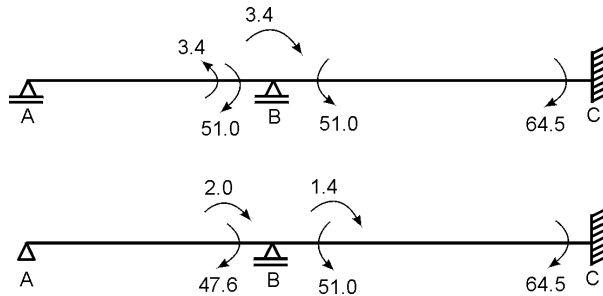
pero estos momentos, a su vez, inducen otros, iguales a su mitad, en los apoyos A y C, quedando por tanto:



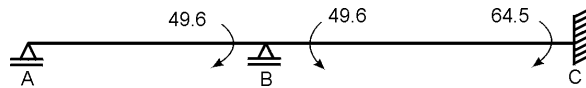
Se observa ahora que el nudo B ha quedado balanceado y se ha concluido el primer ciclo. Sin embargo, como consecuencia de la transmisión ha vuelto a aparecer en A un momento de desbalance de 6.8 kN·m (horario) que se debe eliminar mediante uno igual y de sentido contrario. Al soltar A por segunda vez, se transmite a B la mitad de dicho valor:



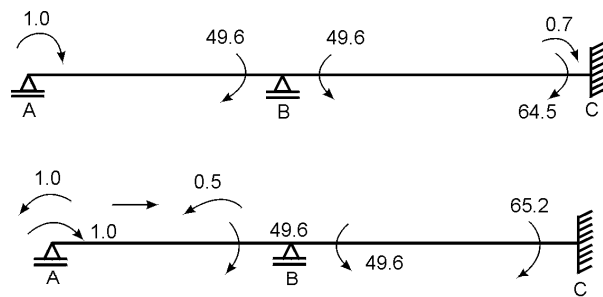
y al permitir el giro de B, los 3.4 kN·m necesarios para el balance se reparten según sus coeficientes de distribución.



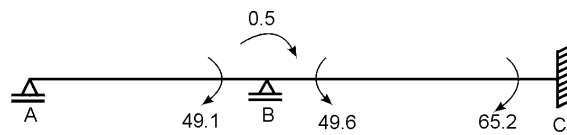
con lo cual queda:



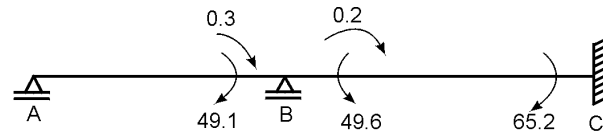
que de nuevo muestra balanceados los nudos A y B. Los momentos inducidos en A y C por el segundo giro de B sirven para efectuar un tercer ciclo, que se resume a continuación:



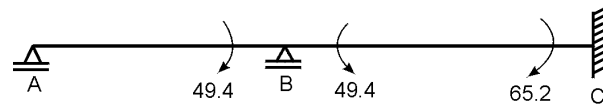
(b)



(c)



(d)



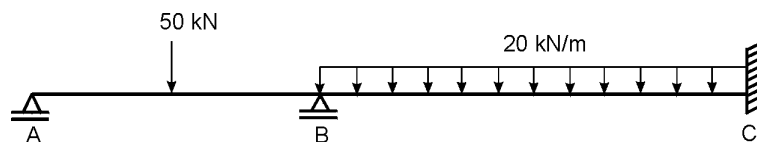
(e)

Para un cuarto ciclo se transmitirían a A y C momentos de 0.1 kN·m, que pueden despreciarse al considerar la precisión con que se conocen las cargas aplicadas. Por consiguiente, los valores dados en (e) pueden tomarse como las respuestas buscadas.

La consideración detallada de todos los pasos anteriores es innecesaria en la solución mecánica del problema y se ha hecho aquí únicamente para facilitar el entendimiento del método. A continuación se indica la forma esquemática utilizada en la práctica, siguiendo el mismo proceso.

En síntesis, en cada ciclo para equilibrar cualquier nudo, basta determinar la magnitud y signo del momento de desbalance y distribuirlo con el signo cambiado entre los miembros concurrentes mediante los coeficientes de distribución. Luego se transmiten estos momentos y se pasa a balancear el siguiente nudo.

Otra alternativa, que se utilizará en el siguiente ejemplo, consiste en distribuir primero los momentos de desbalance simultáneamente en todos los nudos y luego efectuar, también simultáneamente, las transmisiones. El orden en este caso no tiene importancia.



δ	1	0.600	0.400	0
M^F	25.0	-25.0	60.0	-60.0
	-25.0	-12.5		
	-6.8	-13.5	-9.0	-4.5
	6.8	3.4		
	-1.0	-2.0	-1.4	-0.7
	1.0	0.5		
		-0.3	-0.2	
	0.0	-49.4	49.4	-65.2

Utilizando la primera alternativa, hay quienes recomiendan empezar por el nudo de mayor desbalance. Para obtener los momentos finales simplemente se suman las columnas respectivas y se comprueba que la suma de momentos en cada nudo dé cero. Nótese, sin embargo, que esto no garantiza la validez de las respuestas, pues los momentos de empotramiento y los coeficientes de distribución pueden estar mal calculados. Por consiguiente, es de suma importancia verificarlos adecuadamente antes de comenzar el proceso.

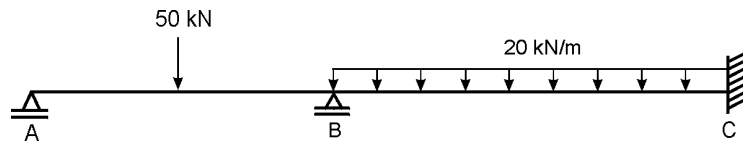
Ejemplo 6.3

Resuelva la misma viga del ejemplo 6.2, utilizando distribución simultánea de los momentos de desbalance.

Solución

La evaluación de rigideces relativas, coeficientes de distribución y momentos de empotramiento es idéntica a la del problema anterior. Lo único que cambia es la secuencia de operaciones, como se indica en seguida.

Obsérvese que para lograr el mismo grado de exactitud se necesita ahora un mayor número de ciclos. A pesar de ello, por ser más mecánica, esta alternativa es la preferida por un gran número de calculistas y será la empleada en los ejemplos siguientes:



δ	1	0.600	0.400	0
M^F	25.0	-25.0	60.0	-60.0
	-25.0	-21.0	-14.0	
	-10.5	-12.5		-7.0
	10.5	7.5	5.0	
	3.8	5.2		2.5
	-3.8	-3.1	-2.1	
	-1.6	-1.9		-1.0
	1.6	1.1	0.8	
	0.6	0.8		0.4
	-0.6	-0.5	-0.3	
	-0.2	-0.3		-0.2
	0.2	0.2	0.1	
	0.0	-49.5	49.5	-65.3

6.9 SIMPLIFICACIÓN POR EXTREMOS ARTICULADOS EN ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTO

En el caso de miembros con un extremo articulado, se sabe de antemano que el momento final en ellos debe ser cero. Por otra parte, en el numeral 6.4 se encontró que la rigidez de tal elemento, si es prismático, equivale a las tres cuartas partes de la rigidez del mismo elemento con ambos extremos empotrados. Además, en el numeral 6.5 se vio que el coeficiente de transmisión para dicho elemento es cero. En atención a todo esto se deduce que si los momentos de empotramiento para tales elementos se calculan teniendo en cuenta su condición real, esto es, un extremo articulado, se puede eliminar el proceso de las respectivas transmisiones, acelerándose en consecuencia la solución del problema. La diferencia en rigideces se tiene en cuenta al evaluar los coeficientes de distribución, tomando para los miembros con extremo articulado un

$$K' = \frac{3}{4}K$$

en donde K es el valor de la rigidez que le correspondería si el apoyo fuese empotrado. El proceso simplificado se muestra a continuación para la misma viga estudiada anteriormente.

Ejemplo 6.4

Resuelva la misma viga de los ejemplos 6.2 y 6.3, utilizando la simplificación por ser A un apoyo simple.

Solución

Ahora se tiene, como rigideces:

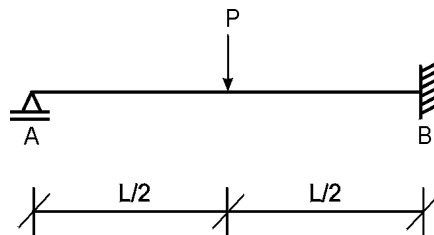
$$K'_{AB} = \frac{3}{4}K_{AB} = \frac{3}{4} \times 25 = 18.75 \quad ; \quad K_{BC} = 16.67$$

Coefficientes de distribución

$$\delta_{BA} = \frac{18.75}{18.75 + 16.67} = 0.529$$

$$\delta_{BC} = \frac{16.67}{35.42} = 0.471 \quad \quad \quad \Sigma \delta = 1 \quad \beta$$

Momentos de empotramiento

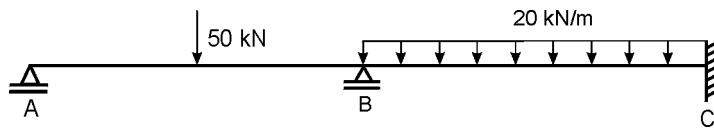


En AB es necesario considerar ahora la verdadera situación del extremo A. De tablas, o por viga conjugada:

$$M_{AB}^F = 0$$

$$M_{BA}^F = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3 \times 50 \times 4}{16} = -37.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

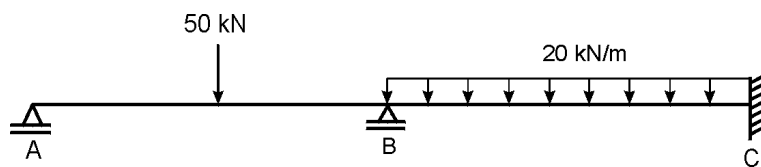
En el tramo BC los momentos de empotramiento siguen como antes. El esquema queda entonces así:



δ	1	0.529	0.471	-0.00
M^F	0.0	-37.5	60.0	-60.0
		-11.9	-10.6	-5.3
	0.0	-49.4	49.4	-65.3

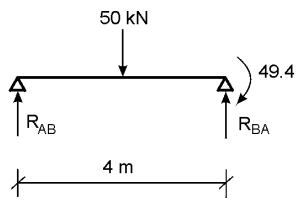
Obsérvese que en este caso bastó un ciclo para obtener los valores exactos de los momentos definitivos.

La simplificación se puede aplicar incluso cuando se ignoran los momentos de empotramiento para el caso especial de un extremo articulado, pero entonces es necesario efectuar una transmisión del extremo articulado, como se indica a continuación:



δ	1	0.529	0.471	-0.00
M^F	25.0	-25.0	60.0	-60.0
	-25.0	-12.5		
	0.0	-11.9	-10.6	-5.3
		-49.4	49.4	-65.3

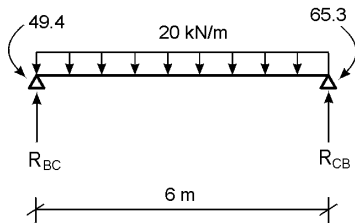
Con los valores de los momentos en los extremos, se pueden calcular ahora las reacciones y los momentos máximos en las luces, necesarios para el diseño:



$$R_{AB} = \frac{50}{2} - \frac{49.4}{4} = 12.7 \text{ kN}$$

$$R_{BA} = 25.0 + 12.5 = 37.3 \text{ kN}$$

$$M_{\max}(+) = 12.7 \times 2 = 25.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

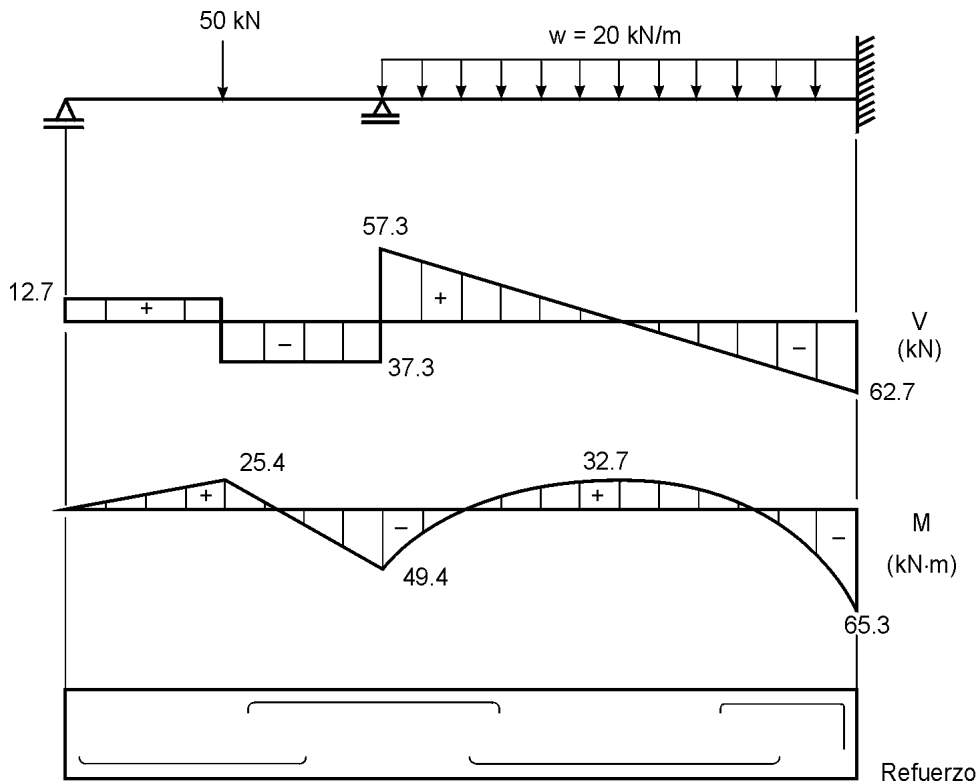


$$R_{BC} = 20 \times 3 - \frac{65.3 - 49.4}{6} = 57.3 \text{ kN}$$

$$R_{CB} = 60.0 + 2.7 = 62.7 \text{ kN}$$

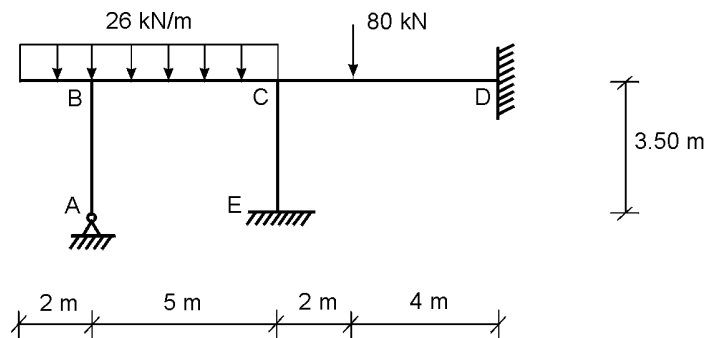
$$M_{\max}(+) = \frac{(57.3)^2}{2 \times 20} - 49.4 = 32.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

con estos valores se pueden trazar los diagramas de corte, momento y refuerzo.



Ejemplo 6.5

La viga del pórtico mostrado es de $300 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ ($b \times h$) y las columnas de $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$. El apoyo en A está articulado. Resuelva la estructura para las cargas indicadas.



Solución

Para encontrar los coeficientes de distribución se pueden emplear rigideces relativas, incluso descuidando las dimensiones, siempre y cuando se mantenga la consistencia. Entonces:

$$K_{BC} = \frac{3 \times 5^3}{5} = 75$$

$$K_{AB} = K_{CE} = \frac{3 \times 3^3}{3.5} = 23.1$$

$$K_{CD} = \frac{3 \times 5^3}{6} = 62.5$$

Para utilizar la simplificación del extremo articulado:

$$K'_{AB} = \frac{3}{4} K_{AB} = \frac{3}{4} \times 23.1 = 17.3$$

Coefficientes de distribución

$$\left. \begin{aligned} \delta_{BA} &= \frac{17.3}{17.3 + 75} = 0.187 \\ \delta_{BC} &= \frac{75}{92.3} = 0.813 \end{aligned} \right\} \sum \delta_{Bj} = 1, \quad \beta$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{CB} &= \frac{75}{75 + 62.5 + 23.1} = 0.467 \\ \delta_{CD} &= \frac{62.5}{160.6} = 0.389 \\ \delta_{CE} &= \frac{23.1}{160.6} = 0.144 \end{aligned} \right\} \sum \delta_{cj} = 1, \quad \beta$$

Momentos de empotramiento

$$M_{vol}^F = -\frac{wL^2}{2} = -\frac{26(2)^2}{2} = -52.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{26(5)^2}{12} = 54.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^F = \frac{Pb^2a}{L^2} = \frac{80(4)^2 \times 2}{36} = 71.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC}^F = -\frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{80(2)^2 \times 4}{36} = -35.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se acostumbra sistematizar la solución del problema utilizando un cuadro que siga las líneas generales de la estructura.

Vol.	BA	BC
0	0.187	0.813
-52.0	-0.4	54.2
		-1.8
	0.8	-4.0
		3.2
		0.2
		-0.2
-52.0	0.4	51.6

CB	CE	CD
0.467	0.144	0.389
-54.2		71.1
-7.9	-2.4	-6.6
-0.9		
0.4	0.1	0.4
1.6		
-0.8	-0.2	-0.6
-61.8	-2.5	64.3

DC
0
-35.6
-3.3
0.2
-0.3
-39.0

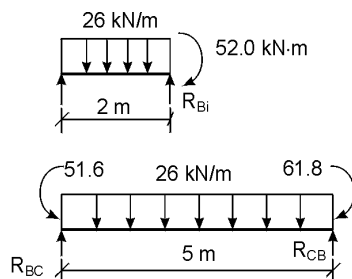
AB
1
0

EC
0
-1.2
-0.1
-1.3

En los casos comunes de estructuras pequeñas resueltas manualmente, tres ciclos suelen ser suficientes.

Obsérvese que en cada nudo la sumatoria de momentos es igual a cero. A partir de los valores finales y de las cargas, se calculan las reacciones y se dibujan los diagramas de corte y momento de la estructura.

Cálculo de las reacciones y momentos máximos



$$R_{Bi} = 26.0 \times 2 = 52.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{vol} = -52.0 \times 1 = -52.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

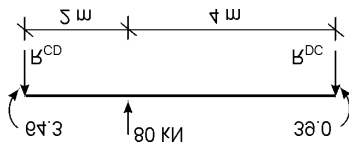
$$R_{BC} = \frac{26.0 \times 5}{2} - \frac{61.8 - 51.6}{5} = 63.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{CB} = 26.0 \times 2.5 + 2.0 = 67.0 \text{ kN } \uparrow$$

en el punto de anulación del esfuerzo cortante:

$$x = \frac{R_{BC}}{w} = \frac{63.0}{26.0} = 2.42 \text{ m}$$

$$M_{\max (+)} = \frac{63.0 \times 2.42}{2} - 51.6 = 24.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

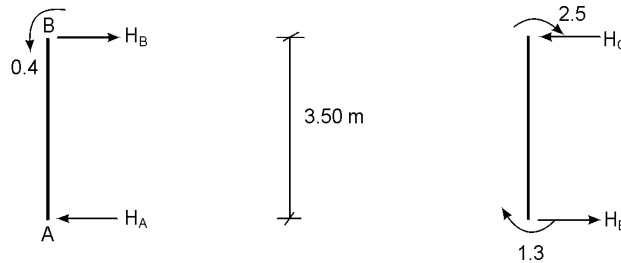


$$R_{CD} = \frac{80 \times 4}{6} + \frac{64.3 - 39.0}{6} = 57.6 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_{DC} = 80 - 57.6 = 22.4 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max (+)} = 57.6 \times 2 - 64.3 = 50.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Pasando ahora a las columnas:

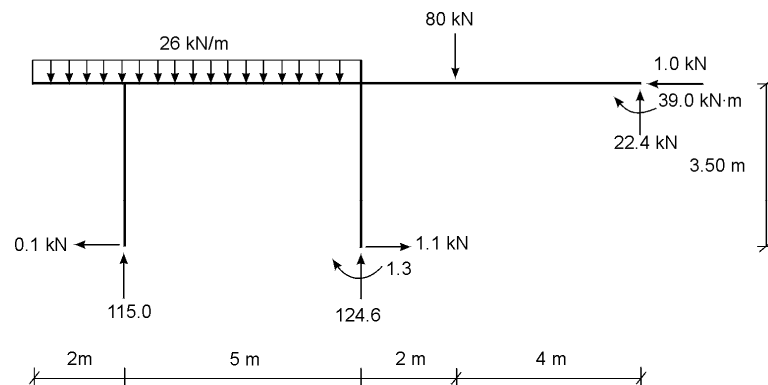


$$H_A = H_B = \frac{0.4}{3.50} = 0.1 \text{ kN}$$

$$H_C = H_E = \frac{2.5 + 1.3}{3.50} = 1.1 \text{ kN}$$

Obsérvese que en los diagramas anteriores de vigas y columnas falta incluir las cargas axiales. Esta es la práctica corriente para no complicar demasiado las figuras, ya que en *Teoría elástica de primer orden*, como se vio antes, se considera que dichas cargas tienen efecto despreciable sobre los momentos. Obviamente, esto no implica que en el diseño en sí de los elementos no se tengan en cuenta las cargas axiales.

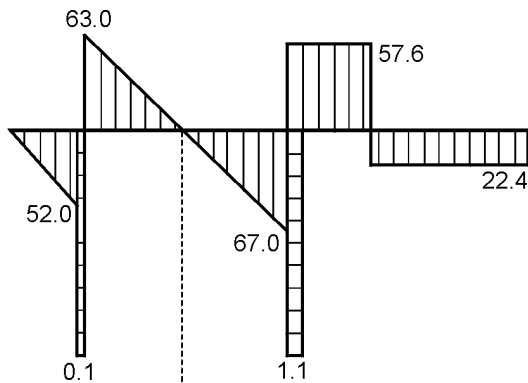
La corrección de las respuestas puede verificarse mediante el diagrama de cuerpo libre del conjunto:



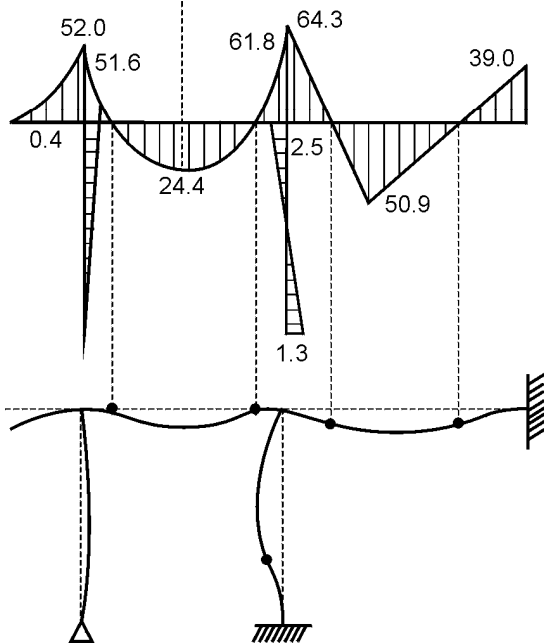
Comprobación:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0$$

Uniendo los elementos se obtienen los siguientes diagramas. En el de momentos se ha invertido la convención que se venía utilizando, con el fin de evitar el traslapo de los diagramas correspondientes a vigas y columnas.



Corte en kilonewtons



Momento en kN·m

Los diagramas están dibujados del lado en tensión del elemento.

Estructura deformada

Los puntos de inflexión aparecen señalados con un pequeño círculo.

6.10 SIMPLIFICACIONES POR SIMETRÍA Y ANTISIMETRÍA

Cuando la estructura es simétrica y está sometida a carga simétrica, basta trabajar con la mitad de la estructura, pues la pendiente de las vigas en el eje de simetría debe ser igual a cero. En consecuencia, si en tal eje hay nudos, las barras que coinciden con el mismo estarán exentas de flexión y las vigas pueden considerarse empotradas en el eje de simetría. Por otra parte, si el eje de simetría corta las vigas, éstas pueden considerarse con

impedimento de giro y desplazamiento lateral, pero libres para desplazarse verticalmente, lo cual resulta en una rigidez virtual reducida igual a 0.50 veces la rigidez real, si la barra es de sección constante (referencia 6.3).

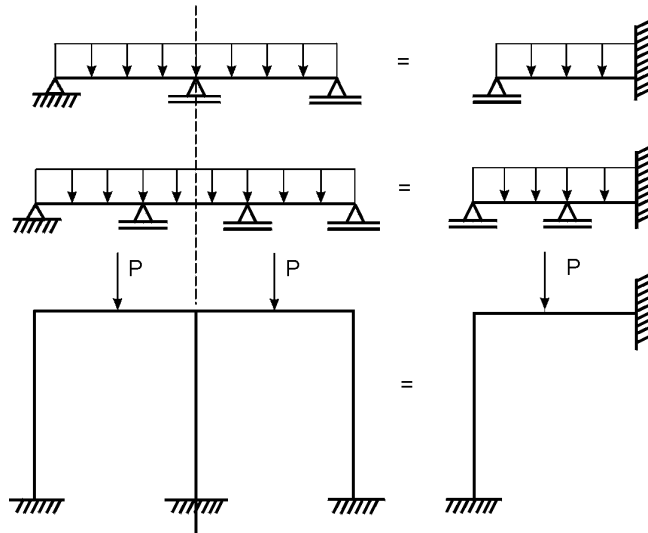
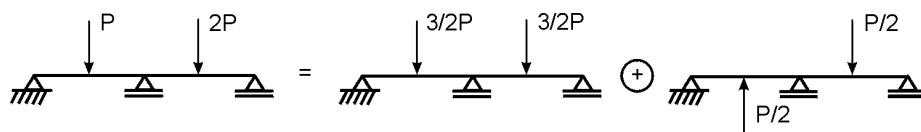


Figura 6.6 Simplificación por simetría.

En el caso de carga antisimétrica resulta una articulación en el eje de simetría; la rigidez virtual de las vigas cortadas será la real, multiplicada por un coeficiente de 1.50. Hay que dividir en dos partes las barras del eje, asignándoles una rigidez mitad de la real, y dividir también por dos los momentos de empotramiento perfecto en sus nudos. Esto obliga a que en los resultados finales haya que duplicar los momentos correspondientes a dichos nudos.

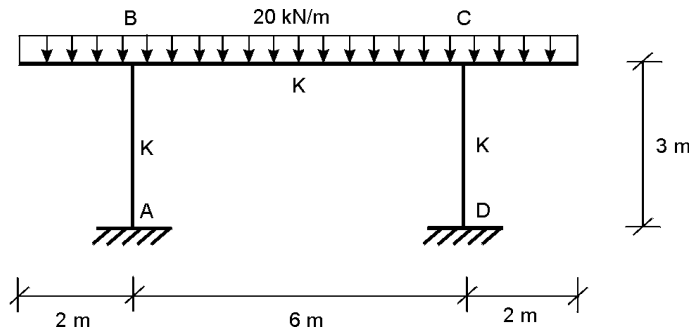
La simplificación por simetría puede aplicarse directamente en los casos de carga simétrica o antisimétrica, e indirectamente para una carga cualquiera, descomponiéndola previamente en la suma de una carga simétrica y otra antisimétrica, como en el caso siguiente:



Algunas veces esta descomposición puede utilizarse con ventaja, especialmente cuando es necesario considerar muchas hipótesis de carga.

Ejemplo 6.6

Resuelva el pórtico mostrado, suponiendo que la viga y las columnas tienen la misma rigidez.



Solución

Por ser la estructura simétrica y estar sometida a carga simétrica, no sufrirá desplazamiento.

Para poder comparar el trabajo involucrado se presentan tanto la solución corriente como la solución simplificada.

a) Solución corriente

$$\delta_{BA} = \delta_{BC} = \frac{K}{K + K} = 0.50$$

$$\delta_{CB} = \delta_{CD} = 0.50$$

$$M_{volB}^F = -M_{volC}^F = -20 \times 2 \times 1 = -40.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{20 \times 36}{12} = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Vol.	BA	BC
	0.500	0.500
-40.0		60.0
	-10.0	-10.0
		5.0
	-2.5	-2.5
		1.2
	-0.6	-0.6
-40.0	-13.1	53.1

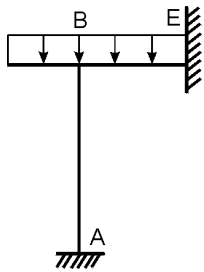
CB	CD	Vol.
0.500	0.500	
-60.0		40.0
10.0	10.0	
-5.0		
2.5	2.5	
-1.2		
0.6	0.6	
-53.1	13.1	40.0

AB
0
-6.6

DC
0
6.6

b) Solución simplificada

Como el eje de simetría corta la viga, se toma para ésta:



$$K_v = \frac{1}{2} K$$

$$\rightarrow \delta_{BE} = \frac{1/2 K}{1/2 K + K} = 0.333$$

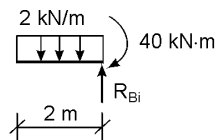
$$\delta_{BA} = \frac{K}{1.5 K} = 0.667$$

Los momentos de empotramiento no cambian. Por tanto:

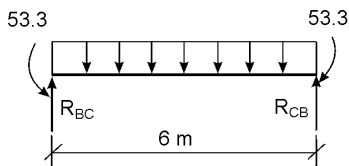
Vol.	BA	BE
	.667	.333
-40.0	-13.3	60.0
-40.0	-13.3	53.3

AB
0
-6.6

Se observa que los valores obtenidos no sólo requirieron menos operaciones, sino que son más exactos que los primeros. A partir de ellos se calculan las reacciones y se dibujan los diagramas.

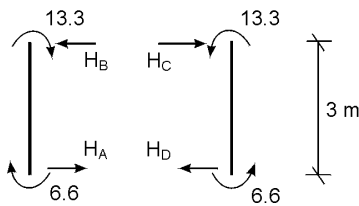


$$R_{Bi} = 2 \times 20 = 40.0 \text{ kN } \uparrow$$



$$R_{BC} = R_{CB} = 20 \times 3 = 60.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max} (+) = \frac{(60)^2}{2 \times 20} - 53.3 = 36.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



$$H_A = H_B = H_C = H_D$$

$$= \frac{19.9}{3} = 6.6 \text{ kN}$$

Finalmente:

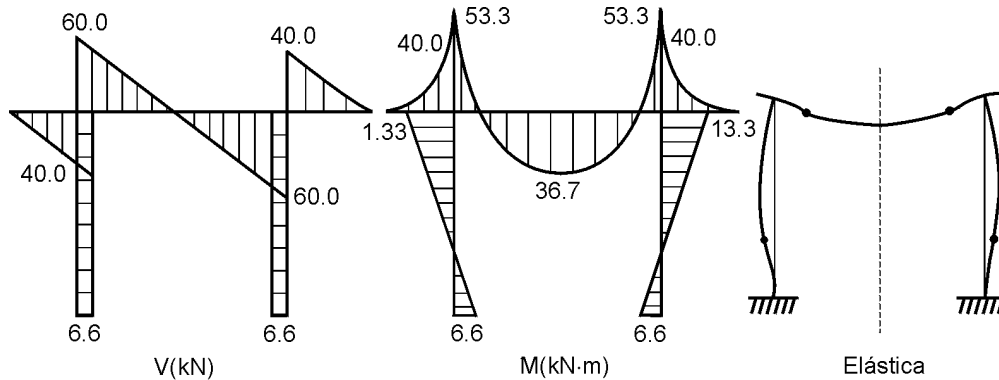


Diagrama del lado de tensión.

6.11 ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTO: MÉTODO TRADICIONAL

Hasta el momento, todos los ejemplos vistos han sido de estructuras que no podían experimentar desplazamientos laterales y por eso no ha sido necesario incluir momentos de desplazamiento en las columnas. Sin embargo, en muchas estructuras simétricas y en toda estructura desprovista de amarre lateral sometida a cargas asimétricas o laterales ocurrirán desplazamientos diferenciales, normales al eje, de los extremos de las columnas, que a su vez originan momentos. Al no tenerlos en cuenta en el Método de Cross visto hasta ahora, es de esperar que los resultados no satisfagan las ecuaciones de equilibrio y sea necesario aplicar correcciones.

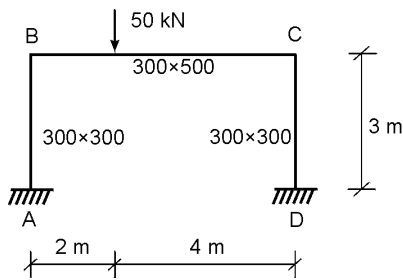
Existen dos métodos para hacerlo: el tradicional de superponer los efectos de desplazamientos separados de los nudos (referencias 5.1, 6.1 y 6.3) y el menos conocido de aplicar correcciones sucesivas de fuerzas de corte al terminar cada ciclo (referencia 6.8). Este último es preferible para estructuras ortogonales con muchos grados de libertad, especialmente si se va a utilizar computadora.

Al utilizar el primer método es preciso recordar que existe un grado de libertad por cada traslación posible de un nudo o de un sistema de nudos interconectados que pueda ocurrir como resultado de flexión de los miembros, e independientemente de cualquier otro nudo o sistema de nudos. Un método para determinar tales grados de libertad es el de las diagonales, que consiste en articular todos los nudos, incluso los apoyos, y trazar cuantas diagonales sean necesarias para que la estructura vuelva a quedar estable. El número de diagonales trazadas da entonces los grados de libertad de traslación.

En los ejemplos siguientes se demostrará el empleo del método tradicional de solución.

Ejemplo 6.7

Resuelva el pórtico mostrado.

**Solución**

Cálculo de rigideces relativas:

$$K_{BC} = \frac{3 \times 5^3}{6} = 62.5$$

$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{3 \times 3^3}{3} = 27$$

Coefficientes de distribución

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \frac{62.5}{62.5 + 27} = 0.698$$

$$\delta_{BA} = \delta_{CD} = \frac{27}{89.5} = 0.302$$

Momentos de empotramiento

$$M_{BC}^F = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{50 \times 2 \times (4)^2}{(6)^2} = 44.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

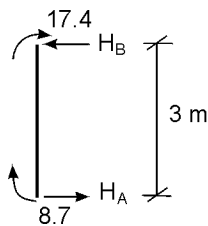
$$M_{CB}^F = -\frac{Pa^2b}{L^2} = -\frac{50 \times (2)^2 \times 4}{(6)^2} = -22.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

AB
-6.7
-1.2
-0.8
-8.7

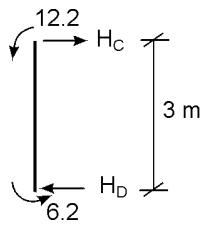
BA	BC
0.302	0.698
-13.4	44.4
-2.4	7.8
-1.6	-5.4
-1.6	5.4
-17.4	-3.8
-17.4	17.4

CB	CD
0.698	0.302
-22.2	
15.5	6.7
-15.5	
10.8	4.7
-2.7	
1.9	0.8
-12.2	12.2

DC
3.4
2.4
0.4
6.2

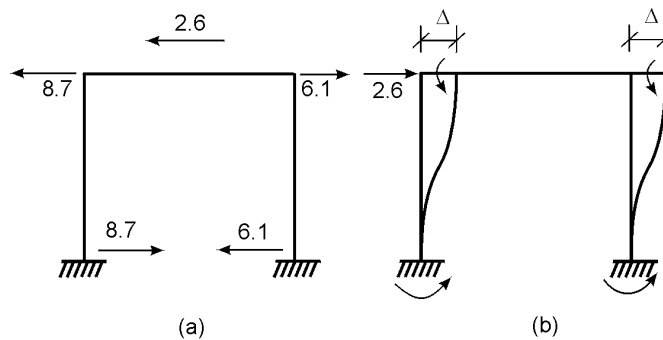
Cálculo de fuerzas de corte en las columnas

$$H_A = H_B = \frac{17.4 + 8.7}{3} = 8.7 \text{ kN}$$



$$H_c = H_d = \frac{12.2 + 6.2}{3} = 6.1 \text{ kN}$$

La estructura queda entonces como se indica en la figura (a) siguiente. Esto significa que con la acción de la carga P la estructura tiende a desplazarse hacia la derecha; al suponerla sin desplazamiento, implícitamente se le ha colocado un apoyo ficticio en C para que la detenga. Es claro que debido a ese desplazamiento se presentan momentos adicionales que no se han tenido en cuenta, indicados en la figura (b), y que deben superponerse a los ya encontrados.



Se vio anteriormente que para un elemento doblemente empotrado los momentos de desplazamiento están dados por:

$$M'' = \frac{6EI}{L^2} \Delta = 6E \left(\frac{K}{L} \right) \Delta$$

Se presentan entonces dos alternativas: a) escoger un momento arbitrario de referencia M'' para un elemento y hallar los de los otros por proporción; b) escoger un desplazamiento arbitrario Δ y calcular los momentos de desplazamiento de todos los elementos mediante la ecuación anterior.

Como se supone aplicable el Principio de superposición, a partir de la condición de equilibrio se encontrará el factor de proporcionalidad por el cual habrá que multiplicar los momentos obtenidos en esta segunda etapa, para obtener los momentos debidos a los desplazamientos reales, y poder superponerlos a los obtenidos en la primera.

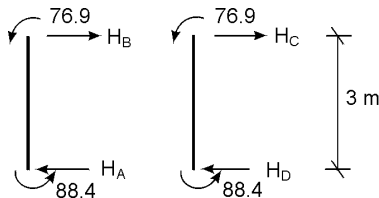
En el ejemplo considerado, como las dos columnas son iguales, tienen el mismo (K/L) , y por compatibilidad de deformaciones experimentan el mismo Δ . De manera que los momentos de desplazamiento serán iguales para ambas. Siguiendo la alternativa a) señalada antes, se puede suponer

$$M''_{AB} = M''_{BA} = M''_{CD} = M''_{DC} = 100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y con este valor se efectúa el Cross indicado a continuación:

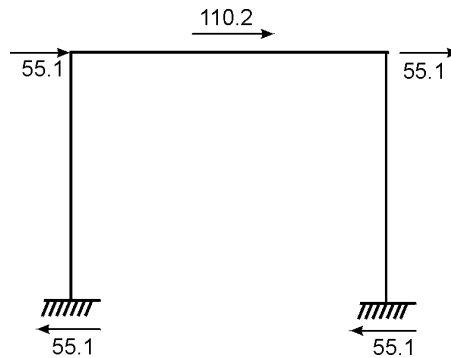
AB	BA	BC	CB	CD	DC
0	0.302	0.698	0.698	0.302	0
100.0	100.0			100.0	100.0
-15.0	-30.0	-70.0	-70.0	-30.0	-15.0
		-35.0	-35.0		
5.3	10.6	24.4	24.4	10.6	5.3
		12.2	12.2		
-1.9	-3.7	-8.5	-8.5	-3.7	-1.9
88.4	76.9	-76.9	-76.9	76.9	88.4

A partir de estos valores se calcula el corte en las columnas:



$$\begin{aligned}
 H_A = H_B = H_C = H_D &= \\
 &= \frac{76.9 + 88.4}{3} = 55.1
 \end{aligned}$$

y el diagrama de cuerpo libre del conjunto queda:



De esta figura se desprende que para producir momentos de desplazamiento de 100.0 kN·m se requiere una fuerza hacia la derecha de 110.2 kN. Como la correspondiente al desplazamiento real, según se vio en el primer Cross, es sólo de 2.6 kN, los momentos de desplazamiento reales se obtendrán por proporción multiplicando los alcanzados en el segundo Cross por un coeficiente:

$$\alpha = \frac{2.6}{110.2} = 0.02359$$

o sea, que el verdadero momento de desplazamiento (doblemente empotrado) debe ser igual a:

$$M'' = 100.0 \times 0.02359 = 2.359 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y de ahí se puede calcular la magnitud del desplazamiento real:

$$\Delta = \left(\frac{L}{6EK} \right) (2.359)$$

Los momentos finales se obtienen por adición de los alcanzados mediante el primer Cross y los obtenidos mediante el segundo, debidamente multiplicados por el coeficiente de proporcionalidad α . Esto es:

$$M_{ij} = (M_{ij})_I + \alpha (M_{ij})_{II}$$

en donde los números romanos indican el Cross respectivo. Aplicando esta ecuación se obtienen los siguientes valores:

$$M_{AB} = -8.7 + 88.4 (0.02359) = -6.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = -17.4 + 76.9 (0.02359) = -15.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

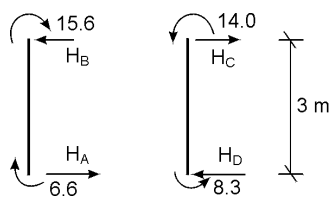
$$M_{BC} = 17.4 - 76.9 (0.02359) = 15.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = -12.2 - 76.9 (0.02359) = -14.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 12.2 + 76.9 (0.02359) = 14.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = 6.20 + 88.4 (0.02359) = 8.30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se pueden comprobar los resultados mediante el equilibrio de fuerzas horizontales:

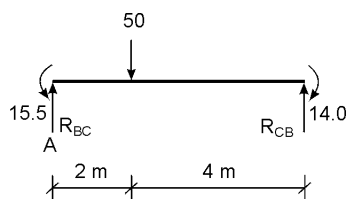


$$H_A = H_B = \frac{6.6 + 15.6}{3} = 7.40 \text{ kN}$$

$$H_C = H_D = \frac{14.0 + 8.3}{3} = 7.43 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_H = 7.40 - 7.43 = 0.03 \text{ kN} \approx 0 \beta$$

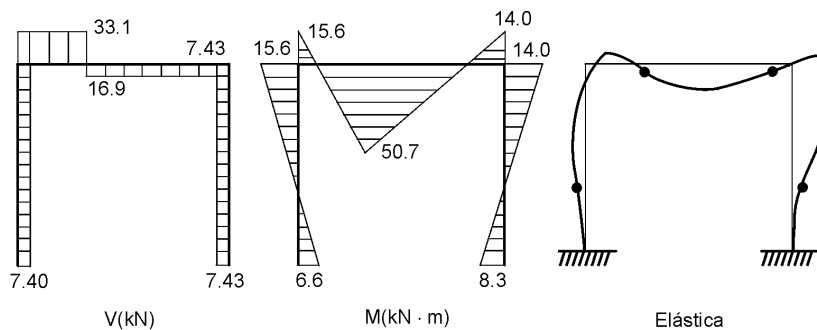
Finalmente se calculan las reacciones y se dibujan los diagramas de corte y momento.



$$R_{BC} = \frac{50 \times 4}{6} + \frac{15.5 - 14.0}{6} = 33.1 \text{ kN}$$

$$R_{CB} = 50.0 - 33.1 = 16.9 \text{ kN}$$

$$M_{\max} (+) = 33.1 \times 2 - 15.5 = 50.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

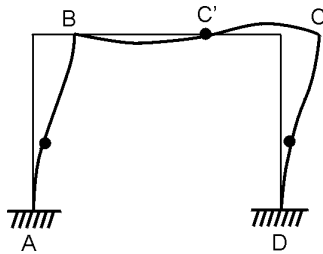


Ejemplo 6.8

El segundo Cross del ejemplo anterior sirve para ilustrar el hecho de que cuando hay simetría de la estructura al producirse desplazamiento, resulta una condición antisimétrica. Como el eje de simetría corta la viga, la deformada equivale a tener en el centro de la misma una articulación. En consecuencia, al considerar sólo la mitad su rigidez se duplica, y si se multiplica por 0.75 para aprovechar la simplificación por extremo articulado, se llega al coeficiente de 1.5 mencionado en el numeral 6.11.

Solución

En el ejemplo 6.7 se encontró:



$$K_{AB} = K_{CD} = 27$$

$$K_{BC} = 62.5$$

Utilizando la simplificación:

$$K'_{BC} = 1.5 \times 62.5 = 93.8$$

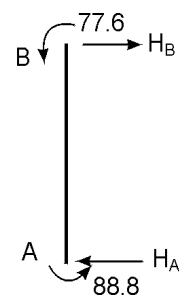
$$\rightarrow \delta'_{BC} = \frac{93.8}{29 + 93.8} = 0.776$$

$$\delta_{BA} = \frac{27}{120.8} = 0.224$$

$$\sum \delta = 1 \quad \beta$$

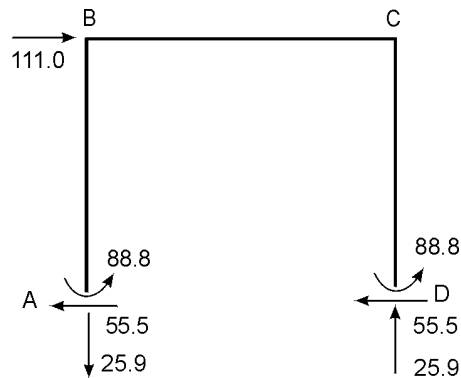
BA	BC'
0.224	0.776
100.0	
-22.4	-77.6
77.6	-77.6

AB
0
100.0
-11.2
88.8



$$H_A = H_B = \frac{77.6 + 88.8}{3} = 55.5 \text{ kN}$$

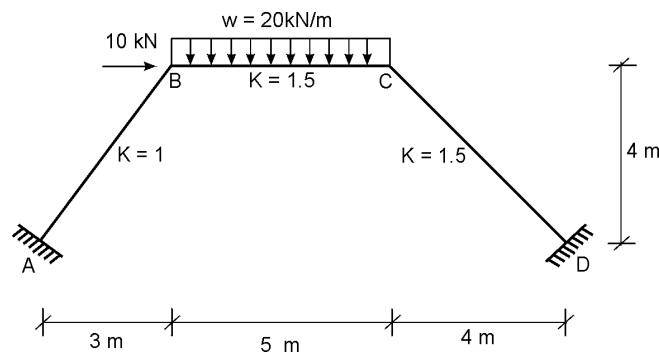
Por consiguiente, al considerar la otra parte de la estructura, el diagrama de cuerpo libre total queda:



cuyo equilibrio se puede comprobar fácilmente.

Ejemplo 6.9

Una estructura está formada por una serie de pórticos del tipo indicado en la figura, que se hallan separados entre sí 8 m. La viga debe soportar una carga vertical de 2.50 kN/m² actuando sobre el área aferente, además de un empuje horizontal de 10 kN.



Solución

Avalúo de la carga

$$w = 2.50 \times 8 = 20 \text{ kN/m}$$

Coefficientes de distribución

$$\delta_{BA} = \frac{1}{1+1.5} = 0.400, \quad \delta_{BC} = \frac{1.5}{2.5} = 0.600$$

$$\delta_{CB} = \delta_{CD} = \frac{1.5}{1.5+1.5} = 0.500$$

Momentos de empotramiento

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{20 \times 25}{12} = 41.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

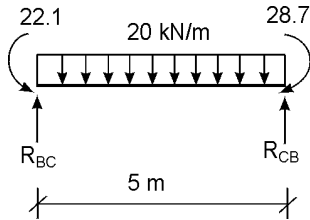
Como no hay simetría, la estructura sufrirá desplazamientos. Fácilmente se ve que sólo tiene un grado de libertad para desplazarse. Por consiguiente, se necesitarán dos *crosses*.

Primer Cross: sin considerar desplazamiento

Se efectúa el primer Cross, ignorando la fuerza horizontal y suponiendo que la estructura tiene impedido el desplazamiento.

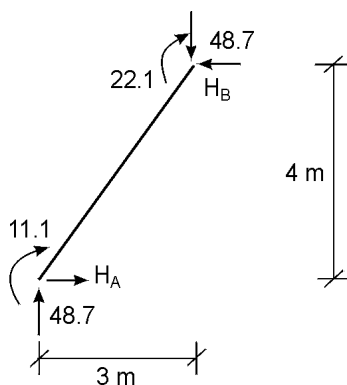
AB	BA	BC	CB	CD	DC
0	0.400	0.600	0.500	0.500	0
-8.4	-16.7	41.7	-41.7	20.9	10.5
-2.1	-4.2	10.4	-12.5	6.3	3.2
-0.6	-1.2	3.1	-3.1	1.5	0.8
-11.1	-22.1	22.1	-28.7	28.7	14.5

Es necesario empezar por el análisis de la viga, pues sus reacciones influyen en el equilibrio de los elementos inclinados:

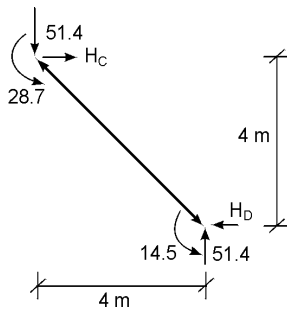


$$R_{BC} = \frac{20 \times 5}{2} - \frac{28.7 - 22.1}{5} = 48.7 \text{ kN}$$

$$R_{CB} = 50 + 1.4 = 51.4 \text{ kN}$$

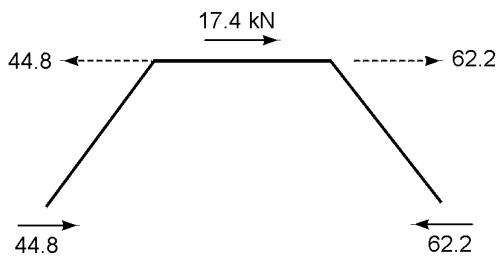


$$H_A = H_B = \frac{22.1 + 11.1 + 48.7 \times 3}{4} = 44.8 \text{ kN}$$



$$H_C = H_D = \frac{28.7 + 14.5 + 51.4 \times 4}{4} = 62.2 \text{ kN}$$

Resumiendo las fuerzas horizontales en un solo diagrama:

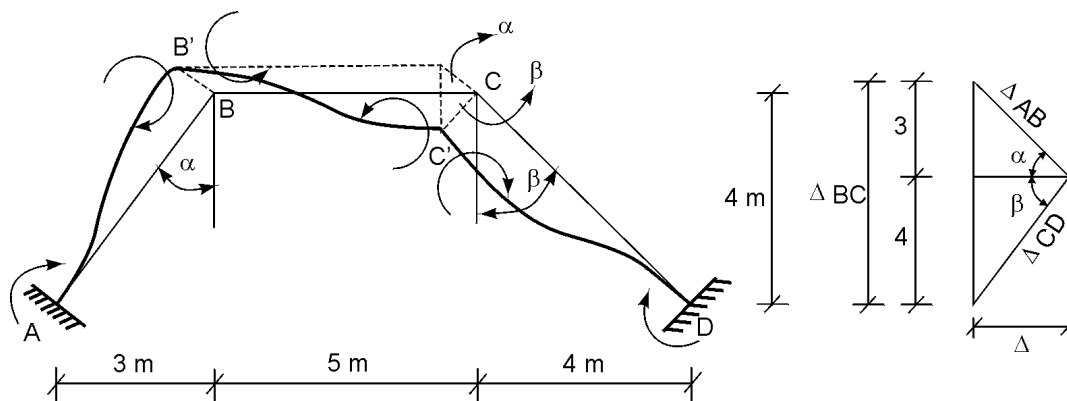


$$\sum F_x = 62.2 - 44.8 = 17.4 \text{ kN}$$

La fuerza de 17.4 kN representa la reacción del apoyo implícito en la suposición de no desplazamiento. Su sentido indica que debido a la carga vertical se produce un desplazamiento hacia la izquierda. Si la carga aplicada fuese por coincidencia de 17.4 kN no se produciría ningún desplazamiento, pues estaría reemplazando exactamente al apoyo ficticio. Como sólo es de 10 kN, no podrá impedir totalmente el desplazamiento sino que apenas logrará disminuirlo. Si, por el contrario, fuese mayor de 17.4 kN, primaría su acción y el desplazamiento definitivo sería hacia la derecha.

Segundo Cross: efecto del desplazamiento

Estando el problema en este estado, es importantísimo dibujar correctamente un esquema de la estructura deformada, ya que de él se obtendrán las relaciones entre los desplazamientos de los distintos elementos. En el presente caso:



Se observa que los elementos inclinados hacen que el desplazamiento horizontal esté acompañado por un movimiento vertical simultáneo. De la geometría de la figura se obtienen las siguientes relaciones.

$$\Delta_{AB} = \frac{\Delta}{\cos\alpha} = \frac{\Delta}{(4/5)} = 1.250 \Delta$$

$$\Delta_{CD} = \frac{\Delta}{\cos\beta} = \frac{\Delta}{(4/5.66)} = 1.415 \Delta$$

$$\Delta_{BC} = \Delta_{AB} \text{sen}\alpha + \Delta_{CD} \text{sen}\beta \left(1.25 \times \frac{3}{5} + 1.415 \times \frac{4}{5.66} \right) \Delta = 1.750 \Delta$$

Como M'' es proporcional a $(K/L)\Delta$, suponiendo $M'' = -20.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$ y aplicando las anteriores relaciones, se encuentra:

$$\left| M''_{BC} \right| / \left| M''_{AB} \right| = \left[6E(K/L)_{BC} \Delta_{BC} \right] / \left[6E(K/L)_{AB} \Delta_{AB} \right]$$

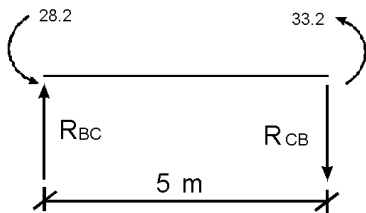
$$M''_{BC} = \frac{20.0 \times (1.5/5)}{(1/5)} \times \frac{1.75\Delta}{1.25\Delta} = 42.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

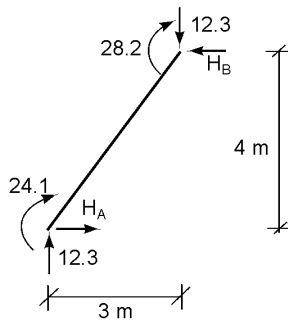
$$M''_{CD} = \frac{-20.0 \times (1.5/5.66)}{(1/5)} \times \frac{1.415\Delta}{1.25\Delta} = -30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con estos valores se efectúa el Cross de desplazamientos:

AB	BA	BC	CB	CD	DC
Emp.	0.400	0.600	0.500	0.500	Emp.
-20.0	-20.0	42.0	42.0	-30.0	-30.0
-4.4	-8.8	-13.2	-6.0	-6.0	-3.0
0.6	1.2	-3.0	-6.6	3.3	1.6
-0.3	-0.6	1.6	0.9	3.3	-0.2
-24.1	-28.2	-1.0	-0.4	-0.5	-31.6
	28.2	28.2	33.2	-33.2	

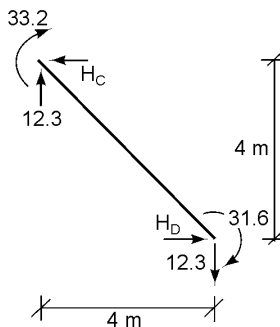
$$R_{BC} = R_{CB} = \frac{28.2 + 33.2}{5} = 12.3 \text{ kN}$$





$$H_B = H_A$$

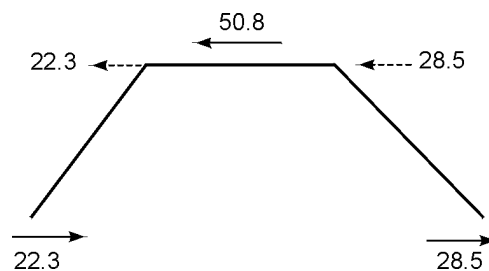
$$= \frac{28.2 + 24.1 + 12.3 \times 3}{4} = 22.3 \text{ kN}$$



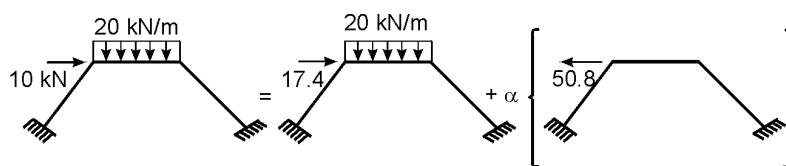
$$H_C = H_D$$

$$= \frac{33.2 + 31.6 + 12.3 \times 4}{4} = 28.5 \text{ kN}$$

Combinando los dos diagramas:



La aplicación del principio de superposición se puede visualizar mediante los siguientes diagramas:



$$10 = 17.4 - \alpha \times 50.8$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{17.4 - 10}{50.8} = 0.1457$$

Utilizando este valor como constante de proporcionalidad para el segundo Cross y superponiendo los valores alcanzados a los del primero, se obtiene:

$$M_{AB} = -11.0 + 0.1457 (-24.1) = -14.5 \text{ kN-m}$$

$$M_{BA} = -22.0 + 0.1457 (-28.2) = -26.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

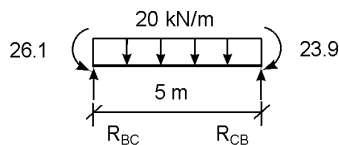
$$M_{BC} = 22.0 + 0.1457 (28.2) = 26.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = -28.7 + 0.1457 (33.2) = -23.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 28.7 + 0.1457 (-33.2) = 23.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

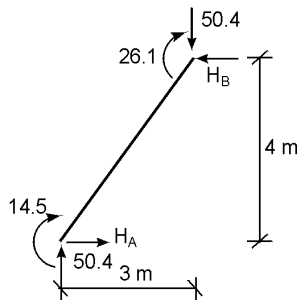
$$M_{DC} = 14.0 + 0.1457 (-31.6) = 9.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Analizando cada elemento se encuentran las reacciones:



$$R_{BC} = 2.5 \times 20 + \frac{26.1 - 23.9}{5} = 50.4 \text{ kN } \uparrow$$

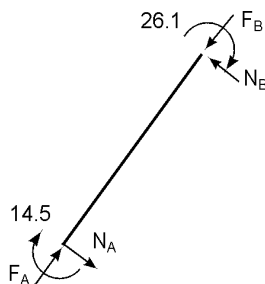
$$R_{CB} = 50.0 - 0.4 = 49.6 \text{ kN } \uparrow$$



$$M_{\max}(+) = \frac{(50.4)^2}{2 \times 20} - 26.1 = 37.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$H_A = H_B = \frac{26.1 + 14.5 + 50.4 \times 3}{4} = 47.95 \text{ kN}$$

Para el diseño de los elementos inclinados interesa conocer las fuerzas axiales y normales (corte) a que están sometidos. Por geometría:



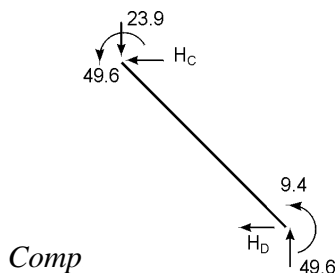
$$F_A = R_{AB} \sin \alpha + H_A \cos \alpha =$$

$$= 50.4 \times 0.8 + 48.0 \times 0.6 = 69.1 \text{ kN (C)}$$

$$N_A = -R_{AB} \cos \alpha + H_A \sin \alpha =$$

$$= -50.4 \times 0.6 + 48.0 \times 0.8 = 8.2 \text{ kN } (\searrow)$$

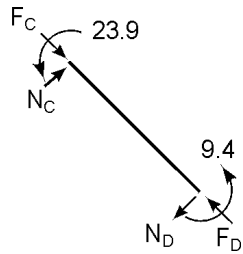
Considerando ahora el elemento CD:



$$H_C = H_D$$

$$= \frac{23.9 + 9.4 + 49.6 \times 4}{4} = 57.93 \text{ kN}$$

$$H_A + H_D = 9.98 \text{ kN} \leftarrow \approx 10 \text{ } \beta$$



$$F_D = (49.6 + 57.9) 0.707 = 76.0 \text{ kN (C)}$$

$$N_D = (57.9 - 49.6) 0.707 = 5.9 \text{ kN (}\searrow\text{)}$$

Comprobación:

$$\frac{23.9 + 9.4}{4\sqrt{2}} = 5.9 \text{ kN } \beta$$

Ahora sí se pueden dibujar los diagramas de corte y momento.

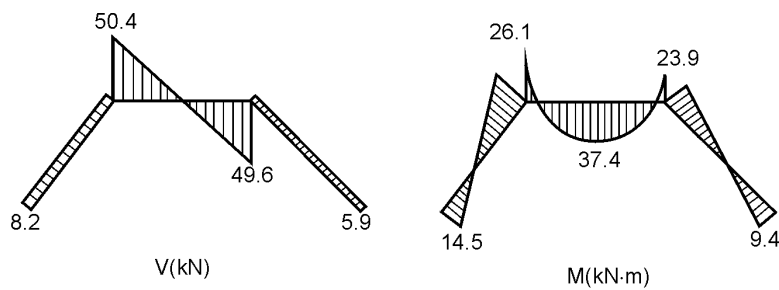
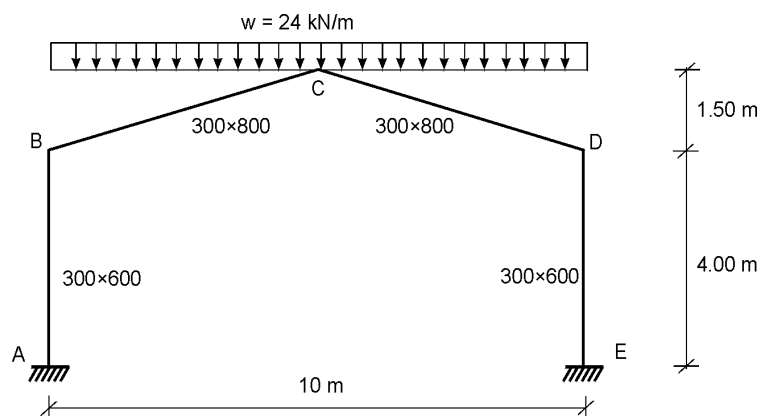


Diagrama del lado en tensión

Ejemplo 6.10

Resuelva el pórtico mostrado. La carga sobre las vigas está dada en kilonewtons por metro de proyección horizontal.



Solución

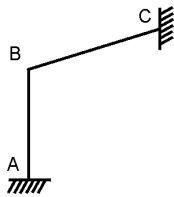
Se empleará simplificación por simetría:

$$L_v = \sqrt{(5)^2 + (1.50)^2} = 5.22 \text{ m}$$

$$K_{BC} = K_{CD} = \frac{3 \times 8^3}{5.22} = 294$$

$$K_{AB} = K_{ED} = \frac{3 \times 6^3}{4} = 162$$

Coefficientes de distribución



$$\delta_{BA} = \frac{162}{162 + 294} = 0.355$$

$$\delta_{BC} = \frac{294}{456} = 0.645$$

Primer Cross: sin desplazamiento. Momentos de empotramiento:

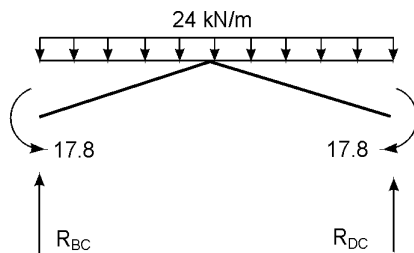
$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = \frac{24 \times 25}{12} = 50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

AB
0
-8.9
-8.9

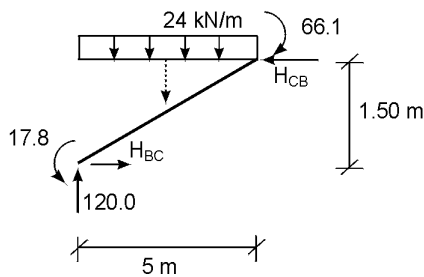
BA	BC
0.355	0.645
-17.8	50.0
-17.8	-32.2
-17.8	17.8

CB
0
-50.0
-16.1
-66.1

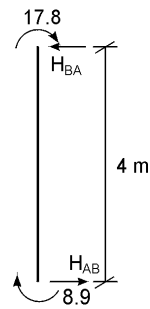
Cálculo de reacciones



$$R_{BC} = R_{DC} = 24 \times 5 = 120.0 \text{ kN } \uparrow$$

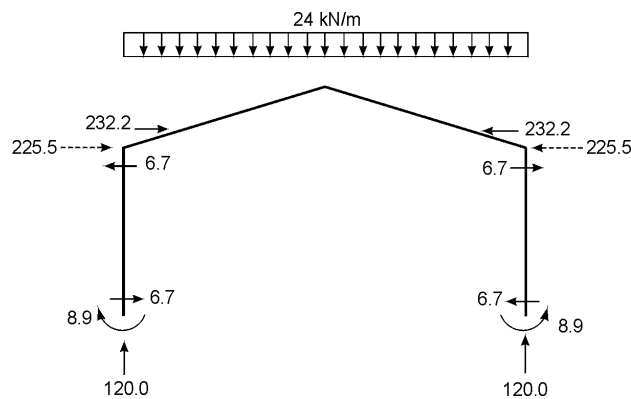


$$\begin{aligned} H_{BC} &= H_{CB} \\ &= \frac{120.0 \times 2.50 + 66.1 - 17.8}{1.50} \\ &= 232.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

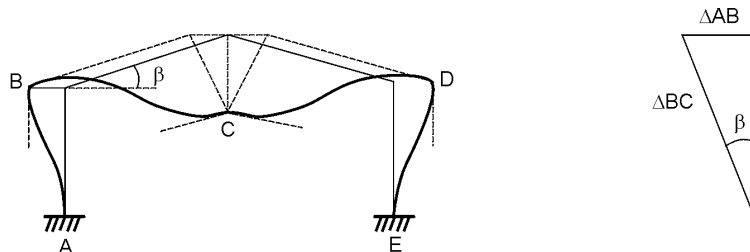


$$H_{AB} = H_{BA} = \frac{17.8 + 8.9}{4} = 6.7 \text{ kN}$$

Por consiguiente, la estructura total queda:



A pesar de que la estructura en conjunto está en equilibrio como consecuencia de la simetría, su naturaleza hace que sufra desplazamientos del tipo mostrado en la página siguiente. Esto se traduce en la falta de equilibrio de los nudos B y D en el diagrama anterior.



$$\beta = \text{tg}^{-1} = \frac{1.50}{5} = 16.70^\circ$$

Segundo Cross: efecto del desplazamiento

$$M''_{ij} = \left(6E \frac{K}{L} \Delta \right)_{ij}$$

Suponiendo $M''_{AB} = M''_{BA} = -100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$, utilizando la fórmula anterior, las relaciones del triángulo de deformaciones y las propiedades de los elementos:

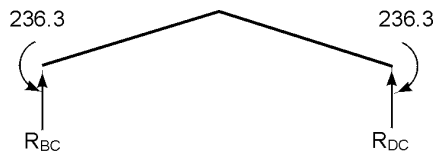
$$M''_{BC} = M''_{CB} = \frac{100.0 \times (294/5.22) \times \Delta_{BC}}{(162/4) \times \Delta_{AB}} =$$

$$= \frac{100.0 \times 294 \times 4}{162 \times 5.22 \times \text{sen}\beta} = 484.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

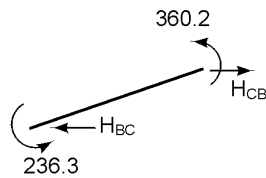
AB
0
-100.0
-68.2
-168.2

BA	BC
0.355	0.645
-100.0	484.0
-136.3	-247.7
-236.3	236.3

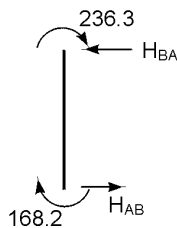
CB
0
484.0
-123.8
360.2



$$R_{BC} = R_{DC} = 0$$

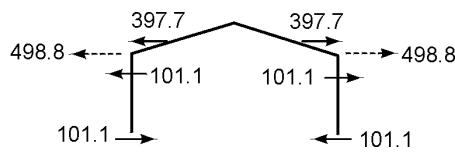


$$H_{BC} = H_{CB} = \frac{236.3 + 360.2}{1.50} = 397.7 \text{ kN}$$

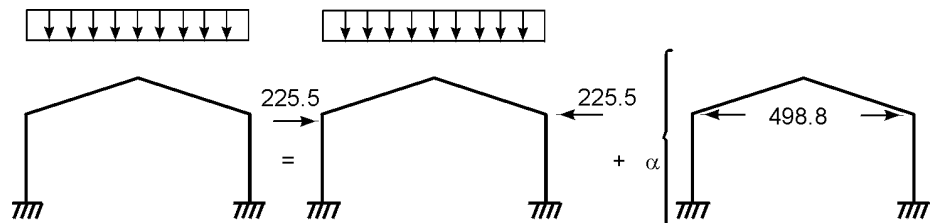


$$H_{AB} = H_{BA} = \frac{236.3 + 168.2}{4} = 101.1 \text{ kN}$$

y en conjunto:



Aplicando ahora el principio de superposición:



$$0 = 225.5 - \alpha (498.8)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{225.5}{498.8} = 0.4521$$

Por consiguiente, los momentos definitivos serán:

$$M_{AB} = -8.90 + 0.4521 \times (-168.2) = -84.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

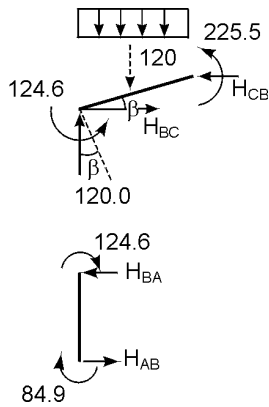
$$M_{BA} = -17.8 + 0.4521 \times (-236.3) - 124.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -M_{BA} = 124.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = -66.1 + 0.4521 \times (360.2) = 96.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y los demás se obtienen por simetría.

Comprobación:



$$H_{BC} = H_{CB} = \frac{120 \times 2.5 - 124.6 - 96.7}{1.50} = 52.47 \text{ kN}$$

$$H_{AB} = H_{BA} = \frac{124.6 + 84.9}{4} = 52.38 \text{ kN}$$

$$(\sum F_x)_B = 0.09 \text{ kN} \approx 0 \quad \beta$$

Para los diagramas de corte y momento sobre las vigas, se acude de nuevo a las fuerzas axiales y normales.

$$F_{BC} = 120.0 \operatorname{sen} \beta + 52.5 \operatorname{cos} \beta = 84.8 \text{ kN (C)}$$

$$N_{BC} = 120.0 \operatorname{cos} \beta - 52.5 \operatorname{sen} \beta = 99.9 \text{ kN (T)}$$

$$w_n = w \operatorname{cos}^2 \beta = 24 \operatorname{cos}^2 \beta = 22.0 \text{ kN/m}$$

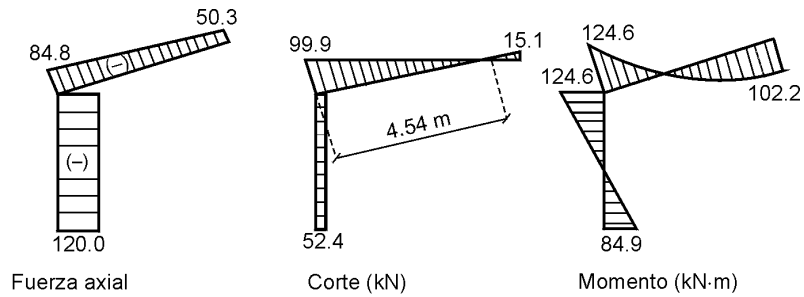
$$w_t = w \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \beta = 24 \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta = 6.6 \text{ kN/m}$$

$$M_{\max (+)} = \frac{(99.9)^2}{2 \times 22.0} - 124.6 = 102.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

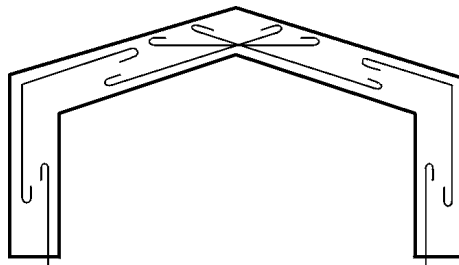
$$F_{CB} = 52.5 \operatorname{cos} \beta = 50.3 \text{ kN (C)}$$

$$N_{CB} = 52.5 \operatorname{sen} \beta = 15.1 \text{ kN (T)}$$

y los diagramas finales quedan:

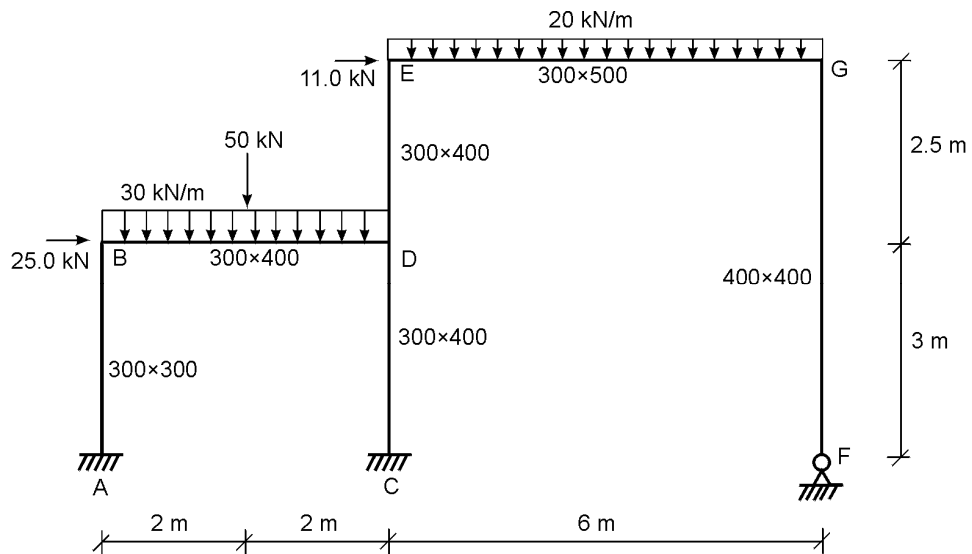


Un posible despiece de la armadura principal de un pórtico tal en hormigón reforzado, sería:



Ejemplo 6.11

Resuelva la estructura mostrada.



Solución

La estructura tiene dos grados de libertad. Por consiguiente, se necesitarán tres *crosses*: el inicial, suponiendo que no hay desplazamiento, y uno adicional por cada grado de libertad.

Coefficientes de distribución

$$K_{AB} = \frac{3 \times (3)^3}{3} = 27$$

$$K_{CD} = \frac{3 \times (4)^3}{3} = 64$$

$$K_{DE} = \frac{3 \times (4)^3}{2.5} = 76.8$$

$$K_{EG} = \frac{3 \times (5)^3}{6} = 62.5$$

$$K_{FG} = \frac{4 \times (4)^3}{5.5} = 46.5$$

$$K_{BD} = \frac{3 \times (4)^3}{4} = 48$$

$$\rightarrow K'_{FG} = \frac{3}{4} \times 46.5 = 34.9$$

Nudo B:

$$\delta_{BA} = \frac{27}{27 + 48} = 0.360$$

$$\delta_{BD} = \frac{48}{75} = 0.640$$

Nudo D:

$$\delta_{DE} = \frac{76.8}{48 + 64 + 76.8} = 0.407$$

$$\delta_{DB} = \frac{48}{188.8} = 0.254$$

$$\delta_{DC} = \frac{64}{188.8} = 0.339$$

Nudo E:

$$\delta_{ED} = \frac{76.8}{76.8 + 62.5} = 0.551$$

$$\delta_{EG} = \frac{62.5}{139.3} = 0.449$$

Nudo G:

$$\delta_{GE} = \frac{62.5}{62.5 + 34.9} = 0.642$$

$$\delta_{GF} = \frac{34.9}{97.4} = 0.358$$

*Primer Cross: sin desplazamientos**Momentos de empotramiento*

$$M_{BD}^F = \frac{wL^2}{12} + \frac{PL}{8} = \frac{30 \times 16}{12} + \frac{50 \times 4}{8} = 65.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DB}^F = -M_{BD}^F = -65.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EG}^F = -M_{GE}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{20 \times 36}{12} = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

ED	EG
0.551	0.449
	60.0
-33.1	-26.9
13.3	19.3
-18.0	-14.6
7.6	4.4
-6.6	-5.4
-36.8	36.8

GE	GF
0.642	0.358
-60.0	
38.5	21.5
-13.5	
8.7	4.8
-7.3	
4.7	2.6
-28.9	28.9

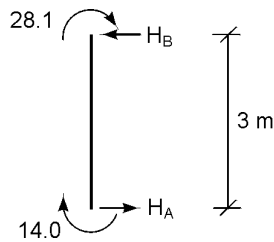
BA	BD
0.360	0.640
	65.0
-23.4	-41.6
	8.3
-3.0	-5.3
	4.8
-1.7	-3.1
-28.1	28.1

DB	DE	DC
0.254	0.407	0.339
-65.0		
16.5	26.5	22.0
-20.8	-16.6	
9.5	15.2	12.7
-2.7	-9.0	
3.0	4.7	4.0
-59.5	20.8	38.7

AB
0
-11.7
-1.5
-0.8
-14.0

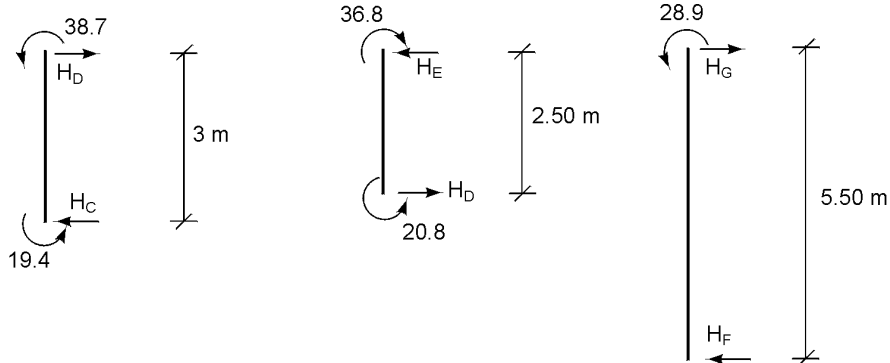
CD
0
11.0
6.4
2.0
19.4

Evaluación del corte en las columnas:



$$H_A = H_B = \frac{28.1 + 14.0}{3} = 14.03 \text{ kN}$$

Similarmente:

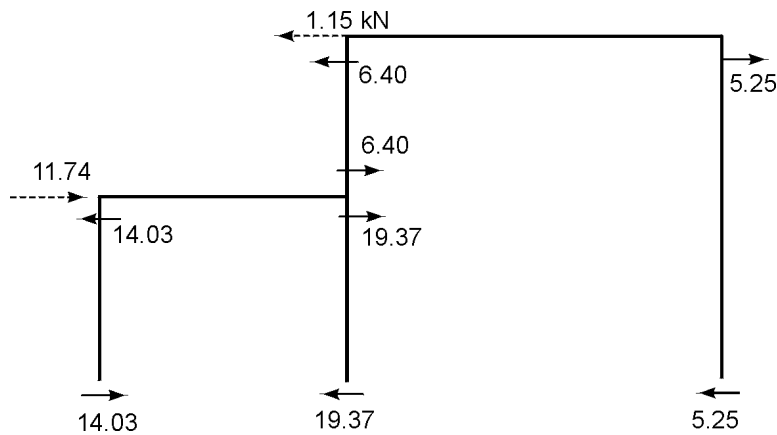


$$H_C = H_D = \frac{38.7 + 19.4}{3} = 19.37 \text{ kN}$$

$$H_E = H_D = \frac{16.0}{2.50} = 6.40 \text{ kN}$$

$$H_G = H_F = \frac{28.9}{5.50} = 5.25 \text{ kN}$$

y el diagrama del conjunto será:



de donde se deduce que en el nivel superior existe una fuerza de desbalance de:

$$11.0 + 1.15 = 12.15 \text{ kN}$$

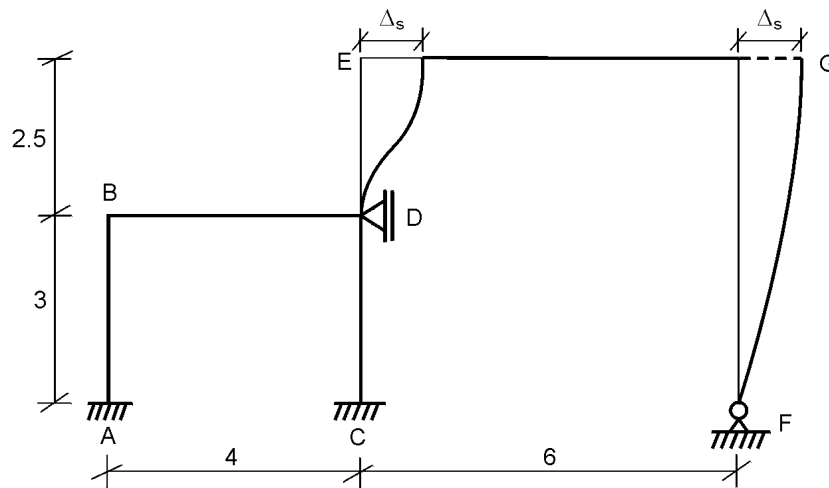
y en el intermedio otra que vale:

$$25.0 - 11.74 = 13.26 \text{ kN}$$

donde los primeros valores corresponden a las fuerzas reales aplicadas. Esto implica que las cargas producen desplazamientos hacia la derecha, tanto en el nivel superior como en el intermedio, pues en el primero la reacción implícita es de signo contrario a la carga aplicada, y en el segundo del mismo signo, pero inferior a ella. La interpretación del sentido del desplazamiento no es indispensable para resolver el problema, pues un

supuesto errado simplemente conduce a valores negativos de los coeficientes de proporcionalidad.

Segundo Cross: desplazamiento del nivel superior dejando fijo el nivel intermedio



Se vio que para ambos extremos empotrados:

$$M'' = \frac{6EI\Delta}{L^2} = 6E \left(\frac{K}{L} \right) \Delta$$

En cambio, cuando uno de los extremos está articulado:

$$M'' = \frac{3EI}{L^2} \Delta = 3E \left(\frac{K}{L} \right) \Delta$$

Por consiguiente, si se supone:

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

resulta:

$$M''_{FG} = 0$$

$$M''_{GF} = 50.0 \times \frac{3E (46.5/5.5) \Delta_s}{6E (76.8/2.5) \Delta_s} = 6.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y con estos valores se efectúa el Cross correspondiente:

ED	EG
0.551	0.449
50.0	
-27.6	-22.4
-10.2	-2.2
6.8	5.6
2.8	3.6
-3.5	-2.9
18.3	-18.3
39.3	-39.3

GE	GF
0.642	0.358
	6.9
-4.4	-2.5
-11.2	
7.2	4.0
2.8	
-1.8	-1.0
-7.4	7.4
-15.9	+15.9*

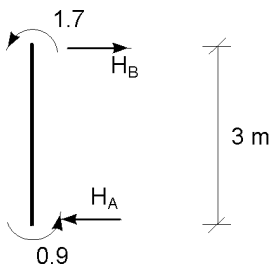
BA	BD
0.360	0.640
	-6.4
2.3	4.1
	1.8
-0.6	-1.2
1.7	-1.7
+ 3.7	-3.7

DB	DE	DC
0.254	0.407	0.339
	50.0	
-12.7	-20.3	-17.0
	-13.8	
3.5	5.6	4.7
2.1	3.4	
-1.4	-2.2	-1.9
-8.5	22.7	-14.2
-18.3	48.8	-30.5*

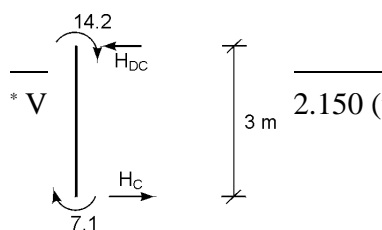
AB
0
1.2
-0.3
0.9
1.9

CD
0
-8.5
2.4
-1.0
-7.1
-15.3*

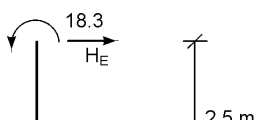
Corte en las columnas:



$$H_A = H_B = \frac{1.7 + 0.9}{3} = 0.87 \text{ kN}$$



2.150 (valores originales); x = 2.150, según la página 249.

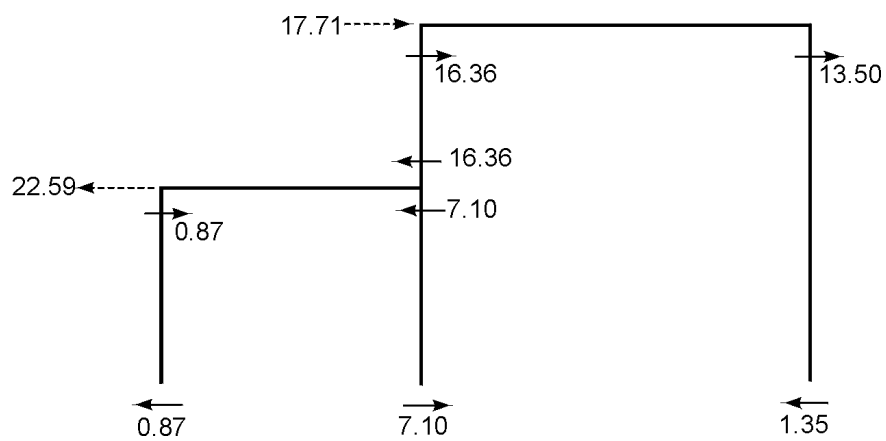


$$H_C = H_{DC} = \frac{14.2 + 7.1}{3} = 7.10 \text{ kN}$$

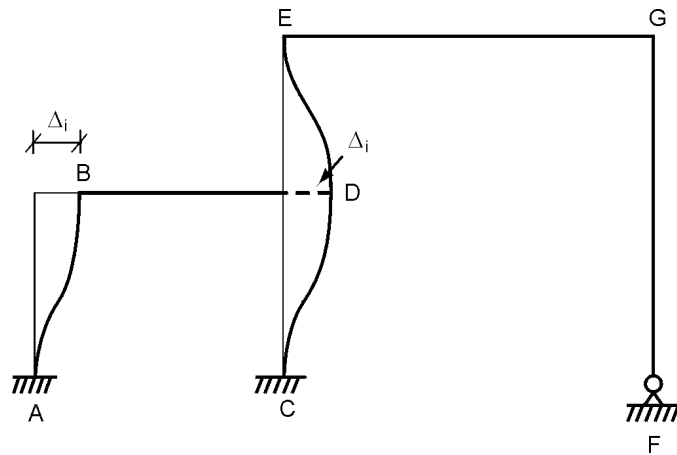
$$H_E = H_{DE} = \frac{18.3 + 22.6}{2.5} = 16.36 \text{ kN}$$

$$H_F = H_{GF} = \frac{7.4}{5.5} = 1.35 \text{ kN}$$

y para la estructura en conjunto:



Tercer Cross: desplazamiento del nivel intermedio dejando fijo el nivel superior



Suponiendo ahora:

$$M_{DE}'' = M_{ED}'' = -50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Como todas las columnas que sufren desplazamiento se encuentran en condiciones similares, resulta:

$$M_{AB}'' = M_{BA}'' = 50.0 \times \frac{(27/3)\Delta_i}{(76.8/2.5)\Delta_i} = 14.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}'' = M_{DC}'' = 50.0 \times \frac{(64/3)\Delta_i}{(76.8/2.5)\Delta_i} = 34.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con estos valores se efectúa el Cross correspondiente:

ED	EG
0.551	0.449
-50.0 27.6	22.4
3.1 -1.7	-1.4
-1.9 3.0	-3.6 2.5
-19.9	19.9
-23.2	23.2

GE	GF
0.642	0.358
11.2 -7.2	-4.0
-0.7 0.4	0.3
3.7	-3.7
4.3	-4.3*

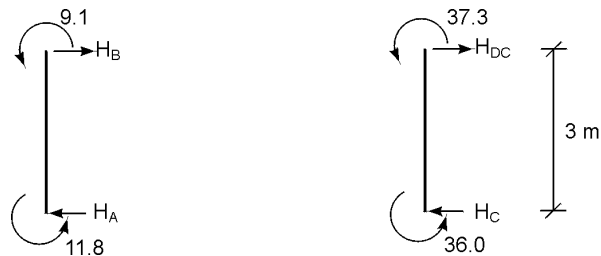
BA	BD
0.360	0.640
14.7 -5.3	-9.4
-0.7	2.0 -1.0
0.4	-1.2 0.8
9.1	-9.1
10.6	-10.6

DB	DE	DC
0.254	0.407	0.339
	-50.0	34.7
3.9	6.2	5.2
-4.7 -2.3	13.8 -3.7	-3.1
-0.7 0.4	-0.9 0.7	0.5
-3.4	-33.9	37.3
-4.0	-39.6	43.6*

AB
0
14.7 -2.7 -0.4 0.2
11.8
13.8

CD
0
34.7 2.6 -1.6 0.3
+36.0
42.1*

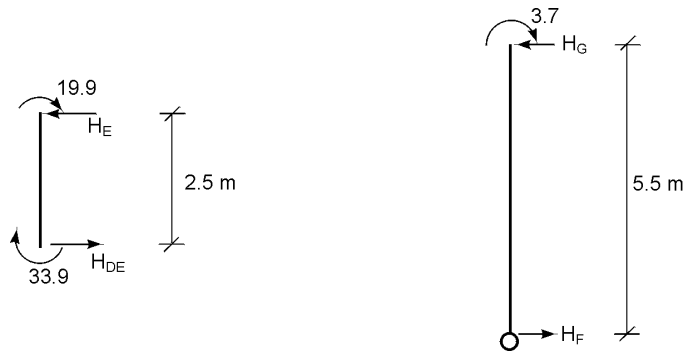
Corte en las columnas:



* Valores corregidos = 1.168 (valores originales); y = 1.168, según página 249.

$$H_A = H_B = \frac{11.8 + 9.1}{3} = 6.97 \text{ kN}$$

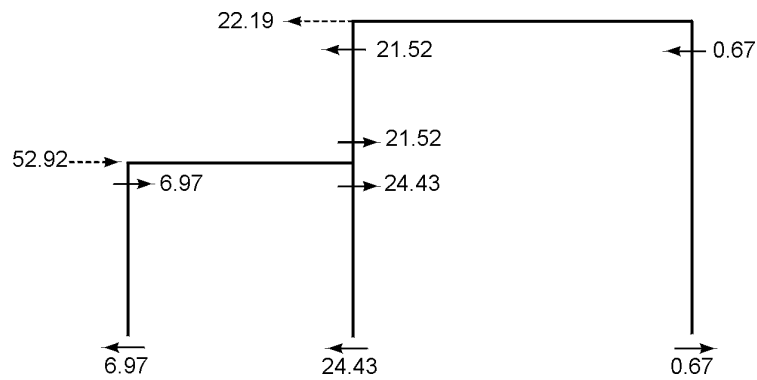
$$H_C = H_{DC} = \frac{37.3 + 36.0}{3} = 24.43 \text{ kN}$$



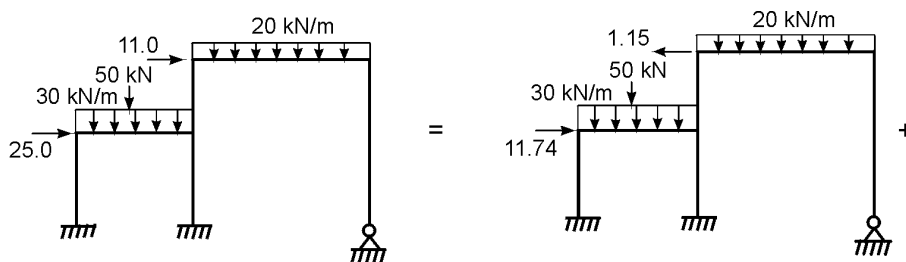
$$H_{DE} = H_E = \frac{19.9 + 33.9}{2.5} = 21.52 \text{ kN}$$

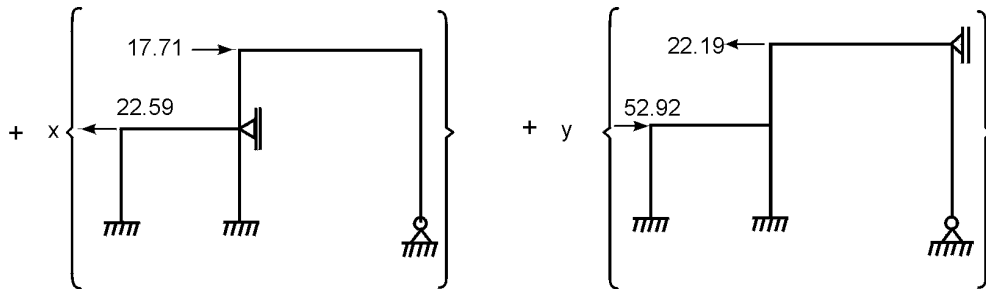
$$H_F = H_G = \frac{3.7}{5.5} = 0.67 \text{ kN}$$

y para el conjunto:



Superponiendo ahora los tres casos y aplicando a cada nivel la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales, se obtiene:





$$11.0 = -1.15 + 17.71 x - 22.19 y$$

$$25.0 = 11.74 - 22.59 x + 52.92 y$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$x = 2.150 \quad y = 1.168$$

Los momentos obtenidos en el segundo Cross se multiplican por x y los del tercero por y . Superponiéndolos a los del primer Cross, se logran los momentos definitivos:

$$M_{AB} = -14.0 + 2.150 (0.9) + 1.168 (11.8) = 1.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = -28.1 + 3.7 + 10.6 = -13.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BD} = 13.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 19.4 - 15.3 + 42.1 = 46.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = 38.7 - 30.5 + 43.6 = 51.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DB} = -59.5 - 18.3 - 4.0 = -81.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DE} = 20.8 + 48.8 - 39.6 = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

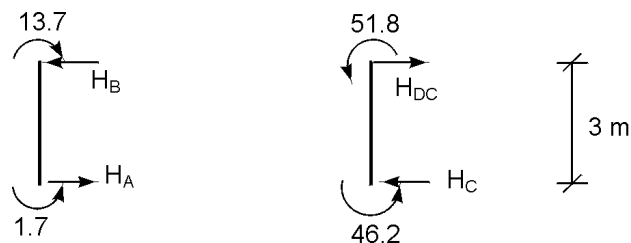
$$M_{ED} = -36.8 + 39.3 - 23.2 = -20.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EG} = 20.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{GE} = -28.9 - 15.9 + 4.3 = -40.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

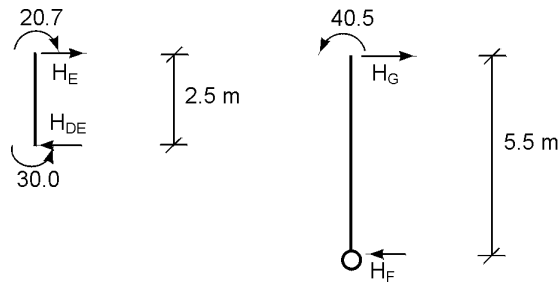
$$M_{GF} = 40.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Comprobación:



$$H_A = H_B = \frac{13.7 - 1.7}{3} = 4.00 \text{ kN}$$

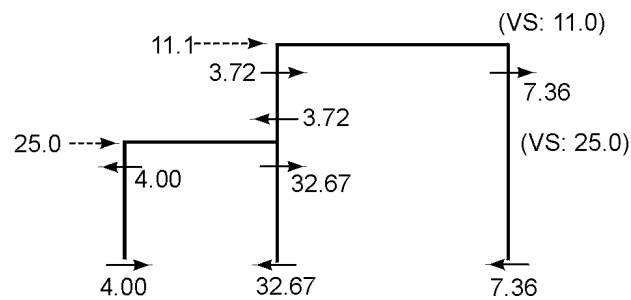
$$H_C = H_{DC} = \frac{51.8 + 46.2}{3} = 32.67 \text{ kN}$$



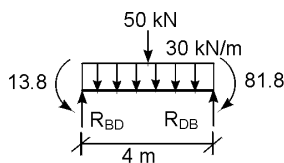
$$H_E = H_{DE} = \frac{9.3}{2.5} = 3.72 \text{ kN}$$

$$H_F = H_G = \frac{40.5}{5.5} = 7.36 \text{ kN}$$

y en conjunto queda:



que a dos cifras decimales coincide casi exactamente con las cargas horizontales aplicadas. Pasando a las vigas:



$$R_{BD} = 25.0 + 60.0 - \frac{81.8 - 13.8}{4} = 68.0 \text{ kN } \uparrow$$

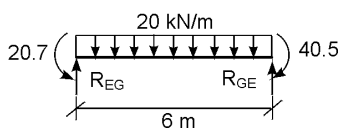
$$R_{DB} = 102.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max}(+) = \frac{68.0 + 8.0}{2} \times 2 - 13.8 = 62.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

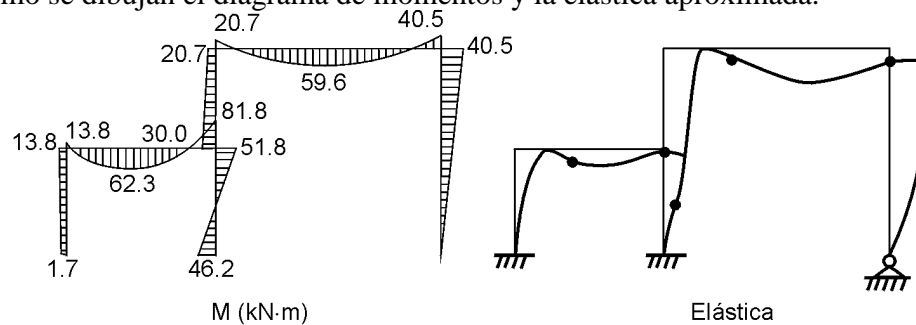
$$R_{EG} = 60.0 - \frac{40.5 - 20.7}{6} = 56.7 \text{ kN}$$

$$R_{GE} = 63.3 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{\max}(+) = \frac{(56.7)^2}{2 \times 20} - 20.7 = 59.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Por último se dibujan el diagrama de momentos y la elástica aproximada.



Obsérvese que en un elemento no puede haber punto de inflexión si hay cambio de signo en los momentos de sus extremos sin que existan cargas intermedias.

6.12 MÉTODO ALTERNO APLICABLE A PÓRTICOS ORTOGONALES CON DESPLAZAMIENTO

Es bien sabido que el método de los *Ángulos de giro y deflexión* constituyó un hito en la solución de toda clase de pórticos. Infortunadamente el gran número de ecuaciones resultantes para edificios de varios pisos lo hacía inapropiado cuando sólo se podía pensar en soluciones manuales. De ahí la gran importancia de la contribución de Hardy Cross, al plantear el método para resolver dicho sistema por aproximaciones sucesivas, que se acaba de ver.

Como el método parte del supuesto de que los nudos están fijos contra desplazamiento, en las estructuras en que esto no es verdad, al seguir el método original se hace necesario superponer el efecto de los desplazamientos, planteando tantas distribuciones adicionales como desplazamientos independientes tenga la estructura, y resolver al final un sistema de ecuaciones del mismo orden.

Dicho proceso es naturalmente engorroso e inapropiado para sistematización. Por otra parte, implicaría tener que guardar en la memoria de la computadora los resultados de los *crosses* correspondientes a la estructura fija y a cada desplazamiento independiente, para poder plantear en cada nivel las ecuaciones de equilibrio y, una vez resuelto el sistema, afectarlos por los coeficientes encontrados y efectuar la superposición.

De ahí que hayan surgido otros métodos de aproximaciones sucesivas, como los de Kani (referencia 6.6) y Takabeya (referencia 6.7), que consideran en cada ciclo el efecto de los desplazamientos. De esta manera basta con que en la memoria de la máquina estén en cada instante los resultados del último ciclo y si acaso los del ciclo anterior, como criterio de finalización. Estos métodos se verán en los capítulos 7 y 8, respectivamente.

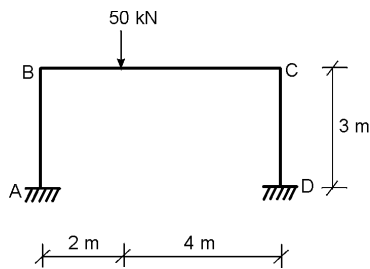
También existe una modificación al método de Cross, propuesta por Gennaro (referencia 6.8), que considera igualmente, al finalizar cada ciclo, el efecto de los desplazamientos. Por consiguiente goza a este respecto de las mismas ventajas de los métodos de Kani y Takabeya y por tanto sólo requiere guardar en memoria el último conjunto de resultados. Esto hace atractiva su programación en microcomputadores de baja capacidad y aun en calculadoras programables, ya que en la mayoría de estas últimas la memoria disponible no permite programar métodos matriciales de análisis.

Para entender a cabalidad el desarrollo conceptual del método se estudiará primero un ejemplo sencillo. Luego se hará el planteamiento teórico del problema general y se deducirán las fórmulas pertinentes.

Vale la pena señalar que, con muy poco esfuerzo adicional, es posible calcular las derivadas de piso para este tipo de pórticos y, si se desea, el efecto $P-\Delta$ causado por dichos desplazamientos.

Ejemplo 6.12

Resuelva el pórtico siguiente utilizando el método de Cross modificado.



Viga: $300 \times 500 \text{ mm}$

Columnas: $300 \times 300 \text{ mm}$

Solución

Se procede como de costumbre y se hace un ciclo ordinario, al final del cual se cierra y se averiguan los momentos en los extremos de las barras.

PRIMER CICLO

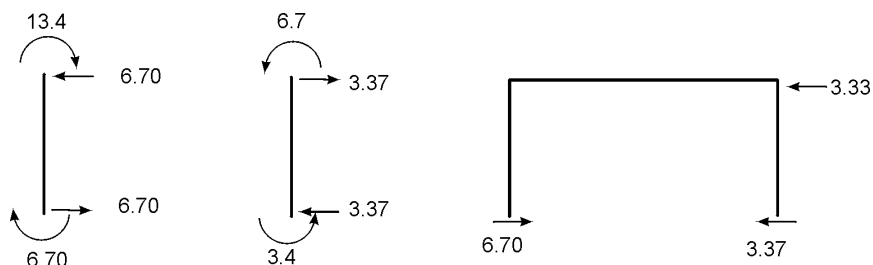
AB
-6.7
-6.7

BA	BC
0.302	0.698
-13.4	44.4
-13.4	31.0
-13.4	13.4

CB	CD
0.698	0.302
-22.2	
15.5	6.7
-6.7	6.7

DC
3.4
3.4

Con los momentos en los extremos de las columnas, se averiguan las fuerzas cortantes en ellas:



Del diagrama de cuerpo libre se observa un desequilibrio, que corresponde al apoyo ficticio implícito en el Cross. Para equilibrar la estructura este apoyo debe producir una reacción de

3.33 kN, dirigida hacia la izquierda, y para corregir su efecto se debe aplicar a la estructura, en las columnas, un momento antihorario:

$$M_{\text{cor}} = 3.33 \times 3 = 10.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Al mismo resultado se llega considerando que como no hay fuerzas horizontales aplicadas, la suma de momentos en las columnas debe ser cero, pues sólo así se balancearían las fuerzas de corte en ellas. Por consiguiente:

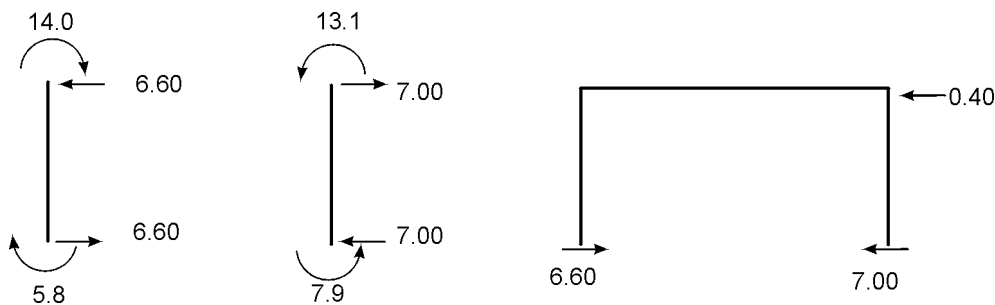
$$\begin{aligned} M_{\text{cor}} &= 0 - \Sigma M_{\text{col}} = \\ &= 0 - (-6.7 - 13.4 + 6.7 + 3.4) = 10.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Como las columnas son iguales, a cada una corresponde la mitad de dicho momento y como sus extremos están restringidos, a cada extremo se le aplica el 50%; es decir, 2.50 kN·m. Se coloca entonces dicho valor en las casillas correspondientes, se hacen las transmisiones faltantes y se desarrolla un segundo Cross.

SEGUNDO CICLO

AB	BA	BC	CB	CD	DC
	0.302	0.698	0.698	0.302	
		44.4	-22.2		
-6.7	-13.4	-31.0	15.5	6.7	3.4
-6.7	-13.4	13.4	-6.7	6.7	3.4
2.5	2.5	7.7	-15.5	2.5	2.5
-1.6	-3.1	-7.1	9.1	3.9	2.0
-5.8	-14.0	14.0	-13.1	13.1	7.9

Terminando este segundo Cross, se ve que la reacción del apoyo implícito se ha reducido a:



y el nuevo momento de corrección es:

$$M_{\text{cor}} = 0 - (-5.8 - 14.0 + 13.1 + 7.9) = -1.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por tanto, el momento de corrección en cada extremo de las columnas se reduce a -0.3 kN·m. Llevando este valor al cuadro, transmitiendo los momentos faltantes de las vigas y efectuando un tercer Cross se obtienen los siguientes resultados:

TERCER CICLO

AB	BA	BC	CB	CD	DC
	0.302	0.698	0.698	0.302	
		44.4	-22.2		
-6.7	-13.4	-31.0	-15.5	6.7	3.4
-6.7	-13.4	13.4	-6.7	6.7	3.4
2.5	2.5	7.7	-15.5	2.5	2.5
-1.6	-3.1	-7.1	9.1	3.9	2.0
-5.8	-14.0	14.0	-13.1	13.1	7.9
-0.3	-0.3	4.6	-3.6	-0.3	-0.3
-0.6	-1.3	-3.0	2.7	1.2	0.6
-6.7	-15.6	15.6	-14.0	14.0	8.2

Con los valores finales se encuentra que:

$$M_{\text{cor}} = 0 - (-6.7 - 15.6 + 14.0 + 8.2) = 0.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Al repartir entre las columnas el momento de corrección da 0.025 kN·m, es decir, 0.0 kN·m con dos cifras significativas. Por consiguiente, ya se logró compensar el efecto del desplazamiento y un cuarto ciclo se justifica únicamente por la magnitud de los momentos de giro, que todavía dan margen para otra corrección.

CUARTO CICLO

AB	BA	BC	CB	CD	DC
	0.302	0.698	0.698	0.302	
		44.4	-22.2		
-6.7	-13.4	-31.0	15.5	6.7	3.4
-6.7	-13.4	13.4	-6.7	6.7	3.4
2.5	2.5	7.7	-15.5	2.5	2.5
-1.6	-3.1	-7.1	9.1	3.9	2.0
-5.8	-14.0	14.0	-13.1	13.1	7.9
-0.3	-0.3	4.6	-3.6	-0.3	-0.3
-0.6	-1.3	-3.0	2.7	1.2	0.6
-6.7	-15.6	15.6	-14.0	14.0	8.2
0.0	0.0	1.4	-1.5	0.0	0.0
-0.2	-0.4	-1.0	1.0	0.5	0.2
-6.9	-16.0	16.0	-14.5	14.5	8.4

Teoría

La deducción del método es muy sencilla. De la figura 6.7 se deduce que en cada piso las fuerzas de corte en las columnas deben equilibrar la fuerza cortante del piso.

$$Q_n = \sum_{j=1}^q Q_{nj} = \sum_{i=1}^n H_n \quad (6.12)$$

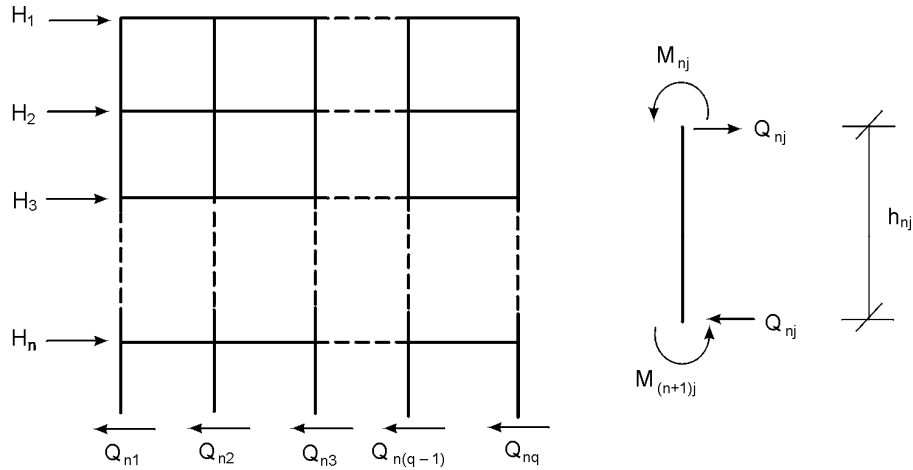


Figura 6.7 Equilibrio de fuerzas en el piso n.

Las fuerzas cortantes de las columnas, cuando no hay cargas intermedias actuando sobre ellas, se obtienen simplemente dividiendo la suma de los momentos de sus extremos por la altura de la columna, es decir:

$$Q_{nj} = \frac{M_{nj} + M_{(n+1)j}}{h_{nj}} \quad (6.13)$$

Por consiguiente, la suma de las fuerzas de corte en todas las columnas de un mismo piso está dada por:

$$\sum_{j=1}^q Q_{nj} = \sum_{j=1}^q \frac{(M_{nj} + M_{(n+1)j})}{h_{nj}}$$

y si todas las columnas del piso tienen la misma altura, \$h_n\$, la expresión anterior se reduce a:

$$\sum_{j=1}^q Q_{nj} = \frac{\sum_{j=1}^q (M_{nj} + M_{(n+1)j})}{h_n}$$

$$\rightarrow \left(\sum_{j=1}^q M_{col} \right) = \sum_{j=1}^q (M_{nj} + M_{(n+1)j}) = h_n \sum_{j=1}^q Q_{nj} \quad (6.14)$$

Multiplicando ahora ambos términos de la ecuación (6.12) por \$h_n\$, se obtiene un *Momento de piso* \$(M_p)_n\$:

$$(M_p)_n = h_n Q_n = h_n \sum_{i=1}^n H_n \quad (6.15)$$

Para que haya equilibrio de fuerzas horizontales, en cada piso debe cumplirse la ecuación:

$$\sum_{j=1}^q Q_{nj} = Q_n \quad (6.16)$$

Si se multiplican ambos lados por h_n resulta:

$$h_n \sum_{j=1}^q Q_{nj} = h_n Q_n$$

y por las ecuaciones (6.14) y (6.15):

$$\begin{aligned} (\sum M_{col})_n &= (M_p)_n \\ \rightarrow (M_p)_n - (\sum M_{col})_n &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

En general, al efectuar el Cross de una estructura con desplazamiento, esta ecuación no se cumple y en lugar de cero se obtiene un momento de desbalance:

$$(M_d)_n = (M_p)_n - (\sum M_{col})_n \quad (6.18)$$

Bastará, pues, corregir los momentos de las columnas repartiendo este *Momento de desbalance por desplazamiento* entre ellas. Para averiguar la forma correcta de efectuar esta distribución se empieza por reescribir la ecuación (6.18) como sigue:

$$(M_p)_n - \left(\sum_{j=1}^q M_{col} \right) - (M_d)_n = 0 \quad (6.18a)$$

Si M''_{nj} representa la porción del momento por desplazamiento que le corresponde a cada extremo de la columna nj , es obvio que:

$$(M_d)_n = 2 \sum_{j=1}^q M''_{nj} \quad (6.19)$$

Por la ecuación (6.11) se sabe que:

$$M''_{ij} \propto \left(\frac{K}{h} \Delta \right)_{ij} \quad (6.20)$$

Si las condiciones de apoyo son similares para todas las columnas de un mismo piso y la altura de éste es constante, al ignorar deformaciones axiales se puede escribir que:

$$\frac{M''_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q M''_{nj}} = \frac{\left(\frac{K}{h} \Delta \right)_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q \left(\frac{K}{h} \Delta \right)_{nj}} = \frac{\left(\frac{\Delta}{h} \right)_{nj} K_{nj}}{2 \left(\frac{\Delta}{h} \right)_{nj} \sum_{j=1}^q K_{nj}}$$

$$\frac{M''_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q M''_{nj}} = \frac{K_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q K_{nj}} \quad (6.21)$$

y en virtud de la ecuación (6.19):

$$M''_{nj} = \frac{K_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q K_{nj}} (M_d)_n \quad (6.22)$$

Definiendo δ''_{nj} como el *coeficiente de distribución de momentos de desplazamiento*, o simplemente *coeficiente de desplazamiento*, resulta:

$$\delta''_{nj} = \frac{K_{nj}}{2 \sum_{j=1}^q K_{nj}} \quad (6.23)$$

$$M''_{nj} = \delta''_{nj} (M_d)_n \quad (6.22a)$$

Se emplea entonces la ecuación (6.19) y se reescribe el lado izquierdo de la ecuación (6.18a) como sigue:

$$\begin{aligned} (M_p)_n - \left(\sum_{j=1}^q M_{col} \right)_n - 2 \sum_{j=1}^q M''_{nj} &= \\ (M_p)_n - \sum_{j=1}^q \left[(M_{nj} + M_{(n+1)j}) + 2 M''_{nj} \right] &= \\ (M_p)_n - \sum_{j=1}^q \left[(M_{nj} + M''_{nj}) + (M_{(n+1)j} + M''_{(n+1)j}) \right] \end{aligned}$$

o sea, que al momento del extremo de cada columna se le agrega la corrección respectiva por desplazamiento. Naturalmente, al hacerlo se rompe por lo general el equilibrio del nudo y es preciso adelantar un ciclo normal de Cross para corregirlo. Al final del mismo se vuelve a plantear la ecuación (6.18), obteniéndose un nuevo momento de desbalance, menor que el del ciclo inmediatamente anterior, y se repite el proceso hasta el grado deseado de exactitud.

En resumen los pasos involucrados son:

1. Calcúlense por cada piso los coeficientes de distribución δ_{ij} ecuación (6.5); coeficientes de desplazamiento δ''_{nj} ecuación (6.23); momentos de empotramiento M_{ij}^F y momentos de piso $(M_p)_n$ ecuación (6.15). Efectúese el primer ciclo normal de Cross.
2. Encuéntrese para cada piso el *momento de desbalance por desplazamiento* mediante la ecuación (6.18).
3. Calcúlense los *momentos de desplazamiento*, M''_{nj} , mediante la ecuación (6.22a).

4. Añádanse dichos momentos a los existentes en el extremo respectivo de cada columna.
5. Balancéense todos los nudos mediante otro ciclo normal de Cross.
6. Vuélvase a calcular en cada piso el *momento de desbalance por desplazamiento* y repítanse los pasos 2 a 6, empezando por las transmisiones a que haya lugar, hasta lograr la exactitud deseada.

En caso de no haber cargas horizontales aplicadas a la estructura el proceso es idéntico, excepto por los momentos de piso que entonces serán todos iguales a cero.

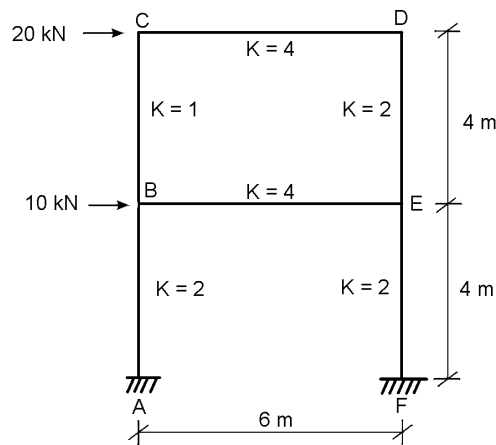
Cuando las columnas del primer piso están articuladas en la base, es obvio que los momentos de desplazamiento tienen que ser absorbidos por los extremos superiores de dichas columnas. En consecuencia, sus *coeficientes de desplazamiento* pasan a ser:

$$\delta_{nj}'' = \frac{K_{nj}}{\sum_{j=1}^q K_{nj}} \quad (6.23a)$$

El método se ilustrará con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 6.13

Analice por el método alterno el pórtico mostrado.



Solución

Como no hay cargas verticales, en el primer paso sólo se calculan los coeficientes de distribución y los de traslación.

$$\delta_{CD} = \frac{4}{4+1} = 0.800$$

$$\delta_{CB} = \frac{1}{5} = 0.200$$

$$\delta_{BC} = \frac{1}{1+4+2} = 0.143$$

$$\delta_{BE} = \frac{4}{7} = 0.571$$

$$\delta_{BA} = \frac{2}{7} = 0.286$$

$$\delta_{DC} = \frac{4}{4+2} = 0.667$$

$$\delta_{ED} = \delta_{EF} = \frac{2}{2+4+2} = 0.250$$

$$\delta_{DE} = \frac{2}{6} = 0.333$$

$$\delta_{EB} = \frac{4}{8} = 0.500$$

Nivel superior:

$$\delta_{CB}'' = \delta_{BC}'' = \frac{1}{2(1+2)} = 0.167$$

$$\delta_{ED}'' = \delta_{DE}'' = \frac{2}{2 \times 3} = 0.333$$

Nótese que la suma da 0.500, como debe ser.

Nivel inferior:

$$\delta_{BA}'' = \delta_{AB}'' = \delta_{EF}'' = \delta_{FE}'' = \frac{2}{2(2+2)} = 0.250$$

Segundo paso

Al aplicar las ecuaciones (6.18) y (6.15), se obtienen los *momentos de desbalance* del primer ciclo para cada piso:

$$M_{d1} = 4 \times 20 - 0 = 80 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = 4(20 + 10) - 0 = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Tercer paso

Se calculan los momentos de desplazamiento para cada columna.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} M_{CB}'' &= M_{BC}'' = \delta_{BC}'' M_{d1} \\ &= 0.167 \times 80.0 = 13.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$M_{DE}'' = M_{ED}'' = 0.333 \times 80.0 = 26.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_{BA}'' &= M_{AB}'' = M_{EF}'' = M_{FE}'' = \delta_{BA}'' M_{d2} \\ &= 0.250 \times 120.0 = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Cuarto paso

Al añadir estos momentos a los existentes en cada columna, el cuadro de distribución queda como sigue:

	CB	CD
δ_{ij}	0.200	0.800
δ_{rj}	0.167	
	(1)	
	13.4	

	DC	DE
	0.667	0.333
		0.333
		26.6

	BA	BC	BE
δ_{ij}	0.286	0.143	0.571
δ_{rj}	0.250	0.167	
	30.0	13.4	

	EB	ED	EF
	0.500	0.250	0.250
		0.333	0.250
		26.6	30.0

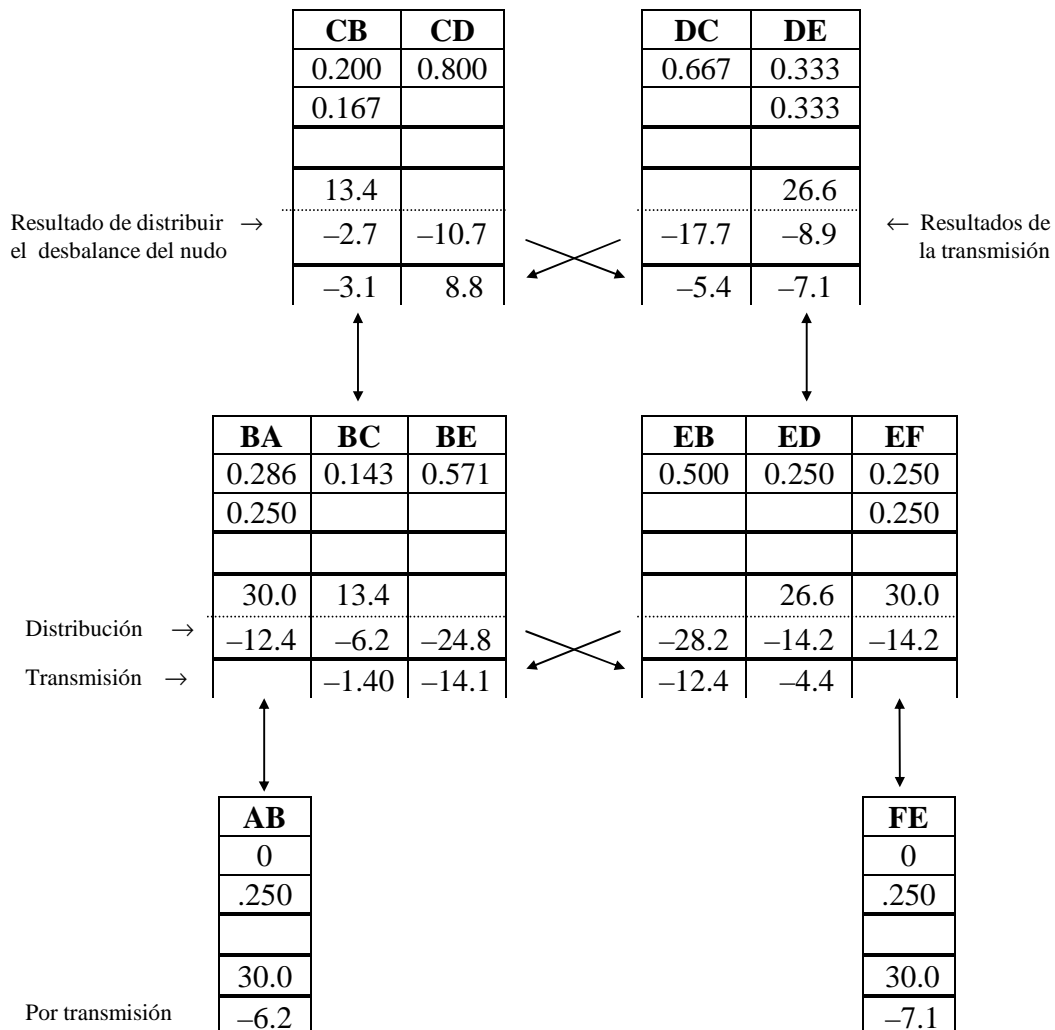
	AB
δ_{ij}	0
δ_{rj}	0.250
	30.0

	FE
	0
	0.250
	30.0

1. Como no hay cargas verticales, los resultados del primer Cross pueden considerarse iguales a cero.

SEGUNDO CICLO

Se balancean los nudos en la forma acostumbrada y se transmite, obteniéndose:



De manera que en este momento:

$$M_{CB} = 13.4 - 2.7 - 3.1 = 7.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 13.4 - 6.2 - 1.4 = 5.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DE} = 26.6 - 8.9 - 7.1 = 10.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{ED} = 26.6 - 14.2 - 4.4 = 8.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y por consiguiente:

$$\left(\sum M_c\right)_1 = 7.6 + 5.8 + 10.6 + 8.0 = 32.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{dl} = 80.0 - 32.0 = 48.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Obsérvese que el mismo resultado con signo contrario se obtiene sumando únicamente los valores que aparecen en las columnas respectivas después de la última línea punteada:

$$-2.7 - 3.1 - 6.2 - 1.4 - 8.9 - 7.1 - 14.2 - 4.4 = -48.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para el piso inferior:

$$M_{BA} = 30.0 - 12.4 = 17.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB} = 30.0 - 6.2 = 23.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EF} = 30.0 - 14.2 = 15.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FE} = 30.0 - 7.1 = 22.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rightarrow (\Sigma M_C)_2 = 17.6 + 23.8 + 15.8 + 22.9 = 80.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = 120.0 - 80.1 = 39.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Obsérvese de nuevo que la suma de los cambios en las columnas da:

$$-12.4 - 6.2 - 14.2 - 7.1 = -39.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Repartiendo ahora los momentos de desbalance, se obtiene:

$$M''_{CB} = M''_{BC} = 0.167 \times 48.0 = 8.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 0.333 \times 48.0 = 16.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

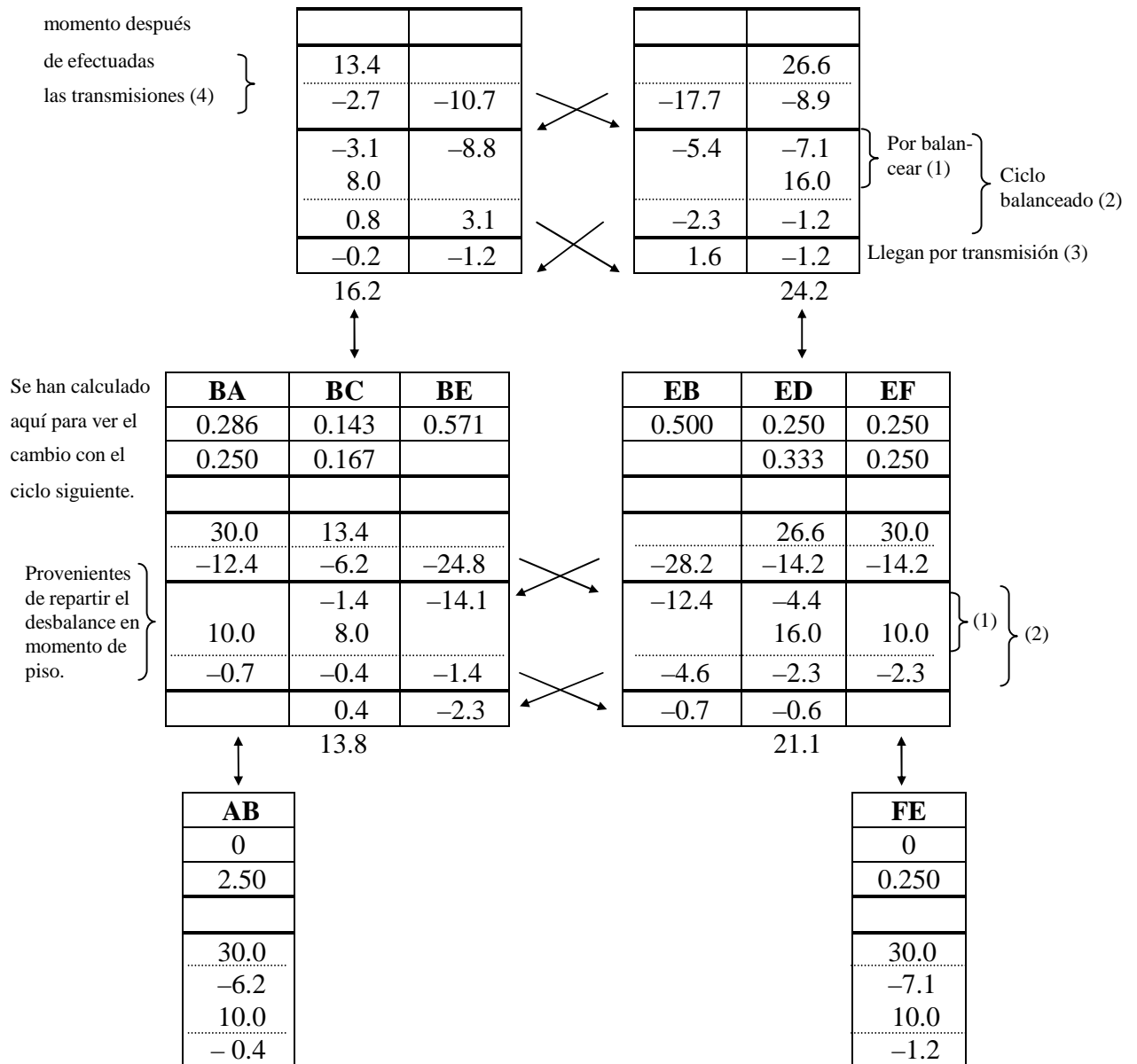
$$M''_{BA} = M''_{AB} = M''_{EF} = M''_{FE} = 0.250 \times 39.9 = 10.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Balanceando los nudos y transmitiendo, la situación para el TERCER CICLO es:

Valor del

CB	CD
0.200	0.800
0.167	

DC	DE
0.667	0.333
	0.333



Por consiguiente:

$$M_{d1} = - (0.8 - 0.2 - 0.4 + 0.4 - 1.2 - 1.2 - 2.3 - 0.6) = 4.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = - (-0.7 - 0.4 - 2.3 - 1.2) = 4.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{CB} = M''_{BC} = 0.167 \times 4.7 = 0.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 0.333 \times 4.7 = 1.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{BA} = M''_{AB} = M''_{EF} = M''_{FE} = 0.250 \times 4.6 = 1.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y balanceando los nudos se llega a:

CB	CD
-----------	-----------

DC	DE
-----------	-----------

0.200	0.800
0.167	
13.4	
-2.7	-10.7
-3.1	-8.8
8.0	
0.8	3.1
-0.2	-1.2
0.8	
0.1	0.5
17.1	-17.1

0.667	0.333
	0.333
	26.6
-17.7	-8.9
-5.4	-7.1
	16.0
-2.3	-1.2
1.6	-1.2
	1.6
-1.3	-0.7
-25.1	25.1

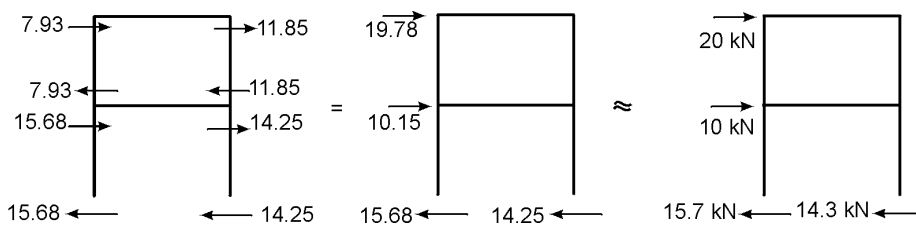
AB	BA	BC	BE	EB	ED	EF	FE
0	0.286	0.143	0.571	0.500	0.250	0.250	0
0.250	0.250	0.167			0.333	0.250	0.250
30.0	30.0	13.4			26.6	30.0	30.0
-6.2	-12.4	-6.2	-24.8	-28.2	-14.2	-14.2	-7.1
		-1.4	-14.1	-12.4	-4.4		
10.0	10.0	8.0			16.0	10.0	10.0
-0.4	-0.7	-0.4	-1.4	-4.6	-2.3	-2.3	-1.2
		0.4	-2.3	-0.7	-0.6		
1.2	1.2	0.8			1.6	1.2	1.2
-----			-0.1	-0.7	-0.4	-0.4	-0.2
34.6	28.1	14.6	-42.7	-46.6	22.3	24.3	32.7

De manera que si se suspende el proceso al cabo de cuatro ciclos, los momentos de desbalance quedan:

$$M_{d1} = 80.0 - (17.1 + 14.6 + 25.1 + 22.3) = 0.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = 120.0 - (28.1 + 34.6 + 24.3 + 32.7) = 0.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

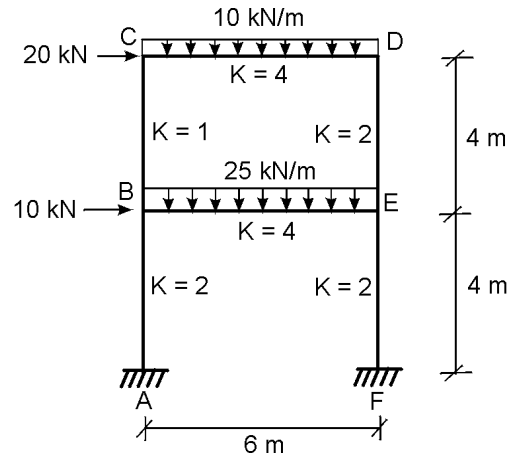
o en términos de fuerza de corte:



o sea, con un error de cierre máximo inferior al 1.5%.

Ejemplo 6.14

Resuelva la misma estructura del ejemplo anterior cuando está sometida, además, a las cargas verticales mostradas.

**Solución**

Como ahora hay cargas verticales, se empieza por efectuar un ciclo normal de Cross. Los coeficientes de distribución y los de traslación son los mismos del ejemplo 6.13.

Momentos de empotramiento

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{10 \times 36}{12} = 30.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE}^F = -M_{EB}^F = \frac{25 \times 36}{12} = 75.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momentos de piso

$$M_{P1} = 4 \times 20 = 80.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{P2} = 4 \times (20 + 10) = 120 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En el cuadro siguiente se muestran cuatro ciclos del proceso, que involucran tres correcciones por desplazamiento, al cabo de los cuales se considera lograda una precisión adecuada.

		CB	CD		DC	DE		
δ_{ij}		0.200	0.800		0.667	0.333		
δ_{ij}		0.167				0.333		
		-6.0	-24.0		-30.0	10.0		
		-5.4	10.0		-12.0	9.4		
		10.3				20.6		
		-3.0	-11.9		-12.0	-6.0		
		-4.1	-6.0		-6.0	-4.4		
		6.5				13.0		
		0.7	2.9		-1.7	-0.9		
		-0.4	-0.8		1.4	-0.4		
		0.5				0.9		
		0.1	0.6		-1.3	-0.6		
		-0.8	0.8		-41.6	41.6		
		↕			↕			
AB	BA	BC	BE		EB	ED	EF	FE
0	0.286	0.143	0.571		0.500	0.250	0.250	0
0.250	0.250	0.167				0.333	0.250	0.250
-10.7	-21.4	-10.7	75.0		-75.0			9.4
31.0		-3.0	18.8		37.5	18.8	18.7	
-8.2	31.0	10.3			-21.4	5.0		31.0
9.4	-16.3	-8.2	-32.6		-17.6	-8.8	-8.8	-4.4
-0.8		-1.5	-8.8		-16.3	-3.0		9.4
0.9	9.4	6.5			-1.6	-0.8	-0.7	-0.4
-0.2	-1.6	-0.8	-3.2		-1.6	-0.5		0.9
21.4		0.4	-0.8			0.9	0.9	—
	0.9	0.5			0.2	0.1	0	
	-0.3	-0.1	-0.6		-95.8	45.3	50.5	45.9
	1.7	-6.6	4.9					

A continuación se presentan los cálculos auxiliares empleados en la elaboración del cuadro.

PRIMERA CORRECCIÓN POR DESPLAZAMIENTOS

Al finalizar el primer Cross, y una vez efectuadas las transmisiones, se tiene:

$$M_{CB} = -11.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_{DE} = 19.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -13.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_{ED} = 23.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rightarrow (\sum M_c)_1 = -11.4 - 13.7 + 19.4 + 23.8 = 18.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d1} = M_{P1} - (\sum M_C)_1 = 80.0 - 18.1 = 61.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{CB} = M''_{BC} = 0.167 \times 61.9 = 10.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 0.333 \times 61.9 = 20.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = -21.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_{EF} = 18.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{AB} = -10.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad M_{FE} = 9.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rightarrow (\sum M_C)_2 = -21.4 - 10.7 + 18.7 + 9.4 = -4.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = 120.0 - (-4.0) = 124.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{BA} = M''_{AB} = M''_{EF} = M''_{FE} = 0.250 \times 124.0 = 31.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se efectúa el balance de los nudos y la consecuente transmisión, y se procede a realizar la **SEGUNDA CORRECCIÓN POR DESPLAZAMIENTOS**.

Empleando la simplificación mencionada en el ejemplo anterior, se calculan directamente los valores de los momentos de desbalance:

$$M_{d1} = -(-3.0 - 4.1 - 8.2 - 1.5 - 6.0 - 4.4 - 8.8 - 3.0) = 39.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rightarrow M''_{CB} = M''_{BC} = 6.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 13.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = -(-16.3 - 8.2 - 8.8 - 4.4) = 37.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\rightarrow M''_{BA} = M''_{AB} = M''_{EF} = M''_{FE} = 9.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Una vez efectuados balance y transmisión, se tiene para la **TERCERA CORRECCIÓN**:

$$M_{d1} = -(0.7 - 0.4 - 0.8 + 0.4 - 0.9 - 0.4 - 0.8 - 0.5) = 2.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

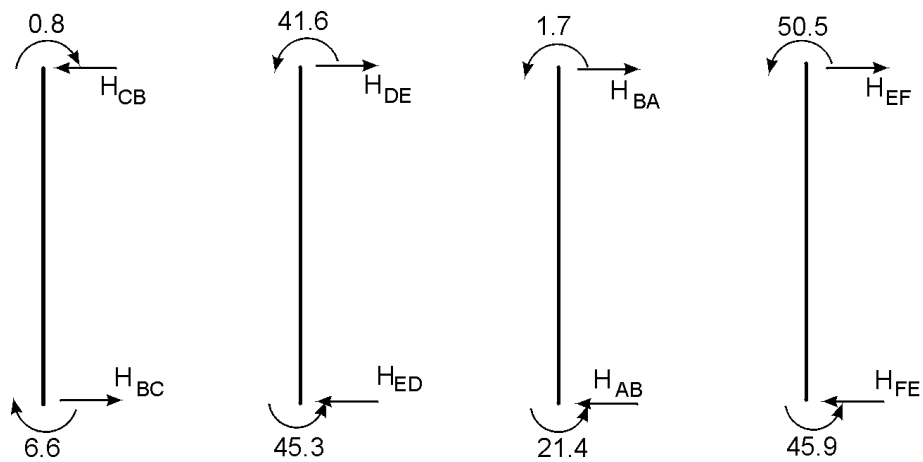
$$M''_{CB} = M''_{BC} = 0.167 \times 2.7 = 0.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{DE} = M''_{ED} = 0.333 \times 2.7 = 0.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{d2} = -(-1.6 - 0.8 - 0.7 - 0.4) = 3.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M''_{BA} = M''_{AB} = M''_{EF} = M''_{FE} = 0.250 \times 3.5 = 0.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Se llevan estos valores al cuadro y, dada su magnitud, se efectúa un último balance de los nudos. Se suman las columnas, y con los valores obtenidos se efectúa la comprobación final de las fuerzas de corte.



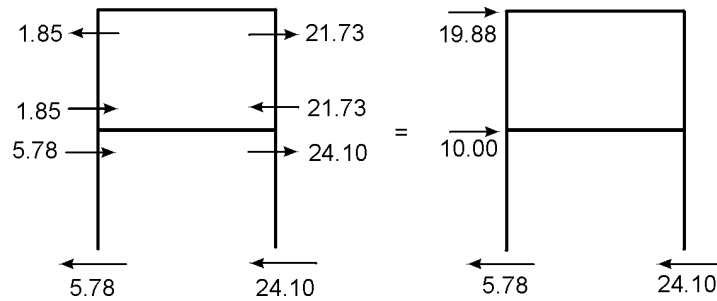
$$H_{CB} = H_{BC} = \frac{0.8 + 6.6}{4} = 1.85 \text{ kN}$$

$$H_{DC} = H_{ED} = \frac{41.6 + 45.3}{4} = 21.73 \text{ kN}$$

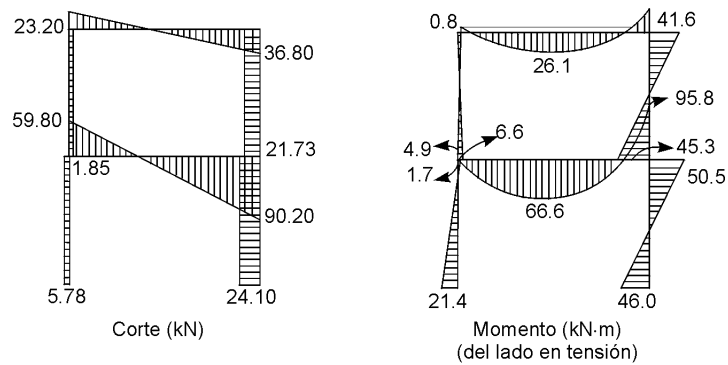
$$H_{BA} = H_{AB} = \frac{1.7 + 21.4}{4} = 5.78 \text{ kN}$$

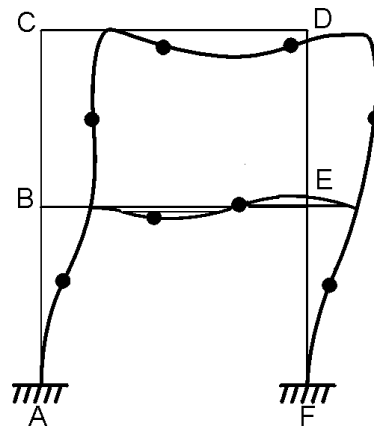
$$H_{EF} = H_{FE} = \frac{50.5 + 45.9}{4} = 24.10 \text{ kN}$$

y resumiendo:



que da un error, al compararlo con las cargas horizontales aplicadas, inferior al 1%. Finalmente se calculan las reacciones de las vigas y se dibujan los diagramas de corte y de momentos, y la elástica aproximada de la estructura.





Elástica aproximada

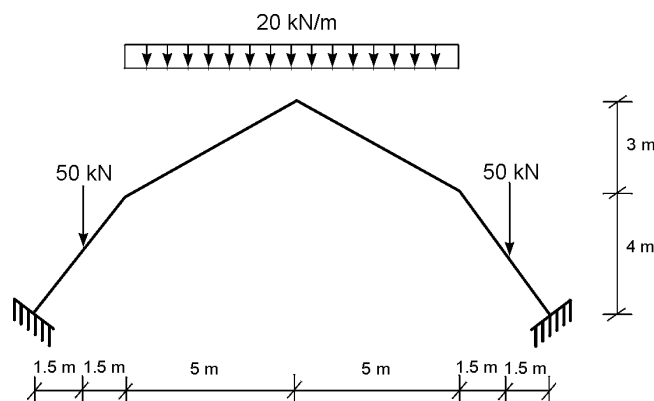
6.13 PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS ALTERNO

La programación del método de Cross alterno es relativamente sencilla; Gennaro, en la referencia 6.8, la presenta. El autor modificó el programa de dicha referencia para incluir el efecto de los acortamientos axiales en las columnas y los momentos secundarios causados por los desplazamientos de los pisos.

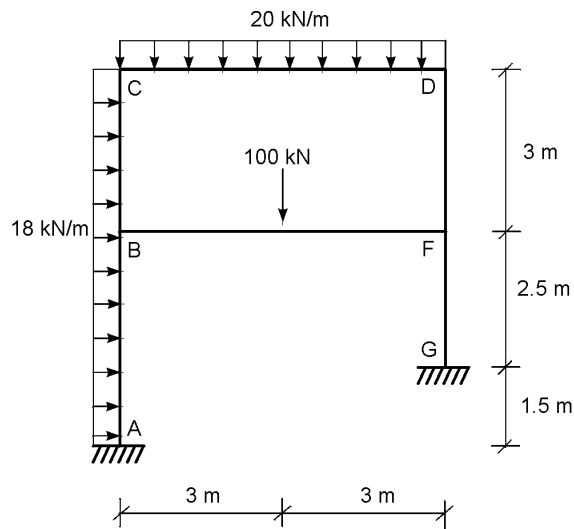
En el disco adjunto se incluye una versión en QUICK BASIC del programa original de Gennaro. Esta versión puede adaptarse fácilmente a calculadoras de bolsillo, pues como se indicó en la introducción al método, tiene la ventaja de necesitar poca memoria si se compara con el basado en planteamientos matriciales. Este último se explica en el capítulo 11.

EJERCICIOS

- 6.1 Analice, por el método de Cross, las vigas de los ejercicios 5.2 y 5.3.
- 6.2 Utilice el método de Cross para resolver los pórticos del ejercicio 5.7.
- 6.3 Resuelva el siguiente pórtico y dibuje todos los diagramas. Aproveche la simetría. Utilice los resultados para calcular las rotaciones y desplazamientos reales de los nudos. Suponga $b = 400 \text{ mm}$, $h = 600 \text{ mm}$, $E = 17900 \text{ N/mm}^2$.



6.4 Analice los pórticos siguientes utilizando el método de Cross. Calcule los desplazamientos de cada placa suponiendo $E = 20000 \text{ N/mm}^2$.



Dimensiones ($b \times h$, mm)

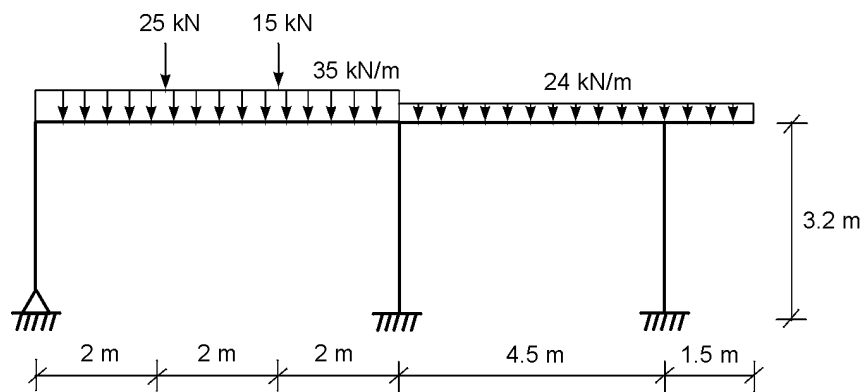
Vigas: 300×400

Columnas:

BC, DF y FG: 300×300

AB: 300×400

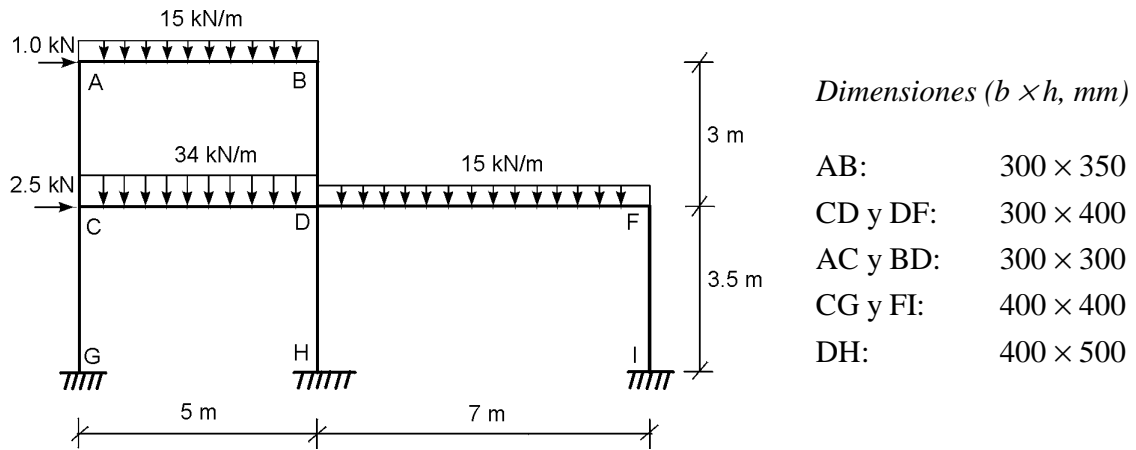
(a)



(b)

Vigas y columna central: $300 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$

Columnas extremas: $300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$



(c)

- 6.5 Resuelva los pórticos (b) y (c) del ejercicio 6.4 por el método de Cross alternativo. En ambos casos suponga que todos los apoyos son empotramientos.

REFERENCIAS

- 6.1 Cross, H.- *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments*, Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 96, 1932, págs. 1-10.
- 6.2 *Handbook of Frame Constants*.- Portland Cement Association, Skokie, Illinois.
- 6.3 Fernández Casado, C. y Fernández Casado, J.L.- *Cálculo de estructuras reticulares*. Dossat, 1967.
- 6.4 Leontovich, V.- *Pórticos y arcos*, Compañía Editorial Continental, S.A., 1961.
- 6.5 Newmark, N.M.- *Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads*, Proc. ASCE, Vol. 68, 1942, págs. 691-718.
- 6.6 Kani, G.- *Cálculo de pórticos de varios pisos*, Reverté, 1958.
- 6.7 Takabeya, F.- *Estructuras de varios pisos*, Compañía Editorial Continental, S.A., 1970.
- 6.8 Gennaro, J.J.- *Computer Methods in Solid Mechanics*, The MacMillan Co., 1965.
- 6.9 Uribe, J.- *Microcomputadores en ingeniería estructural*, Universidad Nacional de Colombia y ECOE Ediciones, 1995.

7.1 INTRODUCCIÓN

El método tradicional para analizar pórticos con desplazamiento, mediante distribución de momentos, visto en el numeral 6.12 del capítulo anterior, se vuelve sumamente engorroso para estructuras de muchos grados de libertad, tales como los edificios para oficinas o apartamentos corrientes.

Su programación, aunque no es difícil, tiene el inconveniente de consumir demasiada memoria de la computadora, ya que es necesario mantener almacenados los resultados de tantos *crosses* como desplazamientos de piso más uno tenga la estructura, y además resolver un sistema de ecuaciones de orden similar.

El método alternativo contemplado en el numeral 6.13 obvia esos inconvenientes y es por eso preferido para el análisis mediante computadora. Sin embargo, su aplicación manual puede considerarse algo complicada por el peligro de cometer errores u omisiones que no son fácilmente detectables.

Afortunadamente, para soluciones manuales se habían desarrollado antes de la generalización de la computación electrónica otros métodos más sencillos, aplicables a vigas continuas y pórticos ortogonales, principalmente los de Kani (referencia 7.1) y Takabeya (referencia 7.2). Estos métodos también son fácilmente programables, de ahí la popularidad que llegaron a alcanzar. En este capítulo se estudiará el primero de ellos, o sea el de Kani.

7.2 VENTAJAS DEL MÉTODO DE KANI

En la introducción al libro citado, Kani hace hincapié en que su método ofrece las siguientes ventajas:

1. Se trata de un método de aproximaciones sucesivas y, en consecuencia, las respuestas se pueden lograr con la exactitud que se desee, mientras las hipótesis fundamentales y los datos básicos lo permitan.
2. La inclusión de los efectos de desplazamiento se hace en forma muy simple.
3. La formulación del procedimiento conduce a una eliminación prácticamente automática de los errores ocasionales.

4. Es muy fácil verificar en cualquier nudo la bondad de los resultados.
5. Los cambios eventuales de cargas o dimensiones en cualquier elemento se pueden tener en cuenta con muy poco esfuerzo adicional.
6. No es difícil de aplicar a estructuras con miembros acartelados.

Es claro que siendo fundamentalmente un método de distribución de momentos, varias de estas ventajas son compartidas por el método de Cross. La segunda y tercera son quizás las que lo hacen preferible a aquél en la aplicación particular estudiada aquí.

A las ventajas anteriores, establecidas a comienzos de la década del cincuenta, hay que añadir hoy en día una séptima: su facilidad de programación y baja exigencia de memoria de computadora.

Podría decirse que su única desventaja es que su aplicación está limitada a pórticos ortogonales y que no incluye los efectos de los acortamientos axiales, que se hacen cada vez más importantes al incrementar el número de pisos a los niveles corrientes en las torres de nuestros días.

En el artículo siguiente se deducirán las fórmulas básicas para el caso más sencillo de estructuras sin desplazamiento.

7.3 CASO DE ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTO

La deducción de las fórmulas básicas para el tratamiento de las estructuras sin desplazamiento relativo de sus extremos es completamente análoga a la vista anteriormente en los métodos de ángulos de giro y deflexión y Cross; solamente existen ligeros cambios en nomenclatura, como se anota a continuación.

De nuevo se considera que el estado final del elemento se alcanza mediante la superposición de tres efectos: el de las cargas considerando empotramiento en los nudos, el efecto del giro en el nudo i y el efecto del giro en el nudo j . Los momentos señalados en la figura 7.1 son los que corresponden a elementos prismáticos, y se han utilizado las relaciones vistas anteriormente.

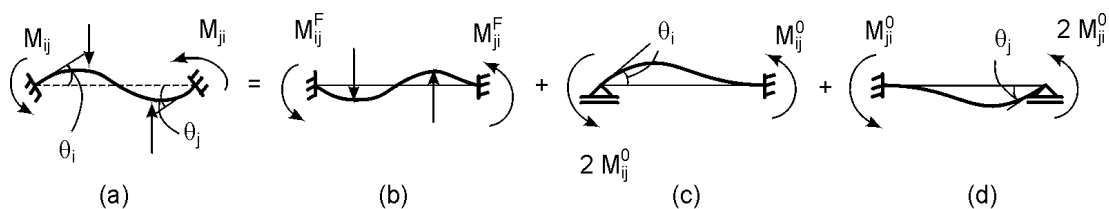


Figura 7.1 Elemento sin desplazamiento relativo de sus extremos.

El lector reconocerá fácilmente que, en tal caso:

$$2M_{ij}^0 = \frac{4EI}{L} \theta_i \quad (7.1)$$

$$\rightarrow M_{ij}^0 = \frac{2EI}{L} \theta_i \quad (7.2)$$

o sea, lo que se había llamado M_i y M_j , respectivamente, en las ecuaciones (6.8) y (6.10) del método de Cross.

Aplicando el Principio de superposición a la figura 7.1, se obtiene entonces:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 \quad (7.3)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + 2M_{ji}^0 + M_{ij}^0 \quad (7.4)$$

Considerando ahora un nudo i de la estructura y todos los elementos conectados en él, el equilibrio del nudo exige que:

$$\sum_{(i)} M_{ij} = 0$$

y al utilizar la ecuación (7.3):

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} (M_{ij}^F + 2M_{ij}^0 + M_{ji}^0) &= \\ \sum_{(i)} M_{ij}^F + 2\sum_{(i)} M_{ij}^0 + \sum_{(i)} M_{ji}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Definiendo ahora el *Momento de fijación del nudo*, \bar{M}_i , como la sumatoria de los momentos de empotramiento en los extremos de los elementos que concurren a él, o sea:

$$\bar{M}_i = \sum_{(i)} M_{ij}^F \quad (7.6)$$

y reordenando la ecuación (7.5), se obtiene:

$$\sum_{(i)} M_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left[\bar{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 \right] \quad (7.7)$$

Ahora bien, las ecuaciones (7.1) y (7.2) muestran que los momentos debidos al giro son proporcionales no sólo a la magnitud de éste sino también a la rigidez del elemento involucrado. Es decir,

$$M_{ij} \propto K_{ij} \theta_i \quad (7.8)$$

De tal manera que si todos los elementos que concurren al nudo i tienen condiciones similares de apoyo en su otro extremo, la constante de proporcionalidad, α , será idéntica y podrá escribirse la siguiente proporción:

$$\frac{M_{ij}^0}{\sum_{(i)} M_{ij}^0} = \frac{K_{ij} \theta_i}{\sum_{(i)} K_{ij} \theta_i} = \frac{K_{ij} \theta_i}{\theta_i \sum_{(i)} K_{ij}} = \frac{K_{ij}}{\sum_{(i)} K_{ij}} \quad (7.9)$$

en que se ha utilizado el supuesto de nudo rígido y, por consiguiente, el mismo valor de θ_i para todos los elementos.

Reemplazando en esta ecuación el valor dado por la ecuación (7.7) y despejando, se llega a:

$$M_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \frac{K_{ij}}{\sum_{(i)} K_{ij}} \left[\bar{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 \right] \quad (7.10)$$

y definiendo el *coeficiente de giro*, μ_{ij} , como:

$$\mu_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{K_{ij}}{\sum_{(i)} K_{ij}} \quad (7.11)$$

la expresión anterior se puede escribir así:

$$M_{ij}^0 = \mu_{ij} \left[\bar{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 \right] \quad (7.12)$$

que constituye la ecuación básica para el proceso iterativo de Kani. Nótese que los *coeficientes de giro* son la mitad de los *coeficientes de distribución* de Cross pero con signo contrario en virtud de la diferencia en nomenclatura ($2M_{ij}^0$ vs M_i). De la ecuación (7.11) es evidente que la suma de los *coeficientes de giro* de los elementos que llegan a un nudo debe dar ahora $-1/2$, dato útil en la verificación de operaciones.

Puesto que μ_{ij} y \bar{M}_i son valores fijos conocidos, la esencia del proceso consiste en aplicar sucesivamente a todos los elementos la ecuación (7.12), utilizando cada vez los últimos valores hallados de M_{ji}^0 . Cuando la diferencia entre los valores obtenidos en dos ciclos consecutivos para todos los elementos es menor que el error permitido, se considera terminado el proceso iterativo y los últimos valores obtenidos se llevan a las ecuaciones (7.3) y (7.4) para obtener los momentos totales en cada extremo.

En síntesis, los pasos involucrados son:

1. Evalúense los coeficientes de giro (μ_{ij}) y momentos de empotramiento (M_{ij}^F). Llévense estos valores a un diagrama adecuado y calcúlense los momentos de fijación (\bar{M}_i) de cada nudo.
2. Adóptese una secuencia de recorrido de los nudos, empezando por el de mayor momento de fijación para acelerar la convergencia.
3. Aplíquese a cada uno de los elementos que concurren a cada nudo la ecuación (7.12) y escríbanse en el diagrama los resultados obtenidos que constituyen para ese ciclo los valores de M_{ij}^0 . Obsérvese que estos valores se convierten en M_{ji}^0 al pasar a los nudos opuestos.
4. Una vez recorridos todos los nudos se tiene concluido un ciclo y se repite el paso 3 una y otra vez hasta obtener convergencia en todos los nudos.
5. Aplíquense entonces las ecuaciones (7.3) y (7.4) a todos los elementos, con lo cual se obtendrán los momentos definitivos en cada uno de los extremos. Para mecanizar aún más el proceso, obsérvese que estas ecuaciones pueden escribirse en la siguiente forma equivalente:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + M_{ij}^0 + (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \quad (7.3a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + M_{ji}^0 + (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \quad (7.4a)$$

7.4 ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTO CON EXTREMOS ARTICULADOS

En la deducción de la ecuación (7.9), se consideró que todos los elementos unidos en el nudo i tenían condiciones similares de apoyo en el extremo opuesto. Si este no es el caso, se tendrá para algunos elementos que:

$$M_{ij}^0 = a_0 K_{ij} \theta_i$$

mientras que para otros:

$$M_{ik}^0 = a_1 K_{ik} \theta_i = \beta a_0 K_{ik} \theta_i$$

en donde $\beta = a_1/a_0$ es la relación que existe entre los coeficientes de las rigideces absolutas de los elementos involucrados. Esta última expresión se puede reescribir como:

$$M_{ik}^0 = a_0 (\beta K_{ik}) \theta_i = a_0 K'_{ik} \theta_i$$

en donde K'_{ik} representa la rigidez modificada del elemento en condiciones diferentes. Empleando dicha rigidez modificada, resulta entonces de nuevo la ecuación (7.9) pero en términos de K'_{ij} . Para los elementos con extremo opuesto empotrado, obviamente K'_{ij} es

igual a K_{ij} ya que para ellos β vale uno.

Ilustrando esto para un elemento prismático se recordará que:

$$2M_{ij}^0 = \left[\frac{4EI}{L} \right]_{ij} \theta_i$$

$$\rightarrow M_{ij}^0 = (2EK)_{ij} \theta_i$$

$$\rightarrow a_0 = 2E$$

Para el mismo elemento pero con extremo articulado:

$$2M_{ij}^0 = \left[\frac{3EI}{L} \right]_{ij} \theta_i$$

$$\rightarrow M_{ij}^0 = \left[\frac{3}{2}EK \right]_{ij} \theta_i$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{3}{2}E$$

Por consiguiente:

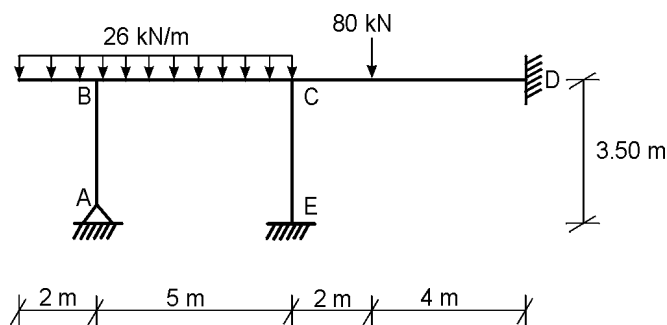
$$\beta = \frac{a_1}{a_0} = \frac{3/2E}{2E} = \frac{3}{4}$$

$$y \quad K'_{ij} = \beta K_{ij} = \frac{3}{4} K_{ij}$$

o sea, que bastará tomar como rigidez modificada tres cuartas partes de la rigidez real, que coincide con lo que se había hecho en el método de Cross.

Ejemplo 7.1

Analice el pórtico mostrado, utilizando el método de Kani.



Solución

Este problema es el mismo del ejemplo 6.5. Con referencia a él, se tiene:

$$K_{AB} = K_{CE} = 23.1,$$

$$K_{BC} = 75,$$

$$K_{CD} = 62.5$$

$$K'_{AB} = \frac{3}{4} \times 23.1 = 17.3$$

Por otra parte:

$$M_{vol}^F = -52.0 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = 54.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^F = 71.1 \text{ kN}\cdot\text{m},$$

$$M_{DC}^F = -35.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Coefficientes de giro

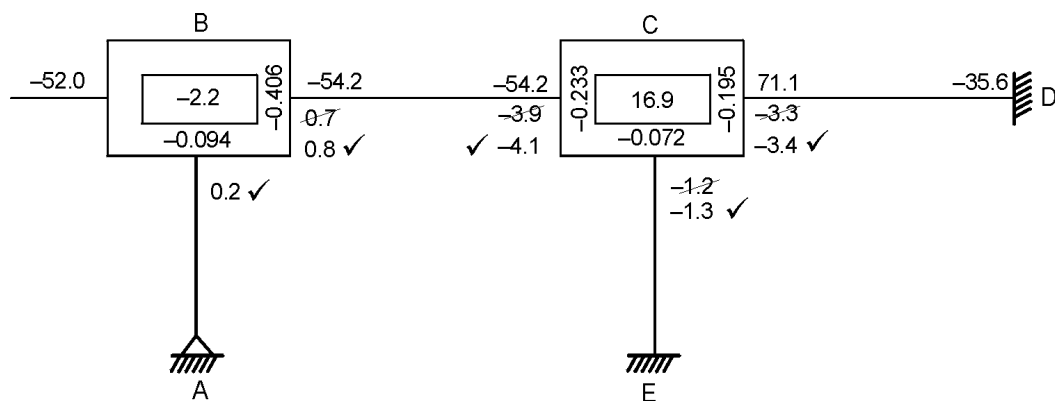
Nudo B

$$\left. \begin{aligned} \mu_{BA} &= -\frac{1}{2} \frac{17.3}{17.3 + 75} = -0.094 \\ \mu_{BC} &= -\frac{1}{2} \frac{75}{92.3} = -0.406 \end{aligned} \right\} \Sigma = -0.500 \beta$$

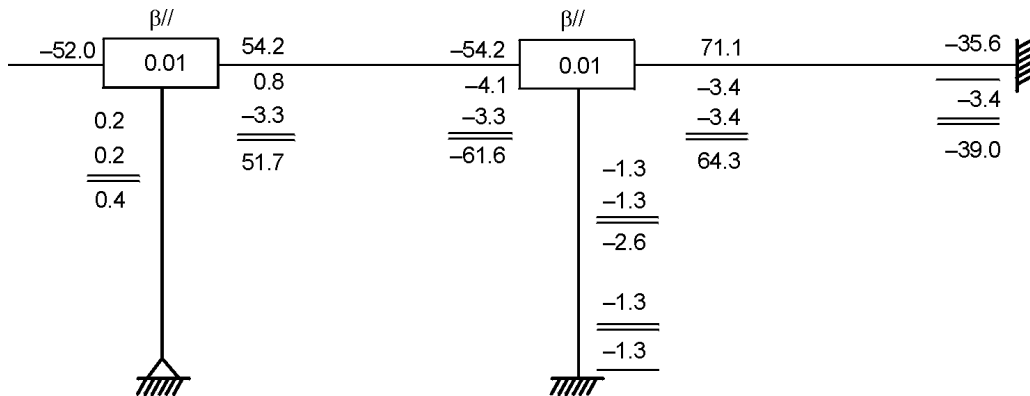
Nudo C

$$\left. \begin{aligned} \mu_{CB} &= -\frac{1}{2} \frac{75}{75 + 62.5 + 23.1} = -0.233 \\ \mu_{CD} &= -\frac{1}{2} \frac{62.5}{160.6} = -0.195 \\ \mu_{CE} &= -\frac{1}{2} \frac{23.1}{160.6} = -0.072 \end{aligned} \right\} \Sigma = -0.500 \beta$$

Con estos valores se elabora el cuadro siguiente. El proceso iterativo se inicia en el nudo C y converge al cabo de tres ciclos.



Con los valores finales se calculan los momentos definitivos:



prácticamente idénticos a los hallados antes.

7.5 PÓRTICOS CON NUDOS DESPLAZABLES EN SENTIDO HORIZONTAL: CARGAS HORIZONTALES ÚNICAMENTE EN LOS NUDOS

Cuando los pórticos no son simétricos en geometría y cargas, o cuando están sometidos a fuerzas horizontales, sufrirán desplazamientos nodales a menos que éstos estén impedidos por un arriostramiento adecuado.

En el caso de pórticos ortogonales, e ignorando de nuevo los efectos de las deformaciones axiales, se tendrá un desplazamiento horizontal por cada piso y la diferencia de desplazamientos entre dos pisos consecutivos producirá momentos adicionales en las columnas respectivas, como se vio en el capítulo anterior.

Al tener en cuenta este efecto, indicado en la figura 7.2, y superponerlo a los tres estados de la figura 7.1, vistos antes, las ecuaciones (7.3) y (7.4) se reemplazan por:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}'' \tag{7.13}$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + 2M_{ji}^0 + M_{ij}^0 + M_{ji}'' \tag{7.14}$$

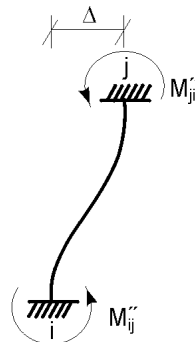


Figura 7.2 Efecto del desplazamiento.

y planteando equilibrio en un nudo i:

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} (M_{ij}^F + 2M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}'') &= \\ &= \sum_{(i)} M_{ij}^F + 2\sum_{(i)} M_{ij}^0 + \sum_{(i)} M_{ji}^0 + \sum_{(i)} M_{ij}'' = 0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

de donde se obtiene:

$$\sum_{(i)} M_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left(\overline{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 + \sum_{(i)} M_{ij}'' \right) \tag{7.16}$$

y por un raciocinio similar al visto antes en la deducción de la ecuación (7.12) se obtiene, suponiendo condiciones de apoyo similares, el valor del momento por giro en el caso de desplazamiento:

$$M_{ij}^0 = \mu_{ij} \left(\overline{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 + \sum_{(i)} M_{ij}'' \right) \tag{7.17}$$

Recordando ahora el equilibrio de fuerzas horizontales en cualquier piso y suponiendo que las cargas horizontales actúan a nivel de placa según se indica en la figura 7.3:

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i=1}^m Q_{ij} \tag{7.18}$$

$$Q_{n+1,k} = Q_{nk} = \frac{M_{nk} + M_{n+1,k}}{h_{nk}} \tag{7.19}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{k=1}^m \frac{M_{nk} + M_{n+1,k}}{h_{nk}} \tag{7.20}$$

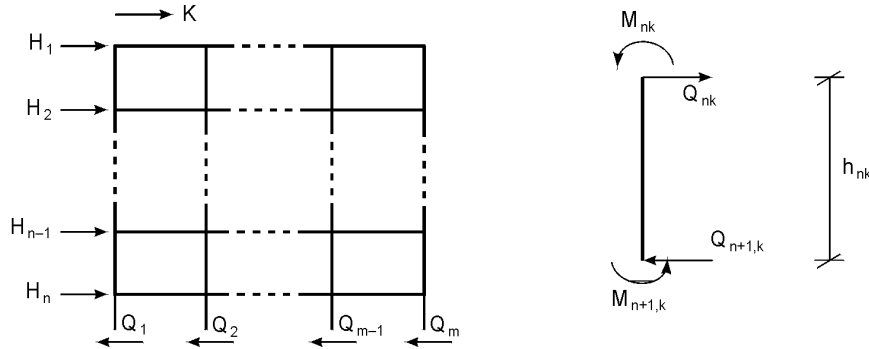


Figura 7.3 Equilibrio de fuerzas horizontales en el piso n.

Y si todas las columnas del piso considerado tienen la misma altura $h_{nk} = h_n$:

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{k=1}^m (M_{nk} + M_{n+1,k}) \tag{7.21}$$

Conviniendo ahora en que los subíndices i y j se refieren en las fórmulas siguientes a los extremos inferior y superior, respectivamente, de la columna en la posición (n,k), y reemplazando en la ecuación (7.20) las ecuaciones (7.13) y (7.14), se llega a:

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{k=1}^m [M_{ij}^F + M_{ji}^F] + 3 \sum_{(n)} [M_{ij}^0 + M_{ji}^0] + \sum_{(n)} [M_{ij}'' + M_{ji}''] \quad (7.22)$$

Como se ha supuesto que las cargas horizontales actúan sólo a nivel de placa y la ecuación anterior se refiere a columnas:

$$M_{ij}^F = M_{ji}^F = 0 \quad (7.23)$$

Además, en el caso de elementos prismáticos:

$$M_{ij}'' = M_{ji}'' \quad (7.24)$$

de tal manera que la ecuación (7.22) se puede reescribir así:

$$\sum_{(n)} M_{ij}'' = -\frac{3}{2} \left[-\frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{3} + \sum_{(n)} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (7.25)$$

Se vio anteriormente que:

$$M_{ij}'' \alpha \left[\frac{K}{h} \Delta \right]_{ij} = \left[a \frac{K}{h} \Delta \right]_{ij} \quad (7.26)$$

Por consiguiente, cuando todas las columnas del piso tienen las mismas condiciones de apoyo y se desprecian las deformaciones axiales, con lo cual el desplazamiento relativo para todas ellas es el mismo, se puede escribir:

$$\frac{M_{ij}''}{\sum_{(n)} (M_{ij}'')} = \frac{(aK\Delta/h)_{ij}}{\sum_{(n)} (aK\Delta/h)_{ij}} = \frac{(a\Delta/h)K_{ij}}{(a\Delta/h)\sum_{(n)} K_{ij}} = \frac{K_{ij}}{\sum_{(n)} K_{ij}} \quad (7.27)$$

Y reemplazando en esta relación la ecuación (7.25):

$$M_{ij}'' = -\frac{3}{2} \frac{K_{ij}}{\sum_{(n)} K_{ij}} \left[-\frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{3} + \sum_{(n)} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (7.28)$$

Definiendo ahora un *Momento de piso según Kani*:

$$(M_{PK})_n = -\frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{3} \quad (7.29)$$

que como se ve es un tercio del momento de piso en el método alterno de Cross (ecuación (6.15)), y unos *coeficientes de desplazamiento*:

$$\gamma_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{K_{ij}}{\sum_{(n)} K_{ij}} \quad (7.30)$$

equivalentes en consecuencia al triple de los *coeficientes de translación* del método citado (ecuación (6.23)). La ecuación (7.28) se transforma en:

$$M_{ij}'' = \gamma_{ij} \left[M_{PK} + \sum_{(n)} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (7.28a)$$

Esta ecuación y la (7.17) son las ecuaciones básicas en la aplicación del método de Kani a pórticos con desplazamiento. Cuando no hay cargas horizontales, M_{PK} vale cero y la ecuación (7.28a) se reduce a:

$$M_{ij}'' = \gamma_{ij} \left[\sum_{(n)} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (7.28b)$$

En general, el procedimiento del numeral 7.2 queda modificado en la siguiente forma:

1. Evalúense los coeficientes de giro (μ_{ij}), coeficientes de desplazamiento (γ_{ij}), momentos de empotramiento (M_{ij}^F) y momentos de piso según Kani (M_{PK}). Llévase estos valores a un esquema adecuado de la estructura y calcúlense los momentos de fijación (\bar{M}_i) de cada uno.
2. Adóptese una secuencia de recorrido de los nudos, empezando por el de mayor momento de fijación para acelerar la convergencia.
3. Aplíquese a cada uno de los elementos que concurren a cada nudo la ecuación (7.17) y escríbanse en el diagrama los resultados obtenidos (en el primer ciclo en este paso M_{ij}^0 es igual a cero para el primer nudo y los M_{ij}'' son nulos para todos los elementos).
4. Una vez recorridos todos los nudos se calculan los momentos de desplazamiento (M_{ij}'') de todas las columnas mediante las ecuaciones (7.28a) o (7.28b), según corresponda. Es conveniente proceder piso por piso. Al concluir este paso se habrá realizado un ciclo.
5. Repítanse los pasos 3 y 4 una y otra vez hasta obtener la convergencia deseada, tanto en los momentos de giro como en los de desplazamiento.
6. Con los valores finales aplíquese a cada elemento las ecuaciones (7.13) y (7.14) o su forma alterna:

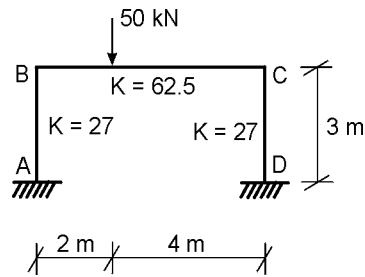
$$M_{ij} = M_{ij}^F + M_{ij}^0 + (M_{ij}^0 + M_{ji}^0 + M_{ij}'')$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + M_{ji}^0 + (M_{ji}^0 + M_{ij}^0 + M_{ji}'')$$

que, como antes, sirven para agilizar el proceso y facilitar su verificación.

Ejemplo 7.2

Resuelva el pórtico del ejemplo 6.7.



Solución

Se tenía (página 223):

$$M_{BC}^F = 44.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB}^F = -22.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

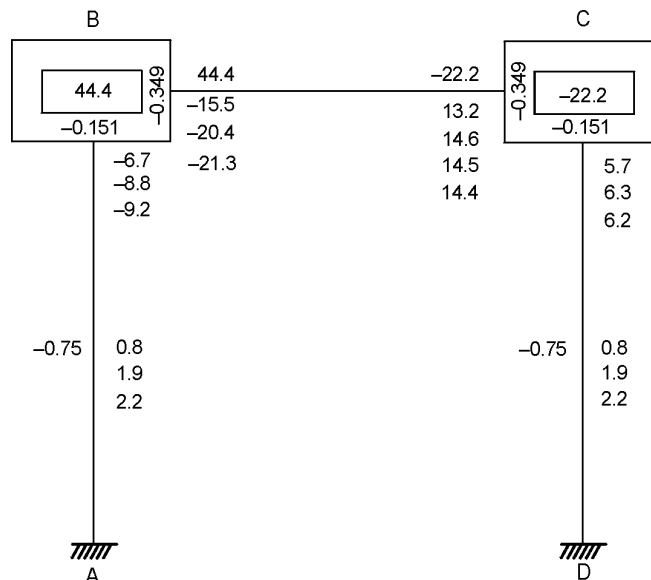
Nudos B y C:

$$\mu_{BC} = \mu_{CB} = -\frac{1}{2} \frac{62.5}{62.5 + 27} = -0.349$$

$$\mu_{BA} = \mu_{CD} = -\frac{1}{2} \frac{27}{27 + 27} = -0.151$$

Coefficientes de desplazamiento

$$\gamma_{AB} = \gamma_{CD} = \frac{3}{2} \frac{27}{27 + 27} = -0.750$$



Primer ciclo

Empezando en el nudo B:

$$(-0.349) 44.4 = -15.5$$

$$(-0.151) 44.4 = -6.7$$

Pasando ahora al nudo C:

$$\left(\overline{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 + \sum_{(i)} M_{ij}'' \right) = -22.2 - 15.5 = -37.7$$

$$M_{CB}^0 = -0.349 (-37.7) = 13.2$$

$$M_{CD}^0 = -0.151 (-37.7) = 5.7$$

Aplicando ahora a las columnas la ecuación (7.25b):

$$M_{AB}'' = M_{CD}'' = -0.75 (-6.7 + 5.7) = 0.8$$

Segundo ciclo

$$M_{BC}^0 = -0.349 (44.4 + 13.2 + 0.8) = -20.4$$

$$M_{BA}^0 = -0.151 (58.4) = -8.8$$

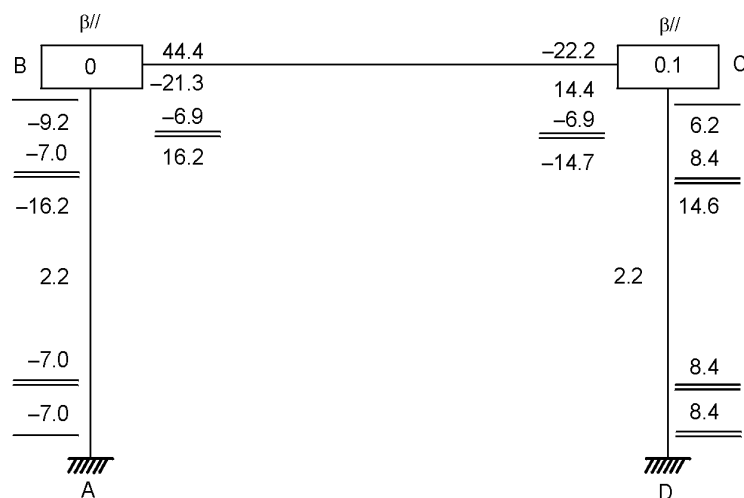
$$M_{CB}^0 = -0.349 (-22.2 - 20.4 + 0.8) = 14.6$$

$$M_{CD}^0 = -0.151 (-41.8) = 6.3$$

$$M_{AB}'' = -0.75 (-8.8 + 6.3) = 1.9$$

$$M_{CD}'' = -0.75 (-2.5) = 1.9$$

la convergencia se logra al cabo de otros dos ciclos, obteniéndose finalmente:



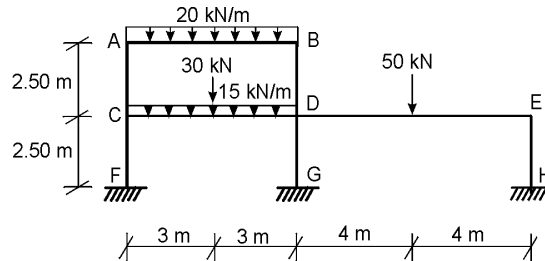
Estos valores son ligeramente superiores a los obtenidos mediante el método de Cross (página 226), con una diferencia máxima del 6%.

Ejemplo 7.3

Resuelva el pórtico mostrado.

Dimensiones de los elementos ($b \times h$ mm)

AB:	350 × 400
CD, DE:	400 × 500
CF, EH:	400 × 400
DG:	450 × 450
AC, BD:	350 × 350



Solución

Cálculo de rigideces relativas

$$K_{AC} = K_{BD} = \frac{(3.5)^4}{2.5} = 60.0$$

$$K_{CF} = K_{EH} = \frac{(4)^4}{2.5} = 102.4$$

$$K_{DG} = \frac{(4.5)^4}{2.5} = 164.0$$

$$K_{AB} = \frac{3.5 \times (4)^3}{6} = 37.3$$

$$K_{CD} = \frac{4 \times (5)^3}{6} = 83.3$$

$$K_{DE} = \frac{4 \times (5)^3}{8} = 62.5$$

Coefficientes de giro

A y B:

$$\mu_{AB} = \mu_{BA} = -\frac{1}{2} \frac{37.3}{37.3 + 60.0} = -0.192$$

$$\mu_{AC} = \mu_{BC} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{97.3} = -0.308$$

C:

$$\mu_{CA} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{60.0 + 83.3 + 102.4} = -0.122$$

$$\mu_{CD} = -\frac{83.3}{491.4} = -0.170$$

$$\mu_{CF} = -\frac{102.4}{491.4} = -0.208$$

D:

$$\mu_{DB} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{60.0 + 62.5 + 164.0 + 83.3} = -0.081$$

$$\mu_{DE} = -\frac{62.5}{739.6} = -0.084$$

$$\mu_{DG} = -\frac{164.0}{739.6} = -0.222$$

$$\mu_{DC} = -\frac{83.3}{739.6} = -0.113$$

E:

$$\mu_{ED} = -\frac{1}{2} \frac{62.5}{62.5 + 102.4} = -0.190$$

$$\mu_{EH} = -\frac{102.4}{164.9} = -0.310$$

Coefficientes de desplazamiento

$$\gamma_{AC} = \gamma_{BD} = -\frac{3}{2} \frac{60.0}{60.0 + 60.0} = -0.750$$

$$\gamma_{CF} = \gamma_{EH} = -\frac{3}{2} \frac{102.4}{102.4 + 164.0 + 102.4} = -0.416$$

$$\gamma_{DG} = -\frac{3}{2} \frac{164.0}{368.8} = -0.668$$

Comprobación

$$2(-0.416) - 0.668 = -1.500 \quad \beta$$

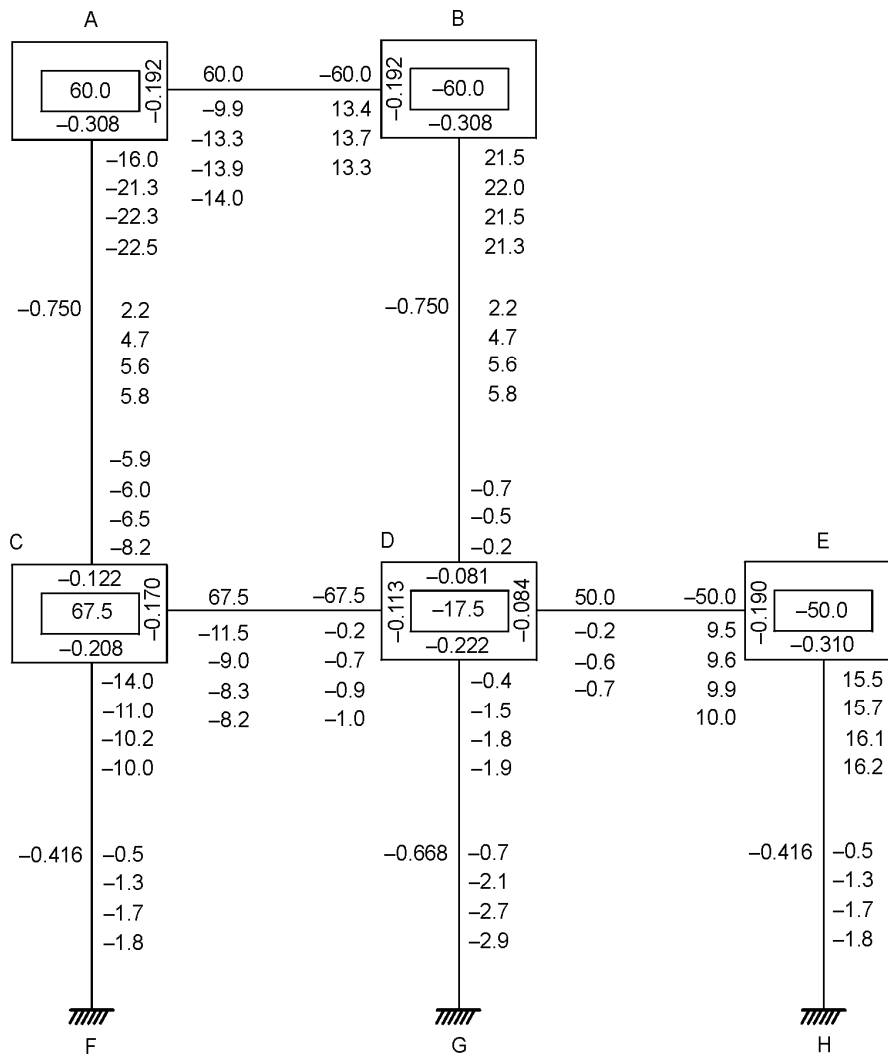
Momentos de empotramiento

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = \frac{20 \times 36}{12} = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{15 \times 36}{12} + \frac{30 \times 6}{8} = 67.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DE}^F = -M_{ED}^F = \frac{50 \times 8}{8} = 50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Estos valores se llevan al cuadro siguiente, se calculan los momentos de fijación y se efectúa el proceso.



Primer ciclo

Se escoge esta secuencia: C, A, B, E, D y se hallan los momentos de giro.

$$M_{CD}^0 = -0.170 (67.5) = -11.5$$

$$\begin{aligned}
M_{CF}^0 &= -0.208 (67.5) = -14.0 \\
M_{CA}^0 &= -0.122 (67.5) = -8.2 \\
M_{AC}^0 &= -0.308 (60.0 - 8.2) = -16.0 \\
M_{AB}^0 &= -0.192 (51.8) = -9.9 \\
M_{BA}^0 &= -0.192 (-60.0 - 9.9) = 13.4 \\
M_{BD}^0 &= -0.308 (-69.9) = 21.5 \\
M_{EH}^0 &= -0.310 (-50.0) = 15.5 \\
M_{ED}^0 &= -0.190 (-50.0) = 9.5 \\
M_{DE}^0 &= -0.084 (-17.5 + 21.5 + 9.5 - 11.5) = -0.2 \\
M_{DG}^0 &= -0.222 (2.0) = -0.4 \\
M_{DC}^0 &= -0.113 (2.0) = -0.2 \\
M_{DB}^0 &= -0.081 (2.0) = -0.2
\end{aligned}$$

ahora se encuentran los momentos por desplazamiento:

$$\begin{aligned}
M_{AC}'' &= M_{BD}'' = -0.750 (-16.0 - 8.2 + 21.5 - 0.2) = 2.2 \\
M_{CF}'' &= M_{EH}'' = -0.416 (-14.0 - 0.4 + 15.5) = -0.5 \\
M_{DG}'' &= -0.668 (1.1) = -0.7
\end{aligned}$$

Segundo ciclo

Siguiendo la misma secuencia:

$$\begin{aligned}
M_{CD}^0 &= -0.170 (67.5 - 16.0 - 0.2 + 2.2 - 0.5) = -9.0 \\
M_{CF}^0 &= -0.208 (53.0) = -11.0 \\
M_{CA}^0 &= -0.122 (53.0) = -6.5 \\
M_{AC}^0 &= -0.308 (60.0 + 13.4 - 6.5 + 2.2) = -21.3 \\
M_{AB}^0 &= -0.192 (69.1) = -13.3 \\
M_{BA}^0 &= -0.192 (-60.0 - 13.3 - 0.2 + 2.2) = 13.7 \\
M_{BD}^0 &= -0.308 (-71.3) = 22.0 \\
M_{EH}^0 &= -0.310 (-50.0 - 0.2 - 0.5) = 15.7
\end{aligned}$$

$$M_{ED}^0 = -0.190 (-50.7) = 9.6$$

$$M_{DE}^0 = -0.084 (-17.5 + 22.0 + 9.6 - 9.0 + 2.2 - 0.7) = -0.6$$

$$M_{CD}^0 = -0.222 (6.6) = -1.5$$

$$M_{DC}^0 = -0.113 (6.6) = -0.7$$

$$M_{DB}^0 = -0.081 (6.6) = -0.5$$

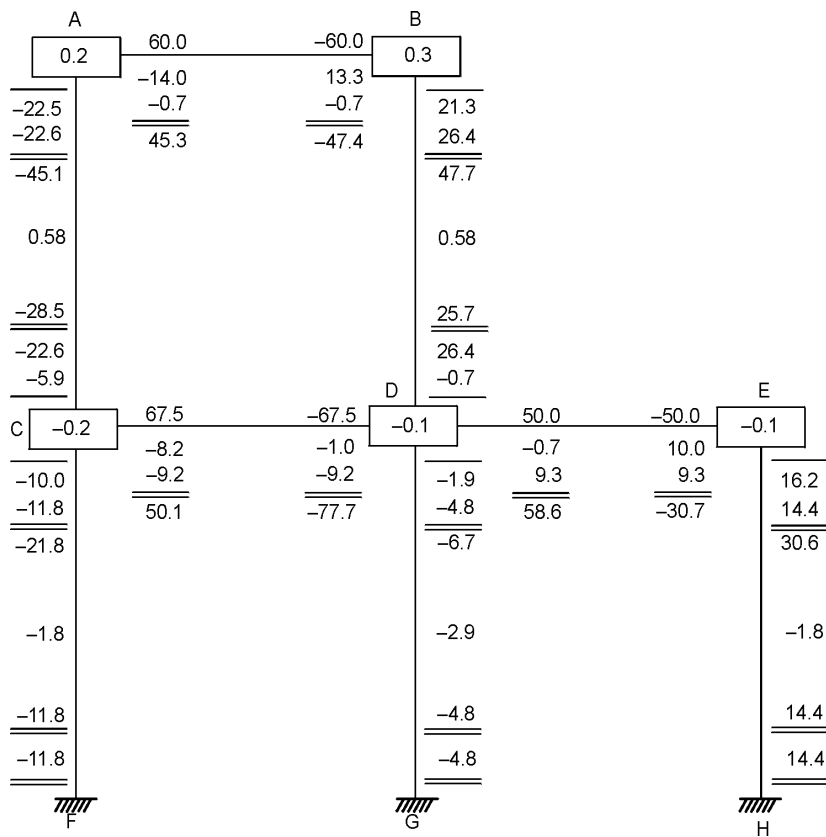
y los momentos por desplazamiento:

$$M_{AC}'' = M_{BD}'' = -0.750 (-21.3 - 6.5 + 22.0 - 0.5) = 4.7$$

$$M_{CF}'' = M_{EH}'' = -0.416 (-11.0 - 1.5 + 15.7) = -1.3$$

$$M_{DG}'' = -0.668 (3.2) = -2.1$$

con dos ciclos más se obtiene adecuada convergencia y se pueden calcular los momentos definitivos, como se indica en seguida:



En el cuadro se puede observar que el error de cierre máximo en los nudos es de 0.3 kN·m y para el piso superior:

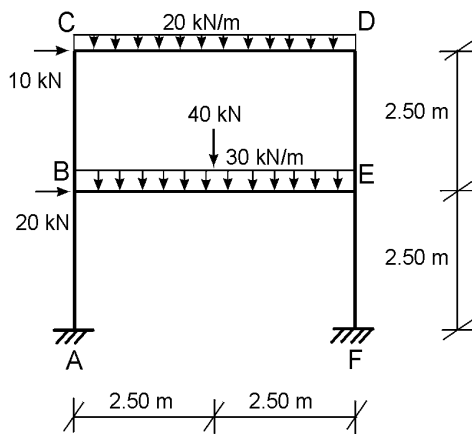
$$\sum H_1 = \frac{-45.1 - 28.5 + 47.7 + 25.7}{2.5} = -0.08 \text{ kN} \approx 0 \quad \beta$$

y para el piso inferior:

$$\sum H_2 = \frac{-21.8 - 11.8 - 6.7 - 4.8 + 30.6 + 14.4}{2.5} = -0.04 \text{ kN} \approx 0 \quad \beta$$

Ejemplo 7.4

Resuelva el pórtico mostrado.



Vigas: 400 × 400 mm

Columnas del 2° piso: 350 × 350 mm

Columnas del 1^{er}. piso: 400 × 400 mm

Solución

Cálculo de rigideces relativas

$$K_{CD} = K_{BE} = \frac{4 \times (4)^3}{5} = 51.2$$

$$K_{CB} = K_{DE} = \frac{(3.5)^4}{2.5} = 60.0$$

$$K_{AB} = K_{EF} = \frac{(4)^4}{2.5} = 102.4$$

Coefficientes de giro

$$\mu_{CD} = \mu_{DC} = -\frac{1}{2} \frac{51.2}{51.2 + 60.0} = -0.230$$

$$\mu_{CB} = \mu_{DE} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{111.2} = -0.270$$

$$\mu_{BC} = \mu_{ED} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{60.0 + 51.2 + 102.4} = -0.140$$

$$\mu_{BE} = \mu_{EB} = -\frac{1}{2} \frac{51.2}{213.6} = -0.120$$

$$\mu_{BA} = \mu_{EF} = -\frac{1}{2} \frac{102.4}{213.6} = -0.240$$

Coeficientes de desplazamiento

$$\gamma_{CB} = \gamma_{DE} = -\frac{3}{2} \frac{60.0}{60.0 + 60.0} = -0.750$$

$$\gamma_{AB} = \gamma_{EF} = -\frac{3}{2} \frac{102.4}{102.4 + 102.4} = -0.750$$

Momentos de empotramiento

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{20 \times 25}{12} = 41.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE}^F = -M_{EB}^F = \frac{30 \times 25}{12} + \frac{40 \times 5}{8} = 87.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momentos de piso

$$(M_{PK})_I = -\frac{2.5 \times 10}{3} = -8.33 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(M_{PK})_{II} = -\frac{2.5 \times (10 + 20)}{3} = -25.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con estos valores se procede a construir el cuadro iterativo de la página 295 de acuerdo con la secuencia B, C, D, E.

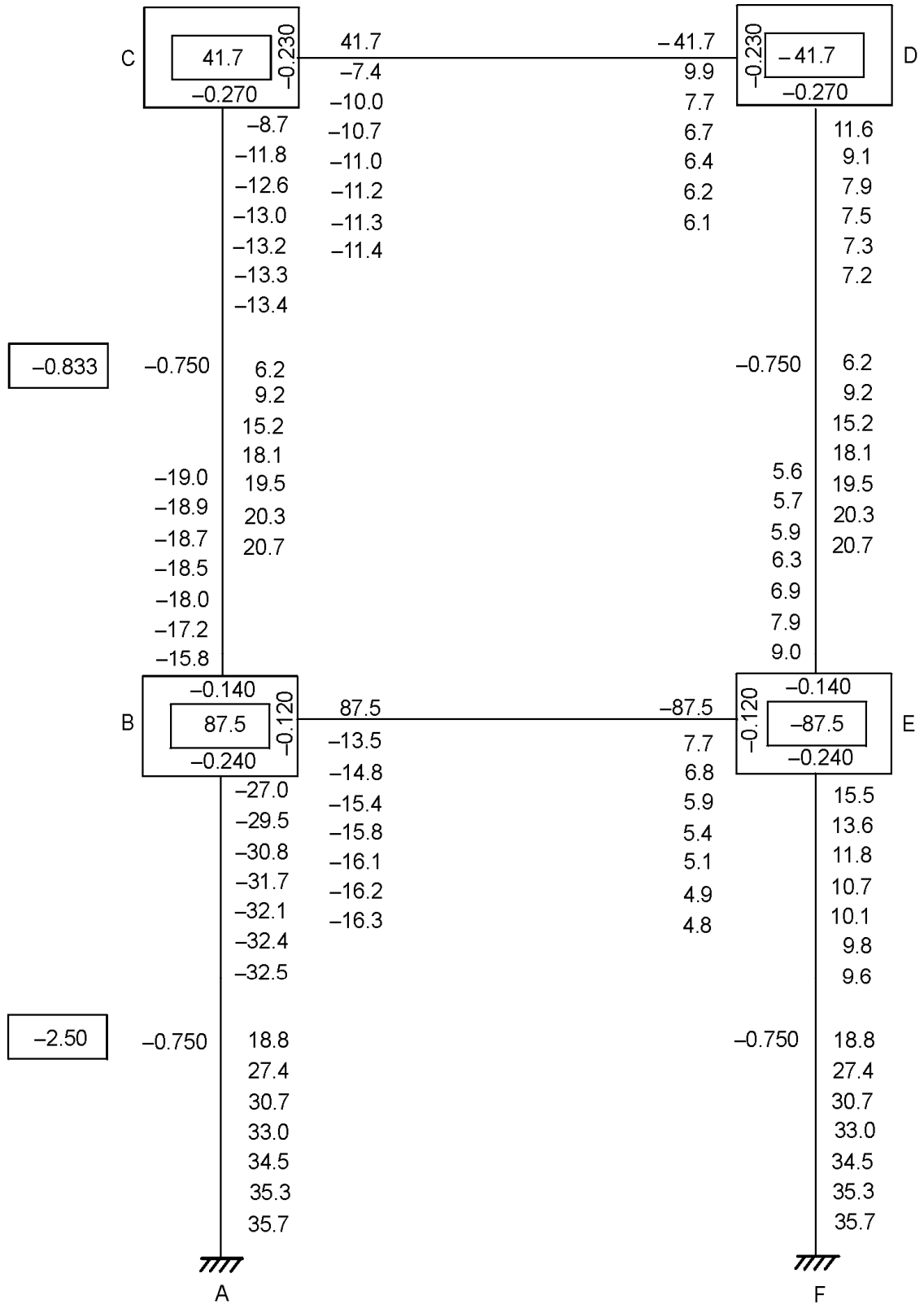
Suspendiendo al cabo de siete iteraciones, se obtiene un error de cierre máximo en los nudos de 0.3 kN·m. En cuanto al equilibrio de fuerzas horizontales:

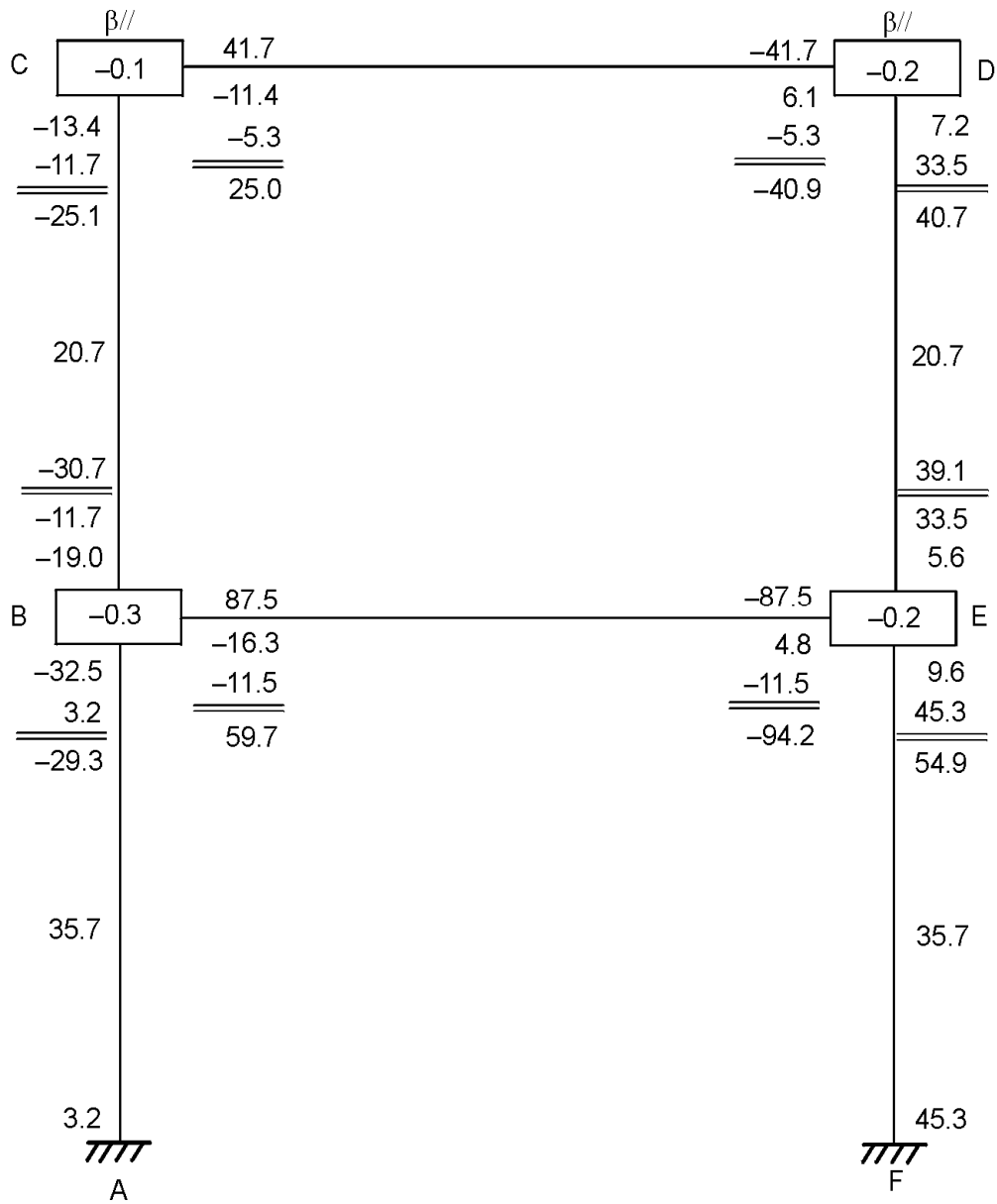
$$\sum Q_{2^\circ \text{ Piso}} = \frac{-25.1 - 30.7 + 40.7 + 39.1}{2.5} = 9.6 \text{ kN} \leftarrow \text{ vs } 10.0 \text{ kN} \rightarrow$$

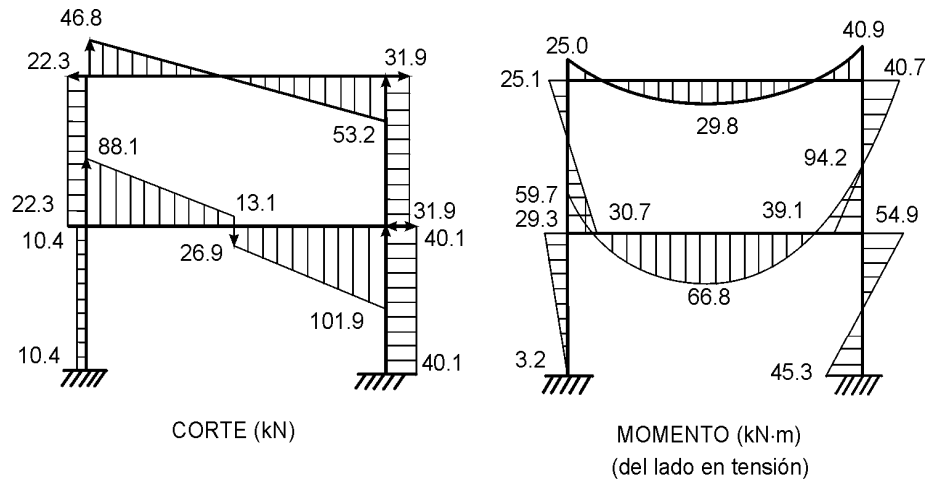
$$\sum Q_{1^\circ \text{ Piso}} = \frac{-29.3 + 3.2 + 54.9 + 45.3}{2.5} = 29.6 \text{ kN} \leftarrow \text{ vs } 30.0 \text{ kN} \rightarrow$$

o sea un error máximo de cierre del 4%.

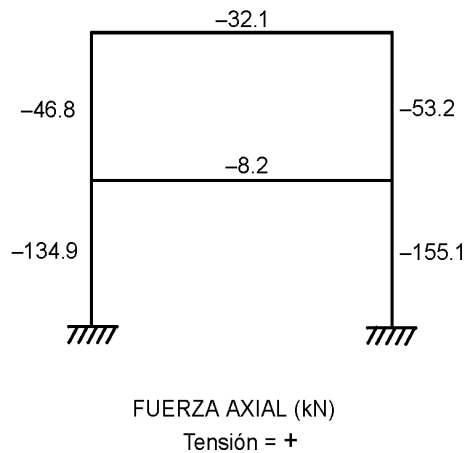
En la página 297 se presentan los diagramas correspondientes de corte, momento y fuerza axial.







CORTE (kN)

MOMENTO (kN-m)
(del lado en tensión)FUERZA AXIAL (kN)
Tensión = +

7.6 PÓRTICOS CON DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DE LOS NUDOS Y COLUMNAS ARTICULADAS EN LA BASE

Cuando una estructura tiene sus columnas articuladas en la base y sufre desplazamientos horizontales, las ecuaciones (7.28) no son aplicables en el primer piso, ya que no tienen en cuenta la no existencia de momentos de desplazamiento en el extremo inferior de las columnas respectivas.

Planteando el equilibrio en los nudos superiores de las columnas y reemplazando éstas por otras equivalentes con unos K' iguales a las tres cuartas partes de los K originales se llega como antes a la expresión:

$$M_{ij}^0 = \mu_{ij} \left[\bar{M}_i + \sum_{(i)} M_{ji}^0 + \sum_{(i)} M_{ij}'' \right]$$

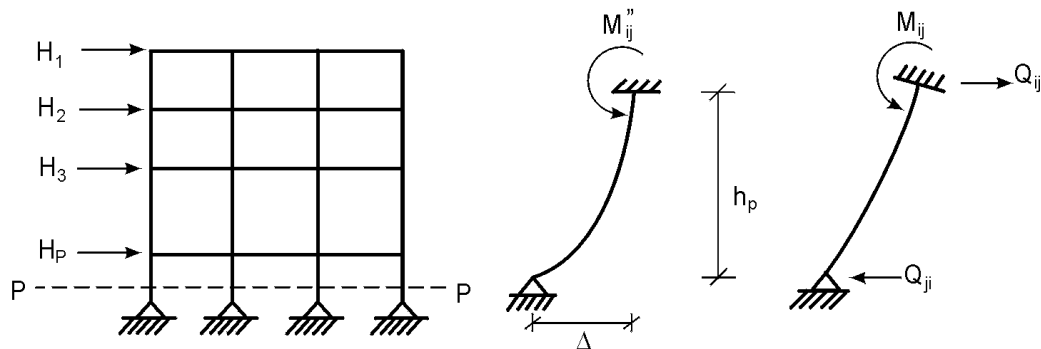


Figura 7.4 Pórtico con columnas articuladas en la base.

Observando ahora la figura 7.4 se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^P H_i = \sum_{(P)} Q_{ji}$$

$$Q_{ji} = Q_{ij} = \frac{M_{ij}}{h_{ij}} \quad (7.31)$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^P H_i = \sum_{(P)} \left[\frac{M}{h} \right]_{ij}$$

y si todas las columnas tienen la misma altura:

$$h_p \sum_{i=1}^P H_i = \sum_{(P)} M_{ij} \quad (7.32)$$

Ahora bien, para las columnas y por estar utilizando la simplificación, las ecuaciones (7.13) y (7.14) se reducen a:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 2M_{ij}^0 + M_{ij}'' \quad (7.33)$$

ya que $M_{ij}^0 = 0$.

Reemplazando este valor en la ecuación (7.32), se obtiene:

$$h_p \sum_{i=1}^P H_i = \sum_{(P)} M_{ij}^F + 2 \sum_{(P)} M_{ij}^0 + \sum_{(P)} M_{ij}''$$

y despejando:

$$\sum_{(P)} M_{ij}'' = - \left[\sum_{(P)} M_{ij}^F - h_p \sum_{i=1}^P H_i + 2 \sum_{(P)} M_{ij}^0 \right]$$

que se puede reescribir así:

$$\sum_{(P)} M_{ij}'' = -2 \left[\frac{\sum_{(P)} M_{ij}^F - h_p \sum_{i=1}^P H_i}{2} + \sum_{(P)} M_{ij}^0 \right] \quad (7.34)$$

Para elementos prismáticos con un extremo articulado:

$$M_{ij}'' = \left[\frac{3EI}{h^2} \Delta \right]_{ij} \quad (7.35)$$

Por consiguiente, si todas las columnas del primer piso están en la misma condición:

$$\frac{M_{ij}''}{\sum_{(P)} M_{ij}''} = \frac{\frac{K_{ij}}{h_n}}{\sum_{(P)} \frac{K_{ij}}{h_n}} = \frac{K_{ij}}{\sum_{(P)} K_{ij}}$$

$$h_p$$

y por la ecuación (7.34):

$$M_{ij}'' = -\frac{2K_{ij}}{\sum_{(P)} K_{ij}} \left[\frac{\sum_{(P)} M_{ij}^F - h_p \sum_{i=1}^P H_i}{2} + \sum_{(P)} M_{ij}^0 \right] \quad (7.36)$$

Esta ecuación se puede asimilar a la ecuación (7.28a) si se redefinen los coeficientes de desplazamiento y momentos de piso como sigue:

$$\gamma_{ij}^0 = -\frac{2K_{ij}}{\sum_{(P)} K_{ij}} \quad (7.37)$$

$$M_{PKA} = -\frac{h_p \sum_{i=1}^P H_i}{2} \quad (7.38)$$

Se tiene entonces:

$$M_{ij}'' = \gamma_{ij}^0 \left[M_{PKA} + \sum_{(P)} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \right] \quad (7.39)$$

que tiene la misma forma de la que se aplica a los otros pisos.

Comparando esta expresión con la de la ecuación (7.29) se ve que para hacerlas iguales basta tomar una altura equivalente del primer piso h_p' tal que:

$$h_p' = \frac{3}{2} h_p \quad (7.40)$$

$$M_{PKA} = -\frac{(2/3) h_p' \sum_{i=1}^P H_i}{2} = -\frac{h_p' \sum_{i=1}^P H_i}{3} \quad (7.41)$$

que concuerda con lo establecido por Kani siguiendo otro enfoque.

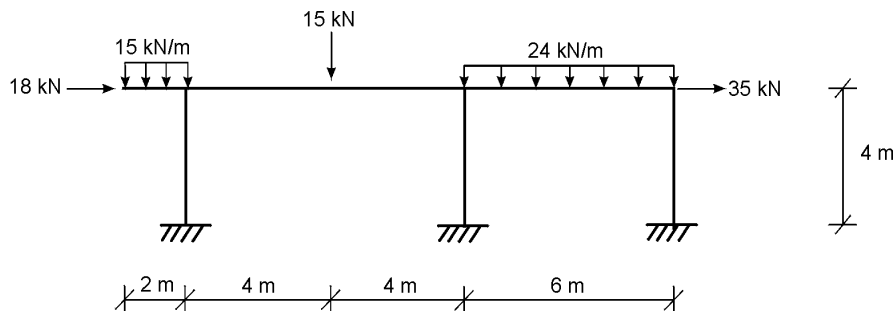
7.7 PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE KANI APLICADO A PÓRTICOS ORTOGONALES

El método de Kani se puede programar fácilmente para el caso de pórticos ortogonales, siguiendo los mismos pasos utilizados para el Cross alterno. El criterio de convergencia en el proceso interactivo ya no es el equilibrio de momentos de un nudo y de fuerzas horizontales en un piso, sino que la diferencia entre los momentos de giro y de desplazamiento en un ciclo dado, calculados con las ecuaciones (7.17) y (7.28), y los valores correspondientes en el ciclo inmediatamente anterior, sea inferior a una cantidad muy pequeña establecida de antemano.

Una vez lograda dicha convergencia se aplican las ecuaciones (7.13) y (7.14) a cada miembro de la estructura y se evalúan los cortes en vigas y columnas y las fuerzas axiales en estas últimas con las mismas instrucciones del programa de Cross dado en el disco incluido. El lector interesado podrá modificar dicho programa para convertirlo, con muy poco esfuerzo, en uno que resuelva pórticos por el método de Kani. Para esto podrá ayudarse con el algoritmo presentado en la referencia 7.3.

EJERCICIOS

- 7.1 Resuelva por el método de Kani las vigas de los ejercicios 5.2 y 5.3.
- 7.2 Analice mediante el método de Kani los pórticos siguientes. Evalúe giros y desplazamientos.

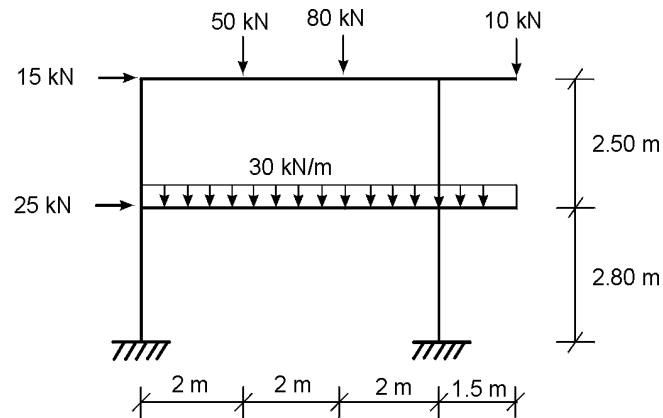


Dimensiones ($b \times h$)

Viga:	300 mm \times 400 mm
Columnas externas:	300 mm \times 300 mm
Columna central:	300 mm \times 400 mm

$$E = 20 \text{ kN/mm}^2$$

(a)



Dimensiones ($b \times h$, mm)

Vigas: 300×350

Columnas: 300×300

$E = 19 \text{ kN/mm}^2$

(b)

- (c) El pórtico del ejercicio 6.5 (b) suponiendo empotrada la columna izquierda.
 (d) El pórtico del ejercicio 6.5 (c).

REFERENCIAS

- 7.1 Kani, G.- *Cálculo de pórticos de varios pisos*, Editorial Reverté, 1958.
 7.3 Takabeya, F.- *Estructuras de varios pisos*, Compañía Editorial Continental, S.A., CECOSA, 1976.
 7.4 Uribe, J.- *Microcomputadores en ingeniería estructural*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia y ECOE Ediciones, 1995.

8.1 INTRODUCCIÓN

Se mencionó anteriormente que otro de los métodos con amplia aceptación en nuestro medio es el de Takabeya, dado a conocer en París en 1938, y del cual sólo apareció una versión inglesa en 1965, seguida por una alemana en el mismo año. La primera versión española fue publicada en 1969 (referencia 8.1).

Como se pudo observar en los artículos anteriores, los métodos de Cross y Kani resultan excesivamente largos y laboriosos para edificios altos. En cambio, Takabeya con su método pudo analizar un pórtico de 200 pisos y 30 luces en 78 horas con sólo calculadora, tiempo considerado *realmente corto para un problema tan complicado (ibíd)*.

La esencia del método consiste en encontrar, por aproximaciones sucesivas, los giros de los nudos y los desplazamientos de los pisos, en lugar de los momentos debidos a ellos, con lo cual se disminuye considerablemente el número de operaciones. Esto lo hace sumamente útil incluso hoy en día, con el auge de la computación electrónica. Una vez obtenida la convergencia en giros y desplazamientos, se procede a evaluar los momentos definitivos mediante las ecuaciones de ángulos de giro y deflexión.

8.2 ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTO

Para deducir las ecuaciones requeridas por el proceso iterativo, se parte como antes de las ecuaciones de giro y deflexión. En el caso de estructuras sin desplazamiento, éstas se reducen a:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 4EK_{ij}\theta_i + 2EK_{ij}\theta_j \quad (8.1a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + 2EK_{ij}\theta_i + 4EK_{ij}\theta_j \quad (8.1b)$$

en que todos los términos tienen el mismo significado visto anteriormente.

Por conveniencia se define:

$$k_{ij} = \frac{K_{ij}}{C} \quad (8.2)$$

en donde C es una constante de proporcionalidad que permite trabajar con valores relativos. Las ecuaciones (8.1) se pueden reescribir entonces, así:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 4Ek_{ij}C\theta_i + 2Ek_{ij}C\theta_j \quad (8.3a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + 2Ek_{ij}C\theta_i + 4Ek_{ij}C\theta_j \quad (8.3b)$$

Definiendo ahora rotaciones relativas:

$$\phi_i = 2EC\theta_i \quad (8.4a)$$

$$\phi_j = 2EC\theta_j \quad (8.4b)$$

es posible reducir las a:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + k_{ij}(2\phi_i + \phi_j) \quad (8.5a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + k_{ij}(\phi_i + 2\phi_j) \quad (8.5b)$$

que servirán de base para la deducción de la ecuación de iteración buscada. En efecto, al aplicarle a un nudo i de la estructura la condición de equilibrio $\sum_{(i)} M_{ij} = 0$, resulta:

$$0 = \sum_{(i)} M_{ij}^F + 2\phi_i \sum_{(i)} k_{ij} + \sum_{(i)} (k_{ij}\phi_j)$$

de la cual se puede despejar la rotación relativa del nudo i :

$$\phi_i = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2\sum_{(i)} k_{ij}} - \sum_{(i)} \frac{k_{ij}}{2\sum_{(i)} k_{ij}} \phi_j \quad (8.6)$$

Se puede ver que en esta ecuación el primer término es constante para cada nudo y , en consecuencia, el segundo representa las correcciones debidas a los giros de los extremos alejados del nudo, de las barras que concurren a él. Para simplificar la nomenclatura se definen:

$$\phi_i^0 = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2\sum_{(i)} k_{ij}} \quad (8.7)$$

y

$$\mu_{ij} = -\frac{k_{ij}}{2\sum_{(i)} k_{ij}} \quad (8.8)$$

observando que esta última ecuación es equivalente a la que define los *coeficientes de giro* en el método de Kani. La ecuación (8.6) se puede entonces escribir así:

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(i)} (\mu_{ij}\phi_j) \quad (8.9)$$

que constituye la ecuación de iteración buscada. Para aplicarla se siguen estos pasos, que son básicamente los del método de Kani con ligeras modificaciones:

1. Evalúense los coeficientes de giro μ_{ij} y momentos de empotramiento M_{ij}^F .
2. Calcúlense los giros relativos iniciales de cada nudo ϕ_i^0 mediante la ecuación (8.7). Llévense estos valores a un esquema adecuado.
3. Adóptese una secuencia de recorrido de los nudos. Si se está trabajando a mano, para acelerar la convergencia conviene empezar por el de mayor giro inicial.
4. Aplíquese a cada nudo la ecuación (8.9) y escríbanse en el diagrama los resultados obtenidos, que constituyen para el ciclo los valores de ϕ_i . Obsérvese que estos valores corresponden a los ϕ_j al pasar a los nudos opuestos.
5. Una vez recorridos todos los nudos se tiene concluido un ciclo. Se repite el paso 4 una y otra vez hasta obtener convergencia en todos los nudos.
6. Finalmente aplíquense las ecuaciones (8.5) a todos los elementos para obtener los momentos definitivos en cada uno de sus extremos. Las rotaciones verdaderas ϕ_i se pueden obtener despejando su valor en la ecuación (8.4a).

Todo el proceso se ilustrará posteriormente con un ejemplo, ya resuelto por los métodos de Cross y Kani, con el fin de facilitar su comparación.

8.3 SIMPLIFICACIÓN POR EXTREMO ARTICULADO

Lo mismo que en los métodos de Cross y Kani, conviene buscar una simplificación para el caso frecuente de extremo articulado. Por analogía con dichos métodos, se puede esperar que baste emplear rigideces relativas ficticias, iguales a tres cuartas partes de las reales, y los valores de momento de empotramiento correspondientes al extremo opuesto articulado. Para confirmarlo se presenta la siguiente demostración.

Suponiendo que i represente el nudo restringido y j el nudo articulado, al aplicarle a éste la ecuación (8.5b) resulta:

$$M_{ji}^0 = M_{ji}^F + k_{ij}(2\phi_j + \phi_i) = 0$$

y despejando el valor de ϕ_j :

$$\phi_j = -\frac{M_{ij}^F}{2k_{ij}} - \frac{\phi_i}{2} \quad (8.10)$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación (8.5a), resulta:

$$M_{ij}^0 = M_{ij}^F + k_{ij} \left(2\phi_i - \frac{M_{ji}^F}{2k_{ij}} - \frac{\phi_i}{2} \right)$$

y reagrupando sus términos:

$$M_{ij}^0 = \left(M_{ij}^F - \frac{M_{ji}^0}{2} \right) + k_{ij} (1.5\phi_i) \quad (8.11)$$

Ahora bien, se ve que el primer término entre paréntesis no es otra cosa que el momento de empotramiento verdadero para extremo opuesto articulado*:

$$M_{ij}^{F0} = M_{ij}^F - \frac{M_{ji}^F}{2} \quad (8.12)$$

Por otra parte, si se define:

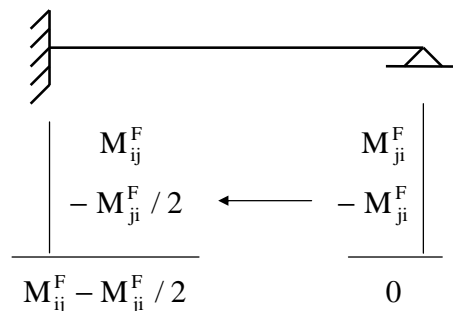
$$k'_{ij} = \frac{3}{4}k_{ij} \quad (8.13)$$

la ecuación (8.11) se puede reescribir así:

$$M_{ij}^0 = M_{ij}^{F0} + k'_{ij} (2\phi_i) \quad (8.14)$$

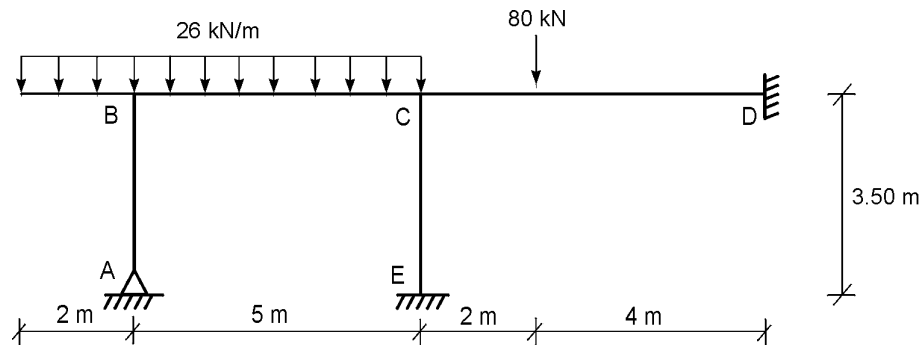
Comparándola con la ecuación (8.5a), se ve que para que sean equivalentes ϕ_j debe valer cero, o lo que es lo mismo, basta con ignorar las rotaciones de los extremos articulados para poder seguir usando la ecuación (8.9) en el proceso iterativo. Lógicamente se deberá usar la ecuación (8.14) para evaluar los momentos en los extremos restringidos de dichos miembros especiales.

* Demostración:



Ejemplo 8.1

Analice el pórtico mostrado utilizando el método de Takabeya. La viga es de 300 mm × 500 mm y las columnas de 300 mm × 300 mm. En A el apoyo es articulado. Este pórtico se había resuelto en el ejemplo 6.5.



Solución

PRIMER PASO

Rigideces relativas

$$k_{BC} = \frac{0.3 \times (0.5)^3}{5} = 75 \times 10^{-4} \quad k_{AB} = k_{CE} = \frac{0.3 \times (0.3)^3}{3.5} = 23.1 \times 10^{-4}$$

$$k_{CD} = \frac{0.3 \times (0.5)^3}{6} = 62.5 \times 10^{-4}$$

Para utilizar la simplificación del extremo articulado:

$$k'_{AB} = \frac{3}{4} k_{AB} = \frac{3}{4} (23.1 \times 10^{-4}) = 17.3 \times 10^{-4}$$

Coefficientes de giro

$$\mu_{ij} = -\frac{k_{ij}}{2 \sum_{(i)} k_{ij}} \quad \rightarrow \quad \mu_{BA} = -\frac{1}{2} \frac{17.3}{17.3 + 75} = -0.094$$

similarmente se obtienen:

$$\mu_{BC} = -0.406 \quad \rightarrow \quad \sum_B \mu = -0.500$$

$$\mu_{CB} = -0.233 \quad \mu_{CD} = -0.195$$

$$\mu_{CE} = -0.072 \quad \rightarrow \quad \sum_C \mu = -0.500$$

Momentos de empotramiento

Se evalúan igual que antes (páginas 215 y 216).

$$M_{vol}^F = -52.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = 54.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD}^F = 71.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC}^F = -35.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

SEGUNDO PASO

Giros relativos iniciales

Por la ecuación (8.7):

$$\phi_i^0 = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2 \sum_{(i)} k_{ij}}$$

$$\rightarrow \phi_B^0 = -\frac{-52.0 + 54.2}{2 (75 + 17.3) \times 10^{-4}} = -119.2$$

$$\phi_C^0 = -\frac{-54.2 + 71.1}{2 (75 + 62.5 + 23.1) \times 10^{-4}} = -526.2$$

TERCER PASO

Se adopta la secuencia B \rightarrow C.

CUARTO Y QUINTO PASOS

Proceso iterativo

Con estos valores se inicia el proceso iterativo y los resultados se van colocando en el diagrama siguiente:

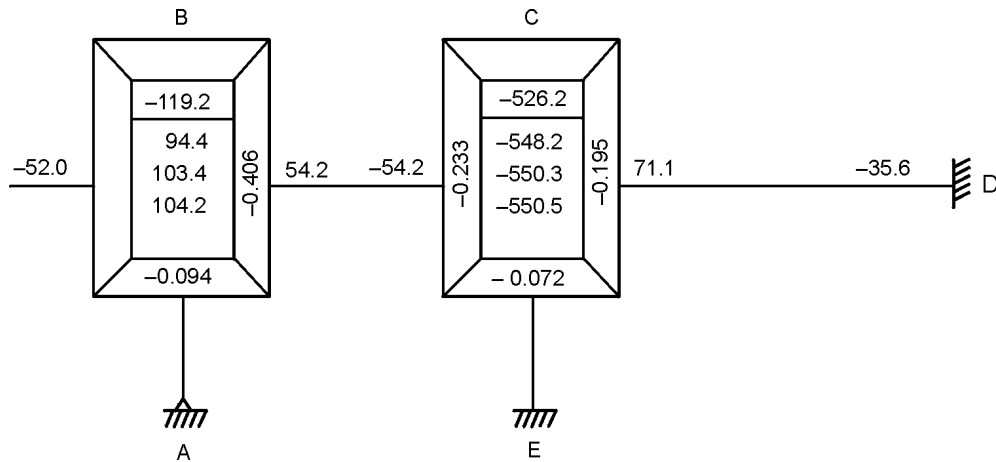
Por la ecuación (8.9):

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(i)} (\mu_{ij} \phi_j)$$

Primer ciclo

$$\phi_B = -119.2 + (-0.406) (-526.2) = 94.4$$

$$\phi_C = -526.2 + (-0.233) (94.4) = -548.2$$



Obsérvese que no se tuvo en cuenta la rotación en A, por estar empleando la simplificación.

Segundo ciclo

$$\phi_B = -119.2 + (-0.406)(-548.2) = 103.4$$

$$\phi_C = -526.2 + (-0.233)(103.4) = -550.3$$

Tercer ciclo

$$\phi_B = -119.2 + (-0.406)(-550.3) = 104.2$$

$$\phi_C = -526.2 + (-0.233)(104.2) = -550.5$$

En el siguiente ciclo, para una precisión de tres cifras significativas se volverían a obtener los mismos resultados, y por consiguiente se suspende ahí el proceso iterativo.

SEXTO PASO

Cálculo de momentos definitivos

Para evaluar los momentos definitivos en los extremos de los miembros se aplica la ecuación (8.5a):

$$M_{ij} = M_{ij}^F + k_{ij} (2\phi_i + \phi_j)$$

Por consiguiente:

$$M_{BA} = 0 + 17.3 \times 10^{-4} (2 \times 104.2) = 0.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 54.2 + 75 \times 10^{-4} (2 \times 104.2 - 550.5) = 51.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Verificación:

$$\sum M_B = -52.0 + 0.4 + 51.6 = 0.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

De nuevo obsérvese que por estar utilizando la simplificación, el giro en A se tomó como si fuera cero (ecuación 8.14).

$$M_{CB} = -54.2 + 75 \times 10^{-4} [2 \times (-550.5) + 104.2] = -61.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 71.1 + 62.5 \times 10^{-4} [2 \times (-550.5) + 0] = 64.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CE} = 0 + 23.1 \times 10^{-4} [2 \times (-550.5) + 0] = -2.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Verificación:

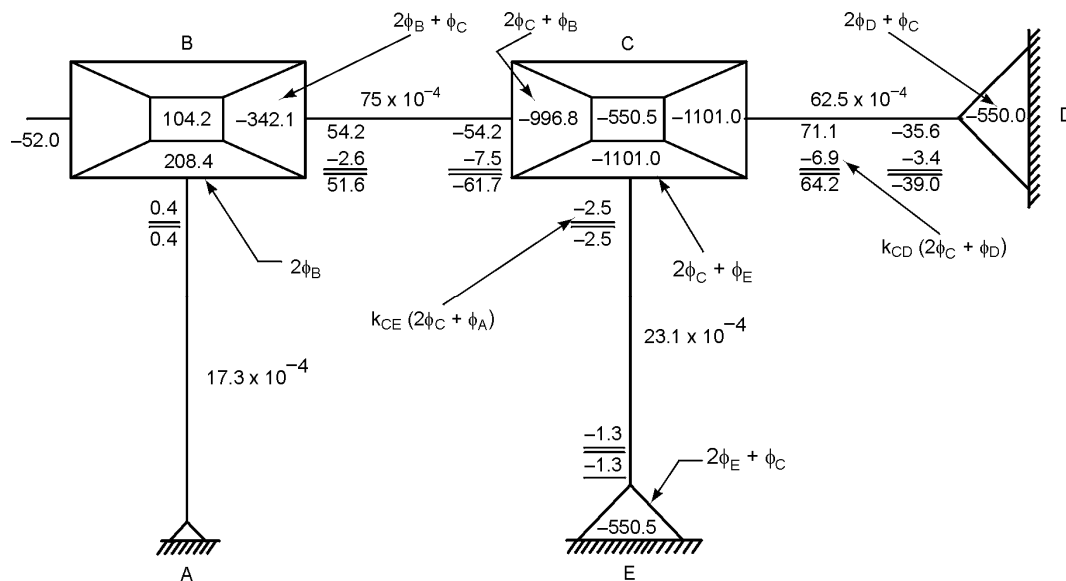
$$\sum M_C = -61.7 + 64.2 - 2.5 = 0.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EC} = 0 + 23.1 \times 10^{-4} [2 \times (0) - 550.5] = -1.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DC} = -35.6 + 62.5 \times 10^{-4} [2 \times (0) - 550.5] = -39.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Como era de esperarse, estos valores coinciden con los obtenidos antes por Cross; por eso se omiten el cálculo de reacciones y la verificación del equilibrio general.

En problemas resueltos manualmente, el cálculo de los momentos definitivos se puede sistematizar utilizando un cuadro similar al que sigue:



Para averiguar los giros verdaderos, en caso de necesitarlos, se procede así:

De la ecuación (8.4a):

$$\theta_i = \frac{\phi_i}{2EC}$$

y por la ecuación (8.2):

$$C = \frac{K_{ij}}{k_{ij}}$$

El valor de C es constante para todos los miembros, de ahí que baste considerar uno solo, por ejemplo el BC:

$$K_{BC} = \left[\frac{I}{L} \right] = \frac{0.3 \times (0.5)^3}{12 \times 5} = 6.25 \times 10^{-4}$$

$$C = \frac{6.25 \times 10^{-4}}{75 \times 10^{-4}} = \frac{1}{12}$$

Por tanto, si se supone $E = 190 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, resulta:

$$\theta_B = \frac{12\phi_B}{2E} = \frac{6 \times 104.2}{190 \times 10^5} = 3.29 \times 10^{-5} \text{ rad } \curvearrowright$$

$$\theta_C = \frac{6\phi_B}{E} = \frac{6 \times (-550.5)}{190 \times 10^5} = -1.738 \times 10^{-4} \text{ rad } \curvearrowleft$$

El valor de ϕ_A se puede obtener mediante la ecuación (8.10):

$$\phi_j = -\frac{M_{AB}^F}{2k_{AB}} - \frac{\phi_B}{2} = -\frac{\phi_B}{2}$$

Por consiguiente:

$$\theta_A = -\frac{\theta_B}{2} = -1.644 \times 10^{-5} \text{ rad } \curvearrowleft$$

8.4 ESTRUCTURAS CON DESPLAZAMIENTOS: SIN CARGAS HORIZONTALES O CON CARGAS HORIZONTALES APLICADAS EN LOS NUDOS

En el caso de una estructura con desplazamientos, los momentos definitivos en los extremos de los miembros están dados en general por las siguientes expresiones, conformes con las ecuaciones de *Ángulos de giro y deflexión*:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + 4EK_{ij}\theta_i + 2EK_{ij}\theta_j + 6EK_{ij}\frac{\Delta_{ij}}{L_{ij}} \quad (8.15a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + 2EK_{ij}\theta_i + 4EK_{ij}\theta_j + 6EK_{ij}\frac{\Delta_{ij}}{L_{ij}} \quad (8.15b)$$

Considerando ahora una columna en el piso n , localizada entre los niveles n y $n + 1$, utilizando los valores relativos k_{ij} , ϕ_i y ϕ_j definidos mediante las ecuaciones (8.2) y (8.3), y definiendo además:

$$\delta_{ij} = 6EC \frac{\Delta_{ij}}{h_{ij}} \quad (8.16)$$

en que:

δ_{ij} = desplazamiento relativo de los extremos de la columna ij, y
 h_{ij} = altura de la columna ij.

Las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + k_{ij} (2\phi_i + \phi_j + \delta_{ij}) \quad (8.17a)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + k_{ij} (2\phi_j + \phi_i + \delta_{ij}) \quad (8.17b)$$

en que el signo positivo del término δ_{ij} implica que el nivel n se ha desplazado hacia la derecha, con respecto al nivel n + 1.

Planteando ahora el equilibrio del nudo i, $\sum_{(i)} M_{ij} = 0$, se obtiene:

$$\sum_{(i)} M_{ij}^F + 2\phi_i \sum_{(i)} k_{ij} + \sum_{(i)} (k_{ij} \phi_j) + \sum_{(i)} (k_{ij} \delta_{ij}) = 0$$

de donde se puede despejar ϕ_i :

$$\phi_i = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2\sum_{(i)} k_{ij}} - \sum_{(i)} \frac{k_{ij}}{2\sum_{(i)} k_{ij}} \phi_j - \sum_{(i)} \frac{k_{ij}}{2\sum_{(i)} k_{ij}} \delta_{ij} \quad (8.18)$$

y recordando las definiciones de ϕ_i^0 y μ_{ij} dadas con las ecuaciones (8.7) y (8.8), la expresión anterior se reduce a:

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(i)} \mu_{ij} (\phi_j + \delta_{ij}) \quad (8.19)$$

con la que podemos llevar a cabo el proceso iterativo en cuanto a rotación de nudos se refiere.

Por otra parte, si se considera que las fuerzas horizontales están aplicadas únicamente en los niveles de placa, el equilibrio horizontal requiere que:

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{(n)} Q_{nq} \quad (8.20)$$

en donde:

$\sum_{i=1}^n H_i$ representa la fuerza de corte en el piso n, y
 Q_{nq} es el corte en el extremo inferior de la columna q del piso n,

como se indica en las siguientes figuras:

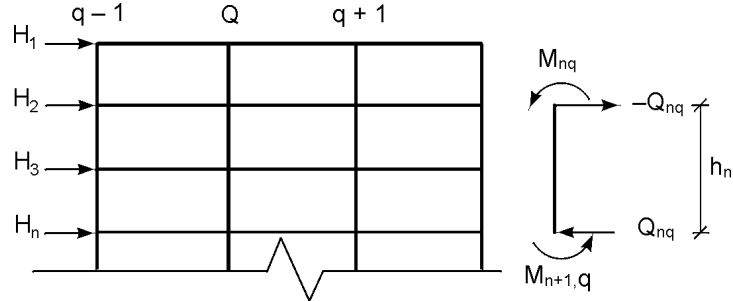


Figura 8.1 Equilibrio de fuerzas horizontales en el piso n.

Pero:

$$Q_{nq} = \frac{M_{nq} + M_{n+1,q}}{h_n} \quad (8.21)$$

y reemplazando estos valores en el lado derecho de la ecuación (8.20), resulta:

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{j=1}^m \frac{(M_{nj} + M_{n+1,j})}{h_n} \quad (8.22)$$

Si todas las columnas del piso tienen la misma altura, ésta se puede sacar de la suma y despejando:

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{j=1}^m (M_{nj} + M_{n+1,j})$$

Reemplazando en esta expresión los valores de las ecuaciones (8.17):

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{(n)} (M_{nj}^F + M_{n+1,j}^F) + \sum_{(n)} 3k_{ij} (\phi_i + \phi_j) + \sum_{(n)} 2k_{ij} \delta_{ij}$$

Cuando no hay cargas aplicadas directamente sobre las columnas, el primer sumando es cero y si todas las columnas son de igual altura, δ_{ij} es constante para el piso. Por tanto, la expresión anterior se puede reescribir así:

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{(n)} 3k_{ij} (\phi_i + \phi_j) + 2\delta_{ij} \sum_{(n)} k_{ij}$$

y despejando $\delta_n = \delta_{ij}$:

$$\delta_n = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{2 \sum_{(n)} k_{ij}} - \sum_{(n)} \frac{3}{2} \frac{k_{ij}}{\sum_{(n)} k_{ij}} (\phi_i + \phi_j) \quad (8.23)$$

Para simplificar la notación y por similitud con el método de Kani, se definen los desplazamientos relativos iniciales de piso δ_n^0 y coeficientes de desplazamiento de columnas γ_{ij} :

$$\delta_n^0 = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{2 \sum_{(n)} k_{ij}} \quad (8.24)$$

y

$$\gamma_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{k_{ij}}{\sum_{(n)} k_{ij}} \quad (8.25)$$

con lo cual la ecuación (8.23) se reduce a:

$$\delta_n = \delta_n^0 + \sum_{(n)} \gamma_{ij} (\phi_i + \phi_j) \quad (8.23a)$$

que constituye la ecuación iterativa para evaluar el desplazamiento relativo δ_n del piso n.

Cuando al finalizar el proceso no se obtiene balance perfecto en los nudos, se puede hacer un ajuste final repartiendo el momento de desbalance, proporcionalmente a las rigideces de las barras que concurren a él, o sea:

$$\text{Corrección } M_{ij} = \mu_{ij} \times \text{Momento de desbalance en } i$$

Naturalmente esto mismo puede hacerse con los métodos vistos con anterioridad.

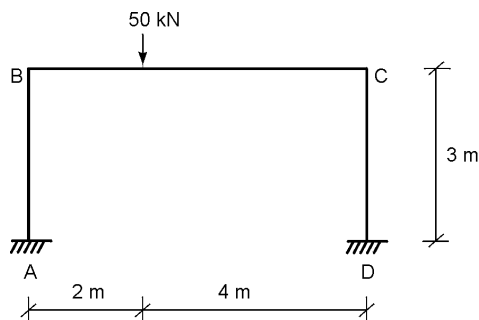
Resumiendo, en el caso de pórticos con desplazamiento se deben seguir estos pasos:

1. Evalúense los coeficientes de giro μ_{ij} , los de desplazamiento γ_{ij} y los momentos de empotramiento M_{ij}^F .
2. Calcúlense los giros relativos iniciales de cada nudo ϕ_i^0 mediante la ecuación (8.7) y los desplazamientos relativos iniciales de cada piso δ_n^0 , mediante la ecuación (8.24). Llévense estos valores a un esquema adecuado.
3. Adóptese una secuencia de recorrido de los nudos que facilite la sistematización de los cálculos.
4. Aplíquese a cada nudo la ecuación (8.19) y escríbanse en el diagrama los resultados obtenidos, que constituyen para el ciclo los valores de ϕ_i . Estos valores corresponden a los ϕ_j al pasar a los nudos opuestos.
5. Una vez recorridos todos los nudos procédase a evaluar todos los desplazamientos de piso con la ecuación (8.23a). Hecho esto, se habrá concluido un ciclo.
6. Repítanse los pasos 4 y 5 hasta obtener convergencia de ϕ_i en todos los nudos y de δ_n en todos los pisos.

7. Finalmente, aplíquense las ecuaciones (8.17) a todos los elementos para obtener los momentos definitivos en cada uno de sus extremos. Las rotaciones y desplazamientos de piso verdaderos ϕ_i y Δ_n se pueden despejar de las ecuaciones (8.4a) y (8.16), respectivamente.

Todo el proceso se ilustrará con los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 8.2 Analice por el método de TakabeYA el mismo pórtico del ejemplo 7.2.



Viga: 300×500 mm

Columnas: 300×300 mm

Solución

PRIMER PASO

Rigideces relativas

$$k_{AB} = k_{CD} = \frac{(0.3)^4}{3} = 27 \times 10^{-4} \quad k_{BC} = \frac{0.3 \times (0.5)^3}{6} = 62.5 \times 10^{-4}$$

Coefficientes de giro

$$\mu_{ij} = -\frac{k_{ij}}{2 \sum_{(i)} (k_{ij})}$$

$$\mu_{BA} = \mu_{CD} = -\frac{27}{2(27 + 62.5)} = -0.151$$

$$\mu_{BC} = \mu_{CB} = -\frac{62.5}{179} = -0.349$$

Coefficientes de desplazamiento

$$\gamma_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{k_{ij}}{\sum_{(n)} k_{ij}}$$

$$\gamma_{AB} = \gamma_{CD} = -\frac{3}{2} \left[\frac{27}{27 + 27} \right] = -0.750$$

Momentos de empotramiento

$$M_{BC}^F = \frac{50 \times 2 \times 16}{36} = 44.4 \text{ kN}\cdot\text{m}, \quad M_{CB}^F = \frac{50 \times 4 \times 4}{36} = -22.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

SEGUNDO PASO

Giros relativos iniciales

$$\phi_i^0 = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2 \sum_{(i)} k_{ij}}$$

$$\phi_B^0 = -\frac{44.4}{2(27 + 62.5) \times 10^{-4}} = -2483 \quad \phi_C^0 = -\frac{-22.2}{179 \times 10^{-4}} = 1242$$

Desplazamiento relativo inicial de piso

$$\delta_n^0 = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{2 \sum_{(n)} k_{ij}} \quad \rightarrow \quad \delta_1^0 = \frac{3 \times 0}{2 \times 54 \times 10^{-4}} = 0$$

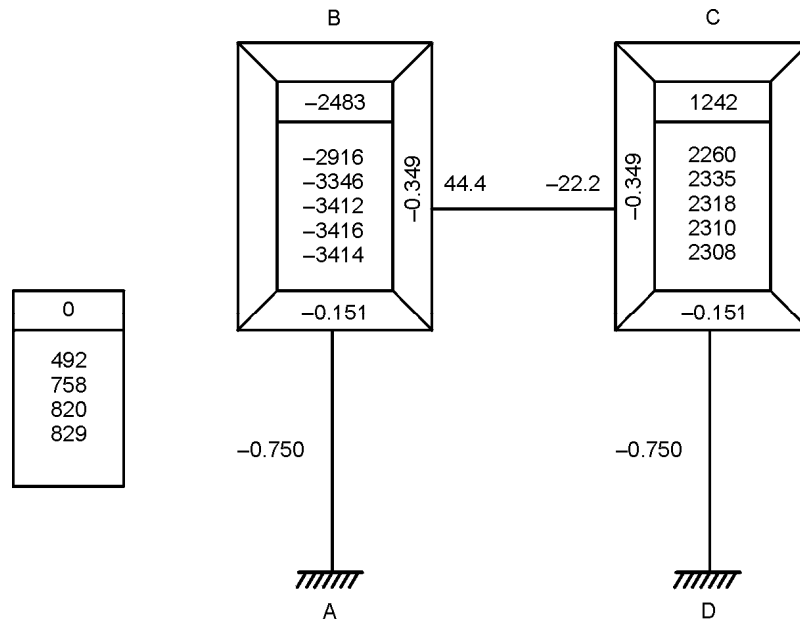
TERCER PASO

Se adopta la secuencia BC.

PASOS CUATRO A SEIS

Proceso iterativo

Con estos valores se inicia el proceso iterativo y los resultados se van poniendo en el siguiente diagrama:



Giros en los nudos

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(n)} \mu_{ij} (\phi_j + \delta_{ij})$$

Desplazamientos de piso

$$\delta_n = \delta_n^0 + \sum_{(n)} \gamma_{ij} (\phi_i + \phi_j)$$

Primer ciclo

$$\phi_B = -2483 + [-0.349 (1242) - 0.151 (0 + 0)] = -2916$$

$$\phi_C = 1242 + [-0.349 (-2916) - 0.151 (0 + 0)] = -2260$$

$$\delta = 0 + [-0.750 (-2916 + 2260)] = 492$$

Segundo ciclo

$$\phi_B = -2483 + [-0.349 (2260) - 0.151 (0 + 492)] = -3346$$

$$\phi_C = 1242 + [-0.349 (-3346) - 0.151 (0 + 492)] = 2335$$

$$\delta = 0 + [-0.750 (-3346 + 2335)] = 758$$

Tercer ciclo

$$\phi_B = -2483 + [-0.349 (2335) - 0.151 (758)] = -3412$$

$$\phi_C = 1242 + [-0.349 (-3412) - 0.151 (758)] = 2318$$

$$\delta = 0 + [-0.750 (-3412 + 2318)] = 820$$

Cuarto ciclo

$$\phi_B = -2483 + [-0.349(2318) - 0.151(820)] = -3416$$

$$\phi_C = 1242 + [-0.349(-3416) - 0.151(820)] = 2310$$

$$\delta = 0 + [-0.750(-3416 + 2310)] = 829$$

Quinto ciclo

$$\phi_B = -2483 + [-0.349(2310) - 0.151(829)] = -3414$$

$$\phi_C = 1242 + [-0.349(-3414) - 0.151(829)] = 2308$$

$$\delta = 0 + [-0.750(-3414 + 2308)] = 829$$

Obtenida la convergencia con tres cifras significativas, se pueden evaluar los momentos definitivos.

SÉPTIMO PASO

Momentos definitivos

$$M_{ij} = M_{ij}^F + k_{ij}(2\phi_i + \phi_j + \delta_{ij})$$

$$M_{AB} = 0 + 27 \times 10^{-4} (2 \times 0 - 3414 + 829) = -7.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 0 + 27 \times 10^{-4} [2(-3414) + 0 + 829] = -16.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 44.4 + 62.5 \times 10^{-4} [2(-3414) + 2308 + 0] = 16.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum M_B = 0$$

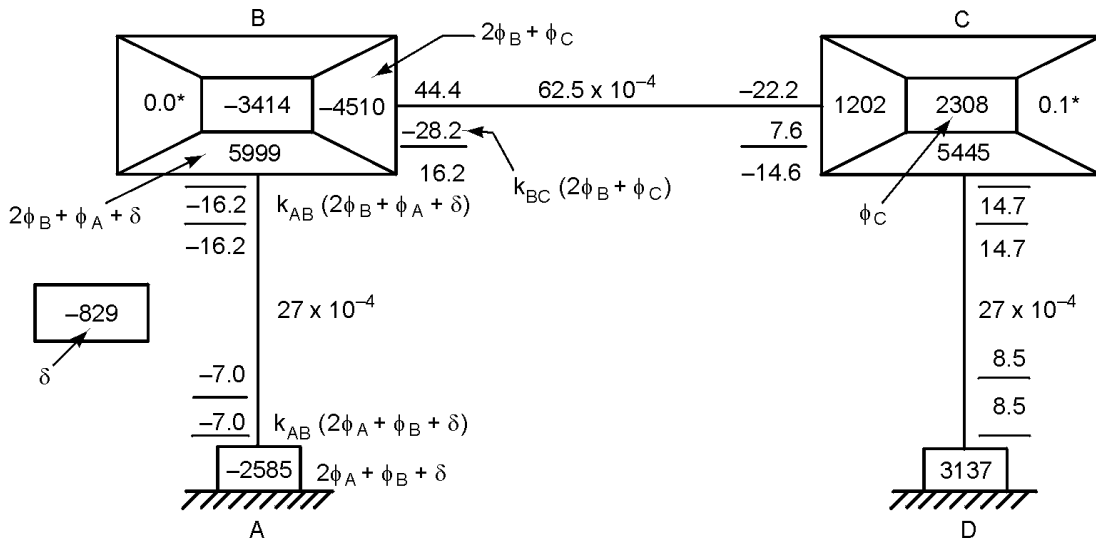
$$M_{CB} = -22.2 + 62.5 \times 10^{-4} [2(2308) - 3414 + 0] = -14.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 0 + 27 \times 10^{-4} [2(2308) + 0 + 829] = 14.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$M_{DC} = 0 + 27 \times 10^{-4} [2 \times 0 + 2308 + 829] = 8.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

que prácticamente coinciden con los valores obtenidos por el método de Kani. Los cálculos anteriores se pueden llevar a cabo como se indica en el siguiente cuadro:



Para obtener las rotaciones y el desplazamiento verdaderos, suponiendo hormigón de 21 N/mm^2 , se utilizan las ecuaciones (8.2), (8.4a) y (8.16):

$$C = \frac{K_{ij}}{k_{ij}} \quad \theta_i = \frac{\phi_i}{2EC} \quad \Delta_{ij} = \frac{h_{ij}}{6EC} \delta_{ij}$$

$$C_{AB} = C_{CD} = \frac{(0.3)^4}{27 \times 10^{-4}} = 0.0833 \quad C_{BC} = \frac{0.3 \times (0.5)^3}{62.5 \times 10^{-4}} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

Según las *Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente*:

$$E = 3900 \sqrt{f'_c} = 3900 \sqrt{21} = 17900 \text{ N/mm}^2 = 179 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$$

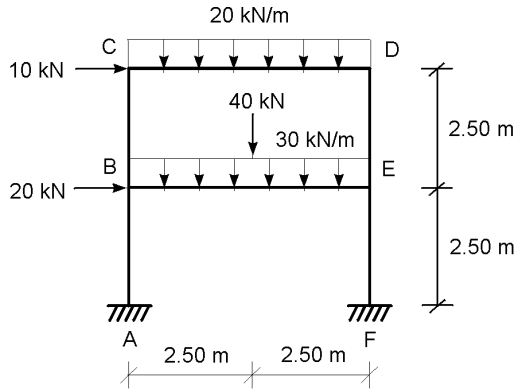
Empleando estos valores y las ecuaciones citadas:

$$\theta_B = -\frac{3414}{2 \times 179 \times 10^5 \times 0.0833} = -1.145 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (\text{horario})$$

$$\theta_C = -\frac{2308}{2 \times 179 \times 10^5 \times 0.0833} = 7.74 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (\text{antihorario})$$

$$\Delta_i = \frac{3}{6 \times 179 \times 10^5 \times 0.0833} \times 829 = 2.78 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.278 \text{ mm} \rightarrow$$

con lo cual quedan encontradas todas las incógnitas del problema.

Ejemplo 8.3 Analice el siguiente pórticoVigas: $400 \times 400 \text{ mm}$ Columnas del 2º piso: $350 \times 350 \text{ mm}$ Columnas del 1º piso: $400 \times 400 \text{ mm}$ **Solución****PRIMER PASO***Cálculo de rigideces relativas*

$$k_{CD} = k_{BE} = \frac{(0.4)^4}{5} = 51.2 \times 10^{-4} \quad k_{CB} = k_{DE} = \frac{(0.35)^4}{2.5} = 60.0 \times 10^{-4}$$

$$k_{AB} = k_{EF} = \frac{(0.4)^4}{2.5} = 102.4 \times 10^{-4}$$

Coefficientes de giro

$$\mu_{CD} = \mu_{DC} = -\frac{1}{2} \frac{51.2}{51.2 + 60.0} = -0.230 \quad \mu_{CB} = \mu_{DE} = -\frac{60.0}{222.4} = -0.270$$

$$\mu_{BC} = \mu_{ED} = -\frac{1}{2} \frac{60.0}{60.0 + 51.2 + 102.4} = -0.140$$

$$\mu_{BE} = \mu_{EB} = -\frac{51.2}{427.2} = -0.120 \quad \mu_{BA} = \mu_{EF} = -\frac{102.4}{427.2} = -0.240$$

Coefficientes de desplazamiento

$$\gamma_{CB} = \gamma_{DE} = -\frac{3}{2} \frac{60.0}{60.0 + 60.0} = -0.750$$

$$\gamma_{AB} = \gamma_{EF} = -\frac{3}{2} \frac{102.4}{102.4 + 102.4} = -0.750$$

Momentos de empotramiento

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = \frac{20 \times 25}{12} = 41.7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE}^F = -M_{EB}^F = \frac{30 \times 25}{12} + \frac{40 \times 5}{8} = 87.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

SEGUNDO PASO

Giros relativos iniciales

$$\phi_i^0 = -\frac{\sum_{(i)} M_{ij}^F}{2 \sum_{(i)} k_{ij}}$$

$$\phi_C^0 = -\frac{41.7}{2(51.2 + 60.0) \times 10^{-4}} = -1875 \quad \phi_D^0 = -\phi_C^0 = 1875$$

$$\phi_B^0 = -\phi_E^0 = -\frac{87.5}{2(60.0 + 51.2 + 102.4) \times 10^{-4}} = -2048$$

Desplazamientos iniciales relativos de piso

$$\delta_n^0 = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{2 \sum_{(n)} k_{ij}}$$

$$\delta_1^0 = \frac{2.5 \times 10}{2(60.0 + 60.0) \times 10^{-4}} = 1042 \quad \delta_1^0 = \frac{2.5 \times (10 + 20)}{2(102.4 + 102.4) \times 10^{-4}} = 1831$$

TERCER PASO. Se adopta la secuencia BCDE

PASOS CUATRO A SEIS. Proceso iterativo

Con los valores anteriores y las ecuaciones (8.19) y (8.23a) se inicia el proceso iterativo y los resultados se van colocando en el diagrama de la página siguiente.

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(i)} \mu_{ij} (\phi_j + \delta_{ij})$$

$$\delta_n = \delta_n^0 + \sum_{(n)} \gamma_{ij} (\phi_i + \phi_j)$$

Primer ciclo

$$\phi_B = -2048 + [-0.120(2048) - 0.140(-1875 + 1042) - 0.240(1831)] = -2617$$

$$\phi_C = -1875 + [-0.270(-2617 + 1042) - 0.230(1875)] = -1881$$

$$\phi_D = 1875 + [-0.230(-1881) - 0.270(2048 + 1042)] = 1473$$

$$\phi_E = 2048 + [-0.140(1473 + 1042) - 0.240(1831) - 0.120(-2617)] = 1570$$

$$\delta_1 = 1042 - 0.750(-1881 - 2617 + 1473 + 1570) = 2133$$

$$\delta_2 = 1831 - 0.750(-2617 + 1570) = 2616$$

Segundo ciclo

$$\phi_B = -2048 - 0.240(2616) - 0.120(1570) - 0.140(-1881 + 2133) = -2900$$

$$\phi_C = -1875 - 0.270(-2900 + 2133) - 0.230(1473) = -2007$$

$$\phi_D = 1875 - 0.230(-2007) - 0.270(1570 + 2133) = 1337$$

$$\phi_E = 2048 - 0.140(1337 + 2133) - 0.240(2616) - 0.120(-2900) = 1282$$

$$\delta_1 = 1042 - 0.750(-2007 + 1337 - 2900 + 1282) = 2758$$

$$\delta_2 = 1831 - 0.750(-2900 + 1282) = 3044$$

Tercer ciclo

$$\phi_B = -2048 - 0.240(3044) - 0.120(1282) - 0.140(-2007 + 2758) = -3038$$

$$\phi_C = -1875 - 0.270(-3038 + 2758) - 0.230(1337) = -2107$$

$$\phi_D = 1875 - 0.230(-2107) - 0.270(1282 + 2758) = 1269$$

$$\phi_E = 2048 - 0.140(1269 + 2758) - 0.240(3044) - 0.120(-3038) = 1118$$

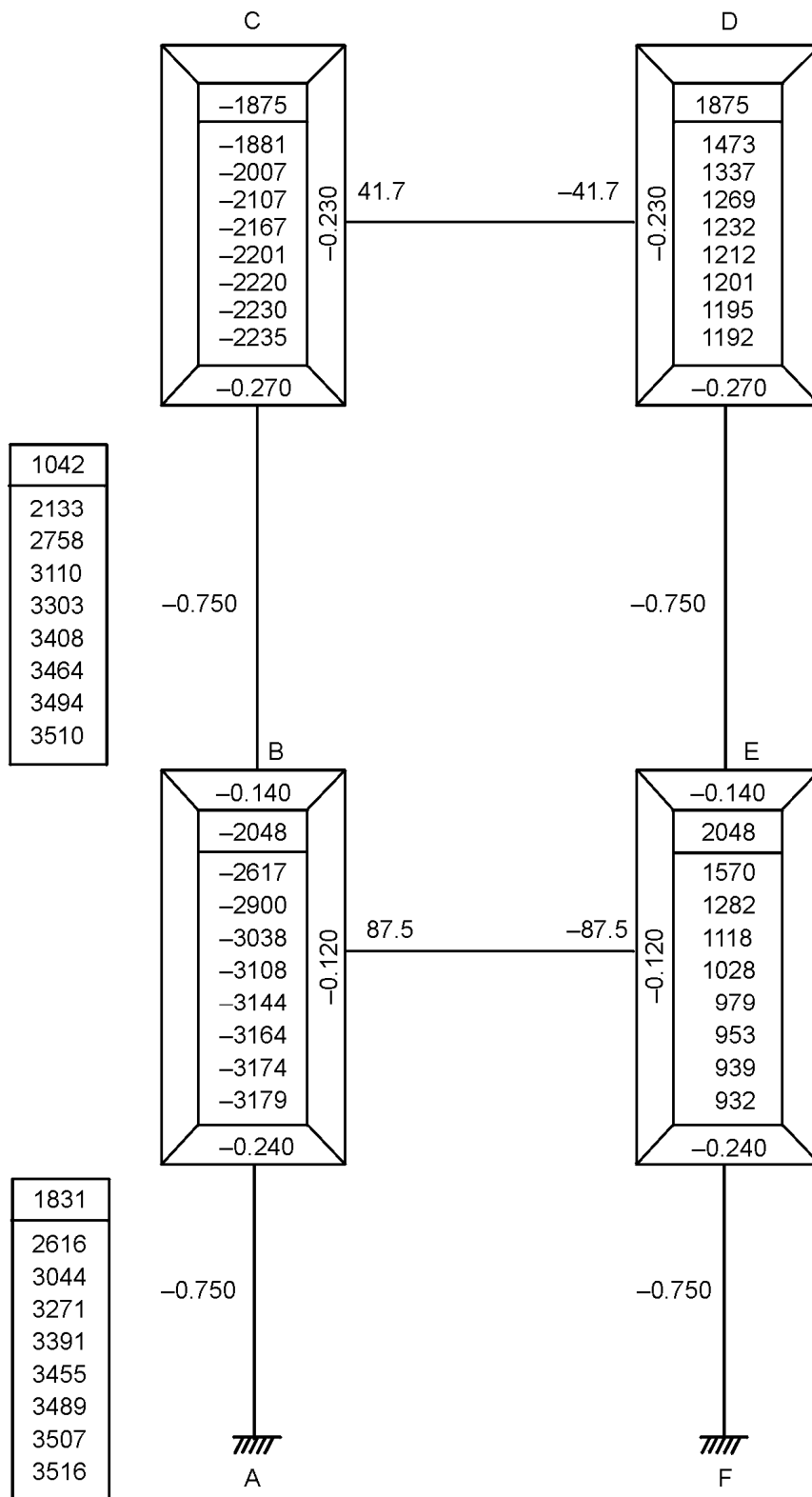
$$\delta_1 = 1042 - 0.750(-2107 - 3038 + 1269 + 1118) = 3110$$

$$\delta_2 = 1831 - 0.750(-3038 + 1118) = 3271$$

y así sucesivamente hasta que los valores se repiten, con tres cifras significativas, en el octavo ciclo. Se procede entonces a evaluar los momentos definitivos:

SÉPTIMO PASO:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + k_{ij}(2\phi_i + \phi_j + \delta_{ij})$$

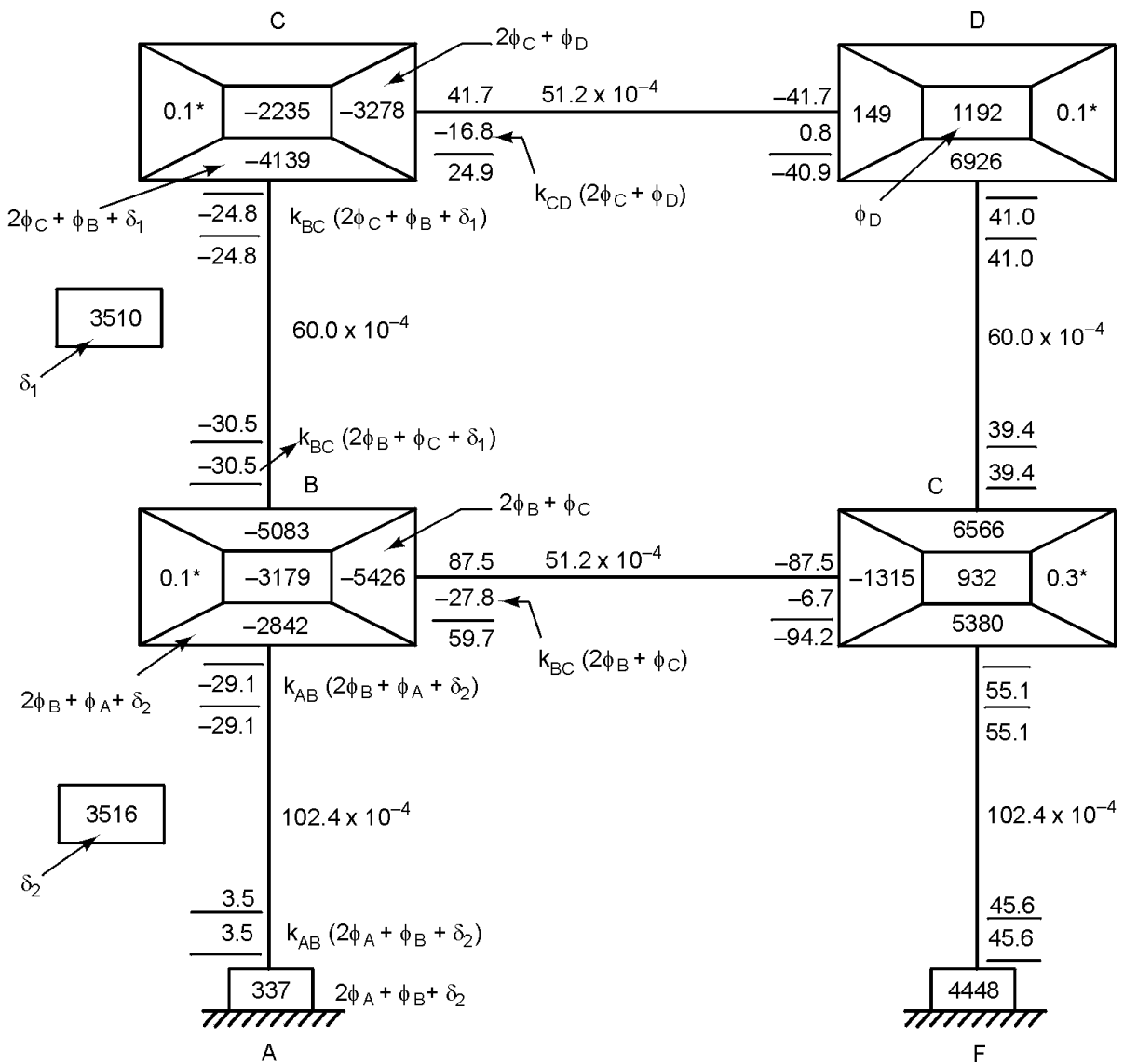


Del cuadro siguiente se ve que el error máximo de cierre en los nudos es 0.2 kN·m. Para averiguar el error de cierre en fuerzas horizontales se calculan las fuerzas de corte en las columnas:

$$\sum_{(1)} Q_i = \frac{-24.8 - 30.5 + 41.0 + 39.4}{2.5} = 10.00 \text{ vs } 10.00$$

$$\sum_{(2)} Q_i = \frac{-29.1 + 3.5 + 55.1 + 45.6}{2.5} = 30.04 \text{ vs } 30.00$$

con lo cual queda confirmada la bondad de la solución.



8.5 PÓRTICOS CON DESPLAZAMIENTO Y COLUMNAS ARTICULADAS EN LA BASE

En el caso de un pórtico con desplazamientos cuyas columnas de primer piso están articuladas en la base, se obtiene al aislarlas y aplicar el principio de superposición:

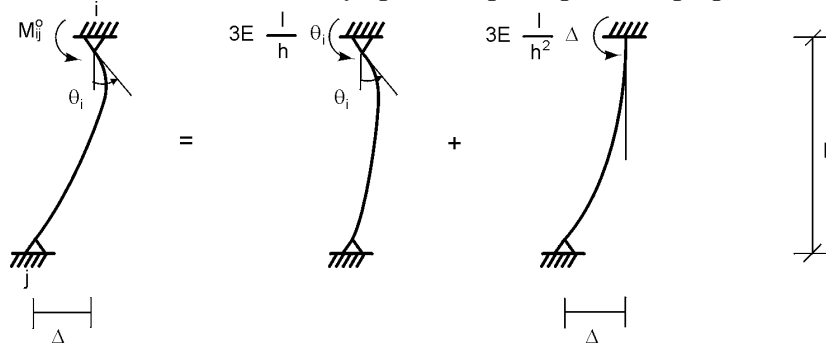


Figura 8.2 Columnas articuladas en la base.

$$M_{ij}^0 = 3 \frac{EI}{h} \theta_i + 3 \frac{EI}{h^2} \Delta_{ij} \quad (8.26)$$

$$M_{ij}^0 = 3EK_{ij} \theta_i + 3E \frac{K_{ij}}{h_{ij}} \Delta_{ij} \quad (8.26a)$$

$$M_{ij}^0 = 3ECK_{ij} \theta_i + 3EC \frac{k_{ij}}{h_{ij}} \Delta_{ij} \quad (8.26b)$$

y si se utiliza la definición (8.13) vista antes, para estructuras sin desplazamiento con extremo articulado:

$$k'_{ij} = \frac{3}{4} k_{ij} \quad (8.13)$$

resulta:

$$M_{ij}^0 = 4ECK'_{ij} \theta_i + 4EC \frac{k'_{ij}}{h_{ij}} \Delta_{ij} \quad (8.26c)$$

utilizando ahora la definición de rotación relativa:

$$\phi_i = 2EC\theta_i \quad (8.4a)$$

y definiendo un desplazamiento relativo de pisos con extremo articulado:

$$\delta'_{ij} = 4EC \left[\frac{\Delta}{h} \right]_{ij} \quad (8.27)$$

se obtiene finalmente:

$$M_{ij}^0 = k'_{ij} (2\phi_i + \delta'_{ij}) \quad (8.26d)$$

Por otra parte, para dichas columnas:

$$M_{ji}^0 = 0$$

La ecuación (8.26d) tiene la misma forma que la ecuación (8.17a), si se recuerda que la influencia de ϕ_j ya se tuvo en cuenta. Por lo tanto, al plantear el equilibrio de nudos no habrá ningún cambio, excepto el ya mencionado y la necesidad de emplear δ'_{ij} en vez de δ_{ij} en las columnas articuladas, y se llegará a la misma ecuación iterativa, obtenida antes, para ϕ_j :

$$\phi_i = \phi_i^0 + \sum_{(i)} \mu_{ij} (\phi_j + \delta'_{ij}) \quad (8.19)$$

Considerando ahora el primer piso del pórtico:

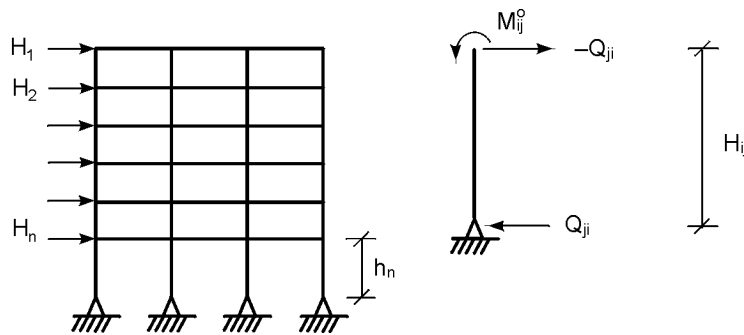


Figura 8.3 Pórtico con columnas articuladas en la base.

$$Q_{ji} = \frac{M_{ij}^0}{h_{ij}}$$

Por el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{(n)} Q_{ji} = \sum_{(n)} \frac{M_{ij}^0}{h_{ij}} \quad (8.29)$$

y si todas las columnas tienen la misma altura, h_n :

$$h_n \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{(n)} M_{ij}^0 = \sum_{(n)} k'_{ij} (2\phi_i) + \delta'_n \sum_{(n)} k'_{ij} \quad (8.30)$$

Despejando ahora δ'_n :

$$\delta'_n = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{\sum_{(n)} k'_{ij}} - \sum_{(n)} \frac{2k'_{ij}}{\sum_{(n)} k'_{ij}} \phi_j \quad (8.31)$$

que se puede reescribir así:

$$\delta_n' = \delta_n^0 + \sum_{(n)} \gamma_{ij}^0 \phi_i \quad (8.32)$$

en donde:

$$\delta_n^0 = \frac{h_n \sum_{i=1}^n H_i}{\sum_{(n)} k_{ij}'} \quad (8.33)$$

$$\gamma_{ij}^0 = -2 \frac{k_{ij}'}{\sum_{(n)} k_{ij}'} \quad (8.34)$$

8.6 PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE TAKABEYA APLICADO A PÓRTICOS ORTOGONALES

La programación del método de Takabeya, aplicado a pórticos ortogonales, es muy similar a la del método de Kani. En este caso el proceso iterativo se efectúa con base en las ecuaciones (8.19) y (8.23), hasta lograr que la diferencia entre los valores de giros y desplazamientos en dos ciclos consecutivos sea inferior al límite previamente acordado. Después de obtener la convergencia se aplican a cada miembro las ecuaciones (8.15) y se encuentran, como antes, los cortes y fuerzas axiales. Podrá comprobarse entonces la mayor rapidez de este método si se compara con los de Cross alterno y Kani vistos antes. En la referencia (8.3) se da un algoritmo para analizar esta clase de pórticos y su programación en BASIC.

8.7 EFECTO P-Δ

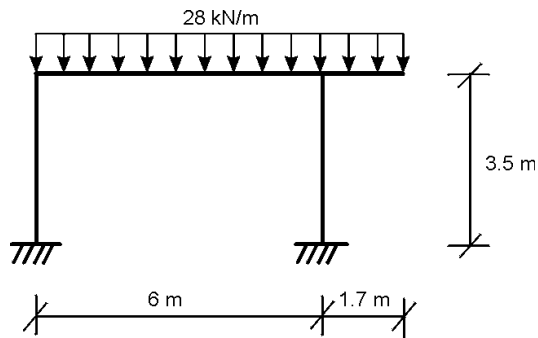
Es bien sabido que en edificios sometidos a desplazamiento, las derivas de piso ocasionan momentos secundarios por no ser colineales las reacciones verticales en los extremos de cada columna. Este es el llamado efecto P-Δ, que en edificios de baja altura pueden, por lo general, despreciarse; no así en edificios altos.

En los métodos vistos en este capítulo y en los dos anteriores, es relativamente fácil considerar dicho efecto. Para esto basta adicionar a los programas respectivos, desarrollados en la referencia (8.3), un subprograma que calcule la reacción vertical en los extremos inferiores de todas las columnas de cada piso; con dichos valores y la deriva del piso respectivo se puede calcular el momento secundario de cada piso debido al efecto P-Δ. Este momento se divide por la altura del piso y con ello se obtiene una fuerza horizontal equivalente que, aplicada en la placa superior de dicho piso, produciría el mismo efecto. Se vuelve entonces al programa principal para efectuar el análisis correspondiente a dichas fuerzas.

El proceso se repite hasta que los momentos secundarios obtenidos se puedan considerar despreciables.

EJERCICIOS

8.1 Analice por el método de Takabeya los pórticos siguientes.

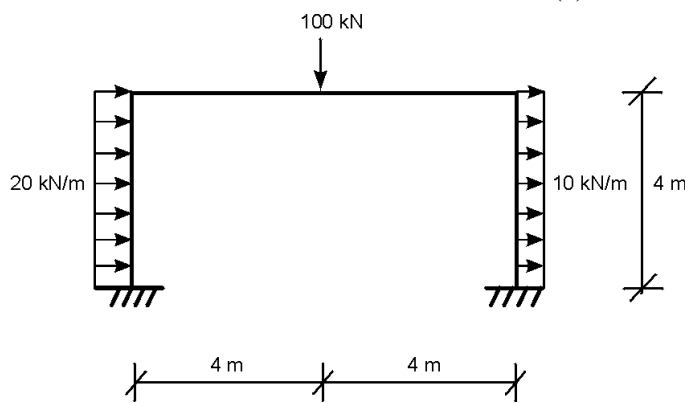


(a)

EI ($\text{kN}\cdot\text{m}^2$)

Viga: 40000

Columnas: 60000



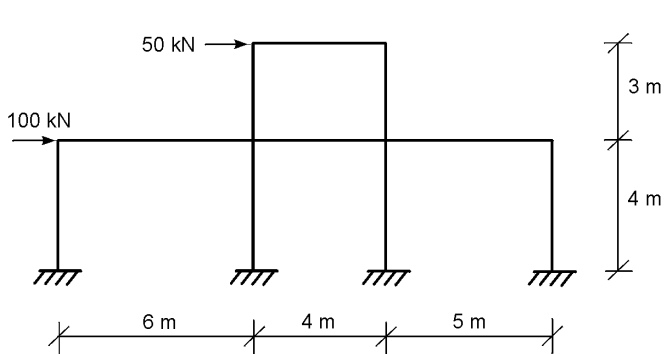
(b)

Dimensiones ($b \times h$, mm)

Viga: 300×400 mm

Columnas: 300×300 mm

$E = 20 \text{ kN/mm}^2$



(c)

EI ($\text{kN}\cdot\text{m}^2$)

Viga: 50000

Columnas:

Externas: 60000

Internas: 80000

- 8.2 Utilice el método de Takabeya para resolver completamente los pórticos de los ejercicios 7.2 (a) y (b) y 6.5 (c). Calcule en cada caso los giros en los nudos y los desplazamientos relativos de piso.
- 8.3 Resuelva un pórtico del ejercicio 8.1, suponiendo que las columnas están articuladas en la base. Compare los resultados con los obtenidos anteriormente.

REFERENCIAS

- 8.1 Takabeya, F.- *Estructuras de varios pisos*, Compañía Editorial Continental, S.A., 1970.
- 8.2 Botizan, P.- *Generalización del método de Takabeya para el cálculo de pórticos de pisos con barras de sección variable*, Acier, Stahl, Steel; octubre de 1968, pp. 537 a 544.
- 8.3 Uribe, J.- *Microcomputadores en ingeniería estructural*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia y ECOE Ediciones, 1995.

9.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos aproximados de análisis son útiles desde dos puntos de vista: por una parte, hay casos en los que la naturaleza de la estructura y de las cargas hace que sea suficiente un análisis aproximado y, por otra, proporcionan una base para predimensionar los miembros de estructuras indeterminadas, como paso indispensable para efectuar un análisis exacto.

Cuando se trata de armaduras planas con exceso de barras, que producen indeterminaciones internas, como en el caso de cerchas con diagonales en cruz, se suele suponer una repartición de la fuerza de corte entre ellas si se considera que ambas van a estar actuando con el nivel de cargas considerado, pues hay circunstancias en las que su esbeltez hace que las barras que quedarían sometidas a compresión se pandeen a niveles bajos de carga, dejando que trabajen únicamente las que estarían solicitadas a tensión.

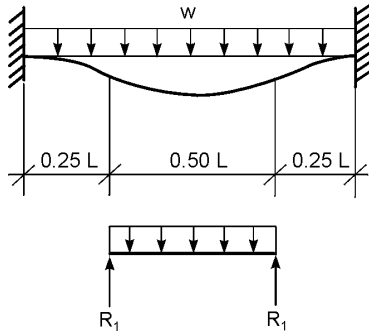
En general, los métodos aproximados más usados para analizar vigas y pórticos indeterminados se basan en suponer una elástica de la estructura en la cual se localizan los puntos de inflexión. La estructura queda reducida, entonces, a un conjunto de tramos estáticamente determinados, en los cuales es fácil determinar las fuerzas internas que van a permitir su diseño.

9.2 ANÁLISIS APROXIMADO DE VIGAS

Para ilustrar el método que supone los puntos de inflexión se ha escogido el caso de una viga doblemente empotrada, con una carga uniformemente repartida sobre toda la luz.

El primer paso, como ya se dijo, es dibujar a escala la elástica de la viga y localizar en ella los puntos de inflexión. Naturalmente esto tiene un carácter subjetivo y la respuesta será tanto mejor cuanto mayor sea el entendimiento que tenga el calculista sobre el comportamiento estructural. Suponiendo que al efectuar el paso anterior se obtuvo que los puntos de inflexión quedaron localizados a aproximadamente $0.25 L$ de los apoyos, el análisis estático conduce a los siguientes resultados.

Para el tramo central, entre los puntos de inflexión supuestos:



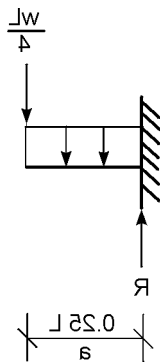
$$R_1 = \frac{1}{2} w (0.5L) = \frac{wL}{4}$$

$$M_{CL} = \frac{w (L/2)^2}{8} = \frac{wL^2}{32}$$

$$\text{vs } M_{CL} \text{ verdadero} = \frac{wL^2}{24}$$

$$\text{error} = 25\% \text{ por defecto.}$$

Considerando ahora un tramo extremo:



$$R = 0.25L \times w + R_1 = \frac{wL}{4} + \frac{wL}{4} = \frac{wL}{2} \text{ (exacto)}$$

$$M_{\text{apoyo}} = 0.25L \times R_1 + \frac{w (L/4)^2}{2} = \frac{L}{4} \times \frac{wL}{4} + \frac{wL^2}{32} =$$

$$= \frac{3wL^2}{32} = \frac{wL^2}{10.7}$$

$$\text{vs } M_{\text{verdadero}} = \frac{wL^2}{12}$$

$$\text{error} = 12\% \text{ por exceso}$$

La tabla 9.1 permite apreciar la influencia que el error en la localización de los puntos de inflexión tiene sobre los momentos en los apoyos y en el centro de la luz, que son los valores fundamentales utilizados en el diseño. Debido a la simetría, cualquier supuesto razonable conduce a valores exactos del corte en los apoyos.

Tabla 9.1

Influencia de la localización de los puntos de inflexión sobre los momentos de diseño en una viga doblemente empotrada

$\frac{a}{L}$	$\frac{wL^2}{M_{CL}}$	error %	$\frac{wL^2}{M_{ap}}$	error %
0.10	12.5	+92	22.2	-46
0.15	16.3	+47	15.7	-24
0.20	22.2	+8	12.5	-4
0.211	24.0	0	12.0	0
0.25	32.0	-25	10.7	+12
0.30	50.0	-52	9.5	+26

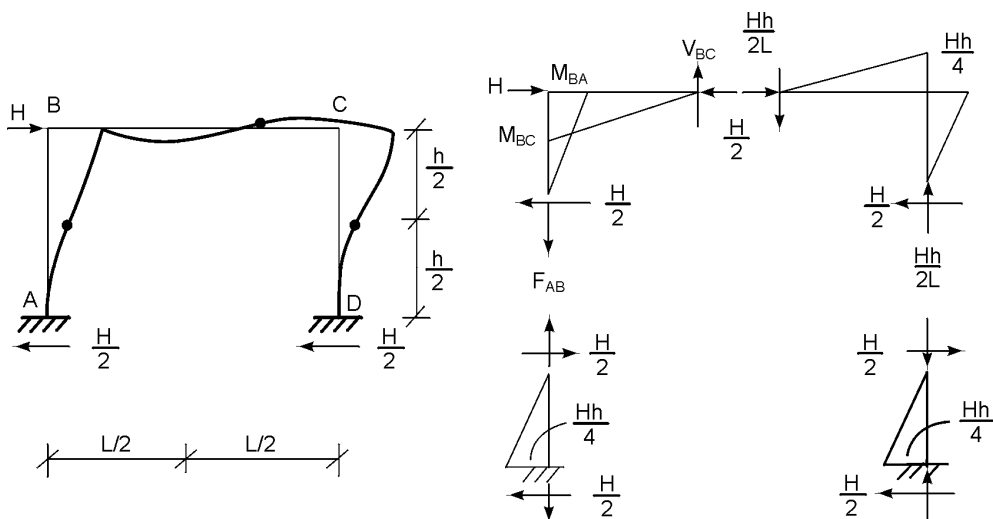
9.3 ANÁLISIS APROXIMADO DE PÓRTICOS ORTOGONALES

Uno de los campos de mayor utilización de los métodos aproximados es el de análisis de pórticos ortogonales sometidos a fuerzas horizontales de viento o sismo. En el pasado se consideraba suficiente en muchos casos la precisión obtenida con ellos, y sus resultados se usaban directamente en el diseño. Hoy en día, con el auge de la computación electrónica, la importancia relativa de tales métodos ha disminuido, pero siguen siendo muy útiles para efectuar el predimensionamiento.

Entre los métodos más populares para efectuar el análisis aproximado figuran, en primer lugar, los denominados *del pórtico simple* o *método del portal* y de la *estructura en voladizo*, que se explicarán más adelante. Naturalmente, otra alternativa es efectuar uno o dos ciclos de algún método de aproximaciones sucesivas como los de Cross modificado, Kani o Takabeya, vistos en los capítulos anteriores.

9.3.1 Método del portal

El método más sencillo para el análisis aproximado de pórticos ortogonales es el del portal o pórtico simple, llamado así porque sus supuestos se derivan de asimilar la estructura real a un ensamblaje de pórticos simples simétricos de un solo piso y una sola luz. En efecto, tal pórtico presenta una deformación en que, por antimetría, el punto de inflexión de la viga se encuentra exactamente en su centro. Por otra parte, si la rigidez de la viga es muy superior a la de las columnas, los puntos de inflexión de éstas se hallarán muy próximas a su punto medio. En consecuencia, es de esperarse que los valores de fuerzas internas obtenidos a partir del supuesto de que dichos puntos de inflexión están exactamente en los puntos medios, no involucrarán errores apreciables. Para dicho pórtico el análisis aproximado conduce entonces a lo siguiente:



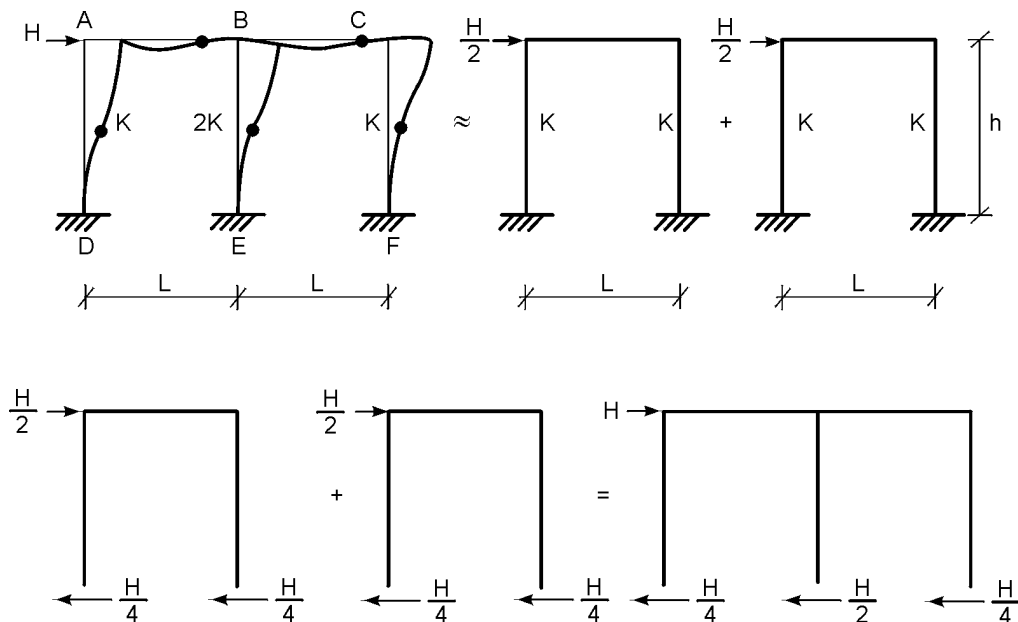
$$M_{BA} = -M_{BC} = \frac{H}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{Hh}{4}$$

$$V_{BC} = \frac{M_{BC}}{(L/2)} = \frac{Hh}{4} \times \frac{2}{L} = \frac{Hh}{2L}$$

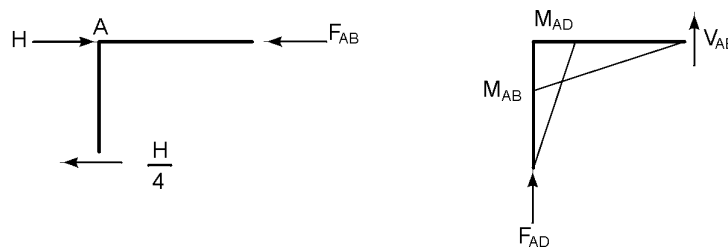
$$F_{AB} = V_{BC} = \frac{Hh}{2L} \quad (\text{tensión})$$

Los valores del tramo inferior y los de la mitad derecha del pórtico se obtuvieron utilizando el principio de acción y reacción y la condición antisimétrica de la estructura deformada.

Si se considera ahora un pórtico de dos luces iguales, es lógico suponer que la columna central tenga el doble de la rigidez de las columnas extremas. En tal caso, el pórtico se podría reemplazar por la suma de dos pórticos iguales, cada uno de ellos similar al estudiado antes, que resistiría la mitad de la fuerza horizontal aplicada. Por consiguiente el análisis aproximado, indicado a continuación, llevaría a concluir que la columna interior toma la mitad de la carga total y las columnas extremas la otra mitad, o sea un cuarto cada una.



Para una esquina del pórtico:



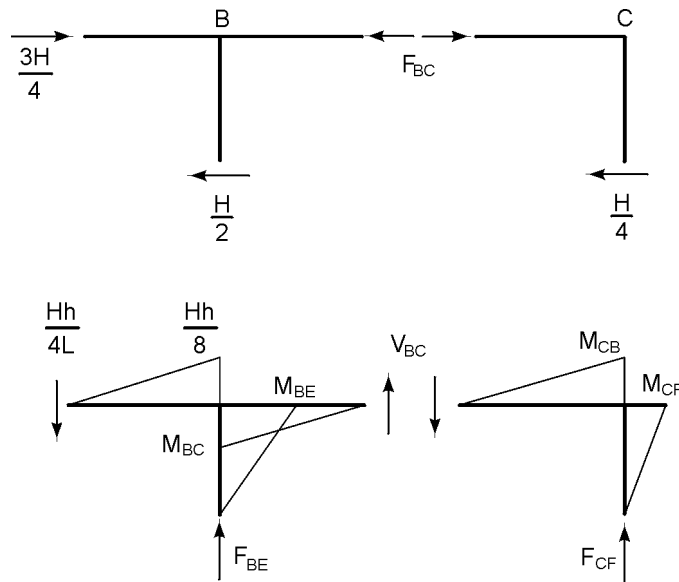
$$F_{AB} = H - \frac{H}{4} = \frac{3H}{4}$$

$$M_{AD} = -M_{AB} = \frac{H}{4} \times \frac{h}{2} = \frac{Hh}{8}$$

$$V_{AB} = \frac{M_{AB}}{(L/2)} = \frac{Hh}{8} \times \frac{2}{L} = \frac{Hh}{4L}$$

$$F_{AD} = -V_{AB} = -\frac{Hh}{4L}$$

Por consiguiente, para la otra esquina y el tramo central:



$$F_{BC} = \frac{H}{4}$$

$$M_{CF} = -M_{CB} = -M_{BC} = \frac{H}{4} \times \frac{h}{2} = \frac{Hh}{8}$$

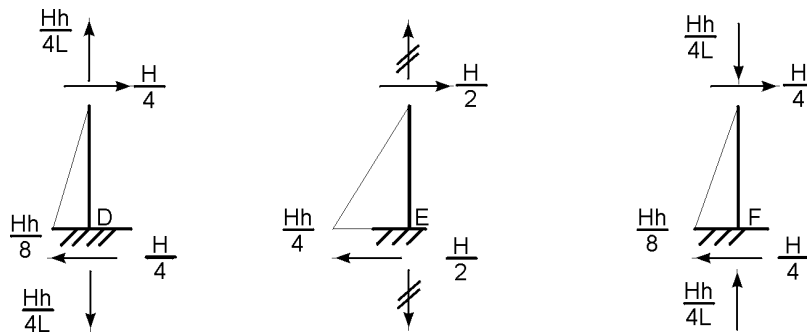
$$V_{BC} = \frac{M_{CB}}{(L/2)} = \frac{Hh}{8} \times \frac{2}{L} = \frac{Hh}{4L}$$

$$F_{CF} = -V_{CB} = \frac{Hh}{4L}$$

$$M_{BE} = M_{EB} = \frac{H}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{Hh}{4}$$

$$F_{BE} = \frac{Hh}{4L} - \frac{Hh}{4L} = 0$$

Los valores de los tramos inferiores de las columnas y las reacciones se pueden obtener por inspección:



Repitiendo el mismo raciocinio para un pórtico de tres luces iguales, las cifras correspondientes serían un tercio de la carga para las columnas interiores y un sexto para las extremas. Es fácil extender dicho concepto a pórticos de cualquier número de luces y pisos, concluyendo como hipótesis básica del método que las columnas interiores tomarán el doble de la carga de las exteriores. El procedimiento queda, entonces, especificado así:

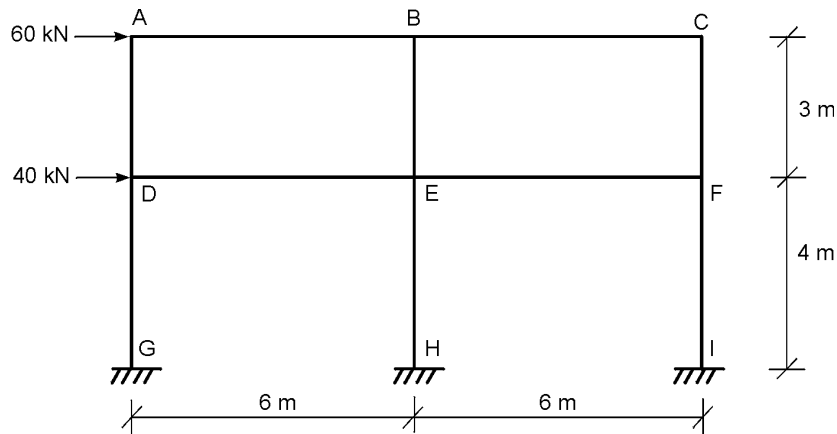
1. Supóngase que se presentan puntos de inflexión en el centro de todas las vigas y columnas.
2. Supóngase que las columnas interiores toman el doble de las fuerzas de corte de las exteriores, y con base en dicho supuesto repártase entre todas las columnas la fuerza de corte del piso en consideración.
3. Empezando por el piso superior, calcúlense los momentos en los extremos de las columnas a partir de las fuerzas de corte evaluadas en el punto anterior.
4. Considerando equilibrio de nudos, evalúense los momentos en los extremos de las vigas.
5. Utilizando los momentos anteriores, calcúlense las fuerzas de corte en las vigas.
6. Con base en los diagramas de cuerpo libre individuales y las fuerzas de corte en vigas y columnas, hállese las fuerzas axiales en columnas y vigas, respectivamente.
7. Repítanse los pasos 2 a 6 para todos los pisos hasta llegar a la cimentación. Si las columnas del primer piso se consideran articuladas, es obvio que en dicho piso los puntos de inflexión se deben colocar en la base de las columnas.

El proceso anterior se ilustrará posteriormente con un ejemplo.

Evidentemente, la mayor ventaja del método radica en su simplicidad; sin embargo, es obvio que el no tener en cuenta las dimensiones de vigas y columnas puede conducir a grandes errores cuando la estructura se aparta de las condiciones ideales supuestas en su deducción. Por eso hay quienes prefieren usar el método de la estructura en voladizo, descrito más adelante, que al menos tiene en cuenta las dimensiones de las columnas.

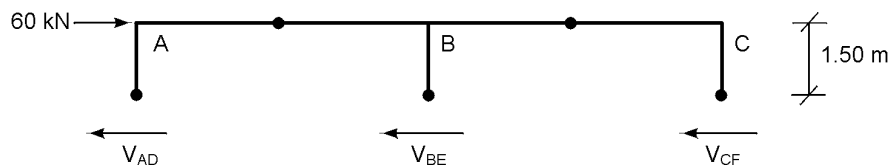
Ejemplo 9.1

Analice por el método del portal la estructura que se muestra a continuación.

**Solución**

Siguiendo los pasos indicados anteriormente:

1. Se suponen articulaciones en los puntos medios de todos los miembros.
2. Corte en las columnas del piso superior.



$$V_{AD} = V_{CF} = \frac{60}{2 \times 1 + 2} = 15.0 \text{ kN}$$

$$V_{BE} = 2V_{AD} = 30.0 \text{ kN}$$

3. Momentos en los extremos de las mismas columnas:

$$M_{AD} = M_{CF} = 15.0 \times \frac{3}{2} = 22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE} = 30.0 \times \frac{3}{2} = 45.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

4. Momentos en los extremos respectivos de las vigas:

$$M_{AB} = -M_{AD} = -22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CB} = -M_{CF} = -22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

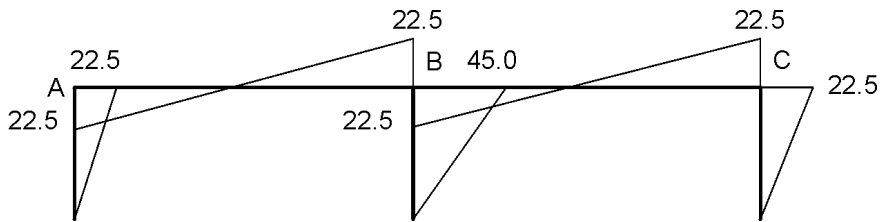
por tener el punto de inflexión en el centro de la luz:

$$M_{BA} = M_{BC} = -22.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

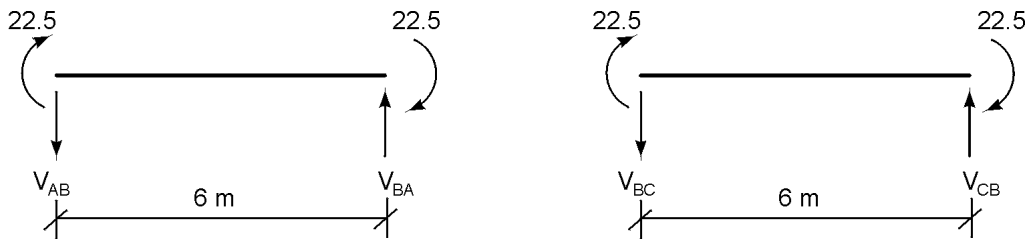
Verificación:

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = -22.5 + (-22.5) + 45.0 = 0$$

De manera que el diagrama de momentos para el piso superior queda así:

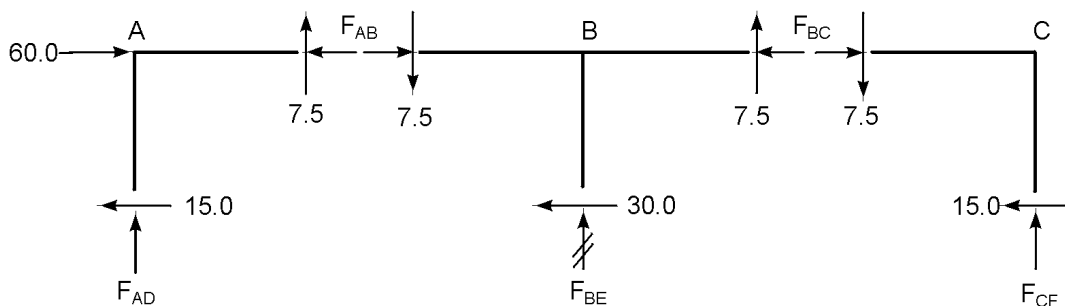


5. Corte en las vigas. Partiendo de los diagramas de cuerpo libre respectivos:



$$V_{AB} = -V_{BA} = V_{BC} = -V_{CB} = -\frac{22.5 + 22.5}{6} = -7.5 \text{ kN}$$

6. Fuerzas axiales en vigas y columnas. De nuevo se utilizan los diagramas de cuerpo libre y las fuerzas ya obtenidas:



$$F_{AD} = 7.5 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

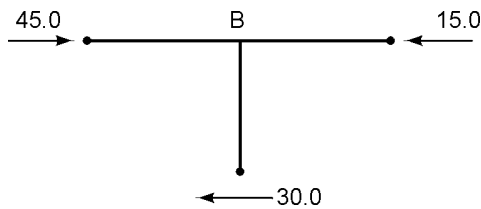
$$F_{BE} = 7.5 - 7.5 = 0$$

$$F_{CF} = 7.5 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{AB} = 60.0 - 15.0 = 45.0 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{BC} = 15.0 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

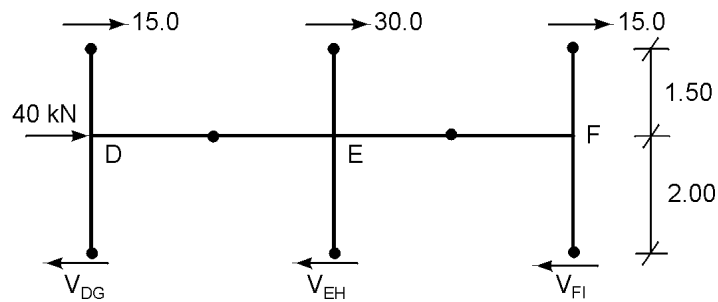
Comprobación



$$\sum_B F_x = 0$$

Ahora se repiten los mismos pasos para el piso intermedio, con los siguientes resultados:

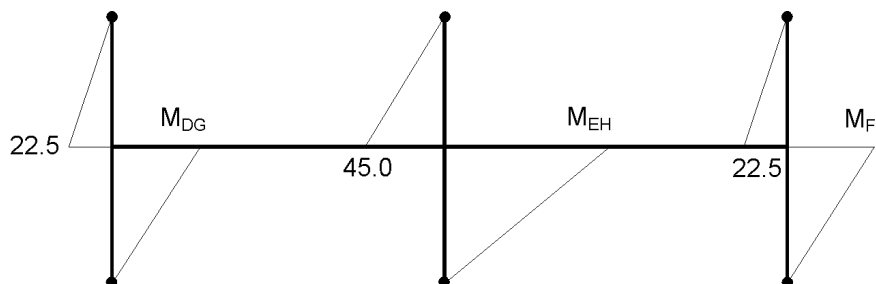
2. Fuerzas de corte en las columnas:



$$V_{DG} = V_{FI} = \frac{60 + 40}{2 \times 1 + 2} = 25 \text{ kN}$$

$$V_{EH} = 2 V_{DG} = 2 \times 25.0 = 50.0 \text{ kN}$$

3. Momentos en los extremos de las columnas:



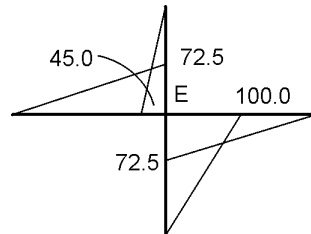
$$M_{DG} = M_{GD} = M_{FI} = M_{IF} = 25.0 \times \frac{4}{2} = 50.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EH} = M_{HE} = 50.0 \times 2 = 100.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

4. Momentos en los extremos de las vigas:

$$M_{DE} = M_{ED} = -(M_{DA} + M_{DG}) = -(22.5 + 50.0) = -72.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

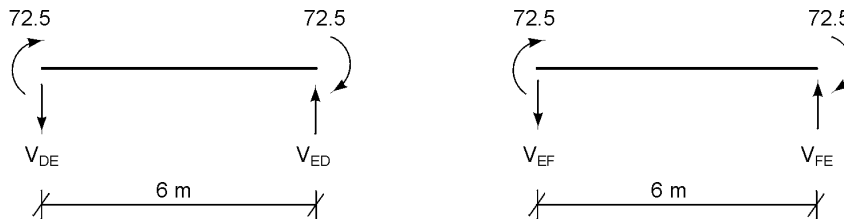
$$M_{FE} = M_{BF} = -(M_{FC} + M_{FI}) = -(22.5 + 50.0) = -72.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Verificación

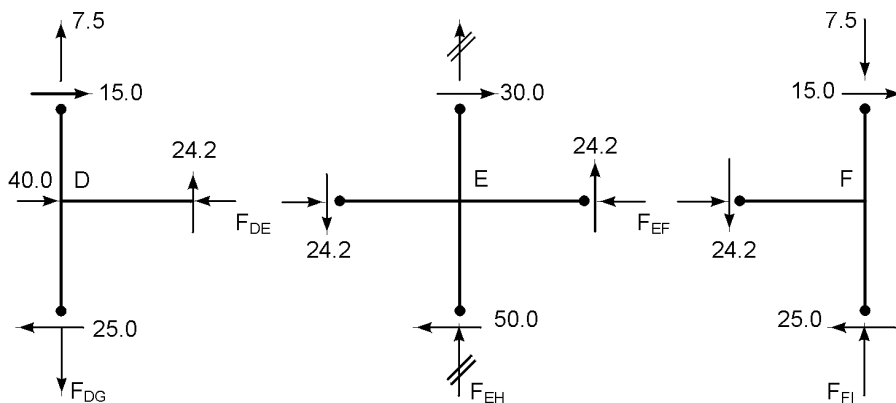
$$\sum M_E = M_{ED} + M_{EB} + M_{EF} + M_{EH} = -72.5 + 45.0 - 72.5 + 100.0 = 0$$

5. Corte en las vigas:



$$V_{DE} = -V_{ED} = V_{EF} = -V_{FE} = -\frac{72.5 + 72.5}{6} = -24.2 \text{ kN}$$

6. Fuerzas axiales en vigas y columnas:



$$F_{DE} = 40.0 + 15.0 - 25.0 = 30.0 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

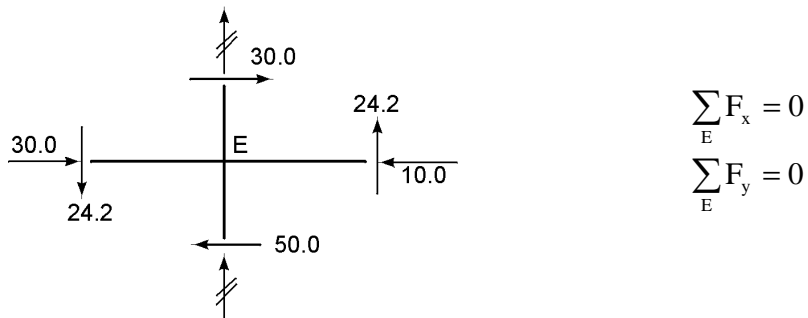
$$F_{EF} = 25.0 - 15.0 = 10.0 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{DG} = 24.2 + 7.50 = 31.7 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

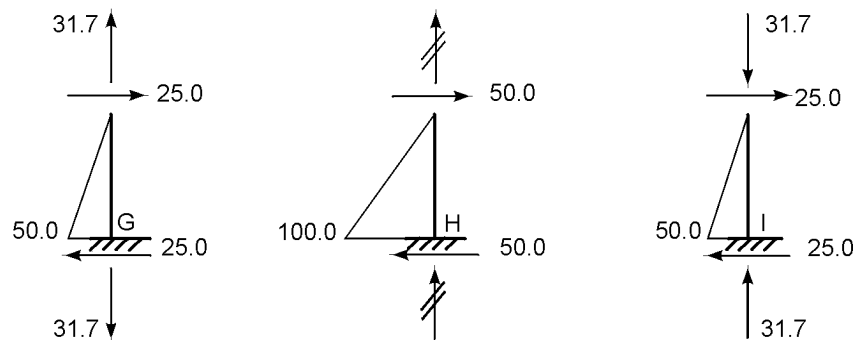
$$F_{FI} = 24.2 + 7.50 = 31.7 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{EH} = 24.2 - 24.2 = 0$$

Verificación en el nudo central

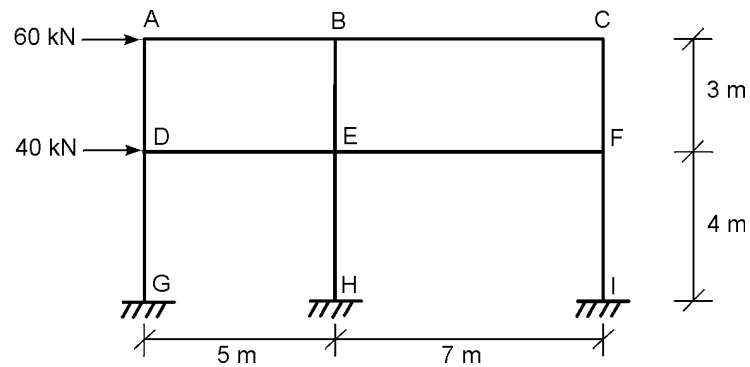


Finalmente, se dibujan los diagramas para el tramo inferior:



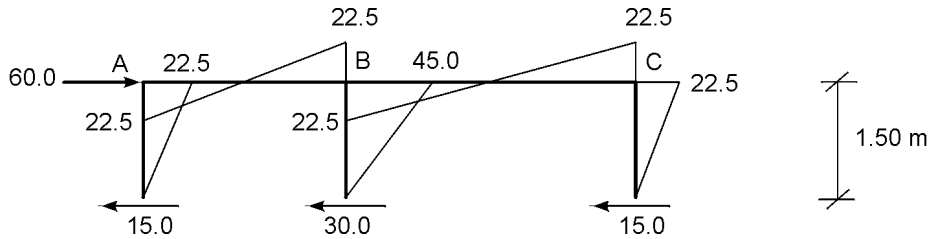
Ejemplo 9.2

Analice por el método del portal la siguiente estructura asimétrica:



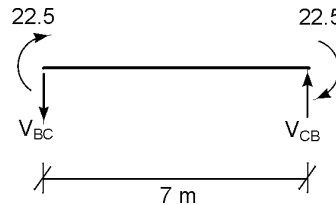
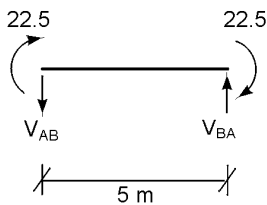
Solución

Teniendo en cuenta la similitud con el pórtico del ejemplo 9.1, es evidente que para el tramo superior los pasos 1 a 4 conducen a los mismos valores de dicho ejemplo. Esto es:



De ahí en adelante la diferencia en luces produce algunos resultados distintos:

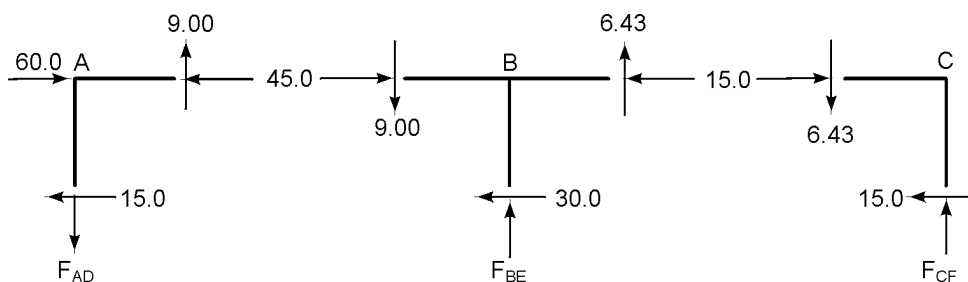
5. Corte en las vigas:



$$V_{AB} = -V_{BA} = \frac{22.5 + 22.5}{5} = 9.00 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = -V_{CB} = \frac{22.5 + 22.5}{7} = 6.43 \text{ kN}$$

6. Fuerzas axiales en vigas y columnas. Las fuerzas axiales en las vigas no cambian, pero sí las de las columnas:

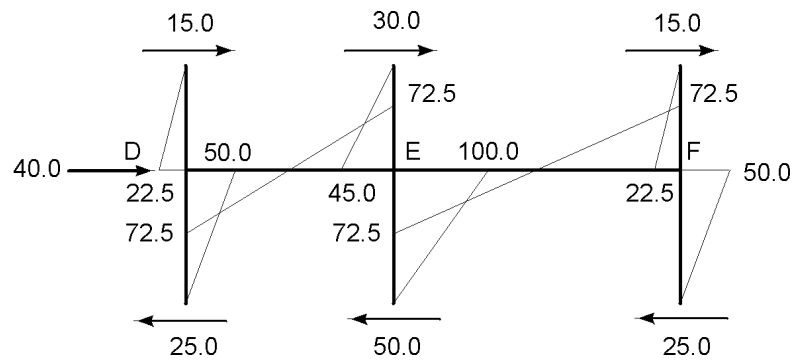


$$F_{AD} = 9.00 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

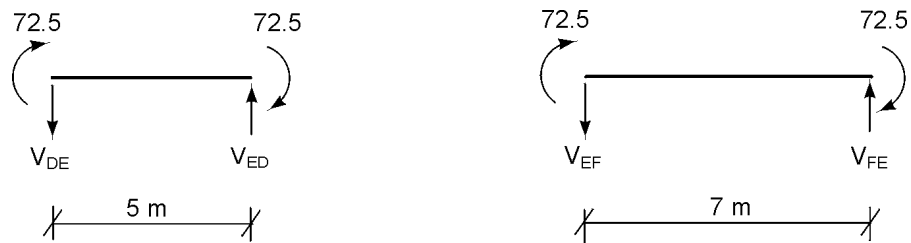
$$F_{BE} = 9.00 - 6.43 = 2.57 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{CF} = 6.43 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Para el piso intermedio resultan de nuevo los mismos valores de corte en las columnas y de momentos en vigas y columnas:



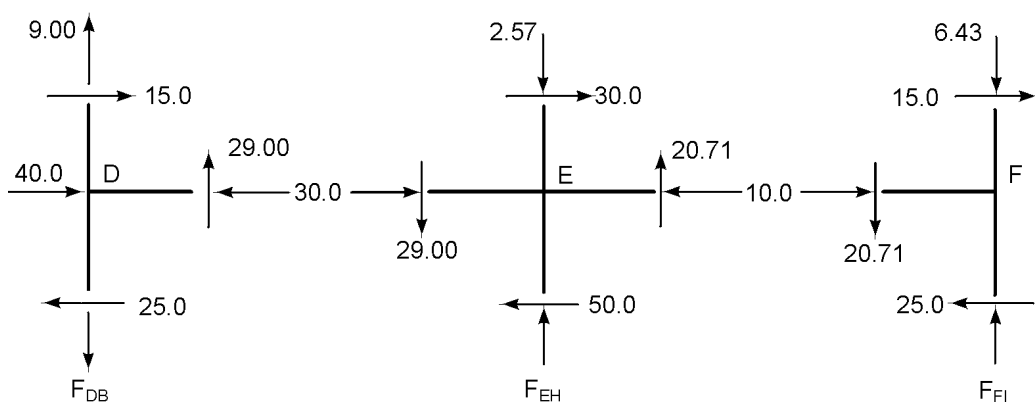
5. Corte en las vigas:



$$V_{DE} = -V_{ED} = \frac{72.5 + 72.5}{5} = 29.00 \text{ kN}$$

$$V_{EF} = -V_{FE} = \frac{72.5 + 72.5}{7} = 20.71 \text{ kN}$$

6. Fuerzas axiales en vigas y columnas. De nuevo sólo cambian estas últimas:

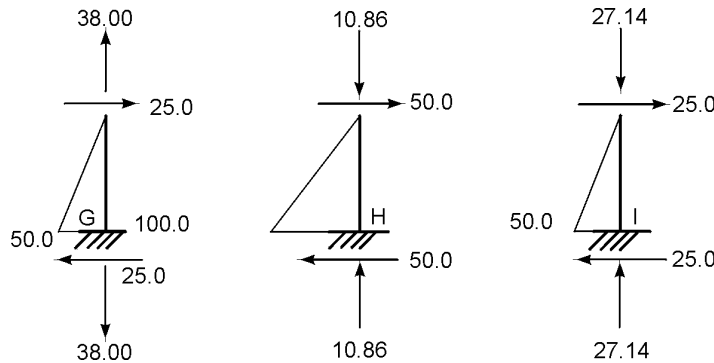


$$F_{DG} = 9.00 + 29.00 = 38.00 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

$$F_{EH} = 29.00 + 2.57 - 20.71 = 10.86 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{FI} = 20.71 + 6.43 = 27.14 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Finalmente, se obtiene el siguiente diagrama para el tramo inferior:



9.3.2 Método de la estructura en voladizo

Este método considera el edificio como un gran voladizo empotrado en la base, cuyas fibras son los ejes de las columnas. Se sigue suponiendo que los puntos de inflexión se presentan en los centros de los miembros. Se corta, entonces, cada piso a media altura; se evalúa el momento externo causado por las fuerzas internas en dicha sección, y al diagrama de cuerpo libre resultante se le aplican las fórmulas de la flexión para hallar las fuerzas axiales en las columnas. A partir de ellas se encuentran, por estática, las demás fuerzas internas requeridas. Paso a paso el proceso queda, entonces, así:

1. Supóngase que la estructura está en voladizo y colóquense puntos de inflexión en el centro de todas las vigas y columnas.
2. Encuéntrese la posición del eje neutro en cada piso.
3. Hágase un corte a media altura del piso superior y evalúese el momento externo en dicha sección.
4. Utilizando la fórmula de la flexión, o igualando el momento externo con el interno, halle las fuerzas axiales en las columnas del piso. Puede considerar que el área de la columna está concentrada en su eje e ignorar la inercia con respecto a él. Recuerde que los esfuerzos son proporcionales a la distancia al eje neutro y que la fuerza es proporcional a ellos y a las áreas respectivas.
5. Conocidas las fuerzas axiales en las columnas, puede averiguar los cortes en las vigas.
6. Con los cortes en las vigas, calcule los momentos en sus extremos.
7. Plantee equilibrio de nudos y calcule los momentos en los extremos de las columnas.
8. A partir de los momentos en los extremos de las columnas, evalúe las fuerzas de corte que se presentan en ellas.

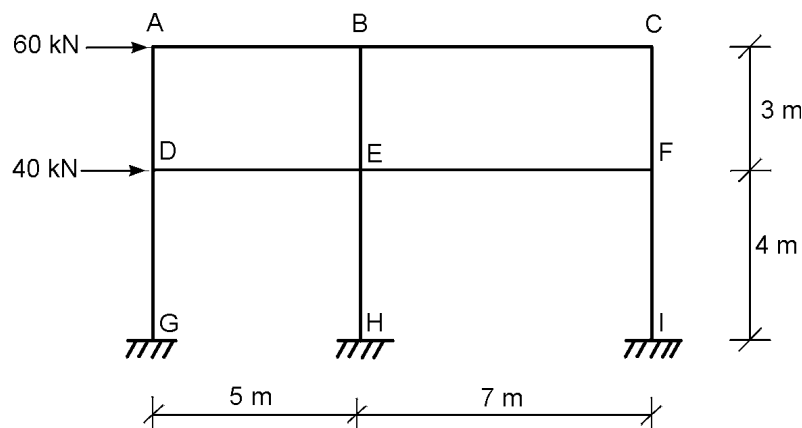
9. Calcule ahora las fuerzas axiales en las vigas.
10. Repita los pasos 3 a 8 para cada uno de los pisos en sucesión, procediendo de arriba hacia abajo.

Obsérvese que para localizar el eje neutro es indispensable conocer el área de las columnas. Por consiguiente, el método es más confiable que el del portal, ya que por lo menos tiene en cuenta de modo parcial las propiedades de los miembros. Naturalmente esto implica más trabajo.

A continuación se explicará el procedimiento utilizando, con fines comparativos, el mismo pórtico del ejemplo anterior.

Ejemplo 9.3

Calcule, utilizando el método de la estructura en voladizo, las fuerzas internas del pórtico del ejemplo 9.2. Suponga que las columnas son de 300 mm × 300 mm, excepto la EH, que tiene 300 mm × 400 mm.



Solución

Una vez supuesto que la estructura está en voladizo y que hay puntos de inflexión en la mitad de todos los miembros, se procede a encontrar la posición del eje neutro en cada piso.

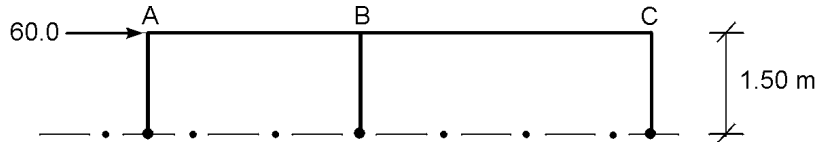
2. *Piso superior.* Como todas las columnas son iguales, tomando momentos con respecto al eje izquierdo:

$$x_{cg} = \frac{5A + 12A}{3A} = 5.667 \text{ m}$$

Piso inferior. Como el ancho de las columnas es igual, haciendo lo mismo se pueden eliminar el numerador y el denominador:

$$x_{cg} = \frac{5 \times 0.4 + 12 \times 0.3}{2 \times 0.3 + 0.4} = 5.600 \text{ m}$$

3. Momento externo a media altura del piso superior:

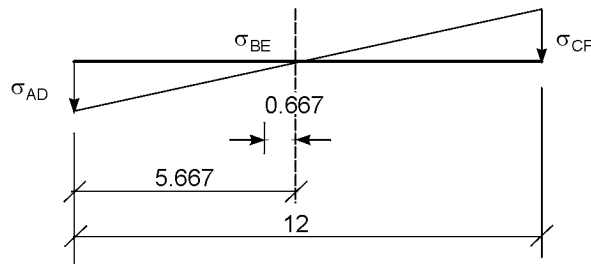


$$M_{\text{externo}} = 60.0 \times 1.50 = 90.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

4. Fuerzas axiales en las columnas. Si se utiliza la fórmula de la flexión, despreciando la inercia con respecto al propio eje de las columnas, se tiene:

$$I_{cg} = \sum (I_i^o + A_i d_i^2) \approx \sum A_i d_i^2 = \\ = (0.3)^2 [(5.667)^2 + (0.667)^2 + (12 - 5.667)^2] = 6.540 \text{ m}^4$$

Por tanto:



$$\sigma_{AD} = \frac{Md_{AD}}{I} = \frac{90.0 \times 5.667}{6.540} = 77.99 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$F_{AD} = A_{AD} \sigma_{AD} = (0.3)^2 \times 77.99 = 7.02 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

$$\sigma_{BE} = \frac{90.0 \times 0.667}{6.540} = 9.18 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

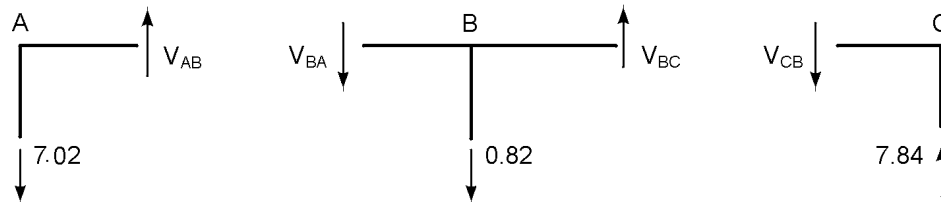
$$F_{BE} = (0.3)^2 \times 9.18 = 0.82 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

$$\sigma_{CF} = \frac{90.0 \times (12 - 5.667)}{6.540} = 87.15 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$F_{CF} = (0.3)^2 \times 87.15 = 7.84 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Al mismo resultado se habría llegado igualando el momento externo al interno. Este procedimiento alternativo se ilustrará al calcular las fuerzas axiales en el piso inferior.

5. Corte en las vigas. A partir de las fuerzas axiales:



$$V_{AB} = -V_{BA} = 7.02 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = -V_{CB} = 7.84 \text{ kN}$$

6. Momentos en los extremos de las vigas. Con los resultados y diagramas de cuerpo libre del punto anterior:

$$M_{AB} = M_{BA} = -7.02 \times \frac{5}{2} = -17.55 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

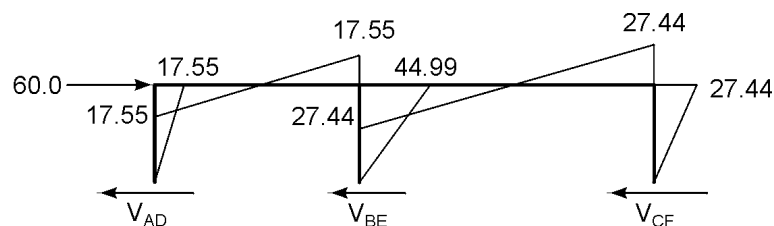
$$M_{BC} = M_{CB} = -7.84 \times \frac{7}{2} = -27.44 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

7. Momentos en los extremos de las columnas. Planteando equilibrio de nudos:

$$M_{AD} = M_{DA} = -M_{AB} = 17.55 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BE} = M_{EB} = -M_{BA} - M_{BC} = 17.55 + 27.44 = 44.99 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CF} = M_{FC} = -M_{CB} = 27.44 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



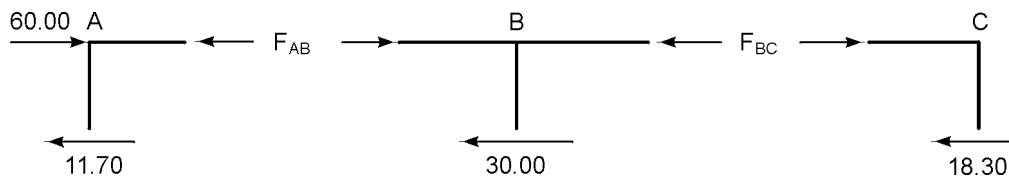
8. Fuerzas de corte en las columnas. Utilizando el diagrama de cuerpo libre y los resultados anteriores:

$$V_{AD} = -V_{DA} = \frac{17.55}{1.50} = 11.70 \text{ kN}$$

$$V_{BE} = -V_{EB} = \frac{44.99}{1.50} = 30.00 \text{ kN}$$

$$V_{CF} = -V_{FC} = \frac{27.44}{1.50} = 18.30 \text{ kN}$$

9. Fuerzas axiales en las vigas. Se obtienen planteando equilibrio de fuerzas horizontales:



$$F_{AB} = 11.70 - 60.00 = -48.30 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

$$F_{BC} = -18.30 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

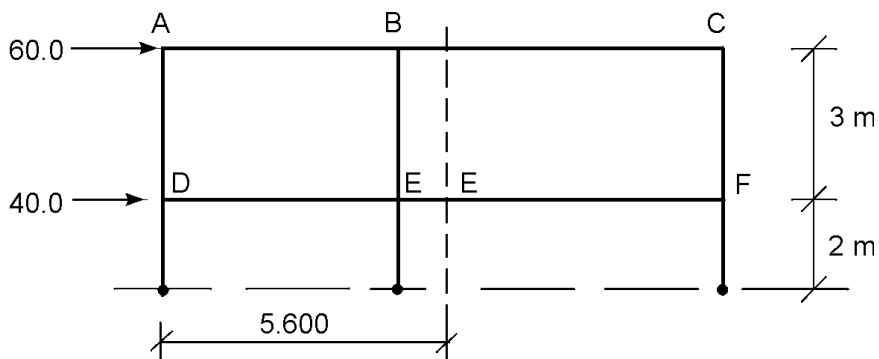
Verificación

$$\sum_B F_x = 48.30 - 30.00 - 18.30 = 0$$

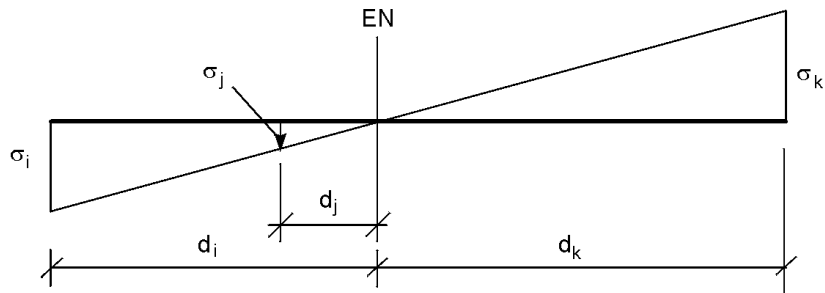
Piso inferior. Repitiendo el mismo proceso, se obtienen los siguientes resultados:

3. Momento externo:

$$M_{\text{externo}} = 60.0 \times 5 + 40.0 \times 2 = 380.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



4. Fuerzas axiales en las columnas. Para utilizar el procedimiento alternativo que iguala el momento externo al interno, conviene obtener una relación entre las fuerzas axiales de dos columnas:



Por definición:

$$\frac{F_i}{F_j} = \frac{\sigma_i A_i}{\sigma_j A_j}$$

pero, por ser triángulos semejantes:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{d_i}{d_j}$$

Reemplazando:

$$\frac{F_i}{F_j} = \frac{d_i A_i}{d_j A_j}$$

$$F_i = \frac{d_i A_i}{d_j A_j} F_j$$

Para el pórtico en consideración:

$$F_{DG} = \frac{5.600 \times (30 \times 30)}{0.600 \times (30 \times 40)} F_{EH} = 7.000 F_{EH}$$

$$F_{FI} = \frac{-(12 - 5.600) \times (30 \times 30)}{0.600 \times (30 \times 40)} F_{EH} = -8.000 F_{EH}$$

Igualando ahora el momento interno al externo:

$$12 F_{DG} + 7 F_{EH} = 380.0$$

y reemplazando el valor obtenido anteriormente:

$$(12 \times 7.000 + 7) F_{EH} = 380.0$$

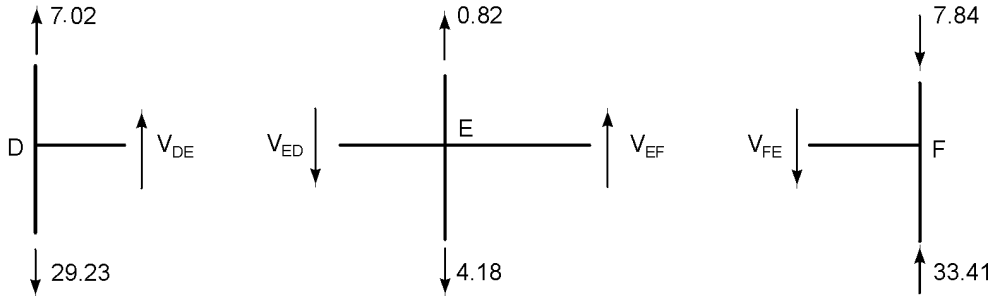
$$F_{EH} = 4.18 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

Por consiguiente:

$$F_{DG} = 7.000 \times 4.18 = 29.23 \text{ kN} \quad (\text{tensión})$$

$$F_{FI} = -8.000 \times 4.18 = -33.41 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

5. Corte en las vigas. Se obtienen de los diagramas siguientes:



$$V_{DE} = -V_{ED} = 29.23 - 7.02 = 22.21 \text{ kN}$$

$$V_{EF} = -V_{FE} = 33.41 - 7.84 = 25.57 \text{ kN}$$

6. Momentos en los extremos de las vigas. Utilizando estos resultados, se obtiene:

$$M_{DE} = M_{ED} = -22.21 \times 2.50 = -55.52 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EF} = M_{FE} = -25.57 \times 3.50 = -89.50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

7. Momentos en los extremos de las columnas. Planteando equilibrio de nudos:

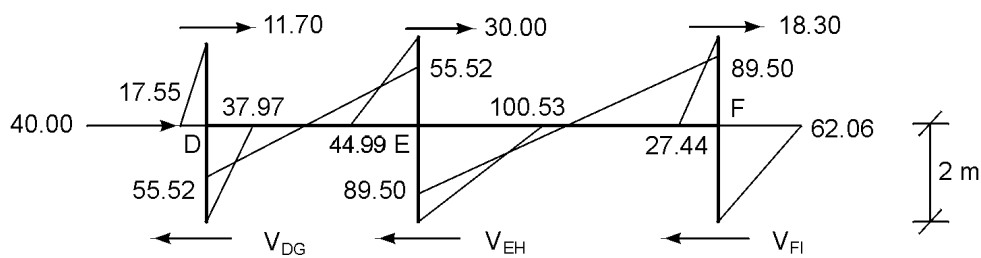
$$M_{DG} = M_{GD} = -(M_{DA} + M_{DE}) = -(17.55 - 55.52) = 37.97 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{EH} = M_{HE} = -(M_{ED} + M_{EB} + M_{EF}) =$$

$$= -(-55.52 + 44.99 - 89.50) = 100.03 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{FI} = M_{IF} = -(M_{FE} + M_{FC}) = -(-89.50 + 27.44) = 62.06 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

8. Fuerzas de corte en las columnas:

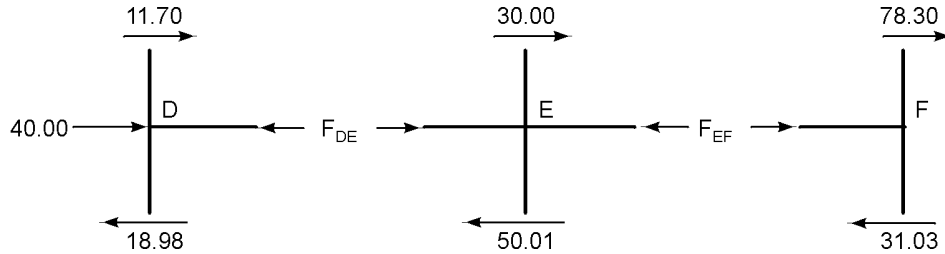


$$V_{DG} = \frac{37.97}{2} = 18.98 \text{ kN}$$

$$V_{EH} = \frac{100.03}{2} = 50.01 \text{ kN}$$

$$V_{FI} = \frac{62.06}{2} = 31.03 \text{ kN}$$

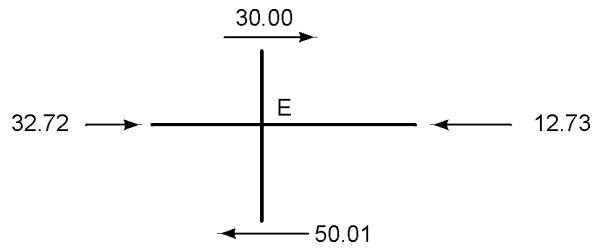
9. Fuerzas axiales en las vigas. Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales:



$$F_{DE} = 40.00 + 11.70 - 18.98 = 32.72 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

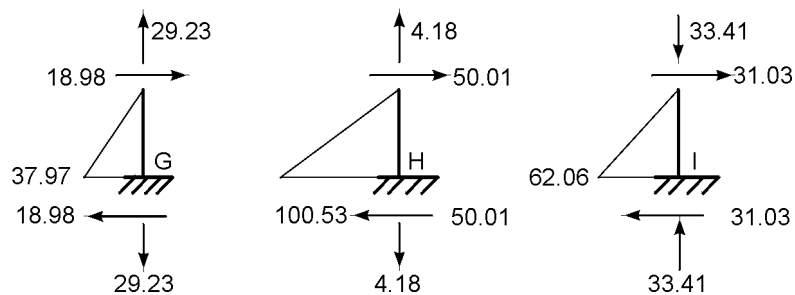
$$F_{BF} = 31.03 - 18.30 = 12.73 \text{ kN} \quad (\text{compresión})$$

Verificación



$$\sum_E F_x = 30.00 + 32.72 - 12.73 - 50.01 = -0.02 \text{ kN} \approx 0$$

Finalmente, se dibujan los diagramas de los tramos inferiores de las columnas.



9.4 MÉTODO DE NEWMARK

Uno de los métodos aproximados más útiles es el propuesto por Newmark (referencia 9.1), que es fundamentalmente un procedimiento numérico para calcular momentos y deflexiones en vigas y columnas. También se puede emplear, mediante aproximaciones sucesivas, para calcular las cargas críticas de pandeo de miembros de sección variable. Métodos similares habían sido propuestos por varios autores, pero Newmark consideró, con razón, que el suyo los aventajaba a todos en simplicidad y en precisión (referencia 9.2).

En términos matemáticos, el procedimiento se puede aplicar a la integración numérica de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales, directamente en algunos casos y mediante aproximaciones sucesivas en otros. El método conduce a resultados exactos cuando el diagrama de cargas está limitado por líneas rectas o por arcos de parábolas. Para otras situaciones se obtienen respuestas aproximadas, tanto más exactas cuanto mayor sea el número de tramos en que se ha subdividido el miembro en estudio. Newmark estimó que para la mayoría de los problemas que se presentan en la práctica, sólo se necesitaban cinco o seis segmentos. Hoy en día, con una calculadora programable, fácilmente se pueden considerar diez o veinte tramos.

El procedimiento está diseñado específicamente para resolver problemas en los que la respuesta deseada se expresa en función de segundas derivadas conocidas. A tal categoría pertenecen el corte y momento de una viga ya que, por estática:

$$w = \frac{dV}{dx}$$

$$\rightarrow V = \int w (dx) \quad (9.1)$$

y

$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\rightarrow M = \int V(dx) = \iint w (dx) (dx) \quad (9.2)$$

en donde:

w = carga por unidad de longitud en un punto a la distancia x del comienzo del elemento

V = fuerza de corte en dicho punto

M = momento en el mismo sitio

Por otra parte:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (9.3)$$

$$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx \quad (9.4)$$

$$\rightarrow y = \int y' (dx) = \iint \frac{M}{EI} (dx) (dx) \quad (9.5)$$

en donde y es la deflexión de la viga en el punto x , y' su pendiente, E el módulo elástico e I el momento de inercia correspondiente.

Recordando el concepto de *viga conjugada*:

$$y' = \bar{V} = \int \bar{w} (dx) \quad (9.4a)$$

$$y = \bar{M} = \iint \bar{w} (dx) (dx) \quad (9.5a)$$

en donde \bar{V} y \bar{M} representan el corte y el momento en la viga conjugada y $w = \bar{M} / EI$ es la *carga elástica* correspondiente.

El método consiste en seleccionar puntos específicos a lo largo de la viga –denominados *nodos*– en los cuales se encontrará la respuesta y en relacionar luego cantidades como carga, corte, momento y deflexión con dichos puntos. La posición de los *nodos* debe escogerse de tal manera que se tengan en cuenta los aspectos importantes de carga y de variación de momento de inercia.

Aunque el método se ideó pensando en casos de carga compleja y variación de sección, como los indicados en la figura 9.1, su aplicación es tan simple que vale la pena usarlo incluso en el caso elemental de cargas concentradas, actuando sobre una viga prismática, según se verá en el ejemplo 9.4.

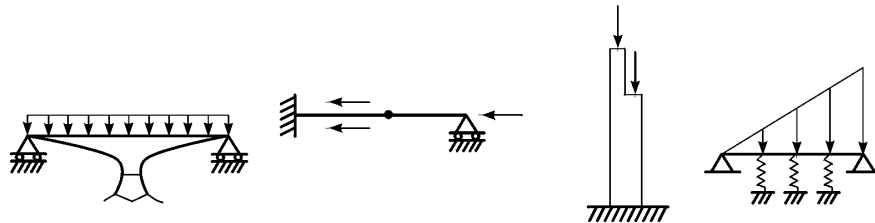


Figura 9.1 Aplicaciones del método de Newmark.

Todos los cálculos se refieren sólo a los puntos nodales. El método para encontrar corte y momento es uno de integración progresiva, semejante al método del polígono funicular, en el cual la integración se hace gráficamente.

Para evitar confusiones, se utilizarán las siguientes convenciones de signos: las cargas se considerarán positivas cuando actúan hacia arriba; los cortes serán positivos cuando la resultante de las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección, tiene esa misma dirección, y los momentos tendrán dicho signo cuando producen compresión en las fibras superiores de la viga. Tales convenciones se resumen en la figura 9.2.

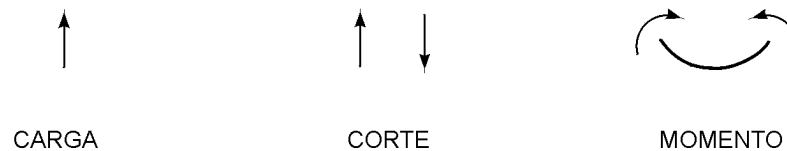


Figura 9.2 Convenciones de signos positivos.

De esta manera es posible averiguar los cortes y momentos por adiciones sucesivas de las cantidades involucradas cuando se procede de izquierda a derecha, y mediante subtracciones cuando se procede a la inversa.

9.4.1 Cálculo de fuerzas de corte y momentos en elementos sometidos a cargas concentradas

El procedimiento numérico se muestra en forma general en la figura 9.3, en la que se supone que una serie de cargas concentradas P_A , P_B , P_C , etc., actúan verticalmente sobre la viga (referencia 9.2)

Los puntos A, B, C, etc., se consideran *nodos*. Para encontrar los valores de corte y momento producidos por las cargas dadas, se debe partir de dos valores conocidos: ya sea uno de corte y otro de momento, o de los momentos en dos puntos. Estos valores son esenciales para poder integrar de carga a fuerza de corte y de ésta a momento; están relacionados con las constantes de integración, y generalmente se obtienen de las condiciones en los extremos del miembro o en sus apoyos.

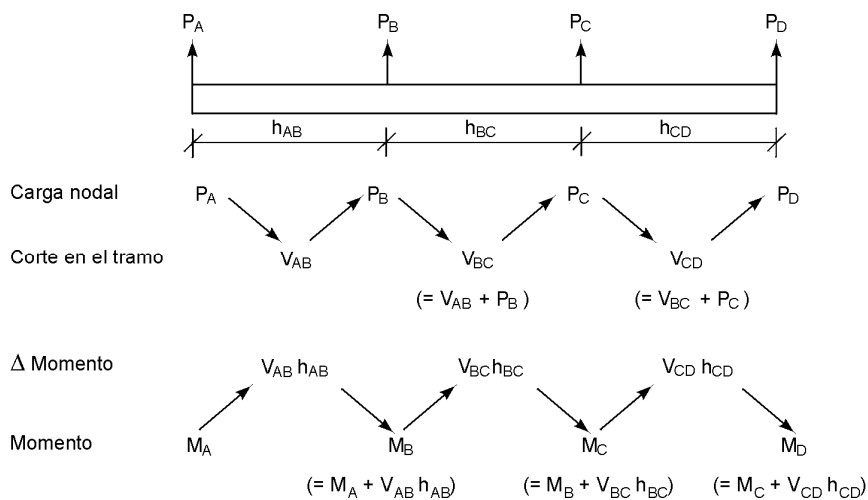


Figura 9.3 Integración numérica de fuerzas de corte y momentos (referencia 9.2).

Cuando se conoce un valor de la fuerza de corte y otro del momento, la integración puede llevarse a cabo directamente de la carga nodal P al corte V y al momento M . Sin embargo, con frecuencia no se conoce el valor del corte en ningún punto, sino que en su lugar hay dos puntos con momento conocido, de tal manera que las dos constantes de integración están relacionadas con las ecuaciones de momento y los valores del corte no pueden calcularse directamente a partir de las cargas nodales.

El método más simple para solucionar este problema consiste en suponer un valor del corte en algún punto adecuado de la viga, como base para el cálculo completo de los cortes y momentos, y luego aplicar una corrección simple a los valores obtenidos así, para ajustarlos a las condiciones conocidas de momento. Generalmente habrá algún error en el corte supuesto:

$$e = V \text{ supuesto} - V \text{ verdadero} \quad (9.6)$$

Por las ecuaciones de corte y momento se sabe que dicho error en corte se mantendrá constante en todos los tramos y producirá, a su vez, un error que varía linealmente en el diagrama de momentos, como se ilustra en la figura 9.4. En ella se ve que, si se supuso un

valor de corte en AB, el error en momentos en cualquier nodo es proporcional a su distancia de A, y con base en esto se aplicará la corrección correspondiente:

$$\text{Corrección en } M = e x_i \quad (9.7)$$

en donde x_i es la abscisa del nodo i , medida a partir del punto que no necesita corrección.

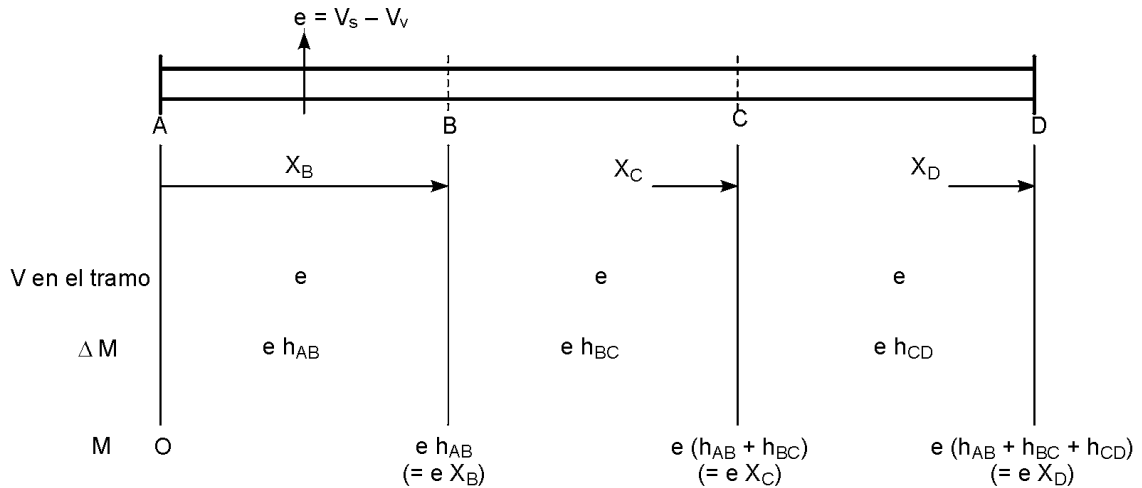


Figura 9.4 Propagación del error “e” en el corte supuesto para el tramo AB (referencia 9.2).

Una vez calculado “e”, los valores correctos de V se pueden obtener ya sea substrayendo dicho valor de los cortes calculados para los diferentes tramos o, si se prefiere, a partir de los momentos corregidos, mediante la ecuación:

$$V_{ij} = \frac{\Delta M_{ij}}{h_{ij}} = \frac{M_j - M_i}{h_{ij}} \quad (9.8)$$

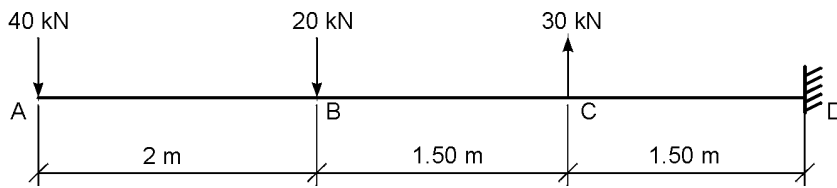
en donde:

- V_{ij} = fuerza de corte verdadera en el tramo ij
- M_i = momento verdadero en el extremo i (izquierdo) del tramo ij
- M_j = momento verdadero en el extremo j (derecho) del tramo ij
- h_{ij} = longitud del tramo ij

Los dos casos generales se ilustrarán con los siguientes ejemplos:

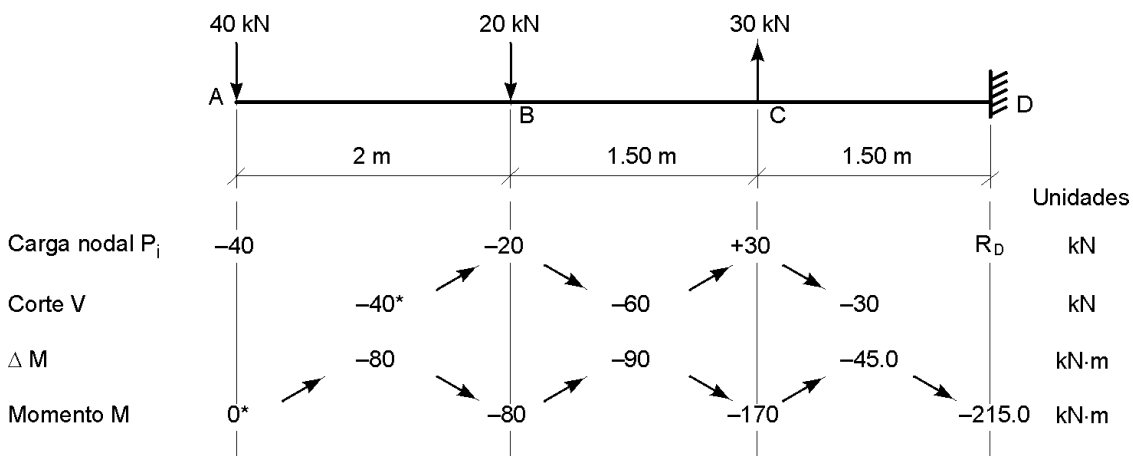
Ejemplo 9.4

Calcule las fuerzas de corte y momentos en la viga mostrada.



Solución

El cuadro siguiente intenta ser autoexplicativo; los valores señalados con asterisco son los valores conocidos, de los cuales se parte para realizar el proceso de integración.

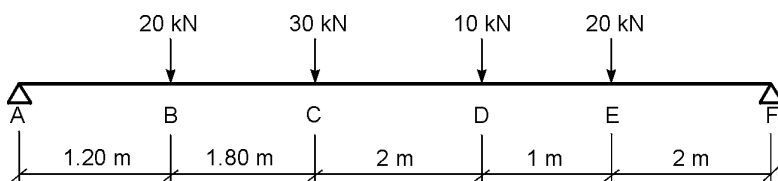


Así por ejemplo, para el corte se comienza con -40 kN en el intervalo entre A y B; al llegar a este punto se le agrega la carga nodal de -20 kN, con lo cual resulta un corte de -60 kN para el tramo BC. En C se añaden 30 kN, lo cual deja un valor de -30 kN para el tramo CD; el cierre se logra con una reacción de 30 kN en el apoyo.

El incremento en momento entre un nodo y otro se obtiene multiplicando el corte en cada tramo por la longitud del mismo. Esto conduce a los valores de -80 , -90 y -45 kN·m en los tres tramos. Finalmente, partiendo de un momento nulo en A se agrega el primer incremento de -80 kN·m para obtener este mismo valor en B; al sumarle -90 kN·m del tramo BC se obtiene un momento de -170 kN·m en el nodo C, y así sucesivamente hasta llegar a -215.0 kN·m en el apoyo.

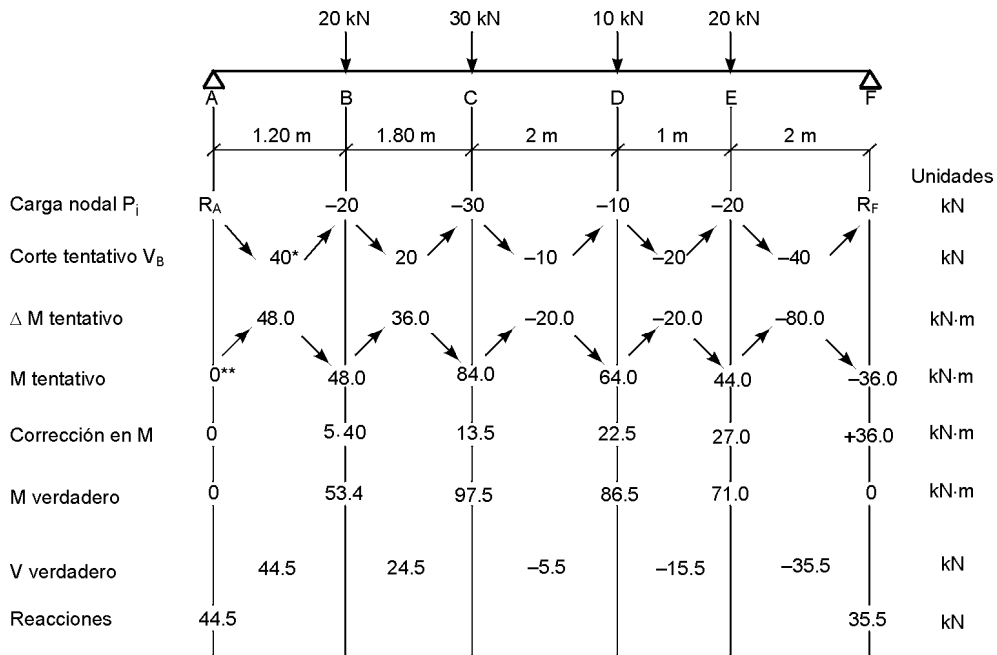
Ejemplo 9.5

Calcule las fuerzas de corte y momentos en la viga mostrada.



Solución

En este caso no se conoce de antemano el valor de la fuerza de corte en ningún punto. Por tanto, para el primer tramo se supuso que vale 40 kN (valor con asterisco), o sea la mitad de la carga aplicada a la viga, y partiendo de este valor se realizó el proceso de integración para las fuerzas de corte en los tramos y, con éstas, el cálculo de los incrementos de momento en los tramos correspondientes.



Para evaluar los momentos en los nodos se partió del momento en A, que por corresponder a un apoyo simple se sabe que es igual a cero (valor con dos asteriscos). Siguiendo el proceso ya indicado se obtuvo un valor de $M_F = -36.0$ kN·m, que está errado, pues allí también el momento debe ser cero. En consecuencia, el error en el corte supuesto era de:

$$e = \frac{36.0}{8} = 4.5 \text{ kN}$$

ya que la corrección que se le debe aplicar a M_F , situado a 8 m del punto A, es de 36.0 kN·m. Para averiguar la corrección en los otros puntos nodales se aplicó la ecuación (9.7).

El lector podrá verificar los valores verdaderos de fuerzas de corte por cualquiera de los dos procedimientos señalados anteriormente.

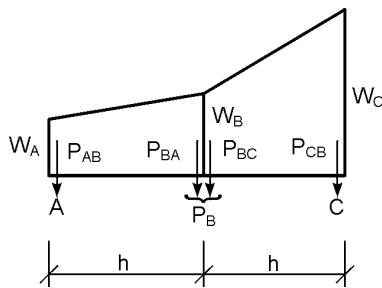
9.4.2 Cálculo de fuerzas de corte y momentos en elementos sometidos a cargas distribuidas

Cuando las cargas aplicadas sobre el elemento, no son concentradas sino distribuidas, para aplicar el método es necesario reemplazar la carga verdadera por un sistema equivalente de cargas concentradas, calculadas en forma tal que la fuerza de corte y el momento en cada nodo sean los que tendría la viga sometida al sistema de cargas original. Esto

equivale a considerar que la carga dada no se aplica directamente a la viga sino mediante viguetas simplemente apoyadas, cuyas reacciones pasan a ser las cargas concentradas equivalentes sobre la viga propiamente dicha.

Por estática se encuentra que para cargas trapezoidal y parabólica las fuerzas concentradas correspondientes son las dadas en la figura 9.5 (referencias 9.1 y 9.2). En dicha figura se ha supuesto que los tramos considerados tienen la misma longitud (h).

Si la curva de cargas es de origen más alto, se pueden evaluar las fórmulas de concentración apropiadas: en general, sin embargo, se prefiere suponer que la aproximación parabólica es suficiente, siempre y cuando el error se mantenga dentro de los límites aceptables mediante una adecuada escogencia de los nodos, uso de tramos pequeños o utilización del promedio de dos soluciones parabólicas diferentes, con un tercer punto extrapolado.

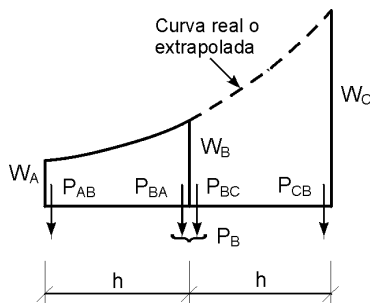


$$P_{AB} = \frac{h}{6} (2W_A + W_B)$$

$$P_{BA} = \frac{h}{6} (2W_B + W_A)$$

$$P_B = \frac{h}{6} (W_A + 4W_B + W_C)$$

(a) Carga trapezoidal



$$P_{AB} = \frac{h}{24} (7W_A + 6W_B - W_C)$$

$$P_{BA} = \frac{h}{24} (3W_A + 10W_B - W_C)$$

$$P_B = \frac{h}{12} (W_A + 10W_B + W_C)$$

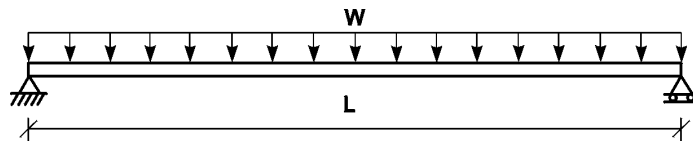
(b) Carga parabólica

Figura 9.5 Cargas concentradas equivalentes.

El uso de las fórmulas de concentración para carga trapezoidal se ilustrará en el siguiente ejemplo de una viga simplemente apoyada, con carga uniformemente repartida.

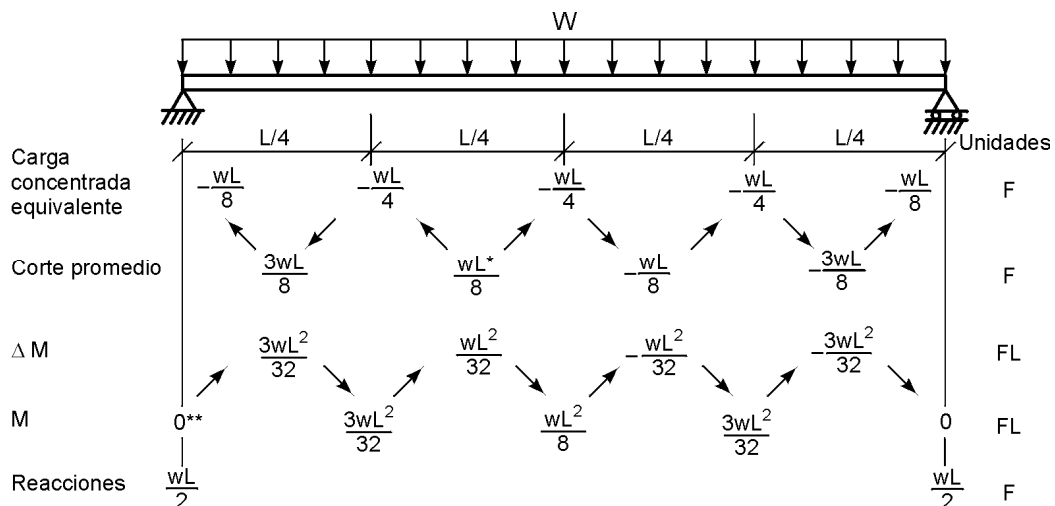
Ejemplo 9.6

Calcular las fuerzas de corte y momentos en una viga simplemente apoyada, cargada uniformemente sobre toda la luz.



Solución

En este caso se dividió la viga en cuatro tramos, con cargas nodales calculadas teniendo en cuenta la longitud tributaria a cada nudo, y se aprovechó la simetría, considerando que el corte en el centro de la luz debe ser cero. En consecuencia, se dividió la carga nodal central en dos y se le asignó el resultado, con signo contrario, al tramo inmediatamente anterior a dicho nudo. A partir de él se llevó a cabo el proceso en ambos sentidos. Obsérvese que al proceder de izquierda a derecha las cargas nodales deben restarse en vez de sumarse.



Como el corte supuesto en el segundo tramo era el correcto, los resultados obtenidos de momento dieron exactos, de una vez, como podrá verificar el lector.

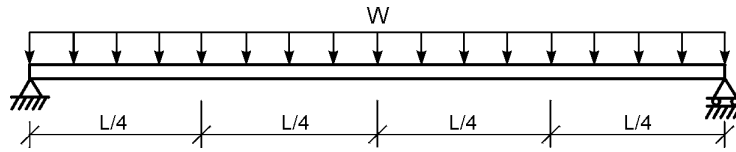
9.4.3 Cálculo de giros y deflexiones de vigas

Como se mencionó con anterioridad, el método de Newmark puede utilizarse ventajosamente en combinación con el de la *viga conjugada*, para evaluar los giros y deflexiones en los nodos de la viga real, mediante la integración numérica de las ecuaciones (9.4a) y (9.5a).

El proceso se ilustrará calculando los giros y deflexiones de la viga del ejemplo 9.6.

Ejemplo 9.7

Averiguar los giros y deflexiones en los cuartos de la luz de la viga mostrada.



Solución

Para empezar, se carga la viga conjugada con el diagrama M/EI de la viga real y se evalúan las cargas nodales con las fórmulas de concentración parabólicas.

Para el primer punto se obtiene:

$$P_1 = \frac{(L/4)}{24} \left[7 \times 0 + 6 \times \frac{-3wL^2}{32 EI} - \frac{-wL^2}{8 EI} \right] = -\frac{7wL^3}{1536 EI}$$

Para el punto siguiente se utiliza la fórmula de concentración central:

$$P_2 = \frac{(L/4)}{12} \left[0 + 10 \times \frac{-3wL^2}{32 EI} + \frac{-wL^2}{8 EI} \right] = -\frac{34wL^3}{1536 EI}$$

Para el punto medio, calculando con la misma fórmula:

$$P_3 = \frac{(L/4)}{12} \left[\frac{-3wL^2}{32 EI} + 10 \times \frac{-wL^2}{8 EI} + \frac{-3wL^2}{32 EI} \right] = -\frac{46wL^3}{1536 EI}$$

Por simetría los puntos 4 y 5 tienen los mismos valores de los nodos 2 y 1, respectivamente. Una vez calculadas las cargas nodales, se lleva a cabo el proceso de integración numérica como se muestra en el siguiente cuadro, en el cual, por comodidad, se han factorizado los diferentes términos por los valores indicados en su última columna.

	1	2	3	4	5	Factor
Carga concentrada equivalente	-7	-34	-46	-34	-7	$\frac{wL^3}{1536 EI}$
$y' \text{ prom} = \bar{\nabla}$	57	23*	-23	-57		$\frac{wL^3}{1536 EI}$
$\Delta y = \Delta \bar{M}$	57	23	-23	-57		$\frac{wL^4}{6144 EI}$
$y = \bar{M}$	0**	57	80	57	0	$\frac{wL^4}{6144 EI}$
Rotación en los apoyos = R	64				-64	$\frac{wL^3}{1536 EI}$

Obsérvese que de nuevo se utilizó la simetría al suponer el valor de V en el segundo tramo, y de esta manera se evitó tener que efectuar corrección. Por ser parabólico el diagrama de cargas, las respuestas son exactas a pesar del pequeño número de tramos. En efecto:

$$\theta_A = \bar{R}_A = \frac{64 wL^3}{1536 EI} = \frac{wL^3}{24 EI}$$

$$Y_{C_L} = \bar{M}_{C_L} = \frac{80wL^4}{6144 EI} = \frac{5wL^4}{384 EI} \downarrow$$

que son los valores obtenidos por los métodos tradicionales.

9.4.4 Cálculo de rigideces absolutas, coeficientes de transmisión y momentos de empotramiento

Las vigas estáticamente indeterminadas pueden resolverse mediante el método de Newmark, utilizando el principio de superposición en conexión con los efectos de momentos redundantes aplicados en los extremos de la viga, y las condiciones de giro y deflexión que deben cumplirse en los apoyos.

Esto resulta particularmente útil para evaluar las rigideces absolutas, coeficientes de transmisión y momentos de empotramiento de elementos de sección variable y, por extensión, sus matrices de rigidez. Para ello se parte de las definiciones respectivas, que se presentan gráficamente en la figura 9.6.

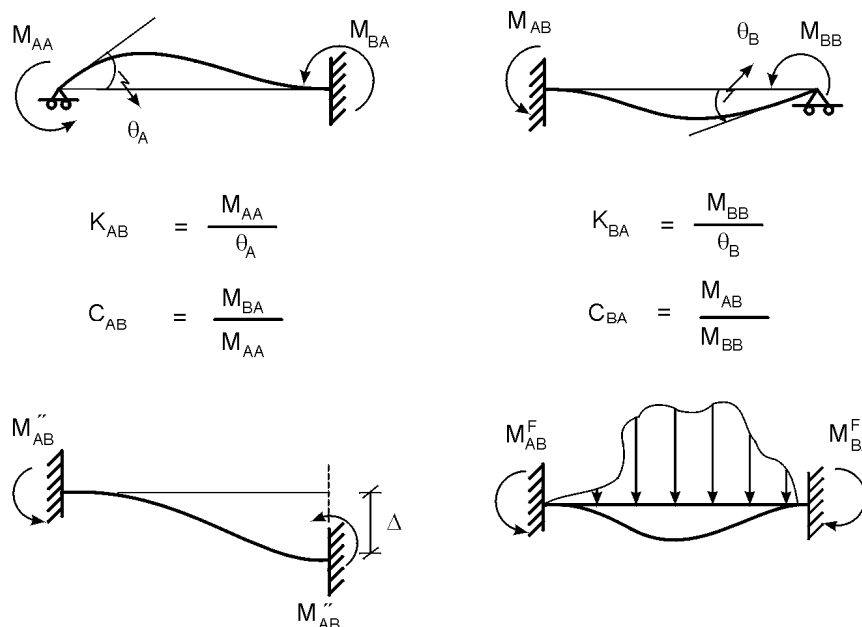


Figura 9.6 Definición de rigideces absolutas, coeficientes de transmisión, momentos de desplazamiento y momentos de empotramiento.

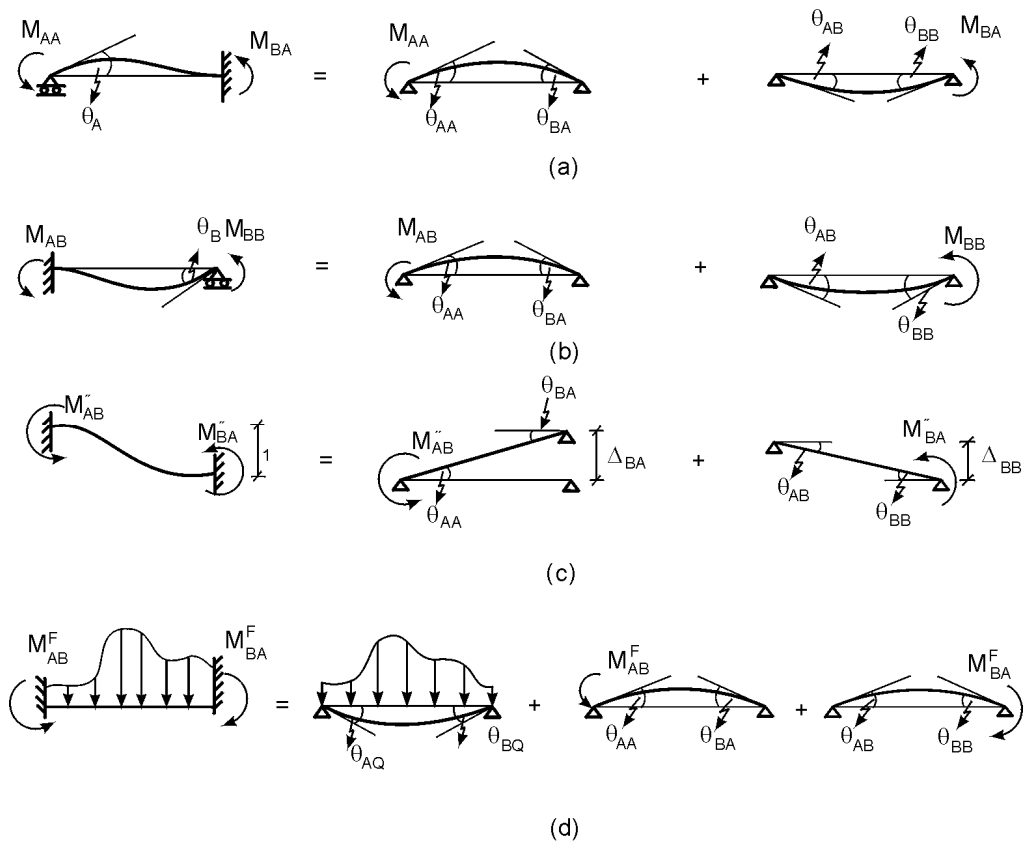
Las superposiciones empleadas en cada caso y las condiciones de apoyo, respectivamente, aparecen condensadas en la figura 9.7 y en las fórmulas siguientes:

Caso a

$$\theta_B = \theta_{BA} - \theta_{BB} = 0$$

Llamando $\theta_{ij} = y'_{ij} M_j$, en donde y'_{ij} es el giro en el nudo i producido por un momento unitario en j,

$$\begin{aligned} y'_{BA} M_{AA} - y'_{BB} M_{BA} &= 0 \\ \rightarrow C_{AB} &= \frac{M_{BA}}{M_{AA}} = \frac{y'_{BA}}{y'_{BB}} \end{aligned} \quad (9.9)$$



En cada caso:

θ_{ij} = giro en i causado por el momento aplicado en j

M_{ij} = momento en i correspondiente al giro en j

Figura 9.7 Aplicación del Principio de superposición a los cuatro casos de la figura 9.6.

Por otra parte:

$$\theta_A = \theta_{AA} - \theta_{AB} = y'_{AA} M_{AA} - y'_{AB} M_{BA}$$

$$\rightarrow K_{AB} = \frac{M_{AA}}{\theta_A} = \frac{1}{y'_{AA} - y'_{AB} C_{AB}} \quad (9.10)$$

$$= \frac{y'_{BB}}{y'_{AA} y'_{BB} - y'_{AB} y'_{BA}} \quad (9.10a)$$

Caso b

$$\theta_A = \theta_{AA} - \theta_{AB} = y'_{AA} M_{AA} - y'_{AB} M_{BB} = 0$$

$$\rightarrow C_{AB} = \frac{M_{AB}}{M_{BB}} = \frac{y'_{AB}}{y'_{AA}} \quad (9.11)$$

En el otro extremo:

$$\theta_B = -\theta_{BA} + \theta_{BB} = y'_{BA} M_{AB} + y'_{BB} M_{BB}$$

$$\rightarrow K_{BA} = \frac{M_{BB}}{\theta_B} = \frac{1}{y'_{BB} - y'_{BA} C_{BA}} \quad (9.12)$$

$$= \frac{y'_{AA}}{y'_{AA} y'_{BB} - y'_{AB} y'_{BA}} \quad (9.12a)$$

Caso c

Con referencia al apoyo B

$$\theta_B = \theta_{BA} - \theta_{BB} = y'_{BA\Delta} M''_{AB} - y'_{BB\Delta} M''_{BA} = 0$$

$$\Delta_B = \Delta_{BA} - \Delta_{BB} = y'_{BA\Delta} M''_{AB} - y'_{BB\Delta} M''_{BA} = 1$$

y resolviendo este par de ecuaciones:

$$D'' = y'_{BA\Delta} y'_{BB\Delta} - y'_{BB\Delta} y'_{BA\Delta} \quad (9.13)$$

$$M''_{AB} = \frac{y'_{BB\Delta}}{D''}; M''_{BA} = \frac{y'_{BA\Delta}}{D''} \quad (9.14)$$

Caso d

Para el cálculo de los momentos de empotramiento se estudiará una distribución cualquiera de carga, y se designarán como θ_{AQ} y θ_{BQ} los giros producidos por dicha carga en los apoyos de una viga simplemente apoyada. Por la condición de empotramiento se puede escribir entonces:

$$\theta_A = \theta_{AQ} - \theta_{AA} - \theta_{AB} = \theta_{AQ} - y'_{AA} M^F_{AB} - y'_{AB} M^F_{BA} = 0$$

$$\theta_B = \theta_{BQ} - \theta_{BA} - \theta_{BB} = \theta_{BQ} - y'_{BA} M^F_{AB} - y'_{BB} M^F_{BA} = 0$$

que se puede reescribir así:

$$y'_{AA} M_{AB}^F + y'_{AB} M_{BA}^F = \theta_{AQ}$$

$$y'_{BA} M_{AB}^F + y'_{BB} M_{BA}^F = \theta_{BQ}$$

y cuya solución es:

$$M_{AB}^F = \frac{y'_{BB} \theta_{AQ} - y'_{AB} \theta_{BQ}}{D_F} \quad (9.15a)$$

$$M_{BA}^F = \frac{y'_{AA} \theta_{BQ} - y'_{BA} \theta_{AQ}}{D_F} \quad (9.15b)$$

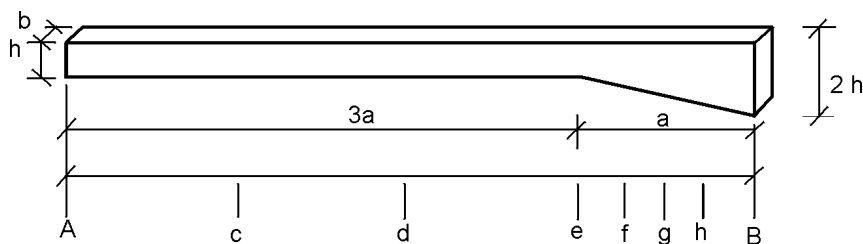
en donde

$$D^F = y'_{AA} y'_{BB} - y'_{AB} y'_{BA} \quad (9.16)$$

Se observa que en las ecuaciones (9.9) a (9.16) los signos de los diferentes términos involucrados se consideran positivos cuando tienen los sentidos indicados en la figura 9.7.

Ejemplo 9.8

Calcular las rigideces absolutas, coeficientes de transmisión, momentos por desplazamiento y momentos de empotramiento para carga repartida, de la viga con ancho uniforme b y altura variable, mostrada en la figura siguiente.



Solución

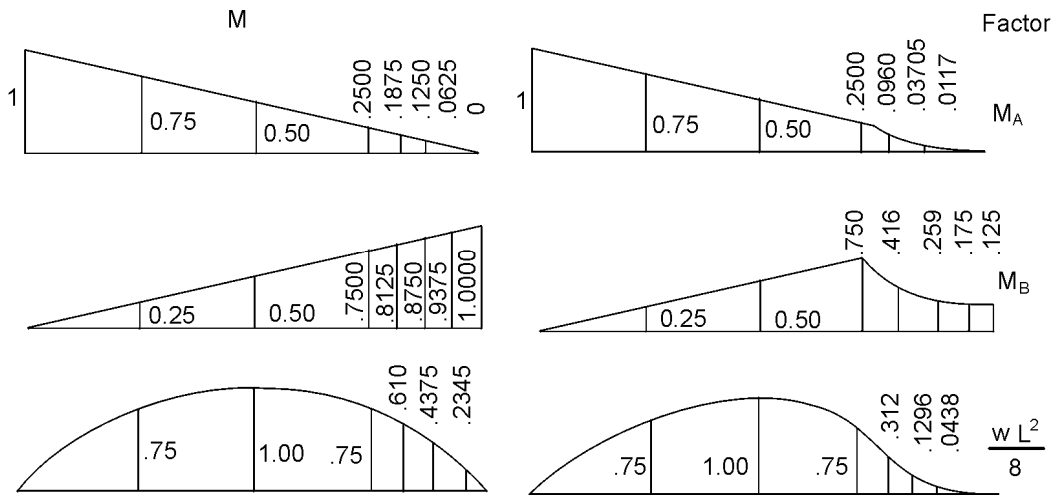
Se tomó como I de referencia el valor correspondiente a la porción prismática de la viga y la parte acartelada se subdividió en cuatro tramos, cada uno de longitud igual a $a/4$.

Los diagramas de momento necesarios para efectuar el proceso se evaluaron por estática y a partir de ellos se calcularon los diagramas M/EI , que constituyen la carga \bar{w} sobre la viga conjugada. Estos diagramas se muestran en la página siguiente.

A los tramos rectos de dichos diagramas se les aplicaron entonces las fórmulas de concentración para distribución trapezoidal, y a los curvos las de concentración parabólica. Con los valores resultantes se efectuó el proceso según se indica en las páginas

369 a 372. Obsérvese que para encontrar los momentos por desplazamiento se parte de una viga empotrada en A.

Hay que anotar que por el teorema de las deflexiones recíprocas, y'_{BA} debería ser igual a y'_{AB} . En este caso se obtuvo una diferencia del 0.049%, que nos permite juzgar la precisión obtenida.



Finalmente, una vez encontrados los giros en los apoyos, las respuestas buscadas se pueden obtener mediante las ecuaciones 9.9 a 9.16. Aquí, sin embargo, se ha optado por replantear la superposición para un mejor entendimiento.

Coefficientes de transmisión

$$\theta_A = 0,$$

$$\theta_B = 0$$

$$58.901M_{AA} - 79.249M_{BA} = 0$$

$$\rightarrow C_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AA}} = 0.7432$$

$$\theta_A = 0,$$

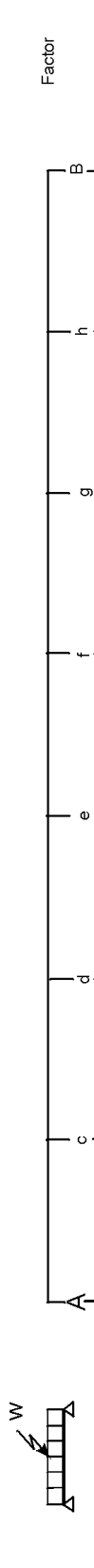
$$\theta_B \neq 0$$

$$127.179M_{AB} - 58.872M_{BB} = 0$$

$$\rightarrow C_{AB} = \frac{M_{AB}}{M_{BB}} = 0.4629$$

	A	e	f	g	h	B	Factor
M_A							
M	1.0	.25	.1875	.125	.0625	0	$\frac{M_A}{1}$
I	1.0	1.0	1.953	3.375	5.360	8.0	$\frac{M_A}{EI}$
$\frac{M}{EI}$	1.0	.25	.0980	.03705	.01166	0	$\frac{M_A}{68 EI}$
Cargas nodales y''	108	$+72 + 2.289$ $+74.289$	$+2.494$	$+9564$	$+3073$	$+0.329$	$\frac{M_A \cdot a}{68 EI}$
Δy			$+54.289$	$+56.783$	$+57.739$	$+58.046$	$\frac{M_A \cdot a^3}{96 EI}$
y		-60	$+13.572$	$+14.196$	$+14.435$	$+14.512$	$\frac{M_A \cdot a^3}{96 EI}$
y_c		-60.000	-46.428	-32.232	-17.797	-3.285	$\frac{M_A \cdot L^2}{1536 EI}$
y final		$+2.464$	$+2.669$	$+2.874$	$+3.080$	-3.285	$\frac{M_A \cdot L^2}{1536 EI}$
Δy		-57.536	-43.759	-29.358	-14.717	0	$\frac{M_B \cdot L^2}{384 EI}$
y' final	-127.179	$+55.110$	$+14.401$	$+14.641$	$+14.717$	$+14.717$	$\frac{M_B \cdot L}{384 EI}$
Cargas nodales							
M_B	0	.75	.8125	.875	.9375	1.00	$\frac{M_B}{EI}$
M	0	.75	.416	.259	.175	.125	$\frac{M_B}{EI}$
$\frac{M}{EI}$		$+72 + 7.487$ $+79.487$	$+10.338$	$+6.362$	$+4.268$	$+1.666$	$\frac{M_B \cdot a}{96 EI}$
Cargas nodales	$+38$						$\frac{M_B \cdot a^2}{96 EI}$
y'			$+59.487$	$+69.825$	$+76.187$	$+80.455$	$\frac{M_B \cdot a^2}{96 EI}$
Δy		-20	$+14.872$	$+17.456$	$+19.047$	$+20.114$	$\frac{M_B \cdot a^2}{96 EI}$
y		-60	-45.128	-27.672	-8.625	$+11.489$	$\frac{M_B \cdot a^2}{96 EI}$
y_c		-8.617	-9.335	-10.053	-10.771	-11.489	$\frac{M_B \cdot L^2}{1536 EI}$
y final		-68.617	-54.463	-37.725	-19.396	0	$\frac{M_B \cdot L^2}{1536 EI}$
Δy			$+14.154$	$+16.738$	$+18.329$	$+19.396$	$\frac{M_B \cdot L}{384 EI}$
y' final	-58.872	$+56.615$	$+66.953$	$+73.315$	$+77.583$	$+79.249$	$\frac{M_B \cdot L}{384 EI}$

									Factor
	Cargas nodales y''	-108.000							$\frac{M''_{AB} a}{96 EI}$
	y'	(0)	-74.289	-2.494	-9564	-3073	-3029		$\frac{M''_{AB} L}{384 EI}$
	Δy		-182.289	-184.783	-185.739	-186.047	-186.080		$\frac{M''_{AB} L^2}{1536 EI}$
	y		-45.573	-46.195	-46.435	-46.513			$\frac{M''_{AB} L^2}{1536 EI}$
		(0)	-324.000	-415.768	-462.203	-508.716			
	Cargas nodales y''	36.000							$\frac{M''_{BA} a}{96 EI}$
	y'	(0)	79.487	10.338	6.362	4.268	1.666		$\frac{M''_{BA} L}{384 EI}$
	Δy		115.487	125.825	132.187	136.455	138.121		$\frac{M''_{BA} L^2}{1536 EI}$
	y		28.872	31.456	33.047	34.114			$\frac{M''_{BA} L^2}{1536 EI}$
		(0)	108.000	136.872	168.328	201.375	235.489		



	A	c	d	e	f	g	h	B	Factor
Cargas nodales y''	0	.75	1.00	.75	.61	.4375	.2345	0	$\frac{WL^2}{8}$
	0	.75	1.00	.75	.312	.1296	.0438	0	$\frac{WL^2 a}{192 EI}$
	3.50	17.0	23.0	10.5	2.000	.826	.284	0.333	
				12.248					
Ensayo				+20.0	+32.248	+34.248	+35.074	+35.358	
				+20.0	+8.062	+8.562	+8.768	+8.839	
y				-3.000	+5.062	+13.624	+22.392	+31.231	
				-23.423	-25.375	-27.327	-29.279	-31.231	
y final	0	-27.808	-38.616	-26.423	-20.313	-13.703	-6.387	0	$\frac{WL^2 a^2}{192 EI}$
Δy		-27.808	-10.808	+12.193	+6.110	+6.816	+6.887		
y' final	-31.308	-27.808	-10.808	+12.193	+24.441	+26.441	+27.267	+27.584	$\frac{WL^3}{768 EI}$
							+27.551	+27.551	

Rigideces absolutas

$$\begin{aligned}\theta_A &= \frac{L}{384 EI} (127.179M_{AA} - 58.872M_{BA}) = \\ &= \frac{M_{AA} L}{384 EI} (127.179 - 58.872 \times 0.7432) = 0.2173 \frac{M_{AA} L}{EI}\end{aligned}$$

$$\rightarrow K_{AB} = \frac{M_{AA}}{\theta_A} = 4.603 \frac{EI}{L}$$

$$\begin{aligned}\theta_B &= \frac{L}{384 EI} (79.249M_{BB} - 58.901M_{AB}) = \\ &= \frac{M_{BB} L}{384 EI} (72.249 - 58.901 \times 0.4629) = 0.1354 \frac{M_{BB} L}{EI}\end{aligned}$$

$$\rightarrow K_{BA} = \frac{M_{BB}}{\theta_B} = 7.387 \frac{EI}{L}$$

Momentos por desplazamiento

$$\theta_B = 1 \quad \frac{L}{384 EI} (186.080M_{AB}'' - 138.121M_{BA}'') = 0$$

$$y_B = 1 \quad \frac{L^2}{1536 EI} (508.716M_{AB}'' - 235.489M_{BA}'') = 1$$

resolviendo el sistema, se obtiene:

$$M_{AB}'' = 8.023 \frac{EI}{L^2}; \quad M_{BA}'' = 10.808 \frac{EI}{L^2}$$

Momentos de empotramiento por carga uniforme

$$\theta_A = 0 \quad \rightarrow \quad 31.308 \frac{wL^3}{768 EI} - \frac{L}{384 EI} (127.179M_{AB}^F + 58.872M_{BA}^F) = 0$$

$$\theta_B = 0 \quad \rightarrow \quad 27.584 \frac{wL^3}{768 EI} - \frac{L}{384 EI} (58.901M_{AB}^F + 79.249M_{BA}^F) = 0$$

Al resolverlas, se obtiene:

$$M_{BA}^F = 0.06483 wL^2 = \frac{wL^2}{15.425}$$

$$M_{AB}^F = 0.12585 wL^2 = \frac{wL^2}{7.946}$$

El lector podrá verificar que se obtienen las mismas respuestas con la aplicación directa de las fórmulas dadas, en las cuales:

$$\begin{aligned}
 y'_{AA} &= \frac{127.179L}{384EI} & y'_{BA} &= \frac{58.901L}{384EI} \\
 y'_{AB} &= \frac{58.872L}{384EI} & y'_{BB} &= \frac{79.249L}{384EI} \\
 y'_{BA\Delta} &= \frac{186.080L}{384EI} & y'_{BB\Delta} &= \frac{138.121L}{384EI} \\
 \theta'_{AQ} &= \frac{31.308wL^3}{768EI} & \theta'_{BQ} &= \frac{27.584wL^3}{768EI} \\
 y'_{BA\Delta} &= \frac{508.716L^3}{1536EI} & y'_{BB\Delta} &= \frac{235.489L^2}{1536EI}
 \end{aligned}$$

9.4.5 Evaluación de la matriz de rigidez de miembros acartelados

Una vez conocidos los valores anteriores, la evaluación de la matriz de rigidez de miembros acartelados es muy sencilla, pues basta recordar el significado físico de cada columna de dicha matriz que, como se explica en el capítulo 11, son las fuerzas necesarias para que el desplazamiento correspondiente a la columna en cuestión sea igual a uno, mientras que los otros desplazamientos permanecen iguales a cero. Se tiene entonces:

$$\{F\} = [K] \{\delta\} \quad (9.17)$$

y al expandirla:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (9.17a)$$

en donde las v representan desplazamientos normales al eje del elemento, los θ giros, e i y j sus extremos inicial y final.

Relacionando los términos anteriores con los tres primeros casos de la figura 9.6, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_{ij}'' + M_{ji}''}{L} & \frac{(1 + C_{ij}) K_{ij}}{L} & -\frac{M_{ij}'' + M_{ji}''}{L} & \frac{(1 + C_{ji}) K_{ji}}{L} \\ M_{ij}'' & K_{ij} & -M_{ij}'' & C_{ji} K_{ji} \\ -\frac{M_{ij}'' + M_{ji}''}{L} & -\frac{(1 + C_{ij}) K_{ij}}{L} & \frac{M_{ij}'' + M_{ji}''}{L} & -\frac{(1 + C_{ji}) K_{ji}}{L} \\ M_{ij}'' & C_{ji} K_{ij} & -M_{ij}'' & K_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (9.17b)$$

con lo cual queda definida la matriz $[K]$.

Ejemplo 9.9

Escribir la matriz de rigidez de la viga del ejemplo 9.8.

Solución

Utilizando las respuestas del ejemplo anterior y la ecuación (9.17b), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 18.83/L^3 & 8.02/L^2 & -18.83/L^3 & 10.81/L^2 \\ 8.02/L^2 & 4.60/L & -8.02/L^2 & 3.42/L \\ -18.83/L^3 & -8.02/L^2 & 18.83/L^3 & -10.81/L^2 \\ 10.81/L^2 & 3.42/L & -10.81/L^2 & 7.39/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

verificándose que hay total simetría a dos cifras decimales. Si se hubiese trabajado con tres, la máxima discrepancia habría sido de 3.419 vs 3.421, equivalente al 0.058%.

9.4.6 Programación del método de Newmark aplicado a elementos acartelados

Con base en el desarrollo anterior se programó el método de Newmark para hallar las rigideces absolutas, coeficientes de transmisión y momentos por desplazamiento de miembros acartelados y, a partir de ellos, los términos de su matriz de rigidez. El programa calcula también los momentos de empotramiento para carga uniformemente distribuida y para una carga concentrada arbitrariamente colocada (referencia 9.3). En el disco adjunto se incluye una versión del mismo en VISUAL BASIC.

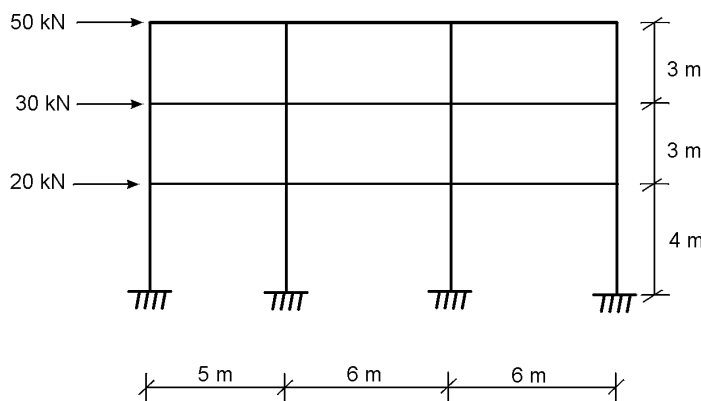
Aunque el programa sólo considera acartelamientos rectos, con muy poco esfuerzo se puede ampliar para que incluya otros tipos de variación en sección.

La longitud del elemento se dividió en 20 tramos, con lo cual se puede obtener una excelente aproximación. En general, el programa utiliza la fórmula de concentración central parabólica para evaluar las cargas nodales. En los apoyos y en los puntos de discontinuidad del diagrama M/EI , se usan las fórmulas de concentración lateral, parabólicas o trapezoidales, según el caso.

Para probar el programa se estudiaron doce elementos, entre éstos uno prismático, varios con acartelamiento en un solo extremo, uno con acartelamiento continuo de un extremo a otro y varios con acartelamiento en ambos extremos, tanto simétricos como asimétricos. En nueve casos fue posible comprobar las respuestas, excepto los momentos por desplazamiento, con las referencias 9.4 a 9.7; en los otros la verificación se hizo por interpolación. No se verificaron los momentos por desplazamiento por no aparecer en las referencias dadas y por carecer el autor de tiempo para hacerlo a mano. Sin embargo, el hecho de que para el elemento prismático se haya obtenido un valor de $6.00 EI/L^2$, que es correcto, y que para los otros elementos las respuestas sean lógicas, permite suponer la bondad del programa a este respecto.

EJERCICIOS

- 9.1 Analice la siguiente estructura utilizando los métodos aproximados del portal y de la estructura en voladizo. Dibuje los diagramas de corte y momento, la elástica y el refuerzo primario para esta situación de carga. Compare dichos resultados con los obtenidos por un método exacto.



Dimensiones
($b \times h$, mm)

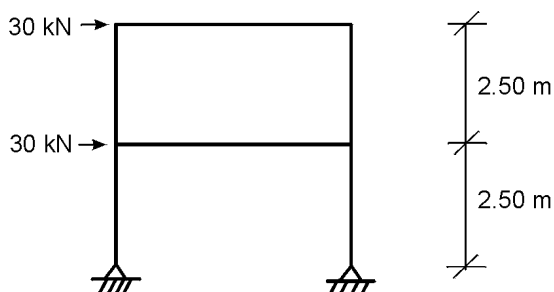
Vigas: 300×400

Columnas:

1^{er} piso: 300×400

Otras: 300×400

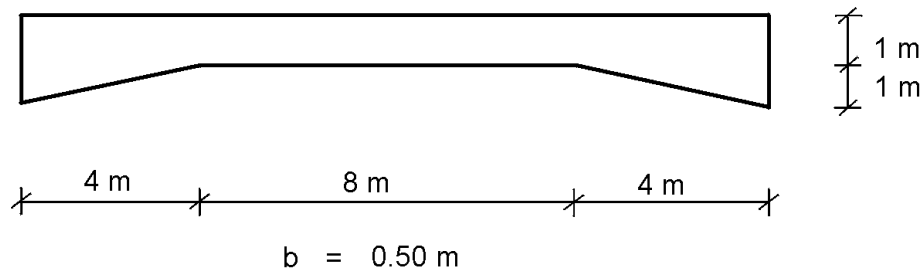
- 9.2 Analice la estructura del ejemplo 8.6 por los métodos aproximados del portal y de la estructura en voladizo, teniendo en cuenta la articulación de la base de las columnas. Compare sus resultados con los obtenidos en dicho ejemplo y explique las diferencias.



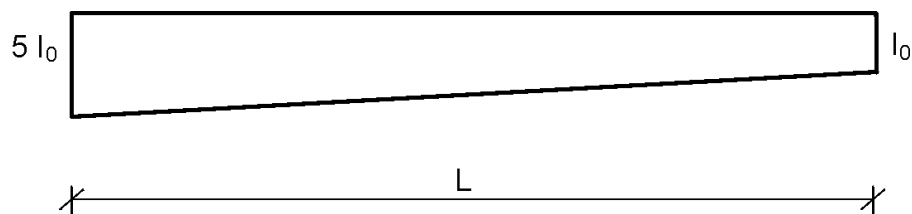
Dimensiones
($b \times h$, mm)

Vigas: 400×400
Columnas superiores: 350×350
Columnas inferiores: 400×400

- 9.3 Encuentre para la viga mostrada las rigideces, coeficientes de transmisión, momentos de empotramiento para una carga uniformemente repartida y momentos por desplazamiento. Compare los resultados con los correspondientes a una viga prismática sin acartelamientos y con los dados en la referencia 9.4.



- 9.4 Calcule la matriz de rigidez para una viga de ancho b y la forma indicada. Utilice como valor de referencia I_0 , el momento de inercia en su extremo derecho.



REFERENCIAS

- 9.1 Newmark, N.M.- *Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads*, Transactions, American Society of Civil Engineers, Paper N° 2202, 1942.
- 9.2 Godden, W.G.- *Numerical Analysis of Beam and Column Structures*, Prentice-Hall, 1965.

- 9.3 Uribe, J.- *El Método de Newmark y su aplicación al cálculo de la matriz de rigidez de miembros acartelados*, Cuartas Jornadas Estructurales de la Ingeniería Colombiana, Sociedad Colombiana de Ingenieros, noviembre de 1981.
- 9.4 Portland Cement Association, *Handbook of Frame Constants*, 1958.
- 9.5 Fernández Casado, C. y Fernández Casado, J.L.- *Cálculo de estructuras reticulares*, Dossat, 1967.
- 9.6 Leontovich, V.- *Pórticos y arcos*, Compañía Editorial Continental, 1961.
- 9.7 Manning, G.P.- *The Displacement Method of Frame Analysis*, Concrete Publications Limited, 1952.
- 9.8 Uribe, J.- *Aplicación del Programa STRESS al Análisis de Estructuras*, Círculo Nortesantandereano de Ingeniería Civil, Segundo Seminario Regional, octubre de 1979.

10.1 INTRODUCCIÓN

Un principio básico de la ingeniería estructural es que cada sección de un miembro debe diseñarse para que pueda resistir las máximas solicitaciones producidas por las cargas que actúan sobre él. En consecuencia, cuando hay cargas móviles o movibles es de capital importancia averiguar la posición crítica de dichas cargas que genera las máximas respuestas. Como se verá más adelante, no siempre la misma posición produce respuestas máximas de todas las posibles solicitaciones y, por tanto, la averiguación debe hacerse para cada respuesta en particular. A este respecto resulta muy útil el concepto de línea de influencia.

Dicho concepto fue formulado por el alemán E. Winkler en 1867 y unos 20 años más tarde Müller-Breslau descubrió el principio que lleva su nombre, que facilita enormemente la solución gráfica de las líneas de influencia tanto para estructuras determinadas como para indeterminadas.

10.2 DEFINICIÓN

La línea de influencia se puede definir como una curva cuya ordenada da el valor de una respuesta estructural: reacción, carga axial, corte, momento, etc., en un elemento o sección fijos de una estructura (apoyo, barra, viga, columna, etc.) cuando una carga unitaria está aplicada en la abscisa correspondiente.

Obsérvese que hasta el momento se han estudiado los diagramas de fuerza axial, corte y momento de un elemento estructural, que muestran la variación de la respuesta respectiva a lo largo del miembro, pero siempre con una posición fija de la carga. Ahora, en cambio, la sección es la que permanece fija, mientras que la carga se desplaza por la estructura.

10.3 UTILIDAD

Por definición, las líneas de influencia se construyen para una carga unitaria por la facilidad de obtener la respuesta total bajo un sistema de cargas, siempre y cuando la estructura permanezca en régimen elástico, mediante la simple aplicación del principio de superposición. Para esto se suman los productos de las ordenadas apropiadas de la línea de influencia por los respectivos valores de las cargas aplicadas en dichos sitios.

Aunque la construcción de líneas de influencia ha estado asociada en el pasado principalmente con el diseño de puentes, no está limitada a éstos sino que son importantes, como ya se dijo, en la determinación de las solicitaciones máximas en todas las estructuras sometidas a cargas vivas.

Por una parte permiten detectar muy fácilmente qué porciones de estructura se deben cargar para obtener una máxima respuesta, previamente seleccionada, lo cual resulta muy útil, inclusive hoy en día, para hacer el análisis por computador, y por otra simplifican los cálculos, especialmente si se aplican técnicas experimentales en asocio con el Principio de Müller-Breslau que se enuncia a continuación.

10.4 PRINCIPIO DE MÜLLER-BRESLAU

El Principio de Müller-Breslau se puede enunciar así (referencia 10.1):

Si se considera que una componente de reacción o de fuerza interna actúa sobre una pequeña distancia y por consiguiente deflecta o desplaza una estructura, la curva de la estructura deflectada o desplazada será, a alguna escala, la línea de influencia para dicha componente de reacción o de fuerza interna.

Para facilitar los cálculos se adopta la unidad como factor de escala, en cuyo caso la curva de la estructura deflectada o desplazada resulta, de por sí, la línea de influencia.

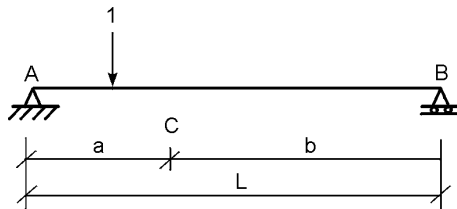
Este principio se aplica a todas las estructuras reticulares comunes, tanto determinadas como indeterminadas: cerchas, vigas, pórticos continuos. En el caso de estructuras indeterminadas está limitado a respuestas en las que es válida la aplicación del principio de superposición.

10.5 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE VIGAS DETERMINADAS

Las líneas de influencia de vigas determinadas son muy fáciles de construir, pues basta considerar la viga rígida y tener muy claro el concepto de qué restricción representa cada una de las reacciones o fuerzas internas de interés, como se ilustrará con el siguiente ejemplo.

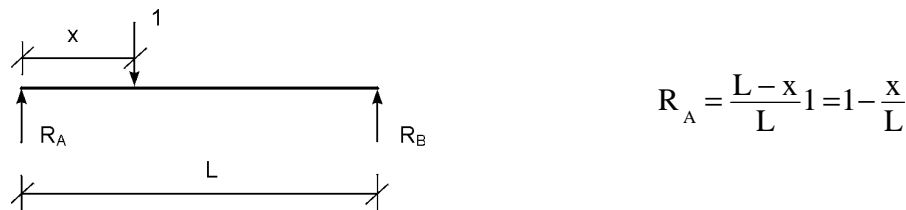
Ejemplo 10.1

Averiguar para una viga simplemente apoyada, las líneas de influencia de las reacciones en los dos apoyos, A y B, el corte en cualquier sección C y el momento en la misma. Utilice a) la definición, y b) el Principio de Müller-Breslau.

**Solución**

a) Utilizando la definición de línea de influencia

Para dibujar la línea de influencia de R_A se coloca una carga unitaria a una distancia x de R_A y se expresa su valor como función de dicha distancia, esto es:

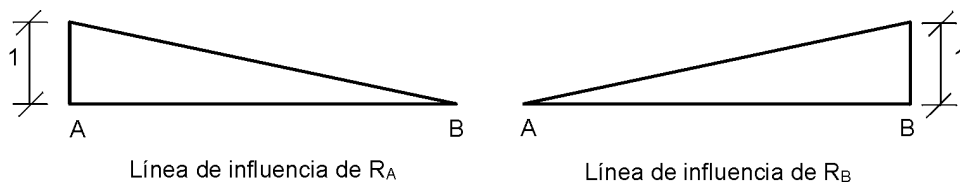


que representa una línea recta con ordenada unitaria en A y cero en B.

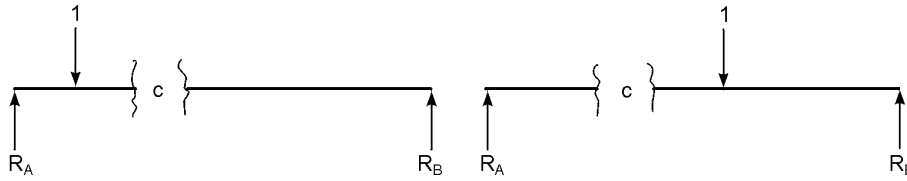
Similarmente, la línea de influencia en B se obtiene a partir de la ecuación:

$$R_B = \frac{x}{L}$$

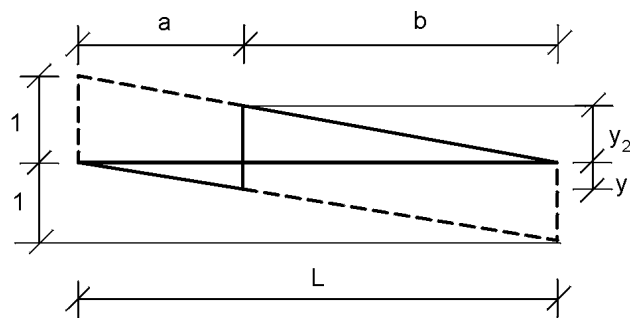
La representación gráfica de ambas líneas se muestra en seguida:



Para dibujar la línea de influencia de V_C , en los diagramas de cuerpo libre que se muestran en seguida se observa que para posiciones de la carga unitaria entre A y C, V_C es igual a $-R_B$; y para posiciones de la carga entre C y B, V_C es igual a R_A .



Por consiguiente, la línea de influencia de V_C en la porción AC es la misma de R_B pero con signo negativo y en la porción CB es idéntica a la de R_A . Resultan entonces dos líneas paralelas, con pendiente $-1/L$, y con un cambio brusco unitario cuando la carga pasa del lado izquierdo al derecho de C.



Los valores de las ordenadas en el punto C se pueden obtener por triángulos semejantes:

$$y_1 = -\frac{a}{L}$$

y

$$y_2 = -\frac{b}{L}$$

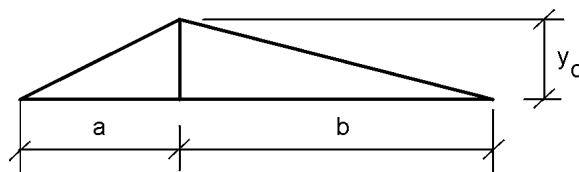
Para dibujar la línea de influencia de M_C se puede deducir de los dos diagramas de cuerpo libre anteriores, que cuando la carga está a la izquierda de C:

$$M_C = R_B b$$

y cuando está a la derecha:

$$M_C = R_A a$$

Al representar gráficamente estas ecuaciones resultan las dos líneas rectas de diferente pendiente que se muestran a continuación.



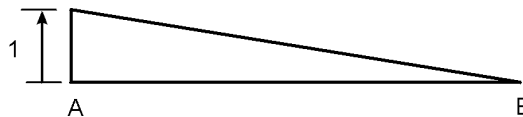
El punto de quiebre se obtiene cuando la carga está en C y corresponde a la ordenada:

$$y_c = \frac{ab}{L}$$

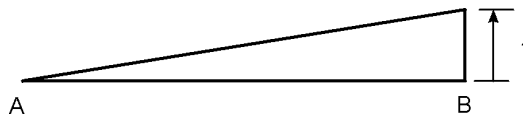
b) Aplicando el Principio de Müller-Breslau

Las componentes de reacción de una estructura impiden el desplazamiento de la misma en la dirección correspondiente.

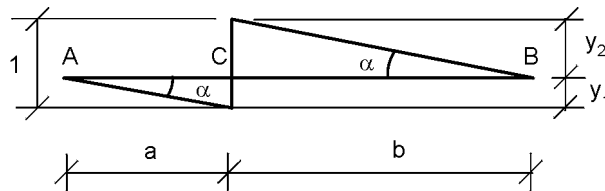
Por consiguiente, para obtener la línea de influencia de R_A , basta con darle a la viga un desplazamiento vertical unitario en la dirección positiva, es decir, hacia arriba. El punto B permanece fijo, y como no se ha liberado ninguna otra restricción, la viga se desplaza como un cuerpo rígido, adquiriendo la configuración indicada abajo, que coincide exactamente con la línea de influencia dibujada anteriormente.



Se procede en forma similar para obtener la línea de influencia de R_B , lográndose coincidencia absoluta con el diagrama hallado previamente.



El corte en un punto de una viga representa la restricción que impide que el segmento a un lado de la sección se deslice sobre el que queda al otro lado. Por lo tanto, para encontrar su línea de influencia se hace un corte en C y se desliza el lado derecho sobre el izquierdo, para que el signo del corte coincida con la convención usual. La magnitud total del desplazamiento se hace igual a la unidad. Los puntos A y B de la viga permanecen fijos, y como no se han producido otras liberaciones, resultan segmentos de recta AC y CB, que deben ser paralelos.



En consecuencia, por geometría:

$$y_1 = \alpha a$$

$$y_2 = \alpha b$$

pero

$$y_1 + y_2 = 1$$

por consiguiente:

$$\alpha(a + b) = \alpha L = 1$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{L}$$

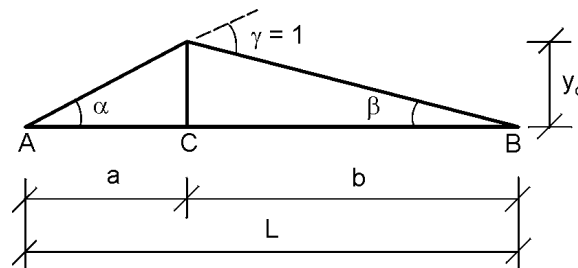
y finalmente:

$$y_1 = \frac{a}{L}$$

y

$$y_2 = \frac{b}{L}$$

El momento en una sección de una viga representa la restricción al giro de la sección a un lado de ella con respecto a la del otro lado. Por tanto, para aplicar el Principio de Müller-Breslau se elimina dicha restricción introduciendo una rótula y se le da un giro unitario al lado derecho con respecto al izquierdo, manteniendo fijos los puntos A y B y conservando todas las demás restricciones. Para que el signo coincida con la convención usual de momentos en vigas, el giro se hace en sentido horario, lo cual obliga al punto C a desplazarse hacia arriba, como se muestra en la figura siguiente:



La condición geométrica es ahora que el giro en C, por ser un ángulo externo, es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, o sea:

$$\gamma = \alpha + \beta = 1$$

por otra parte:

$$y_c = \alpha a = \beta b$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{b}{a} \beta$$

y reemplazando:

$$\left(\frac{b}{a} + 1\right) \beta = \frac{b+a}{a} \beta = \frac{L}{a} \beta = 1$$

$$\beta = \frac{a}{L}$$

$$y_c = \frac{ab}{L}$$

que conduce al mismo resultado que se había obtenido analíticamente.

Conclusiones

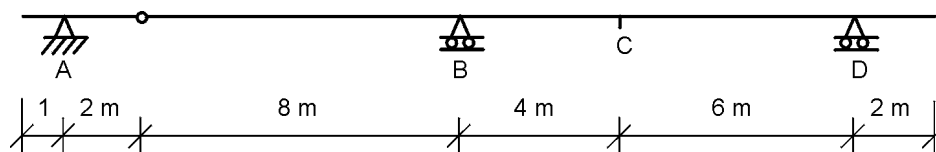
De las gráficas anteriores se puede concluir lo siguiente:

1. La reacción máxima, debida a una simple carga concentrada, ocurre cuando la carga está en el apoyo y es igual al valor de dicha carga.
2. La reacción máxima, debida a una carga uniformemente repartida, ocurre cuando la viga está totalmente cargada y es igual al producto del área de la línea de influencia de dicha reacción por el valor de la carga repartida.
3. La fuerza de corte máxima en una sección C, debida a una simple carga concentrada, ocurre cuando la carga está justo a la derecha o a la izquierda de la sección, sobre el mayor de los segmentos en que queda dividida la viga. Su valor es el de la ordenada correspondiente, multiplicada por el valor de la carga.
4. La fuerza de corte máxima en cualquier sección C, debida a una carga uniformemente repartida, se presenta cuando la carga se extiende desde C hasta el apoyo más distante. Su valor es igual al producto del área de la porción de línea de influencia correspondiente al tramo cargado, por el valor de la carga repartida. Obsérvese que, contrario a lo que podría pensarse en primera instancia, no ocurre cuando toda la viga está cargada.
5. El momento máximo en una sección C, debido a una carga concentrada única, resulta cuando la carga está aplicada justo en C.
6. El momento máximo en la misma sección, cuando la viga soporta una carga uniformemente repartida, se presenta cuando toda la viga está cargada y es igual al área de la línea de influencia multiplicada por el valor de la carga por unidad de longitud.

Ejemplo 10.2

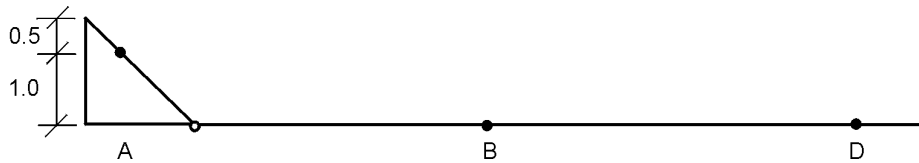
Hallar para la viga mostrada, utilizando el Principio de Müller-Breslau, las siguientes líneas de influencia:

$$R_A, R_B, R_D, V_{iA}, V_{dA}, V_{iB}, V_{dB}, V_C, V_{iD}, V_{dD}, M_A, M_B, M_C \text{ y } M_D.$$

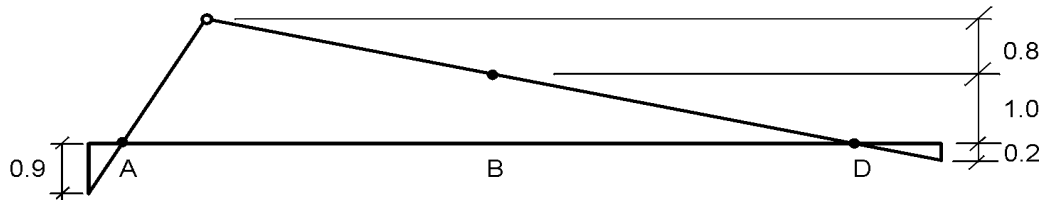


Solución

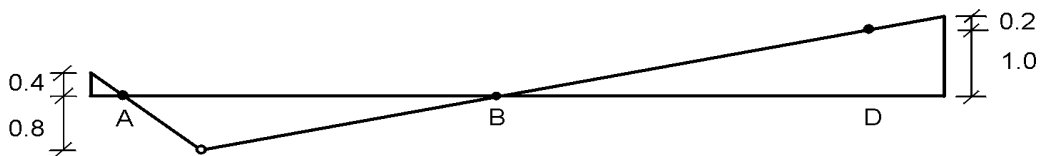
- a) Para encontrar la línea de influencia de R_A , basta con desplazar una unidad el punto A de la viga; como la articulación en la primera luz permite el quiebre y los puntos B y C permanecen restringidos, resulta la siguiente gráfica:



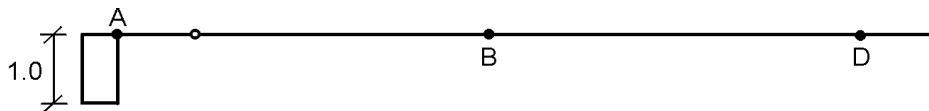
- b) En forma similar se procede para R_B ; en este caso A y D permanecen fijos:



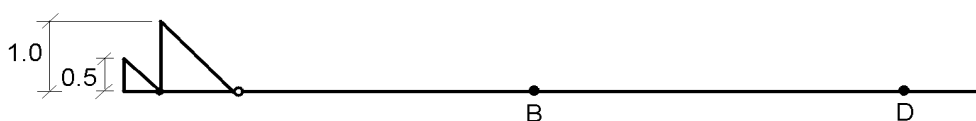
- c) Para hallar R_D , A y B permanecen en su puesto y el quiebre se produce de nuevo en la articulación:



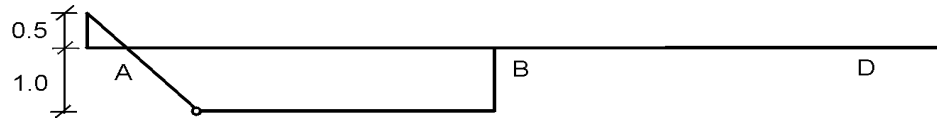
- d) La línea de influencia del corte inmediatamente a la izquierda del apoyo A, V_{iA} , se obtiene haciendo un corte en dicho sitio y recordando que el punto a la derecha del corte debe quedar una unidad por encima del punto a la izquierda. Por otra parte, las líneas a ambos lados del corte deben quedar paralelas, lo cual obliga a que la parte izquierda sea horizontal, puesto que las restricciones en B y D obligan a que la parte derecha no tenga inclinación.



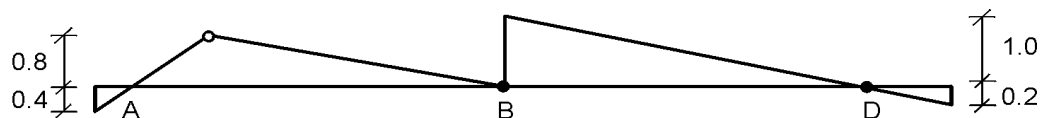
- e) Del mismo modo se halla la línea de influencia del corte a la derecha del apoyo A, V_{dA} ; en este caso las líneas resultan inclinadas para poder ajustarse a las restricciones. La ordenada en el extremo izquierdo se obtiene por semejanza de triángulos.



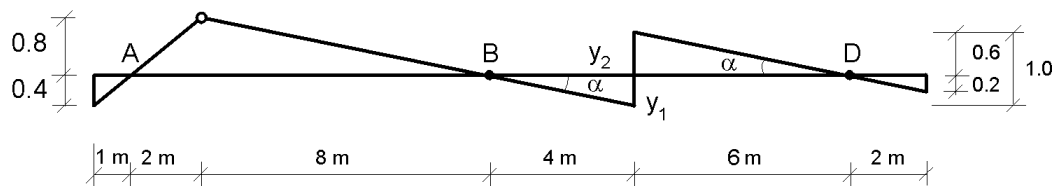
- f) Igual raciocinio se aplica a la línea de influencia del corte a la izquierda del apoyo B, V_{iB} . En este caso la línea a la izquierda del corte debe permanecer horizontal por las restricciones en B y D.



- g) La línea de influencia del corte a la derecha de B, V_{dB} , en cambio, resulta con líneas inclinadas a ambos lados del corte. La restricción en A exige un quiebre en la articulación, como se indica en la siguiente figura. De nuevo las ordenadas de los puntos claves se han obtenido por semejanza de triángulos.



- h) Para hallar la línea de influencia del corte en C, V_C , se hace un corte en dicho sitio, y el punto a la derecha del mismo se coloca una unidad por encima del punto a la izquierda.



Como ambos tramos deben ser paralelos, por trigonometría se obtiene:

$$y_1 = 4\alpha$$

$$y_2 = 6\alpha$$

pero:

$$y_1 + y_2 = 1$$

por consiguiente:

$$(4 + 6)\alpha = 10\alpha = 1$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{10}$$

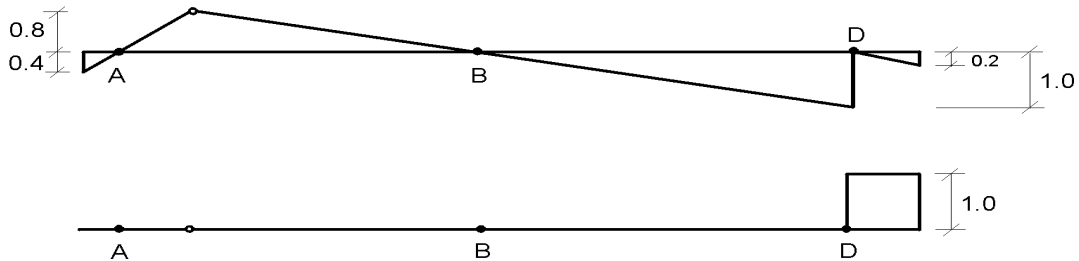
y finalmente:

$$y_1 = \frac{4}{10} = 0.4$$

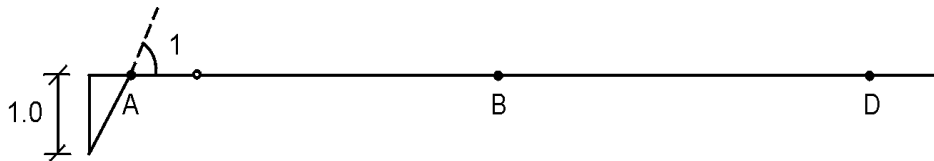
y

$$y_2 = \frac{6}{10} = 0.6$$

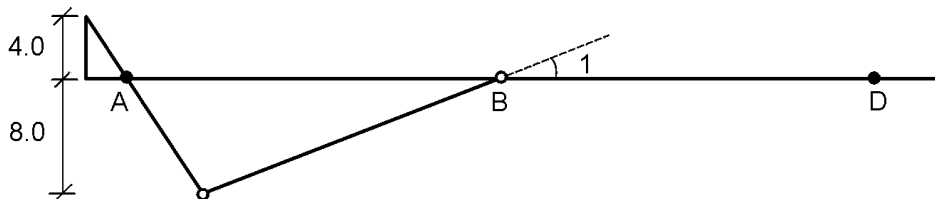
- i) y j) Para encontrar las líneas de influencia del corte a la izquierda y a la derecha del apoyo D, se aplican los mismos principios utilizados en A y B. Los resultados se indican a continuación:



- k) Para hallar la línea de influencia del momento en A, se introduce una rótula en dicho punto y se le da un giro unitario al tramo a la derecha de la rótula, con respecto al tramo a la izquierda. Como las restricciones en B y C impiden el desplazamiento de la articulación en el primer tramo, el giro sólo se puede lograr si el extremo izquierdo de la viga baja una unidad por la igualdad de ángulos opuestos por el vértice.



- l) La línea de influencia del momento en B se construye en forma similar, pero ahora la articulación entre A y B debe bajar ocho unidades:



- m) Para hallar la línea de influencia de M_C , se introduce una rótula en dicha sección. Por geometría se concluye entonces que:

$$\gamma = \alpha + \beta = 1$$

por otra parte:

$$y_C = 4\alpha = 6\beta$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{6}{4}\beta = 1.5\beta$$

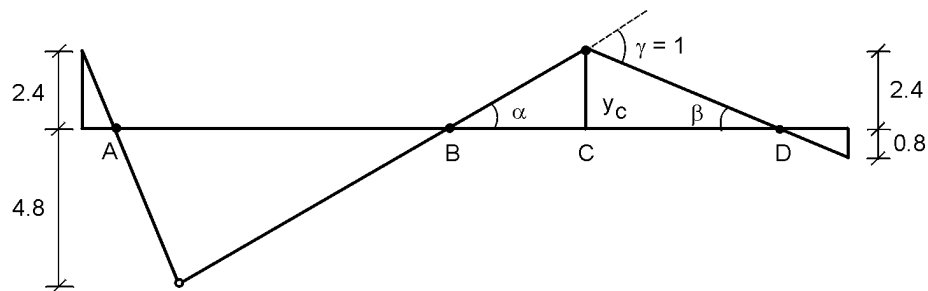
y reemplazando:

$$(1.5 + 1) \beta = 1$$

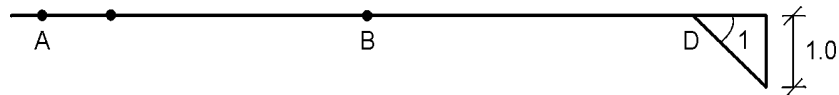
$$\rightarrow \beta = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

$$y_c = 0.4 \times 6 = 2.4$$

Los otros puntos se obtienen por semejanza de triángulos:

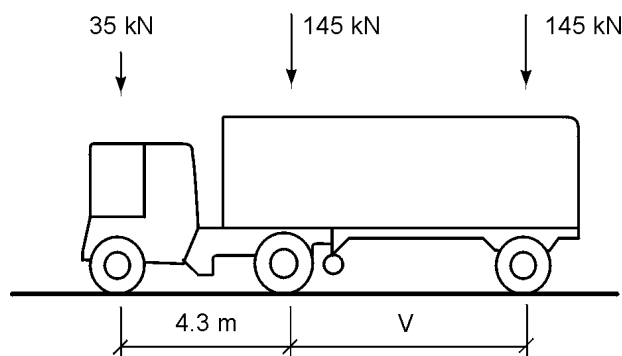


- n) Finalmente, para hallar la línea de influencia del momento en D, se coloca una rótula en dicho punto y se le aplica al tramo a la derecha de ella un giro unitario como se muestra en la siguiente figura.



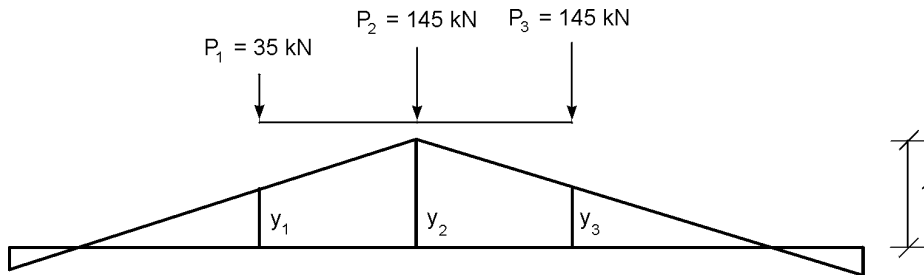
Ejemplo 10.3

Suponiendo la viga anterior y el tren de cargas mostrado (camión HS20-44 de las normas AASHTO), encuentre las posiciones que producen máxima reacción en B, máximo corte en C y máximo momento en B. Según la norma citada, V varía entre 4.3 m y 9.0 m (14 a 30 pies); suponga $V = 4.3$ m (14 pies).



Solución

- a) Máxima reacción en B. Por inspección se ve que el máximo valor se obtendrá cuando el tren de cargas se encuentra con el eje intermedio sobre la articulación y el camión viaja en cualquiera de los dos sentidos.



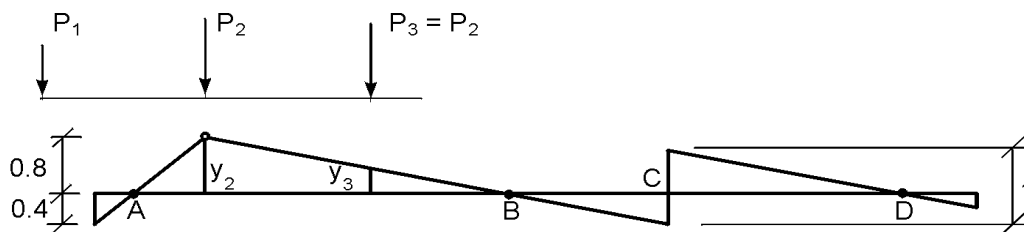
Las ordenadas se obtienen midiendo a escala o por triángulos semejantes. Resulta entonces:

$$y_1 = 0.573 \qquad y_2 = 1.000 \qquad y_3 = 0.573$$

$$R_{B\max} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 =$$

$$= 35 \times 0.573 + 145 \times 1 + 145 \times 0.573 = 248 \text{ kN}$$

- b) Para el máximo corte en C, el tren de cargas debe estar en la posición señalada en seguida:

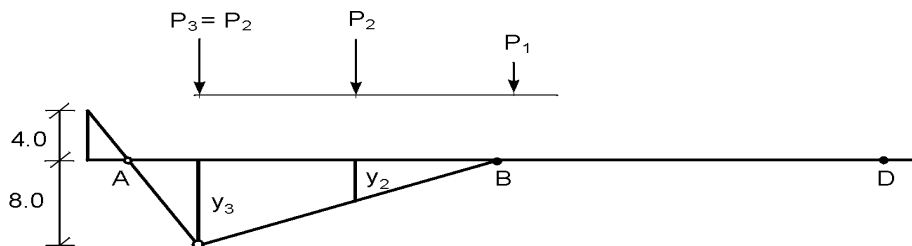


En este caso:

$$y_2 = 0.800 \qquad y_3 = 0.373$$

$$V_{C\max} = P_2 y_2 + P_3 y_3 = 145 (0.800 + 0.373) = 170.1 \text{ kN}$$

- c) Por último, para que el momento en B sea máximo, el camión debe estar en la siguiente posición:



Resulta entonces:

$$y_1 = 0 \qquad y_2 = 3.730 \qquad y_3 = 8.000$$

$$M_{B \max} = 35 \times 0 + 145 \times (8.000 + 3.730) = 1701 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

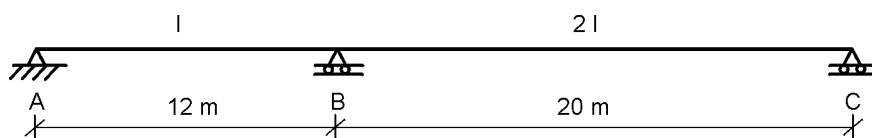
con lo cual queda resuelto el problema.

10.6 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE VIGAS INDETERMINADAS

Si se aplica el Principio de Müller-Breslau a vigas continuas, es evidente que las figuras obtenidas están compuestas por líneas curvas; de ahí que quedan dos opciones para lograr los valores de las ordenadas indispensables para el análisis. La primera es determinarlas experimentalmente mediante el uso de un modelo. La segunda, efectuar un análisis matemático. La primera opción resulta útil cuando se trata de miembros con sección variable y fue muy empleada en el pasado. Hoy en día, con el desarrollo de la computación electrónica, se considera en general más fácil plantear matemáticamente el problema para que la computadora lo resuelva con diferentes posiciones de la carga unitaria, como se ilustrará en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10.4

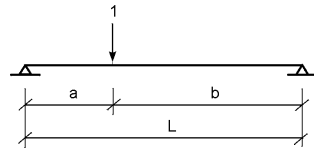
Dibuje las líneas de influencia de las reacciones, cortes y momento en el apoyo central, y corte y momento en el centro del primer vano para la viga de dos luces mostrada. Suponga que los tramos tienen inercia constante y que la del segundo vano es el doble de la del primero.



Solución

El problema se podría resolver utilizando un programa general de análisis de vigas como el dado en el apéndice D. Sin embargo, con el fin de ilustrar mejor el proceso, se aplicará acá la ecuación de los tres momentos y se explicará su programación. Para hacer más útil el problema se desarrollarán las ecuaciones para el caso general y luego se aplicará al caso específico dado. El subíndice 1 corresponderá al primer tramo y el 2 al segundo.

Aplicando entonces la ecuación (5.4) y la tabla 5.1 al caso mostrado, se obtiene cuando la carga actúa en el primer tramo:



$$2M_B \left[\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right] = - \frac{ab}{I_1 L_1} (a + L_1)$$

y cuando actúa en el segundo:

$$2M_B \left[\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right] = - \frac{ab}{I_2 L_2} (b + L_2)$$

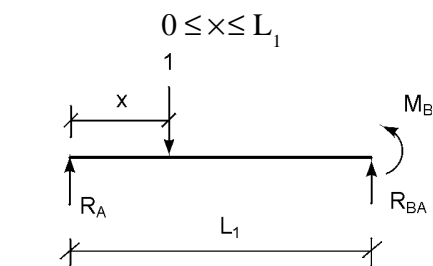
despejando el valor de M_B en ambos casos, resulta:

$$M_B = - \frac{x [L_1 - x] [x + L_1]}{2I_1 L_1 \left[\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right]}$$

y

$$M_B = - \frac{[x - L_1] [L_1 + L_2 - x] [b + L_2]}{2I_2 L_2 \left[\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right]}$$

Con estos valores y los diagramas de cuerpo libre se pueden obtener las fórmulas para hallar las otras fuerzas. Para carga en el primer tramo, teniendo en cuenta la convención de signos de la ecuación de los tres momentos, se llega a:



$$R_A = \frac{1 [L_1 - x] + M_B}{L_1}$$

$$R_{BA} = \frac{x - M_B}{L_1}$$

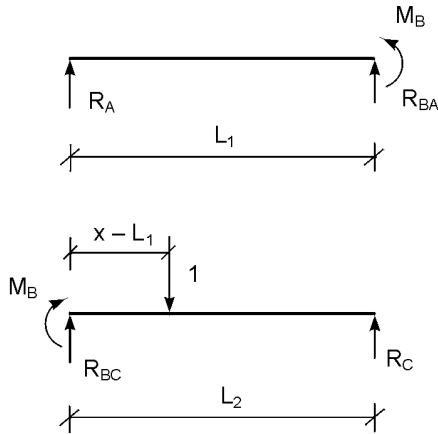


$$R_{BC} = - \frac{M_B}{L_2}$$

$$R_C = \frac{M_B}{L_2}$$

Ahora bien, si la carga se encuentra en el segundo tramo, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L_1 \leq x \leq [L_1 + L_2]$$



$$R_A = \frac{M_B}{L_1}$$

$$R_{BA} = -\frac{M_B}{L_1}$$

$$R_{BC} = \frac{[L_1 + L_2 - x] - M_B}{L_2}$$

$$R_C = \frac{[x - L_1] + M_B}{L_2}$$

En todos los casos:

$$R_B = R_{BA} + R_{BC}$$

$$V_{iB} = -R_{BA}$$

$$V_{dB} = R_{BC}$$

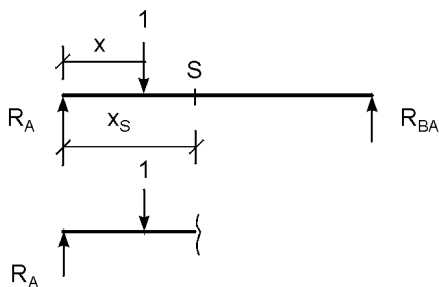
Para obtener las líneas de influencia de corte y momento en cualquier sección de la viga se utilizan los valores de M_B , ya encontrados, y los correspondientes diagramas de cuerpo libre. Es preciso diferenciar cuando la sección se halla en una u otra luz.

Sección en la primera luz

$$0 \leq x_s \leq L_1$$

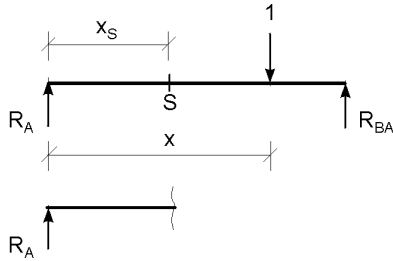
Llamando x_s la abscisa de la sección, es necesario distinguir cuando la carga se encuentra antes o después de ella.

a) $x < x_s$



$$V_s = R_A - 1$$

$$M_s = R_A x_s - 1 [x_s - x]$$

b) $x > x_s$ 

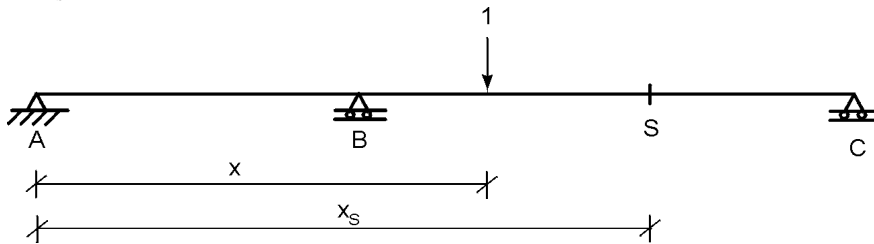
$$V_S = R_A$$

$$M_S = R_A x_s$$

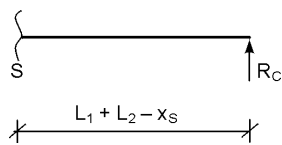
Sección en la segunda luz

$$L_1 \leq x_s \leq [L_1 + L_2]$$

Haciendo la misma distinción anterior:

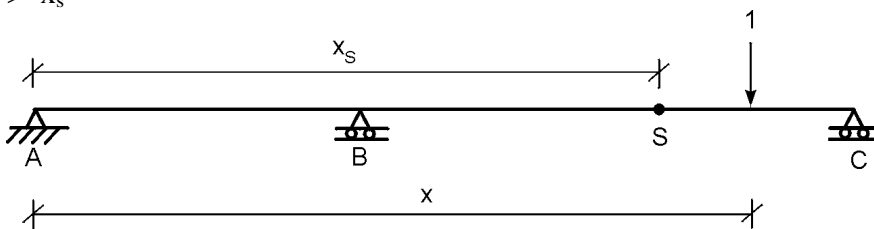
a) $x < x_s$ 

Para mayor facilidad se aísla el extremo derecho:

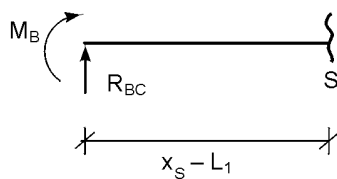


$$V_S = R_C$$

$$M_S = R_C [L_1 + L_2 - x_s]$$

b) $x > x_s$ 

Ahora conviene aislar el extremo izquierdo:



$$V_S = R_{BC}$$

$$M_S = R_{BC} [x_s - L_1] + M_B$$

Todas las fórmulas anteriores se utilizaron en el programa LÍNEAS del disco incluido, que calcula las ordenadas de las líneas de influencia de las reacciones, del momento en B y del corte a lado y lado de dicho apoyo en tantos puntos, a intervalos iguales, como lo especifique el usuario. Éste puede solicitar, además, las líneas de influencia del corte y del momento en cuantas secciones desee.

Dicho programa se aplicó al caso particular de este ejemplo, obteniéndose los resultados de la tabla 10.1. Con los valores de esta tabla se dibujaron las respectivas líneas de influencia, que se muestran en la página siguiente.

Obsérvese en dichas figuras el cumplimiento, en todos los casos, del Principio de Müller-Breslau.

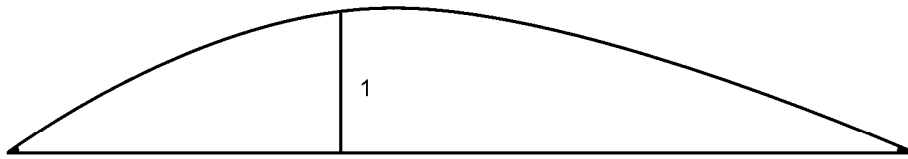
Por otra parte, el lector podrá constatar que en la mayoría de ellos el tener cargada toda la viga no produce las respuestas máximas. Se exceptúan de esta afirmación la reacción y el momento en el apoyo intermedio (B).

Tabla 10.1
Cálculo de líneas de influencia del ejemplo 10.4

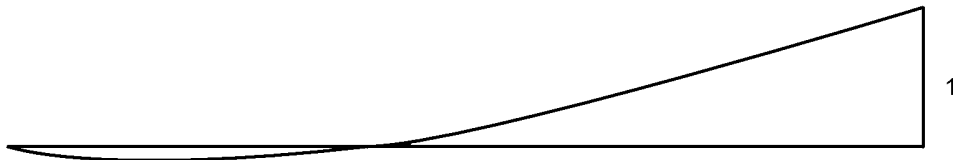
x(m)	R _A	V _{IB}	V _{dB}	R _B	R _C	M _B	V ₆	M ₆	V ₂₂	M ₂₂
0	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.789	-0.211	0.026	0.237	-0.026	-0.530	-0.211	0.735	0.026	-0.265
4	0.586	-0.414	0.048	0.463	-0.048	-0.970	-0.414	1.515	0.048	-0.485
6	0.398	-0.602	0.061	0.664	-0.061	-1.227	-0.602	2.386	0.061	-0.614
							0.398			
8	0.232	-0.768	0.061	0.828	-0.061	-1.212	0.232	1.394	0.061	-0.606
10	0.097	-0.903	0.042	0.944	-0.042	-0.833	0.097	0.583	0.042	-0.417
12	0.000	-1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
14	-0.065	-0.065	0.939	1.004	0.061	-0.777	-0.065	-0.389	-0.061	0.611
16	-0.109	-0.109	0.866	0.974	0.134	-1.309	-0.109	-0.654	-0.134	1.346
18	-0.135	-0.135	0.781	0.916	0.219	-1.623	-0.135	-0.811	-0.219	2.189
20	-0.146	-0.146	0.687	0.833	0.313	-1.746	-0.146	-0.873	-0.313	3.127
22	-0.142	-0.142	0.585	0.727	0.415	-1.704	-0.142	-0.852	-0.415	4.148
									0.585	
24	-0.127	-0.127	0.476	0.604	0.524	-1.527	-0.127	-0.764	0.476	3.236
26	-0.103	-0.103	0.362	0.466	0.638	-1.241	-0.103	-0.620	0.362	2.380
28	-0.073	-0.073	0.244	0.316	0.756	-0.873	-0.073	-0.436	0.244	1.564
30	-0.038	-0.038	0.122	0.160	0.878	-0.450	-0.073	-0.436	0.122	0.775
32	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000



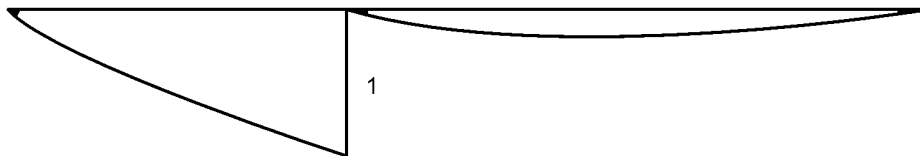
Reacción en A



Reacción en B



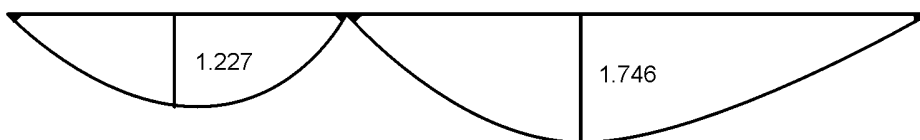
Reacción en C



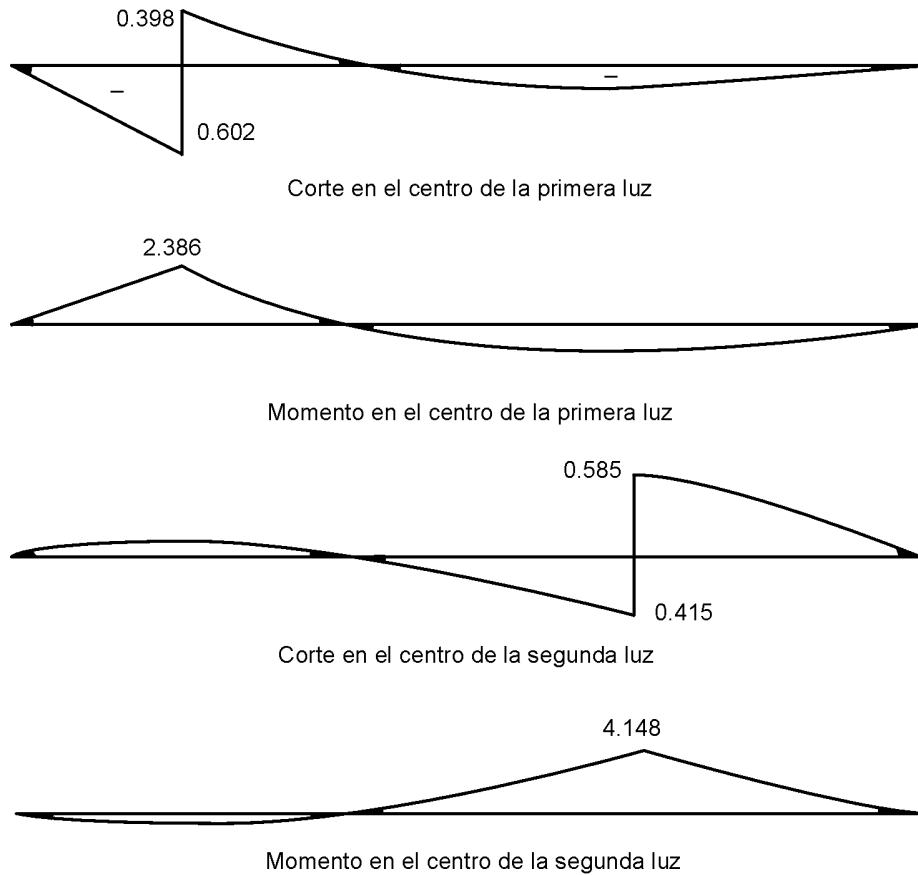
Corte a la izquierda de B



Corte a la derecha de B



Momento en B

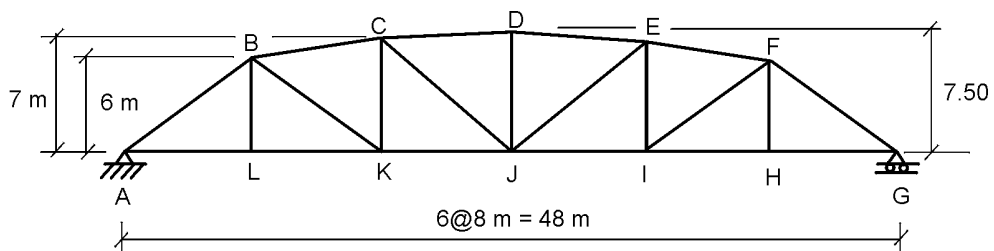


10.7 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE ARMADURAS

Las líneas de influencia son muy útiles en el diseño de armaduras de puentes. La carga unitaria se desplaza sobre las vigas longitudinales, que al apoyarse en las transversales la transmiten a los nudos de la armadura. Para simplificar el problema se suele ignorar la continuidad de las vigas longitudinales, si existe, con lo cual las líneas de influencia resultan rectas entre dos nudos adyacentes cualesquiera.

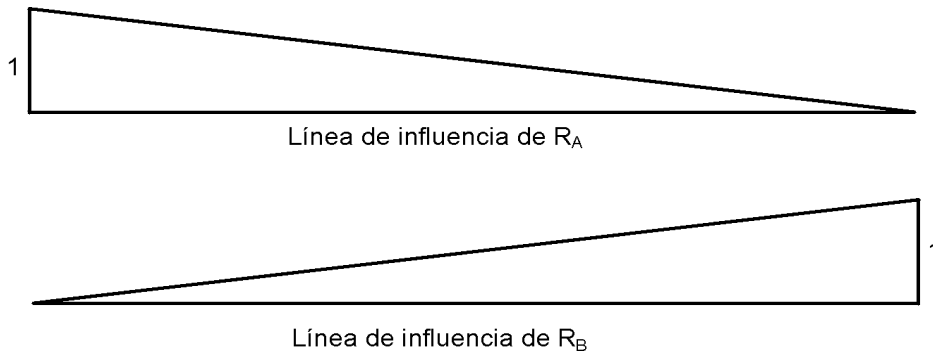
Ejemplo 10.5

Dibuje las líneas de influencia de las reacciones y de las fuerzas axiales en las barras BC, BK, BL, LK y CK de la armadura siguiente, para cargas verticales aplicadas en el cordón inferior.

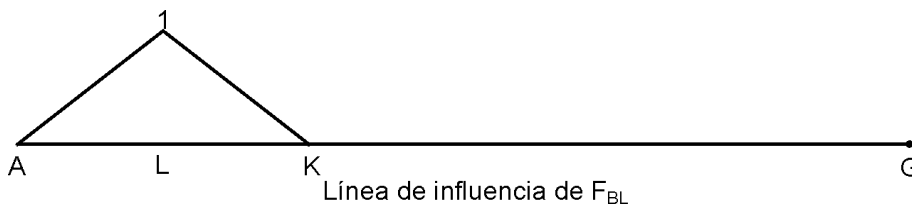


Solución

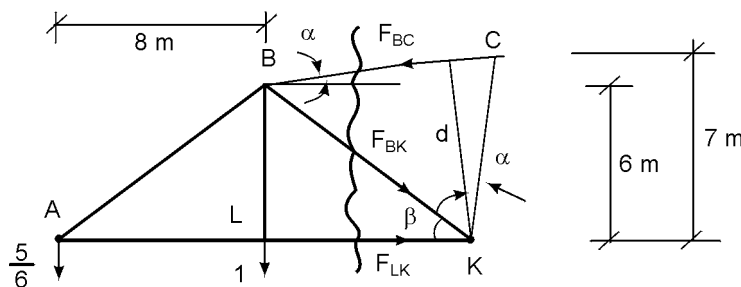
Las líneas de influencia de las reacciones verticales en los apoyos A y G se pueden obtener aplicando el Principio de Müller-Breslau; resultan idénticas a las de una viga simplemente apoyada, como se muestra a continuación:



Para hallar la línea de influencia de la fuerza axial en el montante BL, se observa que cuando la carga unitaria está aplicada en el nudo L, dicha barra queda sometida a una fuerza unitaria de tensión. La fuerza en dicha barra es nula cuando la carga está aplicada en cualquier otro nudo. Para cargas entre A y L, suponiendo simplemente apoyadas las vigas longitudinales del tablero, a BL le corresponde absorber la reacción del extremo derecho. Similarmente, para cargas entre L y K, la fuerza en BL será la reacción izquierda de la viga longitudinal respectiva. De estas consideraciones se concluye que la línea de influencia buscada es así:



Se sabe que como la estructura es estáticamente determinada, las líneas de influencia estarán conformadas por tramos rectos. En consecuencia, observando que cuando la carga está en los apoyos las fuerzas en todas las barras son nulas, basta averiguar en cada caso el valor de la fuerza axial con la carga aplicada en uno u otro extremo del panel respectivo. Por ejemplo, con la carga aplicada en el nudo L se obtiene el siguiente diagrama de cuerpo libre:



Tomando momentos con respecto al nudo B, resulta:

$$6F_{LK} = \frac{5}{6} \times 8$$

$$\rightarrow F_{LK} = \frac{40}{36} = 1.111$$

Por otra parte:

$$\alpha = \text{tg}^{-1}(1/8) = 7.125^\circ$$

$$d = 7 \cos \alpha = 6.946 \text{ m}$$

Y al tomar momentos con respecto al nudo K:

$$dF_{BC} + (8 \times 1) = \frac{5}{6} \times 16$$

$$\rightarrow F_{BC} = \frac{1}{6.946} \left[\frac{40}{3} - 8 \right] = 0.768$$

La barra BK forma con la horizontal un ángulo:

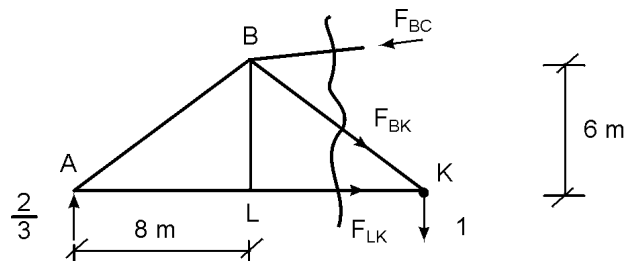
$$\beta = \text{tg}^{-1}(6/8) = 36.87^\circ$$

Planteando ahora equilibrio de fuerzas horizontales se obtiene:

$$F_{BK} \cos \beta + F_{LK} = F_{BC} \cos \alpha$$

$$\rightarrow F_{BK} = \frac{1}{\cos \beta} [F_{BC} \cos \alpha - F_{LK}] = -0.437 \quad (\text{compresión})$$

Repitiendo el mismo procedimiento con la carga aplicada en el nudo K, se obtiene:



Tomando momentos con respecto a B:

$$6 F_{LK} = \frac{2}{3} \times 8$$

$$\rightarrow F_{LK} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9} = 0.889$$

Y ahora con respecto a K:

$$dF_{BC} = \frac{2}{3} \times 16$$

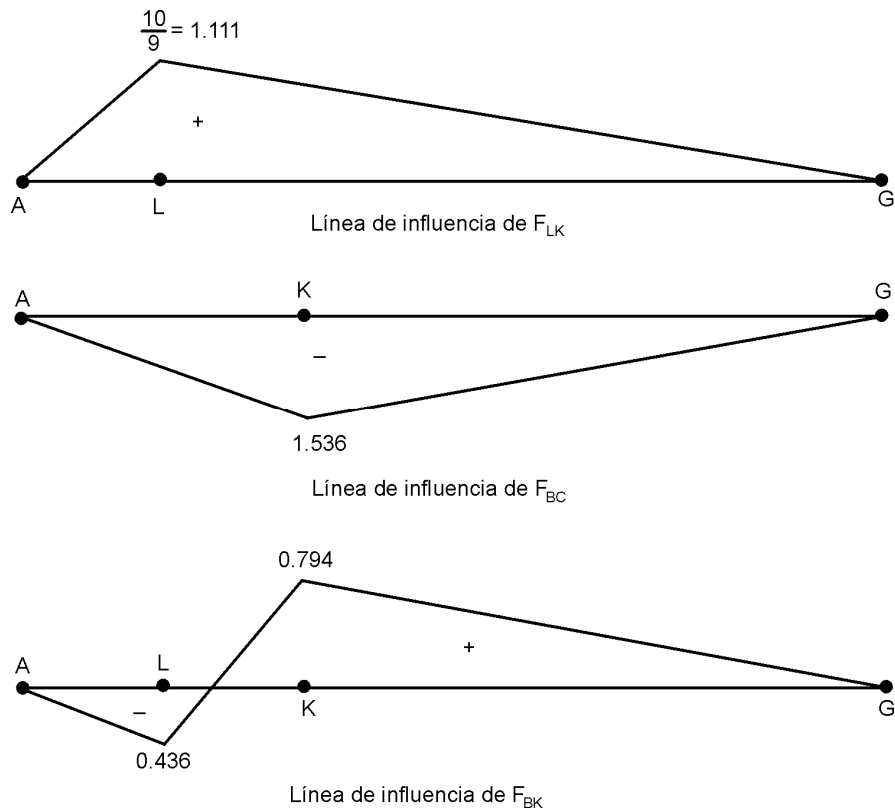
$$\rightarrow F_{BC} = \frac{32}{3 \times 6.946} = 1.536$$

Considerando el equilibrio de fuerzas horizontales, se obtiene para BK la misma ecuación anterior:

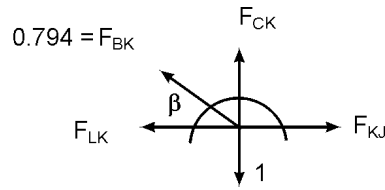
$$\rightarrow F_{BK} = \frac{1}{\cos\beta} [F_{BC} \cos\alpha - F_{LK}] =$$

$$F_{BK} = \frac{1}{\cos(36.87)} [1.536 \cos(7.125) - 0.889] = 0.794 \quad (\text{tensión})$$

Con estos valores se pueden dibujar las respectivas líneas de influencia:

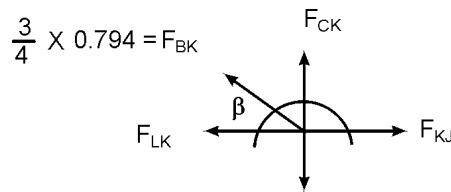


Finalmente, la línea de influencia de la fuerza en CK se puede obtener planteando el equilibrio del nudo K. Cuando la carga está en dicho nudo, resulta:



$$F_{CK} = 1 - F_{BK} \operatorname{sen} \beta = 1 - 0.794 \cos (36.87) = 0.524 \quad (\text{tensión})$$

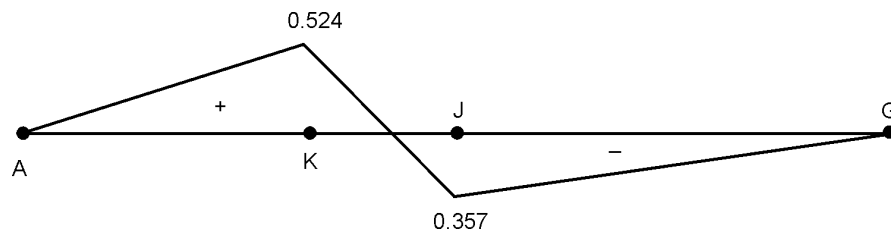
Y cuando está en J:



$$F_{CK} + F_{BK} \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$\rightarrow F_{CK} = - \frac{3}{4} \times 0.794 \times \operatorname{sen} (36.87) = - 0.357 \quad (\text{compresión})$$

Obsérvese que el valor de la fuerza en BK se obtuvo por semejanza de triángulos en la línea de influencia obtenida anteriormente. El diagrama pedido queda entonces así:



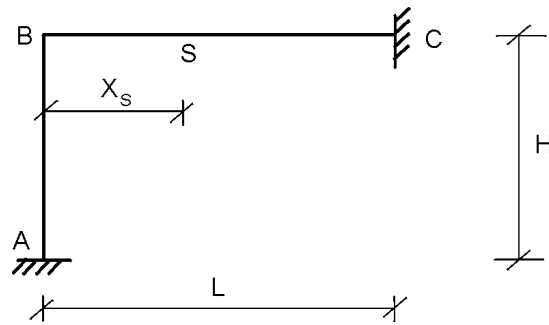
Línea de influencia de F_{CK}

10.8 LÍNEAS DE INFLUENCIA DE PÓRTICOS

Las líneas de influencia pueden tener importancia directa en el diseño de pórticos simples utilizados en estructuras de puentes o de puentes grúas. También son muy útiles cuando dichos pórticos tienen miembros acartelados, en cuyo caso se pueden usar modelos indirectos, en combinación con el Principio de Müller-Breslau, para obtener cuantitativamente el valor de las fuerzas deseadas. Sin embargo, en pórticos de edificios su mayor utilidad radica en permitir determinar con facilidad los patrones de carga que causan las máximas respuestas.

Ejemplo 10.6

Indique las líneas de influencia de las componentes de reacción, del momento en B y del corte y momento en S en el pórtico siguiente. Suponga que la columna mide 300 mm × 300 mm y la viga 300 mm × 400 mm. La altura es 4 m y la luz 6 m.

**Solución**

Se empleará el método de ángulos de giro y deflexión. Llamando:

$$K_{ij} = \left[\frac{EI}{L} \right]_{ij}$$

al aplicar las ecuaciones a cada extremo de los miembros se obtiene:

$$M_{AB} = M_{AB}^F + 2K_{AB} \theta_B$$

$$M_{BA} = M_{BA}^F + 4K_{AB} \theta_B$$

$$M_{BC} = M_{BC}^F + 4K_{BC} \theta_B$$

$$M_{CB} = M_{CB}^F + 2K_{BC} \theta_B$$

Planteando ahora el equilibrio del nudo B:

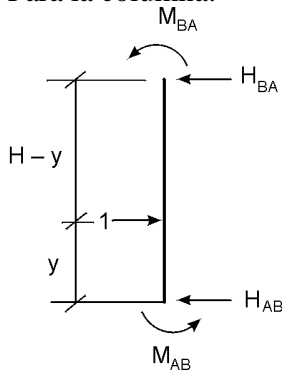
$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = M_{BA}^F + M_{BC}^F + 4 [K_{AB} + K_{BC}] \theta_B = 0$$

y despejando el valor del giro en B:

$$\theta_B = - \frac{M_{AB}^F + M_{BC}^F}{4 [K_{AB} + K_{BC}]}$$

Reemplazando este valor en las fórmulas originales, se obtienen los momentos en los extremos de ambas barras. Las reacciones se pueden obtener luego aplicando las ecuaciones de equilibrio a los respectivos diagramas de cuerpo libre.

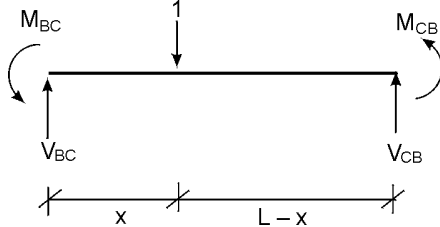
Para la columna:



$$H_{AB} = \frac{(H-y) + M_{AB} + M_{BA}}{H}$$

$$H_{BA} = \frac{y - M_{AB} - M_{BA}}{H}$$

En cuanto a la viga:

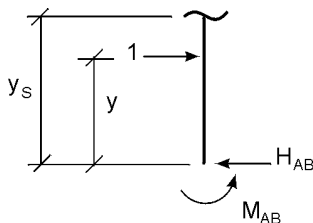


$$V_{BC} = \frac{(L-x) + M_{BC} + M_{CB}}{L}$$

$$V_{CB} = \frac{x - M_{BC} - M_{CB}}{L}$$

Para hallar el corte y el momento en cualquier sección de la columna, cuando la carga se desliza sobre ella, se deben distinguir dos casos:

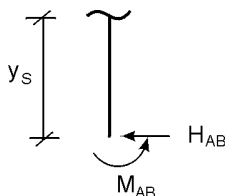
1. $y < y_S$:



$$V_S = H_{AB} - 1$$

$$M_S = H_{AB} y_S - M_{AB} - |y_S - y|$$

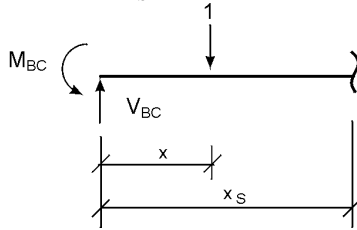
2. $y > y_S$:



$$V_S = H_{AB}$$

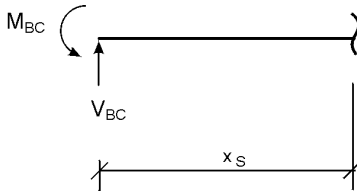
$$M_S = H_{AB} y_S - M_{AB}$$

Ahora bien, cuando la carga se desliza sobre la viga, también es preciso considerar los dos casos similares:

1. $x < x_S$:

$$V_S = V_{BC} - 1$$

$$M_S = V_{BC} X_S - M_{BC} - [x_S - x]$$

2. $x > x_S$:

$$V_S = V_{BC}$$

$$M_S = V_{BC} X_S - M_{BC}$$

En cuanto a las fuerzas axiales, considerando positivas las de tensión, es evidente que para puntos intermedios:

$$F_{CB} = -H_{BA}$$

$$F_{AB} = -V_{BC}$$

Por otra parte:

$$\text{si } x = 0$$

$$F_{AB} = -1$$

$$\text{si } y = 0$$

$$F_{CB} = -1$$

Para calcular las líneas de influencia respectivas se escribió un programa en BASIC, con las fórmulas anteriores. Con dicho programa se estudió el caso particular de este problema y se obtuvieron los datos de la tabla 10.2, con los cuales se pueden efectuar los dibujos; se deja al lector interesado dicho ejercicio, que le permitirá observar el cumplimiento, en todos los casos, del Principio de Müller-Breslau.

Tabla 10.2
Cálculo de líneas de influencia del ejemplo 10.6

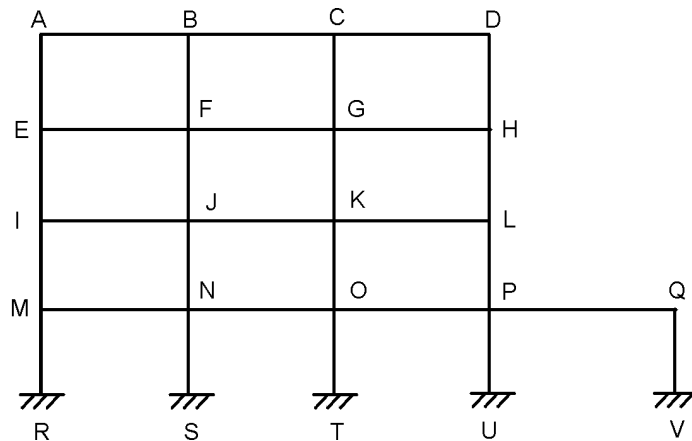
x (m)	y (m)	R _{xA}	R _{yA}	M _A	R _{xC}	R _{yC}	M _C	M _B *	V _S	M _S *
0	0	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0	1	-0.872	0.028	0.600	-0.128	-0.028	0.057	0.114	0.128	-0.057
0	2	-0.575	0.076	0.601	-0.425	-0.076	0.151	0.303	0.076	-0.151
0	3	-0.242	0.084	0.304	-0.758	-0.084	0.169	0.338	0.084	-0.169
0	4	0.000	0.000	0.000	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0	4	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	4	0.099	0.818	-0.132	-0.099	0.182	-0.359	0.265	-0.182	0.371
2	4	0.128	0.603	-0.170	-0.128	0.397	-0.722	0.341	-0.397	0.603
3	4	0.108	0.384	-0.143	-0.108	0.616	-0.983	0.288	0.384	0.480
4	4	0.064	0.191	-0.085	-0.064	0.809	-1.027	0.171	0.191	0.210
5	4	0.020	0.053	-0.027	-0.020	0.947	-0.737	0.053	0.053	0.052
6	4	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

- Nota: Los signos de los momentos en B y en S son los correspondientes al primer tramo de la viga.

-

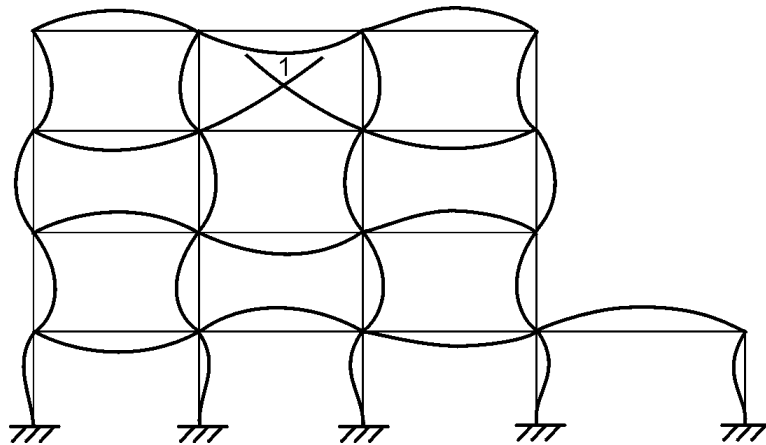
Ejemplo 10.7

Determine el patrón de carga viva, uniformemente repartida, que producirá máximo momento positivo en la viga FG del siguiente pórtico.

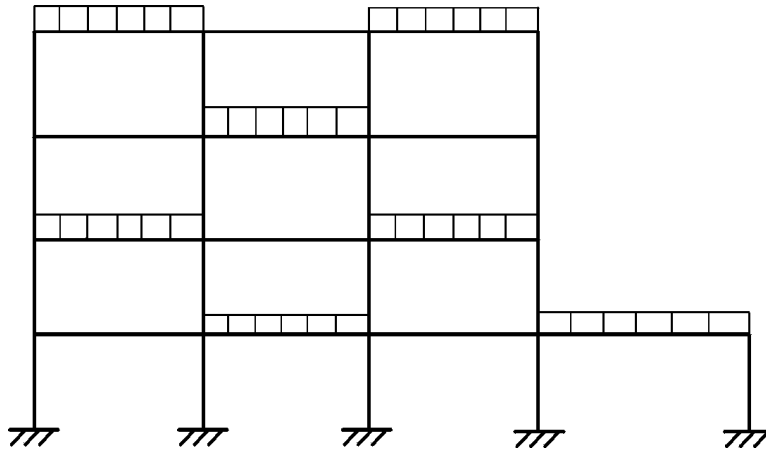


Solución

Para conocer el patrón deseado lo más fácil es aplicar el Principio de Müller-Breslau. Para ello se introduce una articulación en la viga señalada y se produce un giro unitario entre las dos tangentes. Resulta entonces la siguiente estructura deformada:

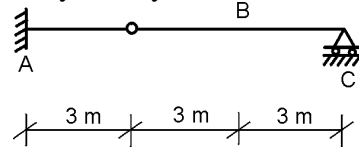


Observando la figura, es evidente que para obtener la máxima respuesta todos los efectos deben sumarse. Esto se logra cargando las luces indicadas a continuación:

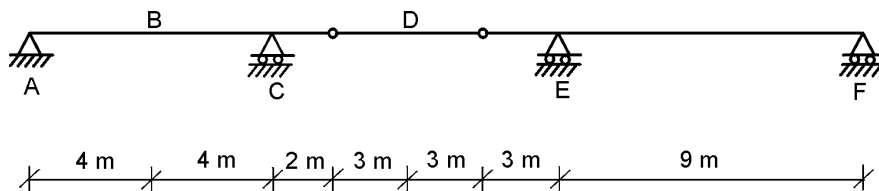


EJERCICIOS

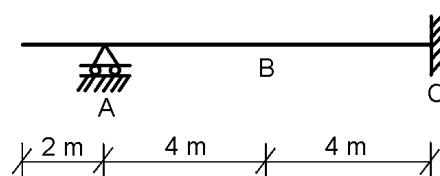
- 10.1 Utilice el Principio de Müller-Breslau para dibujar las líneas de influencia de las reacciones, momento en A y corte y momento en la sección B de la viga siguiente.



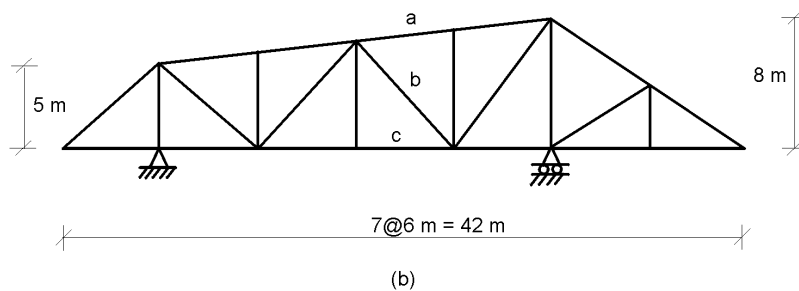
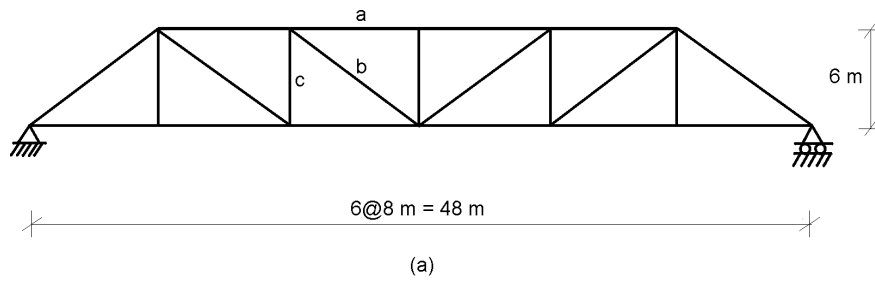
- 10.2 Dibuje para la viga mostrada las líneas de influencia de las reacciones, del corte a la izquierda y a la derecha del apoyo C, del momento en dicho apoyo y del corte y momento en las secciones B y D.



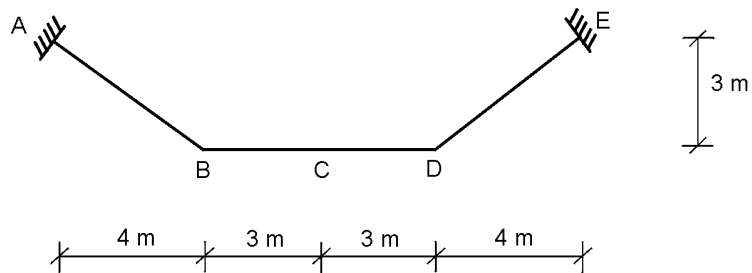
- 10.3 Calcule y dibuje las líneas de influencia de las reacciones y momentos en los apoyos, del corte a la izquierda y a la derecha de A y del corte y momento en la sección B de la viga siguiente.



- 10.4 Dibuje las líneas de influencia de las fuerzas internas, en las barras indicadas de las siguientes armaduras:

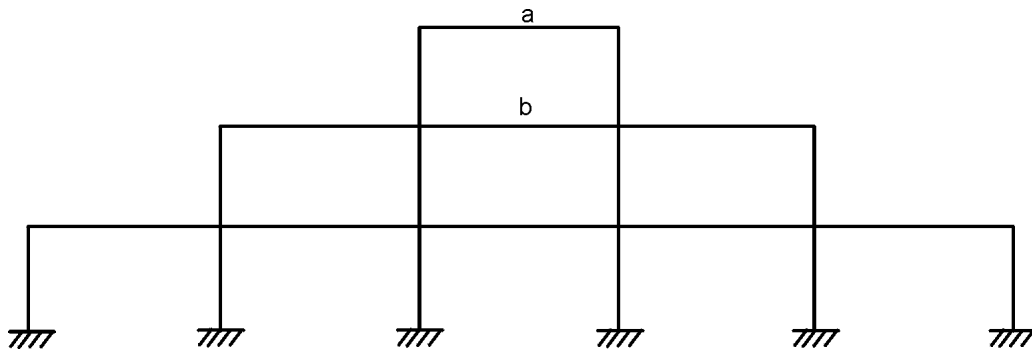


10.5 Calcule y dibuje las líneas de influencia de los momentos en A, B y C para cargas verticales que pueden desplazarse desde A hasta E, en el pórtico siguiente:



10.6 Utilice el Principio de Müller-Breslau para determinar los patrones de carga viva, uniformemente repartida, que producen en el pórtico mostrado los siguientes efectos:

- máximo momento en el centro de la luz de la viga superior.
- máximo corte en el mismo sitio de la viga central del tercer piso.



REFERENCIAS

- 10.1 Hsieh, Y.Y.- *Teoría elemental de estructuras*. Prentice-Hall International, 1973.
- 10.2 Kinney, J.S.- *Indeterminate Structural Analysis*. Addison-Wesley, 1957.

11.1 RESEÑA HISTÓRICA

En el capítulo 3 se mencionó que durante el período 1945-1955 aparecieron los primeros artículos referentes a un nuevo método de análisis que utilizaba matrices de *flexibilidad* o de *rigidez* de la estructura.

Aunque el método de distribución de momentos había permitido durante 20 años la solución adecuada de problemas altamente indeterminados, la industria aeronáutica se enfrentaba entonces a la necesidad de obtener resultados rápidos y exactos del comportamiento estructural de los aviones de reacción. También en otros campos de la ingeniería estructural, empezaba a hacerse sentir la urgencia de contar con métodos eficientes que permitieran ejecutar diseños cada vez más complejos.

Por la misma época empezaron a comercializarse las computadoras digitales. La feliz coincidencia de poder plantear el comportamiento de una estructura mediante matrices y de poder manejar fácilmente dichas matrices mediante la computadora, hizo que se desarrollaran extraordinariamente los métodos matriciales, hasta constituir la herramienta más poderosa con que cuenta hoy en día el ingeniero para analizar todo tipo de estructuras.

Estos métodos presentan las dos modalidades vistas anteriormente: fuerzas y desplazamientos, según sean unas u otros las incógnitas principales. Originalmente, Levy (referencia 11.1) demostró cómo podía plantearse matricialmente un *método de fuerzas* para analizar estructuras de aviones con alto número de redundantes. A su artículo siguieron otros de Lang y Bisplinghoff (referencia 11.2), Langefors (referencia 11.3), Wehle y Lansing (referencia 11.4) y Rand (referencia 11.5). Todos ellos involucraban *una matriz de flexibilidad* de la estructura como elemento básico para resolver el problema.

Un poco más tarde el mismo Levy (referencia 11.6) hizo un primer intento de analizar aviones a altas velocidades mediante un método matricial de *desplazamientos*, en el que se presentaba la *matriz de rigidez* de la estructura, sugiriendo que podrían obtenerse algunas ventajas al seguir este nuevo enfoque; a la misma conclusión llegó Schuerch (referencia 11.7). Pero el verdadero vuelco desde el punto de la ingeniería civil se produjo con la aparición del artículo escrito por Turner, Clough, Martin y Topp (referencia 11.8), del que ya se hizo mención. A partir de entonces, la mayoría de los esfuerzos se han dirigido a desarrollar el *método de la rigidez*, por su mayor potencial de utilización en

combinación con la computadora. Consecuentemente, a él se le dará mayor énfasis en los siguientes artículos.

11.2 CONCEPTOS GENERALES

Básicamente los métodos matriciales consisten en remplazar la estructura continua real por un modelo matemático de elementos estructurales finitos, cuyas propiedades pueden expresarse en forma matricial.

Al igual que en los métodos tradicionales, el modelo idealizado se configura de manera un poco arbitraria por el analista. A continuación se calculan las propiedades elásticas de cada elemento mediante la teoría de un medio elástico continuo, se efectúa el ensamblaje de las propiedades estructurales del conjunto y se procede entonces a resolver la estructura. Naturalmente, al disminuir el tamaño de los elementos se incrementa la convergencia entre el comportamiento del modelo y el de la estructura continua original.

El proceso de análisis se puede considerar como el estudio de cuatro etapas bien definidas, a saber:

1. Acción sobre la estructura
2. Acción sobre los elementos
3. Respuesta de los elementos
4. Respuesta de la estructura

Por acción se puede entender una fuerza o un desplazamiento impuestos sobre la estructura. A su vez, ésta responde con desplazamientos o fuerzas respectivamente.

El primer caso se puede ilustrar fácilmente con el análisis de la cercha de la figura 11.1, sometida a las cargas P_1 y P_2 , que constituyen la *acción* sobre ella (figura a).

Como resultado de dicha acción sobre la estructura, los elementos se ven sometidos a fuerzas axiales (S_{ij}) de tensión o compresión (figura b).

La respuesta de cada uno de los elementos a las fuerzas axiales anteriores es un alargamiento o acortamiento como los s_{1-4} y s_{2-4} mostrados en la figura c.

Como todos los elementos están conectados e integran un conjunto, el resultado final será un desplazamiento de los nudos libres de la estructura, δ_{1x} , δ_{1y} y δ_2 , que constituye su *respuesta* (figura d).

La relación existente entre acción y respuesta se puede representar matricialmente en la forma

$$[\delta] = [C][F] \quad (11.1)$$

o

$$[F] = [K][\delta] \quad (11.2)$$

en donde $[C]$ recibe el nombre de *matriz de flexibilidad* de la estructura y $[K]$ el de *matriz de rigidez* de la misma. La ecuación (11.1) corresponde a la modalidad de método de las fuerzas, mientras que la ecuación (11.2) sirve de base al método de los desplazamientos.

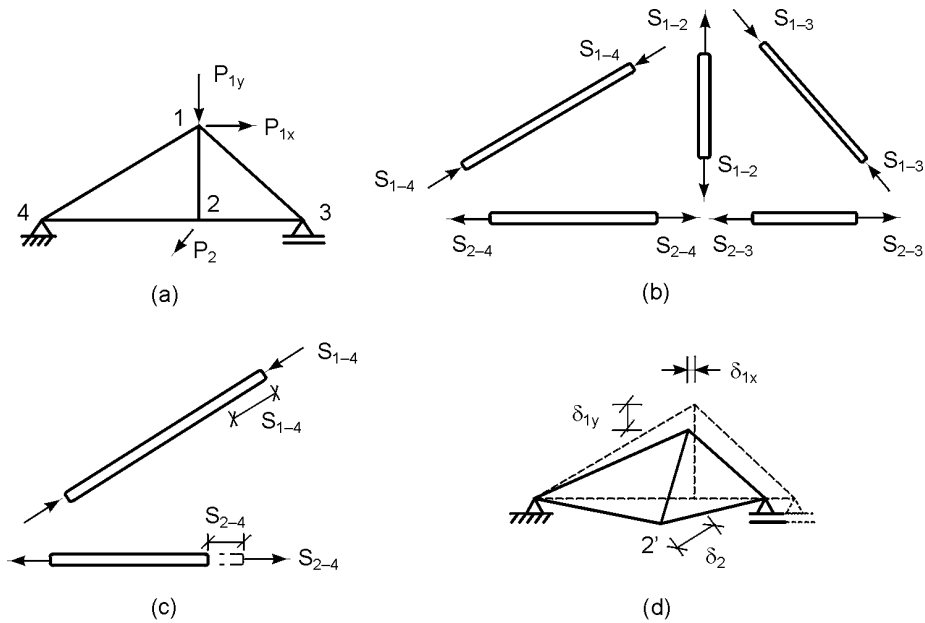


Figura 11.1 Etapas del proceso de análisis estructural.

El significado físico de los términos de la matriz [C] se puede comprender fácilmente recordando el significado de los coeficientes de influencia vistos en el cálculo de deflexiones, denominados δ_{ij} en el capítulo 4. En el caso de una estructura estable sometida a cargas F_1, F_2, \dots, F_n , actuando en los puntos 1, 2, ..., n, suponiendo que es aplicable el Principio de superposición, el correspondiente conjunto de desplazamiento estará representado por $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$.

En el nudo i:

$$\delta_i = c_{i1} F_1 + c_{i2} F_2 + \dots + c_{in} F_n \tag{11.3}$$

en donde c_{ij} representa la deflexión en el nudo i, en la dirección de la carga aplicada en i, producida por una carga unitaria aplicada en el nudo j.

Al escribir todas las ecuaciones de deflexión de los nudos de la estructura y agruparlas en forma matricial, se obtiene la matriz de flexibilidad [C] vista antes, o sea:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} \tag{11.1a}$$

La matriz de flexibilidad es muy útil en el estudio de la respuesta dinámica de la estructura; de ahí su importancia. Despejando el vector de fuerzas $[F]$ en la ecuación (11.1), se obtiene:

$$[F] = [C]^{-1}[\delta] \quad (11.2a)$$

y si se compara esta ecuación con la ecuación (11.2) es evidente que:

$$[C]^{-1} = [K] \quad (11.4)$$

y por consiguiente:

$$[K]^{-1} = [C] \quad (11.5)$$

o sea que la matriz de rigidez es el inverso de la matriz de flexibilidad y viceversa.

Si se expande la ecuación (11.2), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (11.2a)$$

y suponiendo que se obliga a la estructura a adquirir una posición deformada tal que $\delta_1 = 1$ mientras que $\delta_2 = \delta_3 = \dots \delta_n = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11} \\ F_2 &= k_{21} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ F_n &= k_{n1} \end{aligned}$$

o sea que la primera columna representa las fuerzas necesarias para producir una deflexión unitaria en el nudo 1, sin que se muevan los otros nudos. Similarmente, la columna 2 representa las fuerzas necesarias para que el nudo 2 tenga una deflexión unitaria y todos los demás permanezcan en su sitio, y así sucesivamente.

Como en cada caso la estructura debe permanecer en equilibrio, es de esperar que la suma de los términos de cada columna sea igual a cero, condición útil para verificar la

formulación de la matriz de rigidez. Por otra parte, entender el significado físico de los términos de la matriz de rigidez puede facilitar considerablemente su deducción.

Otra propiedad importante surge al considerar el Teorema recíproco, ya que al igualar el trabajo producido en una estructura elástica lineal por una fuerza F_i al recorrer el desplazamiento producido por otra fuerza F_j con el producido por esta última al recorrer el desplazamiento causado por la primera, se obtiene:

$$F_i (c_{ij} F_j) = F_j (c_{ji} F_i) \quad (11.6)$$

y al simplificar queda:

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (11.7)$$

de donde se concluye que la matriz de flexibilidad $[C]$ es simétrica, y como la matriz de rigidez $[K]$ es igual a su inverso (ecuación 11.4), se deduce que ésta también es simétrica. En el artículo siguiente se desarrollará el método de los desplazamientos para un elemento estructural muy simple: el resorte elástico.

11.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN RESORTE ELÁSTICO

En la figura 11.2 se presenta un resorte elástico sometido a fuerzas F_1 y F_2 que siguen la dirección de su eje.

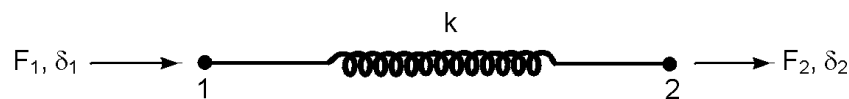


Figura 11.2 Resorte elástico.

δ_1 y δ_2 representan los desplazamientos nodales en la dirección de dichas fuerzas y la k es la constante del resorte.

Por definición, la matriz de rigidez será del tipo mostrado en la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

y para encontrar los valores de los diferentes términos se puede utilizar el concepto físico visto atrás:

Caso a

Para $\delta_1 = 1$ y $\delta_2 = 0$, de la ecuación (11.8) se obtiene:

$$F_1 = k_{11} \delta_1 + k_{12} \delta_2 = k_{11} \quad (a)$$

$$F_2 = k_{21} \delta_1 + k_{22} \delta_2 = k_{21} \quad (b)$$

Pero por la física se sabe que:

$$F_1 = k \delta_1 = k \quad (c)$$

$$F_2 = -F_1 = -k \quad (d)$$

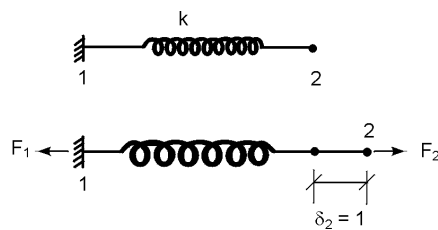
De ahí que al igualar las expresiones (a) y (c), y (b) y (d), respectivamente, queda:

$$k_{11} = k$$

$$k_{21} = -k$$

Caso b

Para obtener la segunda columna se hace $\delta_2 = 1$ y $\delta_1 = 0$



De la ecuación (11.8)

$$F_1 = k_{11} \delta_1 + k_{12} \delta_2 = k_{12} \quad (e)$$

$$F_2 = k_{21} \delta_1 + k_{22} \delta_2 = k_{22} \quad (f)$$

Por otra parte:

$$F_2 = k \times 1 = k \quad (g)$$

$$F_1 = -F_2 = -k \quad (h)$$

Comparando (e) con (h) y (f) con (g), resulta:

$$k_{12} = -k, \quad k_{22} = k$$

Por consiguiente, la matriz de rigidez del resorte será:

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

11.4 ENSAMBLAJE DE RESORTES

Considerando ahora los dos resortes de la figura 11.3, con constantes k_a y k_b , se tiene:

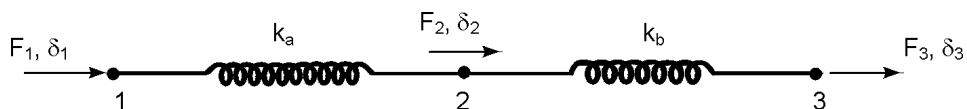


Figura 11.3 Resortes ensamblados en serie.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

al desarrollarla, se obtiene

$$F_1 = k_{11} \delta_1 + k_{12} \delta_2 + k_{13} \delta_3 \quad (a)$$

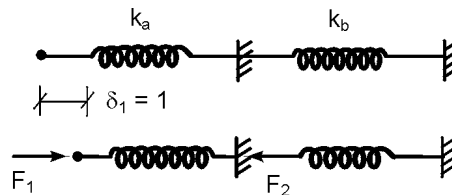
$$F_2 = k_{21} \delta_1 + k_{22} \delta_2 + k_{23} \delta_3 \quad (b)$$

$$F_3 = k_{31} \delta_1 + k_{32} \delta_2 + k_{33} \delta_3 \quad (c)$$

y procediendo de modo análogo al anterior:

Caso a

Haciendo $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 0$



Por las ecuaciones (a), (b) y (c):

$$F_1 = k_{11} \times 1 = k_{11}$$

$$F_2 = k_{21} \times 1 = k_{21}$$

$$F_3 = k_{31} \times 1 = k_{31}$$

Pero:

$$F_1 = k_a \delta_1 = k_a$$

$$F_2 = -F_1 = -k_a$$

$$F_3 = 0$$

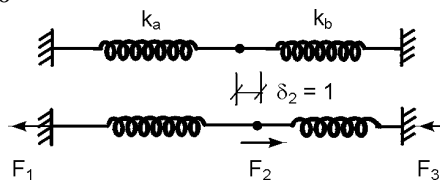
pues el resorte (b) no sufre deformación.

De ahí que al comparar estas ecuaciones con las anteriores:

$$k_{11} = k_a, \quad k_{21} = -k_a, \quad k_{31} = 0 \quad (d)$$

Caso b

Se tiene $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_3 = 0$



Ahora, de (a), (b) y (c):

$$F_1 = k_{12} \delta_2 = k_{12}$$

$$F_2 = k_{22} \delta_2 = k_{22}$$

$$F_3 = k_{32} \delta_2 = k_{32}$$

Pero, por otra parte:

$$F_2 = (k_a + k_b) \delta_2 = (k_a + k_b)$$

$$F_1 = -k_a \delta_2 = -k_a$$

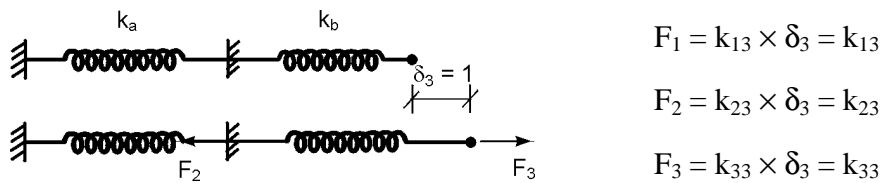
$$F_3 = -k_b \delta_2 = -k_b$$

Por consiguiente:

$$k_{12} = -k_a, \quad k_{22} = k_a + k_b, \quad k_{32} = -k_b \quad (e)$$

Caso c

Considerando $\delta_3 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$, finalmente para este caso:



$$F_1 = k_{13} \times \delta_3 = k_{13}$$

$$F_2 = k_{23} \times \delta_3 = k_{23}$$

$$F_3 = k_{33} \times \delta_3 = k_{33}$$

Pero de física:

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = -F_3 = -k_b \delta_3 = -k_b$$

$$F_3 = k_b$$

De ahí se obtiene:

$$k_{13} = 0, \quad k_{23} = -k_b, \quad k_{33} = k_b \quad (f)$$

y reemplazando los valores de (d), (c) y (f) en la ecuación (11.10) se logra la matriz de rigidez $[K]_{a+b}$ del conjunto:

$$[K]_{a+b} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

En la parte superior se han escrito los desplazamientos correspondientes a cada columna, pues obviamente la matriz de rigidez varía según sea el orden en que se hayan tomado fuerzas y desplazamientos.

Obsérvese que de nuevo la suma de los términos de cada columna da cero y que la matriz es simétrica, como era de esperar.

11.5 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ POR SUPERPOSICIÓN

La ecuación (11.11) se puede obtener también por superposición de las matrices de rigidez originales, como se demuestra a continuación.

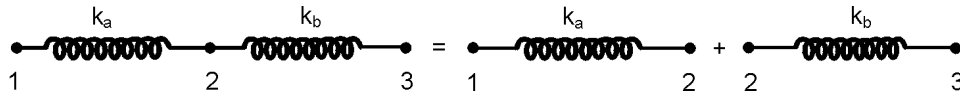


Figura 11.4 Ensamblaje por superposición.

Aplicando la ecuación (11.9) a los resortes (a) y (b) de la figura 11.4 se obtiene:

$$[\mathbf{K}]_a = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \quad [\mathbf{K}]_b = \begin{bmatrix} \delta_2 & \delta_3 \\ k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

estas matrices no se podrían sumar directamente por no ser compatibles, pero este problema se soluciona fácilmente mediante la adición adecuada de columnas y filas de ceros, como se muestra en seguida.

$$[\mathbf{K}]_a = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

Sumando ahora las dos matrices término por término, se obtiene:

$$[\mathbf{K}]_a + [\mathbf{K}]_b = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} = [\mathbf{K}]_{a+b}$$

Como se ve, este proceso es mucho más fácil y rápido que el del artículo anterior, y el ser válido en todos los casos lo hace muy apropiado para mecanización. Por eso es el

utilizado en la mayoría de los programas comerciales de uso común. En algunos textos se le denomina *Método de la rigidez directa*.

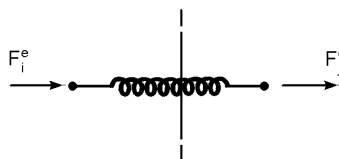
11.6 MATRIZ DE FUERZAS INTERNAS

Se denomina así la matriz que proporciona directamente las fuerzas internas en cada uno de los elementos del sistema, a partir de los desplazamientos nodales. Modificándola de manera adecuada se puede lograr una *Matriz de esfuerzos unitarios*, o simplemente *Matriz de esfuerzos*.

Una vez encontrados los desplazamientos de los nudos, se puede averiguar la deformación que experimenta cada miembro. Éstas se pueden suponer como causadas por un sistema de fuerzas nodales equivalentes.

$$[F_e] = [K] [\delta] \quad (11.12)$$

Para el resorte se tendría:



$$\begin{bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}$$

$$F_i^e = k \delta_i - k \delta_j \quad (a)$$

$$F_j^e = -k \delta_i + k \delta_j \quad (b)$$

Considerando ahora los diagramas de cuerpo libre correspondientes,

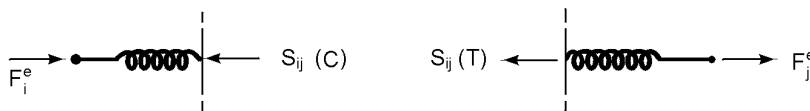


Figura 11.5 Fuerzas nodales equivalentes y fuerzas internas.

se observa que a una fuerza F_i^e positiva corresponde una fuerza interna S_{ij} de compresión, mientras que a una fuerza F_j^e positiva corresponde una fuerza interna S_{ij} , en el resorte, de tensión.

En consecuencia, para ser compatibles con la convención de considerar las tensiones positivas y las compresiones negativas, se define:

$$S_{ij} = F_j^e \quad (11.13)$$

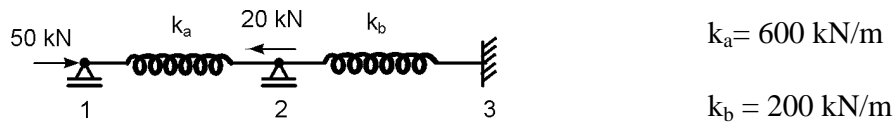
y por la ecuación (b) anterior:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -k & k \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \quad (11.13a)$$

que es la matriz de fuerzas internas buscada.
El proceso completo se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.1

Resuelva la estructura mostrada, esto es, encuentre reacciones, desplazamientos y fuerzas internas.



Solución

El planteamiento matricial queda así: $[F] = [K] [\delta]$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 800 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (a)$$

Obsérvese que si no se estableciese ninguna restricción en los apoyos, no podría invertirse la matriz $[K]$, pues su determinante vale cero. Evidentemente el problema no tendría solución, pues la estructura sería estáticamente inestable.

Al separar en la ecuación (a) las fuerzas conocidas de las desconocidas y partiendo en forma apropiada la matriz $[K]$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 800 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

De tal manera que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \end{bmatrix} [\delta_3 = 0] \\ &= \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (c)$$

y despejando los desplazamientos:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

el determinante de $[A]$ vale:

$$|A| = 600 \times 800 - 600 \times 600 = 120000$$

$$[A]^c = \begin{bmatrix} 800 & 600 \\ 600 & 600 \end{bmatrix} = [A]^a$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/150 & 1/200 \\ 1/200 & 1/200 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, para cualquier hipótesis de carga:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/150 & 1/200 \\ 1/200 & 1/200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (e)$$

y para la hipótesis dada:

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/150 & 1/200 \\ 1/200 & 1/200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2333 \text{ m} \\ 0.1500 \text{ m} \end{bmatrix}$$

o sea que el nudo 1 se ha desplazado 0.2333 m hacia la derecha (sentido positivo de las x) y el nudo 2, 0.1500 m en la misma dirección.

Para encontrar la reacción, F_3 , se utiliza la parte inferior de la ecuación (b):

$$\begin{aligned} [F_3] &= [0 \quad -200] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + 200 [\delta_3 = 0] \\ &= [0 \quad -200] \begin{bmatrix} 0.2333 \\ 0.1500 \end{bmatrix} = -30 \text{ kN} \end{aligned}$$

en que el signo negativo indica que la fuerza es hacia la izquierda. Aplicando ahora a cada resorte las ecuaciones (11.13), se obtendrán las fuerzas internas en los mismos:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= [-k \quad k]_{ij} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} \\ S_{1-2} &= [-600 \quad 600] \begin{bmatrix} 0.2333 \\ 0.1500 \end{bmatrix} = -50 \text{ kN} \quad (c) \end{aligned}$$

$$S_{2-3} = [-200 \quad 200] \begin{bmatrix} 0.1500 \\ 0 \end{bmatrix} = -30 \text{ kN} \quad (c)$$

Como ambas fuerzas dan negativas, se sabe que ambos resortes están sometidos a compresión.

Una comprobación estática del problema indica que efectivamente los valores encontrados son las respuestas buscadas.

11.7 SISTEMAS DE COORDENADAS

Tanto para la estructura como para los miembros se utilizan sistemas de coordenadas ortogonales, cartesianas y de mano derecha. Es preciso distinguir entre el sistema de coordenadas generales, globales o de la estructura y el sistema de coordenadas particulares, locales o del elemento.

Coordenadas generales o de la estructura

Este sistema se denomina así porque a él se refieren todos los datos de la estructura en su conjunto, tales como la posición de los nudos, las cargas que actúan sobre ellos, sus desplazamientos y las reacciones de los apoyos. Con el fin de utilizar en los programas los mismos procesos, conviene utilizar dos sistemas de coordenadas generales. El primero es aplicable a las armaduras y pórticos y el segundo, que está rotado 90° con respecto al primero, se utiliza en el análisis de parrillas. La representación gráfica de ambos sistemas se indica a continuación:

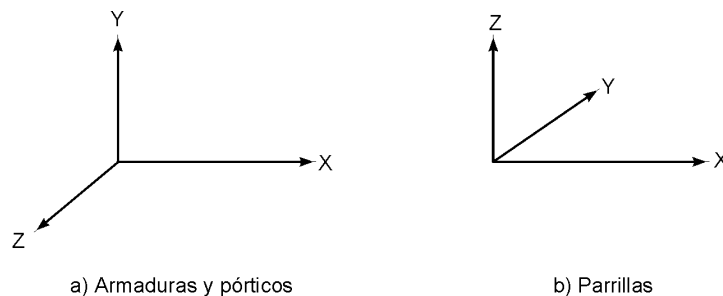


Figura 11.6 Sistemas de ejes generales.

Coordenadas particulares o del elemento

Todas las propiedades de los elementos, como las dimensiones y momentos de inercia, al igual que las cargas aplicadas sobre los mismos y las fuerzas internas a que se ven sometidos, deben referirse al sistema particular de coordenadas de cada uno de ellos, que es definido por el usuario al asignarle una *orientación* al elemento, es decir, al indicar cuál es su nudo inicial y cuál el final. Se supone entonces que el sentido positivo del eje X local, va del nudo inicial al nudo final; los otros ejes locales quedan automáticamente definidos por la regla de la mano derecha.

Cuando se trata de una estructura en un plano, basta un solo ángulo para expresar la relación entre ambos sistemas de coordenadas, global y local, como se muestra en seguida:

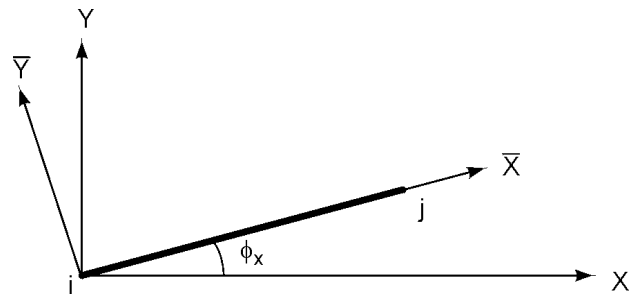


Figura 11.7 Relación entre ejes para estructuras planas.

En cambio, para estructuras en el espacio, la relación entre ambos sistemas se expresa mediante los tres ángulos direccionales:

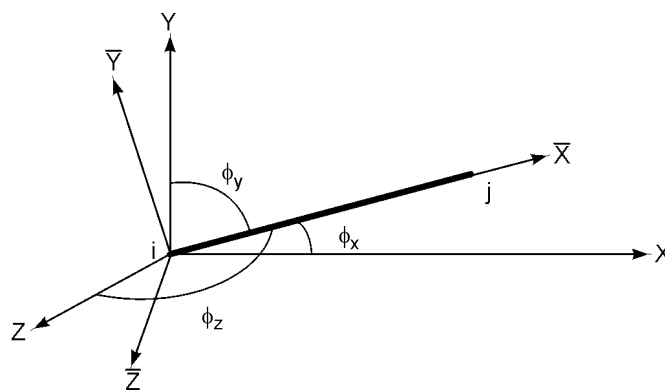


Figura 11.8 Relación entre ejes para estructuras en el espacio.

En resumen, todo lo que se refiere a nudos deberá expresarse en coordenadas globales y todo lo relacionado con elementos deberá referirse a las coordenadas locales correspondientes. Lo mismo es aplicable a los diferentes resultados.

Para ensamblar la matriz de rigidez de la estructura, es necesario que las matrices de rigidez individuales estén referidas al sistema de coordenadas generales.

En el artículo siguiente se desarrollará la solución general por el método de los desplazamientos, para cualquier estructura reticular.

11.8 SOLUCIÓN GENERAL POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

Pasando ahora al caso general de cualquier estructura, el planteamiento matricial de la misma por el método de los desplazamientos:

$$[F] = [K][\delta]$$

conduce después de una reordenación adecuada a una expresión de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & | & \mathbf{K}_{na} \\ \mathbf{K}_{an} & | & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_a \end{bmatrix} \quad (11.14)$$

en donde:

$[\mathbf{F}_n]$ es el vector de cargas aplicadas (conocidas)

$[\mathbf{F}_a]$ son las reacciones de los apoyos (desconocidas)

$[\delta_n]$ el vector de desplazamientos de los nudos libres (desconocidos) y

$[\delta_a]$ los desplazamientos de los apoyos (conocidos y generalmente iguales a cero)

Expandiendo entonces la ecuación (11.14), se obtiene:

$$[\mathbf{F}_n] = [\mathbf{K}_{nn}] [\delta_n] + [\mathbf{K}_{na}] [\delta_a] \quad (a)$$

$$[\mathbf{F}_a] = [\mathbf{K}_{an}] [\delta_n] + [\mathbf{K}_{aa}] [\delta_a] \quad (b)$$

y despejando de la primera el vector $[\delta_n]$

$$[\delta_n] = [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{F}_n] - [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{K}_{na}] [\delta_a] \quad (11.15)$$

reemplazando este valor en la ecuación (b)

$$[\mathbf{F}_a] = [\mathbf{K}_{an}] [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{F}_n] - [\mathbf{K}_{an}] [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{K}_{na}] [\delta_a] + [\mathbf{K}_{aa}] [\delta_a]$$

y factorizando por $[\delta_a]$:

$$[\mathbf{F}_a] = [\mathbf{K}_{an}] [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{F}_n] + \left[[\mathbf{K}_{aa}] - [\mathbf{K}_{an}] [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{K}_{na}] \right] [\delta_a] \quad (11.16)$$

Las ecuaciones (11.15) y (11.16) constituyen la base de la solución matricial de una estructura por el método de los desplazamientos.

En el caso muy común de desplazamientos nulos en los apoyos, en la dirección de las reacciones, el vector $[\delta_a]$ resulta igual a cero y las ecuaciones (11.15) y (11.16) se reducen a:

$$[\delta_n] = [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{F}_n] \quad (11.17)$$

$$[\mathbf{F}_a] = [\mathbf{K}_{an}] [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} [\mathbf{F}_n] \quad (11.18)$$

Una vez averiguados los desplazamientos mediante las ecuaciones (11.15) o (11.17) se pueden conocer las fuerzas internas mediante la *Matriz de fuerzas internas* corres-

pendiente al tipo de elementos de la estructura que se verán más adelante, con lo cual queda completo el análisis.

En resumen, el calculista deberá efectuar los siguientes pasos:

1. Identificar la estructura, numerar los nudos y determinar la orientación de los elementos.
2. Calcular los términos de las matrices de rigidez de los miembros, referidas a coordenadas generales.
3. Ensamblar la matriz de rigidez de la estructura, reordenándola para que queden separadas de una vez las fuerzas en los nudos libres y las reacciones de los apoyos.
4. Partir la matriz ensamblada y calcular los desplazamientos desconocidos.
5. Calcular las reacciones y verificar el equilibrio general de la estructura.
6. Calcular las fuerzas internas utilizando las matrices individuales y verificar, finalmente, el equilibrio de los nudos.

Conviene ahora desarrollar las matrices de rigidez de las diversas clases de miembros que componen las estructuras reticulares.

11.9 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA PRISMÁTICA SOMETIDA A TENSION O COMPRESIÓN SIMPLE

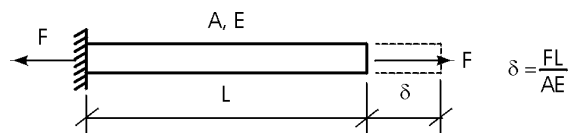


Figura 11.9 Barra prismática sometida a tensión simple.

En la figura 11.9 se presenta una barra prismática sometida a tensión simple. En Resistencia de materiales se vio que dicha barra experimenta una elongación δ dada por:

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

despejando se obtiene: $F = \frac{AE}{L} \delta$

completamente análoga a la obtenida para el resorte elástico si considera una *constante del resorte equivalente*:

$$k_e = \frac{AE}{L} \quad (11.19)$$

En consecuencia, se puede escribir que la matriz de rigidez de una barra sometida a tensión o compresión simple, está dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} \delta_i & \delta_j \\ \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

Como es bien sabido, la mayor aplicación de tales barras se encuentra en las armaduras o cerchas, bien sea planas o espaciales. Al ensamblarlas en dichas estructuras quedan orientadas de modo diferente y para poder efectuar el ensamblaje de la matriz de rigidez por el método de superposición visto en el numeral 11.5, es necesario modificar la ecuación (11.20) para referir todas las fuerzas y desplazamientos a un sistema común de ejes, que se denominan *ejes de la estructura* o *ejes generales*. En el numeral siguiente se presenta la transformación correspondiente a barras de armadura planas.

11.10 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE CERCHA PLANA

En general, los elementos de cercha plana son elementos arbitrariamente orientados, que se consideran sometidos únicamente a tensión o compresión simple. En la figura 11.10 se presenta un elemento tal, cuyo eje principal \bar{X} forma un ángulo ϕ con el eje X de un sistema de referencia, que se llamará *sistema de ejes generales* (o de la estructura). La barra servirá para distinguir los términos relacionados con el *sistema de ejes locales* (o ejes del elemento).

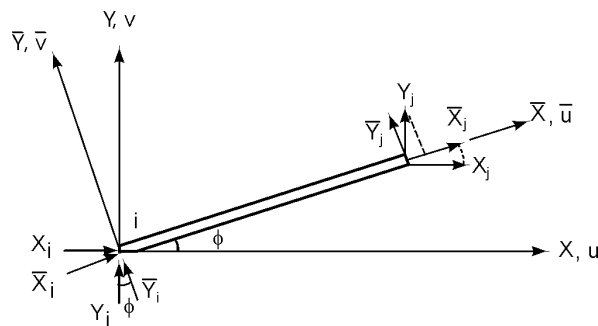


Figura 11.10 Elemento de cercha arbitrariamente orientado en un plano.

En términos de coordenadas locales se tenía:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{X}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix}$$

Como en coordenadas generales existen cuatro componentes de deflexión, se empieza por expandir la ecuación anterior a:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

que se puede escribir en forma compacta como:

$$[\bar{F}] = [\bar{K}][\bar{\delta}] \quad (11.21a)$$

De la figura se observa que:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= X_i \cos \phi + Y_i \sin \phi \\ \bar{Y}_i &= -X_i \sin \phi + Y_i \cos \phi \\ \bar{X}_j &= X_j \cos \phi + Y_j \sin \phi \\ \bar{Y}_j &= -X_j \sin \phi + Y_j \cos \phi \end{aligned} \quad (11.22)$$

que se puede expresar en forma matricial, así:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

en donde $c = \cos \phi$, y $s = \sin \phi$, o en forma compacta:

$$[\bar{F}] = [T][F] \quad (11.23a)$$

De ahí que la ecuación (11.23) nos define una matriz de transformación $[T]$. Despejando el vector $[F]$ se obtiene:

$$[F] = [T]^{-1} [\bar{F}] \quad (11.24)$$

En álgebra lineal se demuestra que para sistemas de coordenadas ortogonales la matriz de transformación $[T]$ resulta ortogonal y como consecuencia:

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (11.25)$$

con lo cual se simplifica mucho el proceso.

La misma relación que existe entre las fuerzas \bar{F} y F se presenta entre los desplazamientos respectivos $\bar{\delta}$ y δ . Por tanto, se puede escribir:

$$[\bar{\delta}] = [T][\delta] \quad (11.26)$$

en donde $[T]$ es la misma matriz de transformación definida en la ecuación (11.23).

Reemplazando ahora las ecuaciones (11.25) y (11.21a) en la ecuación (11.24), se llega a:

$$[F] = [T]^T [\bar{F}] = [T]^T [\bar{K}] [\bar{\delta}]$$

y reemplazando en la última expresión el valor dado por la ecuación (11.26), resulta:

$$[F] = [T]^T [\bar{K}] [T] [\delta] \quad (11.27)$$

Si se compara esta expresión con la ecuación (11.2), $[\bar{F}] = [\bar{K}] [\bar{\delta}]$, inmediatamente se concluye que:

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] \quad (11.28)$$

expresión completamente general para sistemas de ejes ortogonales. Para elementos estructurales distintos de los utilizados en cerchas, los valores de $[\bar{K}]$ y $[T]$ serán diferentes; por lo demás, el desarrollo conduce a la misma ecuación (11.28).

Reemplazando ahora las matrices definidas en las ecuaciones (11.23) y (11.21) en la expresión (11.28) y efectuando las operaciones matriciales indicadas, resulta finalmente la matriz de rigidez de un elemento de cercha, arbitrariamente orientado, en coordenadas generales:

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} u_i & v_i & u_j & v_j \\ \hline c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array} \end{array} \quad (11.29)$$

en donde:

$$c^2 = \cos^2 \phi, \quad s^2 = \sin^2 \phi \quad \text{y} \quad cs = (\cos \phi) (\sin \phi)$$

Al analista se le presenta entonces la alternativa de plantear directamente la matriz de rigidez del elemento, referida a coordenadas generales, mediante la ecuación (11.29), o de plantearla referida a coordenadas locales, ecuación (11.20), y transformarla a coordenadas generales utilizando para esto la ecuación (11.28) y la matriz de transformación (ecuación 11.23) correspondiente. Para sistematizar el proceso se empieza por definir el orden de la matriz de la estructura total, dándole a cada término valor cero.

A medida que se calculan los $[K]_{ij}$ de los diferentes elementos, se van superponiendo a dicha matriz inicial, de tal manera que al cubrirlos todos queda automáticamente ensamblada la matriz de rigidez $[K]$ de la estructura total.

Se procede entonces a analizar las condiciones de los apoyos y a reordenar según ellas la matriz $[K]$ obtenida anteriormente para que quede en forma acorde con la ecuación (11.14), y se resuelve el problema mediante la aplicación directa de las ecuaciones (11.15) y (11.16).

En ocasiones es posible evitar, o al menos minimizar, el reordenamiento de la matriz $[K]$ mediante una numeración adecuada de los nudos; por ejemplo, dejando los apoyos de últimos.

11.11 MATRIZ DE FUERZAS INTERNAS DE UN ELEMENTO DE CERCHA PLANA

Suponiendo de nuevo que las deformaciones del elemento ij , arbitrariamente orientado en el plano, son producidas por unas fuerzas nodales equivalentes, y de acuerdo con lo discutido en el numeral 11.6, se tiene, según las ecuaciones (11.13) y (11.19), que:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \\ \frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

que se puede expandir a la forma siguiente:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

pero según la ecuación (11.26):

$$[\bar{\delta}] = [T][\delta]$$

De ahí que reemplazando esta expresión y la ecuación (11.23) en la ecuación (11.31), se obtiene:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}$$

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

que constituye la matriz de fuerzas internas del elemento de cercha plana. Una forma alterna de escribir la ecuación (11.32) es la siguiente:

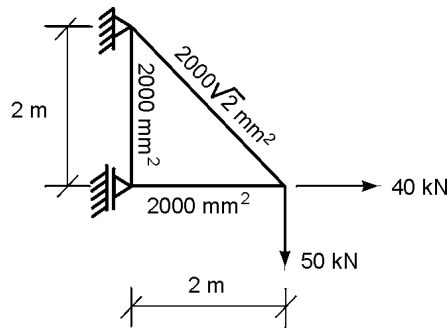
$$S_{ij} = \frac{AE}{L} [c \quad s]_{ij} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

en donde el último vector corresponde a los desplazamientos relativos de los extremos del elemento en consideración.

A continuación se ilustrará todo el proceso mediante un ejemplo simple.

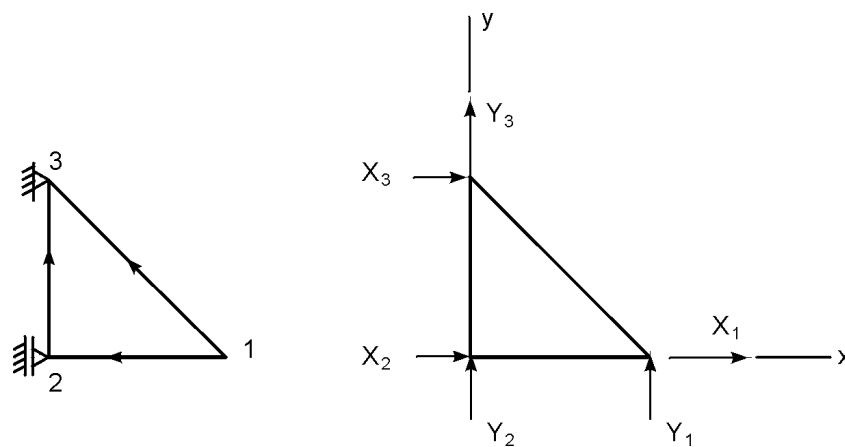
Ejemplo 11.2

Se pide resolver por completo la estructura mostrada en la figura para cualquier hipótesis de carga, en particular para las cargas mostradas. Todos los elementos están hechos del mismo material.



Solución

Se comienza por numerar los nudos y asignar a los elementos un sentido positivo arbitrario, pero sobrentendiendo que el sentido positivo va del nudo i al nudo j . Esto se ha hecho en la siguiente figura:



Obsérvese que el nudo libre se ha dejado de primero, seguido del apoyo inferior que ofrece una restricción, y de último se ha dejado el apoyo superior que está restringido en ambos sentidos.

La formulación matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \mathbf{K} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (a)$$

Para determinar fácilmente las matrices de rigidez de los elementos, conviene elaborar el siguiente cuadro:

Elemento	ϕ	$\cos \phi$	$\sen \phi$	$\cos^2 \phi$	$\sen^2 \phi$	$\cos \phi \sen \phi$	A/L (mm)
1-2	180°	-1	0	1	0	0	1
1-3	135°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	-1/2	1
2-3	90°	0	1	0	1	0	1

y de ahí y la ecuación (11.29):

$$[\mathbf{K}]_{1-2} = E \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$[\mathbf{K}]_{1-3} = E \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$[\mathbf{K}]_{2-3} = E \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Ensamblando ahora la matriz $[K]$ por superposición:

$$[K] = [K]_{1-2} + [K]_{1-3} + [K]_{2-3}$$

se expande cada una de las matrices (b), (c) y (d) y luego se suman, o simplemente se van sumando los términos respectivos en las casillas correspondientes, como se muestra acá:

$$K = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline 1+1/2 & -1/2 & -1 & & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & & & 1/2 & -1/2 \\ -1 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & -1 \\ -1/2 & 1/2 & & & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & & -1 & -1/2 & 1+1/2 \end{array} \end{array} \quad (e)$$

Nótese que en este caso particular, AE/L resulta constante para todos los elementos, lo cual facilita la superposición. Efectuando las operaciones indicadas en la ecuación (e) y reemplazando la expresión resultante en la ecuación (a), queda:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array} \end{array} = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline 3/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 3/2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (f)$$

Considerando ahora las condiciones de los apoyos, se procede a reordenar la expresión anterior intercambiando la tercera fila con la cuarta, y por consiguiente las columnas respectivas. Resulta entonces:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array} \end{array} = E \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} u_1 & v_1 & v_2 & u_2 & u_3 & v_3 \\ \hline 3/2 & -1/2 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (g)$$

en donde la partición se ha hecho conforme a las definiciones de la ecuación (11.14).

La ecuación (g) sirve de base para resolver el caso general, pues basta aplicarle las ecuaciones (11.15) y (11.16). Para el caso particular en consideración, procediendo directamente:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix}$$

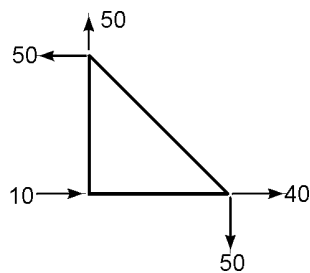
$$\rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 110 \\ 130 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10/E \\ -110/E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{h})$$

Para obtener las reacciones, a partir de (g):

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10/E \\ -110/E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\text{kN} \rightarrow \\ -50\text{kN} \leftarrow \\ 50\text{kN} \uparrow \end{bmatrix} \quad (\text{i})$$

Colocando estos valores en un diagrama de cuerpo libre de la estructura total, se comprueba que la estructura está en equilibrio.



$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M &= 0 \end{aligned}$$

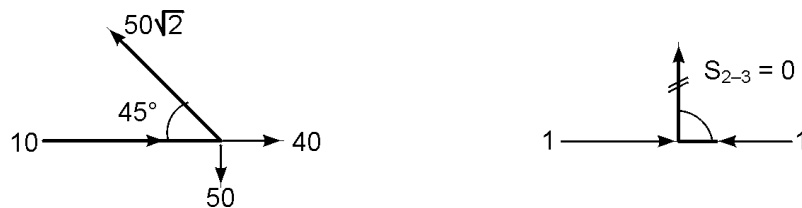
Para calcular las fuerzas internas en las barras se acude al cuadro base, a la ecuación (11.33) y a los resultados obtenidos en (h), llegándose a:

$$S_{1-2} = E \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 + 10/E \\ 0 + 110/E \end{bmatrix} = -10\text{kN} \quad (\text{C})$$

$$S_{1-3} = E \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 + 10/E \\ 0 + 110/E \end{bmatrix} = 50\sqrt{2} \text{ kN} \quad (\text{T})$$

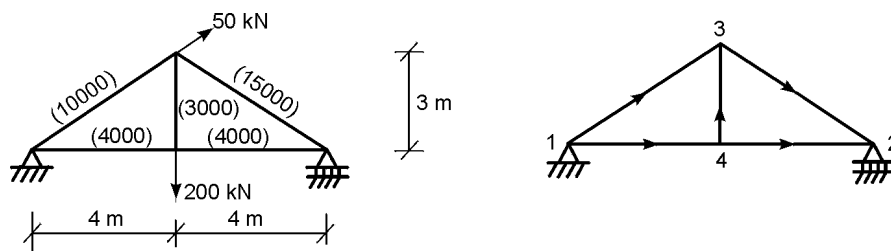
$$S_{2-3} = E \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = 0$$

De los diagramas de cuerpo libre adjuntos se ve fácilmente que dichos valores son correctos.



Ejemplo 11.3

Resuelva completamente la estructura mostrada. El material es acero estructural con $E = 200 \text{ kN/mm}^2$. Las áreas están dadas entre paréntesis en mm^2 .



Solución

Se empieza por numerar los nudos y asignarles un sentido a las barras (figura superior derecha). Obsérvese que se han numerado de últimos los nudos libres para minimizar el reordenamiento de la matriz de rigidez. A continuación se elabora el cuadro de funciones trigonométricas:

Elemento	ϕ	$\cos \phi$	$\sen \phi$	$\cos^2 \phi$	$\sen^2 \phi$	$\cos \phi \sen \phi$	A / L (mm)
1 - 3	36.87°	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48	2
1 - 4	0°	1	0	1	0	0	1
3 - 2	-36.87°	0.8	-0.6	0.64	0.36	-0.48	3
4 - 2	0°	1	0	1	0	0	1
4 - 3	90°	0	1	0	1	0	1

utilizando este cuadro y la ecuación (11.29):

$$K_{1-3} = E \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ 1.28 & 0.96 & -1.28 & -0.96 \\ 0.96 & 0.72 & -0.96 & -0.72 \\ -1.28 & -0.96 & 1.28 & 0.96 \\ -0.96 & -0.72 & 0.96 & 0.72 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$K_{1-4} = E \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

$$K_{3-2} = E \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 1.92 & -1.44 & -1.92 & 1.44 \\ -1.44 & 1.08 & 1.44 & -1.08 \\ -1.92 & 1.44 & 1.92 & -1.44 \\ 1.44 & -1.08 & -1.44 & 1.08 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$K_{4-2} = E \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$K_{4-3} = E \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

y ensamblando por superposición, teniendo cuidado de hacerlo de una vez en el orden apropiado:

$$K = E \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & u_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_1 & v_1 & v_2 \\ \hline u_2 & 1.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & & & & -1.44 \\ & 1 & & & & & & & \\ u_3 & -1.92 & 1.28 & 0.96 & & & -1.28 & -0.96 & 1.44 \\ & & 1.92 & -1.44 & & & & & \\ v_3 & 1.44 & 0.96 & 0.72 & & -1 & -0.96 & -0.72 & -1.08 \\ & & -1.44 & 1.08 & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ u_4 & -1 & & & 1 & & -1 & & \\ & & & & 1 & & & & \\ v_4 & & & -1 & & 1 & & & \\ & & -1.28 & -0.96 & -1 & & 1.28 & 0.96 & \\ & & & & & & 1 & & \\ u_1 & & & & & & & & \\ v_1 & & -0.96 & -0.72 & & & 0.96 & 0.72 & \\ & & & & & & & & \\ v_2 & -1.44 & 1.44 & -1.08 & & & & & 1.08 \\ \hline \end{array}$$

de manera que la ecuación matricial con el orden correcto queda así:

$$\begin{array}{l} X_2 = 0 \\ X_3 = 40 \\ Y_3 = 30 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -200 \\ \hline X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{array} = E \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1.44 \\ & -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 & -1.28 & -0.96 & 1.44 \\ & 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 & -0.96 & -0.72 & -1.08 \\ & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 & 2.28 & 0.96 & 0 \\ & 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 & 0.96 & 0.72 & 0 \\ & -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.08 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \hline u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{array}$$

Efectuando la partición en la forma establecida e invirtiendo (véase apéndice C):

$$\begin{array}{l} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} = \frac{1}{E} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ & -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ & 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}^{-1} \begin{array}{l} 0 \\ 40 \\ 30 \\ 0 \\ -200 \end{array} =$$

$$= \frac{1}{E} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 2 & 1 & -1.333 & 1 & -1.333 \\ & 1 & 0.826 & -0.580 & 0.580 & -0.580 \\ & -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 1.468 \\ & 1 & 0.500 & -0.667 & 1 & -0.667 \\ & -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 2.468 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 40 \\ 30 \\ 0 \\ -200 \end{array} = \begin{array}{l} 1.333 \rightarrow \\ 0.658 \rightarrow \\ -1.364 \downarrow \\ 0.667 \rightarrow \\ -2.363 \downarrow \end{array} \text{mm}$$

Ahora se pueden calcular las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.333 \\ 0.658 \\ -1.364 \\ 0.667 \\ -2.363 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.0 \\ 70.1 \\ 100.2 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Finalmente, se calculan las fuerzas internas:

$$S_{1-3} = 200 [1.6 \quad 1.2] \begin{bmatrix} 0.658 - 0 \\ -1.364 - 0 \end{bmatrix} = -116.8 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

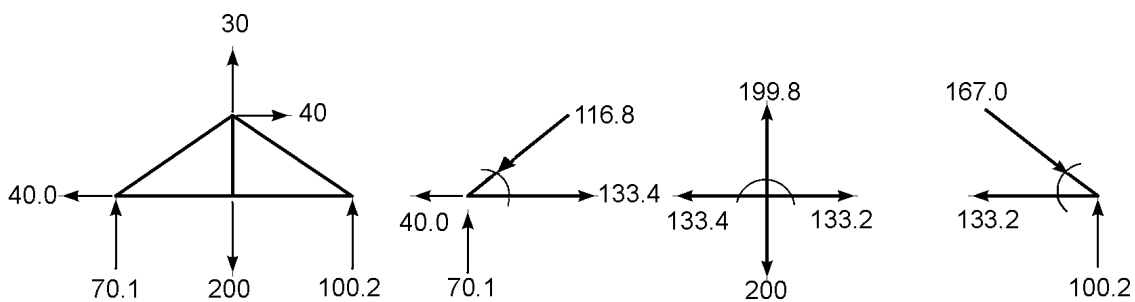
$$S_{1-4} = 200 [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.667 - 0 \\ -2.363 - 0 \end{bmatrix} = 133.4 \text{ kN} \quad (\text{T})$$

$$S_{3-2} = 200 [2.4 \quad -1.8] \begin{bmatrix} 1.333 - 0.658 \\ 0 + 1.364 \end{bmatrix} = -167.0 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

$$S_{4-2} = 200 [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.333 - 0.667 \\ 0 + 2.363 \end{bmatrix} = 133.2 \text{ kN} \quad (\text{T})$$

$$S_{4-3} = 200 [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.658 - 0.667 \\ -1.364 + 2.363 \end{bmatrix} = 199.8 \text{ kN} \quad (\text{T})$$

Los siguientes diagramas prueban la bondad de estas respuestas:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0.3 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_1 = 1.6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0.2 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0.2 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_x = 0.4 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\begin{bmatrix} X_1 = 100 \\ Y_1 = 150 \\ Z_1 = -120 \\ X_2 = 50 \\ Y_2 = -30 \\ Z_2 = -100 \\ X_3 = -40 \\ Y_3 = -20 \\ Z_3 = -60 \\ X_4 = ? \\ Y_4 = ? \\ Z_4 = ? \\ X_5 = ? \\ Y_5 = ? \\ Z_5 = ? \\ X_6 = ? \\ Y_6 = ? \\ Z_6 = ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 \\ 252.27 & -22.19 & -62.28 & -41.69 & 0 & 66.71 & -140.00 & 0 & 0 \\ -22.19 & 182.19 & -36.26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -62.28 & -36.26 & 113.99 & 66.71 & 0 & -106.74 & 0 & 0 & 0 \\ -41.69 & 0 & 66.71 & 112.89 & 47.21 & -28.33 & -41.69 & 0 & -66.71 \\ 0 & 0 & 0 & 47.21 & 187.60 & -0.51 & 0 & 0 & 0 \\ 66.71 & 0 & -106.74 & -28.33 & -0.51 & 258.61 & -66.71 & 0 & -106.74 \\ -140.00 & 0 & 0 & -41.69 & 0 & -66.71 & 201.96 & -21.24 & 90.65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -21.24 & 187.92 & 41.19 \\ 0 & 0 & 0 & -66.71 & 0 & -106.74 & 90.65 & 41.19 & 161.52 \\ -15.35 & -40.93 & 8.19 & -29.51 & -47.21 & -28.33 & 0 & 0 & 0 \\ -40.93 & -109.15 & 21.83 & -47.21 & -75.54 & 45.33 & 0 & 0 & 0 \\ 8.19 & 21.83 & -4.37 & 28.33 & 45.33 & -27.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.92 & -19.69 & -15.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -112.06 & -44.82 & -19.69 & -78.77 & -63.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44.82 & -17.93 & -15.75 & -63.02 & -50.41 \\ -55.23 & -63.12 & -12.62 & 0 & 0 & 0 & -15.35 & 40.93 & -8.19 \\ 63.12 & -72.14 & 14.43 & 0 & 0 & 0 & 40.93 & -109.15 & 21.83 \\ -12.62 & 14.43 & -2.88 & 0 & 0 & 0 & -8.19 & 21.83 & -4.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = ? \\ v_1 = ? \\ w_1 = ? \\ u_2 = ? \\ v_2 = ? \\ w_2 = ? \\ u_3 = ? \\ v_3 = ? \\ w_3 = ? \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ w_4 = 0 \\ u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \\ w_5 = 0 \\ u_6 = 0 \\ v_6 = 0 \\ w_6 = 0 \end{bmatrix}$$

Y resolviendo para los desplazamientos desconocidos mediante la inversión de $[K_{nn}]$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.014739 & 0.003647 & 0.009216 & -0.000004 & 0.000001 & 0.000001 & 0.014740 & 0.003686 & -0.009214 \\ 0.003647 & 0.007680 & 0.008586 & -0.003547 & 0.000899 & 0.002216 & 0.003648 & 0.000912 & -0.002280 \\ 0.009216 & 0.008586 & 0.037289 & -0.017731 & 0.004492 & 0.011079 & 0.009216 & 0.002305 & -0.005762 \\ -0.000004 & -0.003547 & -0.017731 & 0.034169 & -0.008589 & 0.003626 & -0.000005 & -0.003834 & -0.017490 \\ 0.000001 & 0.000899 & 0.004492 & -0.008589 & 0.007490 & -0.000876 & -0.000001 & 0.000958 & -0.004372 \\ 0.000001 & 0.002216 & 0.011079 & 0.003626 & -0.000876 & 0.013346 & 0.000000 & -0.002395 & 0.010928 \\ 0.014740 & 0.003648 & 0.009216 & -0.000005 & 0.000001 & 0.000000 & 0.021883 & 0.005472 & -0.013679 \\ 0.003686 & 0.000912 & 0.002305 & -0.003834 & 0.000958 & -0.002395 & 0.005472 & 0.007740 & -0.008211 \\ -0.009214 & -0.002280 & -0.005762 & 0.017498 & -0.004372 & 0.010928 & -0.013679 & -0.008211 & 0.030407 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ -120 \\ 50 \\ -30 \\ -100 \\ -40 \\ -20 \\ -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8043 \\ 0.0331 \\ -4.4634 \\ 2.2263 \\ -0.7276 \\ -2.7318 \\ 0.7518 \\ 0.3669 \\ -1.7722 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Conocidos los desplazamientos, la ecuación (11.18) permite averiguar las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.35 & -40.93 & 8.19 & -29.51 & -47.21 & 28.33 & 0 & 0 & 0 \\ -40.93 & -109.15 & 21.83 & -47.21 & -75.54 & 45.33 & 0 & 0 & 0 \\ 8.19 & 21.83 & -4.37 & 28.33 & 45.33 & -27.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.92 & -19.69 & -15.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -112.06 & -44.82 & -19.69 & -78.77 & -63.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44.82 & -17.93 & -15.75 & -63.02 & -50.41 \\ -55.23 & 63.12 & -12.62 & 0 & 0 & 0 & -15.35 & 40.93 & -8.19 \\ 63.12 & -72.14 & 14.43 & 0 & 0 & 0 & 40.93 & -109.15 & 21.83 \\ -12.62 & 14.43 & -2.88 & 0 & 0 & 0 & -8.19 & 21.83 & -4.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8043 \\ 0.0331 \\ -4.4634 \\ 2.2263 \\ -0.7276 \\ -2.7318 \\ 0.7508 \\ 0.3669 \\ -1.7722 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -159.00 \\ -307.94 \\ 131.21 \\ 16.99 \\ 271.97 \\ 135.98 \\ 32.00 \\ -64.03 \\ 12.81 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Conviene ahora verificar el equilibrio de la estructura, considerando el cuerpo libre total. Se obtiene:

$$\Sigma F_x = 100 + 50 - 40 - 159.00 + 16.99 + 32.00 = -0.01 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 150 - 30 - 20 + 307.94 + 271.97 - 64.03 = 0.00 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_z = -120 - 100 - 60 + 131.21 + 135.98 + 12.81 = 0.00 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_o = \Sigma F_i \times r_i = \Sigma \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 100.0 & 150.0 & -120.0 \\ 2250 & 6000 & 4800 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 50.0 & -30.0 & -100.0 \\ 3750 & 6000 & 2400 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -40.0 & -20.0 & -60.0 \\ 5250 & 6000 & 4800 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -159.00 & -307.94 & 131.21 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 16.99 & 271.97 & 135.98 \\ 3750 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 32.00 & -64.03 & 12.81 \\ 7500 & 0 & 6000 \end{vmatrix}$$

$$= (1440000 + 528000 + 264000 - 1847640 + 0 - 384180) \mathbf{i} + (-750000 - 495000 - 123000 + 954000 + 509920 - 95920) \mathbf{j} +$$

$$(262500 + 412500 - 135000 + 0 - 1019890 + 480220) \mathbf{k} = 180 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 330 \mathbf{k}$$

cuya magnitud es:

$$|M_o| = \sqrt{(0.18)^2 + 0 + (0.33)^2} = 0.38 \text{ kN}\cdot\text{mm} < 0.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

comprobándose así que el error de cierre en la estructura total es insignificante.

Luego se calculan las fuerzas internas que debe soportar cada barra, mediante la ecuación (11.40):

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} [\lambda \ \mu \ \nu]_{ij} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \\ w_j - w_i \end{bmatrix}$$

Al hacerlo se obtienen los siguientes valores:

$$S_{12} = 148.41 [0.5300 \ 0 \ -0.8481] \begin{bmatrix} 2.2263 - 0.8043 \\ -0.7276 - 0.0331 \\ -2.7318 + 4.4634 \end{bmatrix} = -106.09 \text{ kN (C)}$$

$$S_{13} = 140.00 [1.000 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0.7508 - 0.8043 \\ 0.3669 - 0.0331 \\ -1.7722 + 4.4634 \end{bmatrix} = -7.50 \text{ kN (C)}$$

$$S_{23} = 148.41 [0.5300 \ 0 \ 0.8481] \begin{bmatrix} 0.7508 - 2.2263 \\ 0.3669 + 0.7276 \\ -1.7722 + 2.7318 \end{bmatrix} = 4.71 \text{ kN (T)}$$

$$S_{45} = 29.68 [0.5300 \ 0 \ -0.8481] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ kN}$$

$$S_{46} = 28.00 [1.000 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ kN}$$

$$S_{56} = 29.68 [0.5300 \ 0 \ 0.8481] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ kN}$$

$$S_{16} = 130.24 [0.6512 \ -0.7442 \ 0.1488] \begin{bmatrix} 0 - 0.8043 \\ 0 - 0.0331 \\ 0 + 4.4634 \end{bmatrix} = 21.52 \text{ kN (T)}$$

$$S_{24} = 132.26 [-0.4724 \ -0.7558 \ 0.4534] \begin{bmatrix} 0 - 2.2263 \\ 0 + 0.7276 \\ 0 + 2.7318 \end{bmatrix} = 230.19 \text{ kN (T)}$$

$$S_{35} = 134.12 [-0.1916 \ -0.7664 \ -0.6131] \begin{bmatrix} 0 - 0.7508 \\ 0 - 0.3669 \\ 0 + 1.7722 \end{bmatrix} = -88.72 \text{ kN (C)}$$

$$S_{14} = 128.85 \begin{bmatrix} -0.3451 & -0.9204 & 0.1841 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0.8043 \\ 0 - 0.0331 \\ 0 + 4.4634 \end{bmatrix} = 145.57 \text{ kN (T)}$$

$$S_{36} = 128.85 \begin{bmatrix} 0.3451 & -0.9204 & 0.1841 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0.7508 \\ 0 - 0.3669 \\ 0 + 1.7722 \end{bmatrix} = 52.16 \text{ kN (T)}$$

$$S_{25} = 129.99 \begin{bmatrix} 0 & -0.9285 & -0.3714 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 2.2263 \\ 0 + 0.7276 \\ 0 + 2.7318 \end{bmatrix} = -219.70 \text{ kN (C)}$$

Finalmente, se verifica el equilibrio de cada nudo. Para ello es necesario encontrar primero las componentes de las fuerzas internas en cada barra, utilizando los cosenos direccionales calculados en la página 445. Los resultados figuran en los siguientes cuadros:

Miembro	S _x	S _y	S _z	Esf
1 - 2	-56.23*	0	89.97	C**
1 - 3	-7.50	0	0	C
1 - 4	-50.24	-133.98	26.80	T
1 - 6	14.01	-16.02	3.20	T
2 - 3	2.50	0	4.00	T
2 - 4	-108.74	-173.98	104.37	T
2 - 5	0	203.99	81.60	C
3 - 5	17.00	68.00	54.39	C
3 - 6	18.00	-48.01	9.60	T
4 - 5	0	0	0	
4 - 6	0	0	0	
5 - 6	0	0	0	

Notas: * El signo corresponde al nudo inicial
 ** C = Compresión T = Tensión

kN

Con estos valores y los de las cargas aplicadas se comprobó el equilibrio de los nudos superiores, obteniéndose:

Nudo	Σ F _x	Σ F _y	Σ F _z
1	0.04	0.00	-0.03
2	-0.01	0.01	0.00
3	0.00	-0.01	-0.01

kN

Se deja al lector interesado la verificación del equilibrio en cada uno de los apoyos, con lo cual quedaría completamente solucionado el problema.

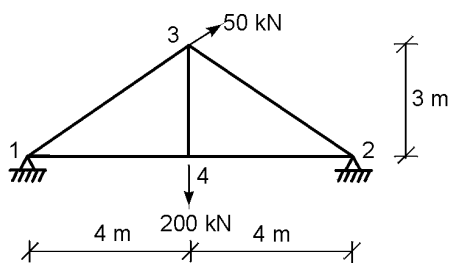
11.14 COMENTARIOS SOBRE INESTABILIDAD E INDETERMINACIÓN

En el numeral 11.11 se indicó que una configuración inestable de la estructura quedaba detectada en forma automática con el método de los desplazamientos, al no poder invertir la matriz $[K_{nn}]$. Esta es una de las ventajas inherentes al método.

Otra ventaja radica en que, como se puede observar, no se ha hecho mención en absoluto de si la estructura es o no estáticamente determinada. Es evidente que por tratarse de un método en que los desplazamientos nodales son las incógnitas principales, cuanto más indeterminada sea una estructura dada desde el punto de vista externo, más fácil será su solución, pues más pequeña queda la matriz $[K_{nn}]$ y más rápida será su inversión. El ejemplo siguiente ilustra este hecho.

Ejemplo 11.5

Resuelva la misma estructura del ejemplo 11.3, pero suponiendo ahora que ambos apoyos son de segundo género.



$$E = 200 \text{ kN/mm}^2$$

Áreas

1 – 3:	10000	mm ²
1 – 4:	4000	mm ²
3 – 2:	15000	mm ²
4 – 2:	4000	mm ²
4 – 3:	3000	mm ²

Solución

El proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez es idéntico al visto anteriormente. Como los desplazamientos de los apoyos son nulos, basta con considerar la porción siguiente:

$$\begin{bmatrix} X_3 = 40 \\ Y_3 = 30 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -200 \\ X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Tomando la parte superior:

$$\begin{bmatrix} X_3 = 40 \\ Y_3 = 30 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -200 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

y reordenando para invertir por partes:

$$\begin{bmatrix} X_3 = 40 \\ Y_3 = 30 \\ Y_4 = -200 \\ X_4 = 0 \end{bmatrix} = E \left[\begin{array}{cccc|c} 3.20 & -0.48 & 0 & 0 & u_3 \\ -0.48 & 2.80 & -1 & 0 & v_3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & u_4 \end{array} \right]$$

$$[0] = E \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + 2 E [u_4]$$

$$\rightarrow u_4 = 0$$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ -200 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 3.20 & -0.48 & 0 \\ -0.48 & 2.80 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

y despejando:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3.20 & -0.48 & 0 \\ -0.48 & 2.80 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ -200 \end{bmatrix}$$

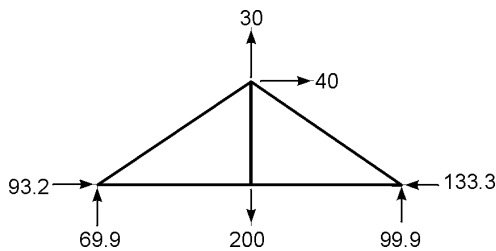
$$= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} .3266 & .0868 & .0868 \\ .0868 & .5788 & .5788 \\ .0868 & .5788 & 1.5788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ -200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8.46 \times 10^{-3} \\ -0.474 \\ -1.475 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Reemplazando estos valores:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.008 \\ -0.474 \\ 0 \\ -1.475 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.2 \\ 69.9 \\ -133.3 \\ 99.9 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de la estructura total:



$$\Sigma F_x = -0.1 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = -0.2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0.8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En cuanto a fuerzas internas:

$$S_{1-3} = 400 \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.008 - 0 \\ -0.474 - 0 \end{bmatrix} = -116.5 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

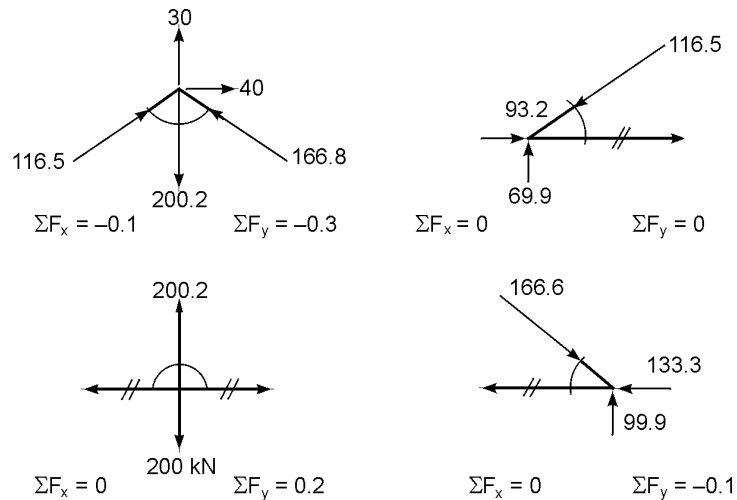
$$S_{1-4} = 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ -1.475 - 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$S_{3-2} = 600 \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 + 0.008 \\ 0 + 0.474 \end{bmatrix} = -166.6 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

$$S_{4-2} = 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 + 1.475 \end{bmatrix} = 0$$

$$S_{4-3} = 200 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.008 - 0 \\ -0.474 + 1.475 \end{bmatrix} = 200.2 \text{ kN} \quad (\text{T})$$

verificándose el equilibrio de todos los nudos con un error de cierre máximo de 0.3 kN.



11.15 DEFECTOS DE FABRICACIÓN Y ESFUERZOS TÉRMICOS EN ARMADURAS

Es sabido que los defectos de fabricación y los cambios de temperatura producen fuerzas internas en las estructuras indeterminadas, aun cuando no haya cargas externas actuando sobre ellas. Para encontrar su magnitud pueden utilizarse el Principio de superposición y el concepto de carga equivalente.

En la figura 11.12 se ha representado una estructura indeterminada, cuyos elementos considerados aisladamente han sufrido cambios en longitud (Δ_{1-4}° , Δ_{2-4}° , Δ_{3-4}°) por causas diferentes de las cargas aplicadas. Por ejemplo, éstas serían las magnitudes del defecto de fabricación en cada una o de su elongación térmica, calculada mediante la ecuación:

$$\Delta_{ij}^{\circ} = [\alpha L (\Delta T)]_{ij}$$

en donde:

- α = coeficiente de expansión lineal en $(^{\circ}\text{C})^{-1}$
- L = longitud inicial de la barra
- ΔT = cambio de temperatura en $^{\circ}\text{C}$
- Δ° = cambio en longitud producido por causas diferentes de las cargas

Si se supone que las barras están desconectadas por un momento en el nudo 4, es claro que sus extremos se cruzarían y no habría lugar a la aparición de fuerzas internas; sin embargo, podría pensarse que estas elongaciones iniciales de las barras han sido producidas por unas *cargas equivalentes* que causen el mismo efecto, es decir, elongaciones idénticas. De resistencia de materiales se sabe que:

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

para los elementos considerados. Por consiguiente, las cargas equivalentes serán simplemente:

$$P_{ij}^0 = \left(\frac{AE}{L} \Delta^0 \right)_{ij} \quad (11.41)$$

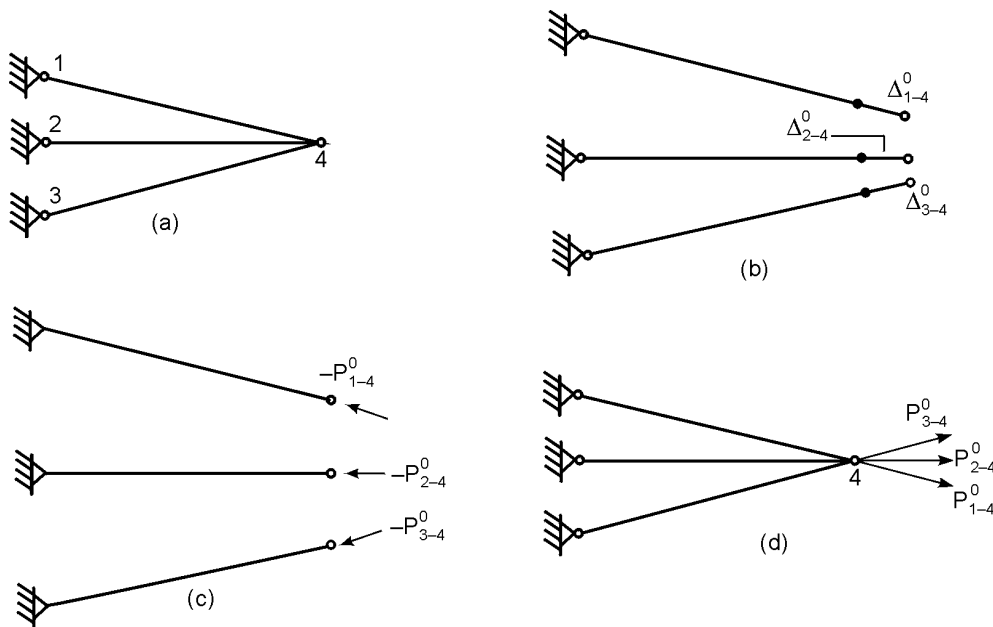


Figura 11.12 Estructura indeterminada sometida a cambios de longitud por causas diferentes de cargas externas.

Si ahora se aplican a cada barra fuerzas iguales pero de sentido contrario (figura 11.12c), los extremos 4 de las tres barras coincidirán y podrán conectarse sin ningún problema. Esto equivale a considerar que la estructura se ha hecho *fija*, siendo las fuerzas $-P_{ij}^0$ las que, aplicadas a los miembros individuales, producen tal fijación. Como en la estructura original no hay cargas aplicadas, estas fuerzas se eliminan aplicándoles otras fuerzas idénticas, pero de sentido contrario; esto es, las mismas fuerzas P_{ij}^0 calculadas antes, sólo que aplicadas ahora a la estructura en sí (figura 11.12d), problema que ya se sabe resolver. La superposición de los estados (c) y (d) evidentemente ha conducido a una estructura sin cargas externas, pero sometida a fuerzas internas obtenidas mediante la superposición de las dos etapas, es decir:

$$[S_{ij}] = [S_{ij}]_{(c)} + [S_{ij}]_{(d)}$$

el primer vector de la derecha está dado por:

$$[S_{ij}]_{(c)} = [-P_{ij}^0] \quad (11.42)$$

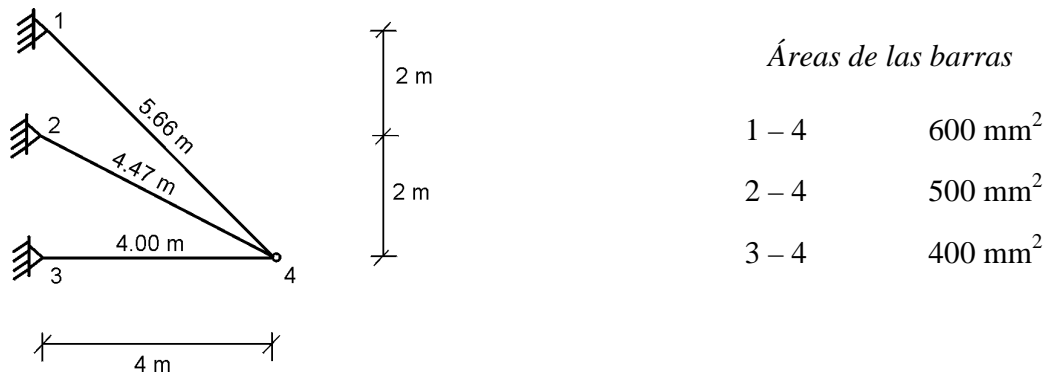
mientras que el segundo se obtiene mediante la ecuación (11.33), después de encontrar los desplazamientos de la estructura a partir de:

$$[\delta] = [K]^{-1} [P^0]$$

El proceso se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.6

Encontrar las fuerzas internas debidas a un error de fabricación de 3 mm, por defecto de la barra 1 – 4 y a un incremento de temperatura de 25°C de la barra 3 – 4. El material es acero con $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ y $\alpha = 0.000012/^\circ\text{C}$.

**Solución**

Los cambios de longitud de las barras son:

$$\Delta_{1-4} = -0.003 \text{ m} = -3 \text{ mm}$$

$$\Delta_{2-4} = 0$$

$$\Delta_{3-4} = \alpha L (\Delta T) =$$

$$= 0.000012 \times 4000 \times 25 = 1.2 \text{ mm}$$

Por consiguiente, las cargas equivalentes que producirían los mismos cambios son:

$$P_{1-4}^o = \left(\frac{AE}{L} \Delta \right)_{1-4} = \frac{600 \times 200 (-3)}{5660} = -63.6 \text{ kN}$$

$$P_{2-4}^o = 0$$

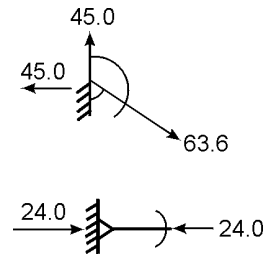
$$P_{3-4}^o = \left(\frac{AE}{L} \Delta \right)_{3-4} = \frac{400 \times 200 \times 1.2}{4000} = 24.0 \text{ kN}$$

y en la primera etapa resultarían las siguientes fuerzas internas [ecuación (11.42)]:

$$\begin{bmatrix} S_{1-4} \\ S_{2-4} \\ S_{3-4} \end{bmatrix}_{(c)} = \begin{bmatrix} 63.6 \text{ (T)} \\ 0 \\ -24.0 \text{ (C)} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

que producen las siguientes reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{(c)} = \begin{bmatrix} -45.0 \\ 45.0 \\ 0 \\ 0 \\ 24.0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Para obtener la matriz de rigidez en coordenadas generales conviene elaborar el siguiente cuadro:

Elemento	ϕ	$\cos \phi$	$\text{sen } \phi$	$\cos^2 \phi$	$\text{sen}^2 \phi$	$\cos \phi \text{ sen } \phi$
1 - 4	-45°	0.707	-0.707	0.500	0.500	-0.500
2 - 4	-26.57°	0.894	-0.447	0.800	0.200	-0.400
3 - 4	0°	1	0	1	0	0

$$\left(\frac{AE}{L} \right)_{1-4} = \frac{600 \times 200}{5660} = 21.20 \text{ kN/mm}$$

$$\left(\frac{AE}{L} \right)_{2-4} = \frac{500 \times 200}{4470} = 22.37 \text{ kN/mm}$$

$$\left(\frac{AE}{L} \right)_{3-4} = \frac{400 \times 200}{4000} = 20.00 \text{ kN/mm}$$

y las matrices de rigidez elementales resultan así [ecuación (11.29)]:

$$K_{1-4} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 10.60 & -10.60 & -10.60 & 10.60 \\ -10.60 & 10.60 & 10.60 & -10.60 \\ -10.60 & 10.60 & 10.60 & -10.60 \\ 10.60 & -10.60 & -10.60 & 10.60 \end{bmatrix}$$

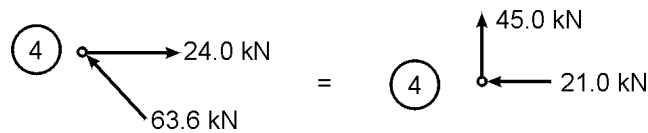
$$K_{2-4} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_4 & v_4 \\ 17.90 & -8.95 & -17.90 & 8.95 \\ -8.95 & 4.47 & 8.95 & -4.47 \\ -17.90 & 8.95 & 17.90 & -8.95 \\ 8.95 & -4.47 & -8.95 & 4.47 \end{bmatrix}$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 20.00 & 0 & -20.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20.00 & 0 & 20.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y ensamblando estas matrices para obtener la matriz de rigidez de la estructura:

$$[K] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 10.60 & -10.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.60 & 10.60 \\ -10.60 & 10.60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10.60 & -10.60 \\ 0 & 0 & -17.90 & -8.95 & 0 & 0 & -17.90 & 8.95 \\ 0 & 0 & -8.95 & 4.47 & 0 & 0 & 8.95 & -4.47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20.00 & 0 & -20.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.60 & 10.60 & -17.90 & 8.95 & -20.00 & 0 & 48.50 & -19.55 \\ 10.60 & -10.60 & 8.95 & -4.47 & 0 & 0 & -19.55 & 15.07 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

Las cargas aplicadas al nudo 4 en la segunda etapa del proceso se muestran a continuación:



y el sistema total queda así, en coordenadas generales:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ -21.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.60 & -10.60 & 0 & 0 & 0 & -10.60 & 10.60 \\ -10.60 & 10.60 & 0 & 0 & 0 & 10.60 & -10.60 \\ 0 & 0 & -17.90 & -8.95 & 0 & -17.90 & 8.95 \\ 0 & 0 & -8.95 & 4.47 & 0 & 8.95 & -4.47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20.00 & -20.00 & 0 \\ -10.60 & 10.60 & -17.90 & 8.95 & -20.00 & 48.50 & -19.55 \\ 10.60 & -10.60 & 8.95 & -4.47 & 0 & -19.55 & 15.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} -21.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.50 & -19.55 \\ -19.55 & 15.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Y despejando los desplazamientos desconocidos:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.50 & -19.55 \\ -19.55 & 15.07 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -21.0 \\ 45.0 \end{bmatrix}$$

Al efectuar las operaciones indicadas se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0432 & 0.0561 \\ 0.0561 & 0.1391 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -21.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.62 \\ 5.08 \end{bmatrix} \text{mm}$$

Y reemplazando estos valores:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{(d)} = \begin{bmatrix} -10.60 & 10.60 \\ 10.60 & -10.60 \\ -17.90 & 8.95 \\ 8.95 & -4.47 \\ -20.00 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.62 \\ 5.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.7 \\ -36.7 \\ 16.5 \\ -8.2 \\ -32.4 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

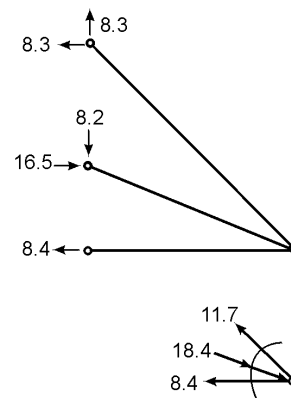
En cuanto a las fuerzas internas, al aplicar la ecuación (11.33):

$$\begin{bmatrix} S_{1-4} \\ S_{2-4} \\ S_{3-4} \end{bmatrix}_{(d)} = \begin{bmatrix} 14.99 & -14.99 \\ 20.00 & -10.00 \\ 20.00 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.62 - 0 \\ 5.08 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51.9 \\ -18.4 \\ 32.4 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Superponiendo ahora las dos etapas, se obtienen los resultados siguientes:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.3 \\ 8.3 \\ 16.5 \\ -8.2 \\ -8.4 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1-4} \\ S_{2-4} \\ S_{3-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.7 \text{ (T)} \\ -18.4 \text{ (C)} \\ 8.4 \text{ (T)} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



comprobándose con ambas figuras que tanto las reacciones como las fuerzas internas definitivas están en equilibrio.

Si se hubiera querido combinar estas fuerzas con las debidas a cargas externas aplicadas en el nudo 4, habría bastado sumar éstas con las equivalentes en la segunda etapa del proceso, al evaluar los valores de u_4 y v_4 . El resto del proceso sería idéntico.

La extensión del problema al caso de armaduras espaciales se puede hacer simplemente dando la consideración debida a las ecuaciones involucradas para asegurarse de que contemplan las tres dimensiones. Esto implica básicamente el uso de las ecuaciones (11.39) y (11.40), en lugar de las utilizadas en este ejemplo.

Con lo anterior se puede considerar concluido el estudio de las armaduras y pasar a analizar aquellos elementos prismáticos que se hallan sometidos primordialmente a flexión, y que genéricamente se denominarán vigas.

11.16 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO PRISMÁTICO SOMETIDO EN SUS EXTREMOS A FLEXIÓN Y CORTE

El estudio de las vigas se iniciará con el de un elemento prismático sometido en sus extremos a flexión y corte. Posteriormente se incluirá el efecto de cargas axiales y el de cargas repartidas, actuando entre los extremos del mismo en uno de los planos principales y perpendicularmente a su eje longitudinal.

En la figura 11.13 está representado un elemento tal, con las fuerzas que actúan sobre él y su sistema de coordenadas locales.

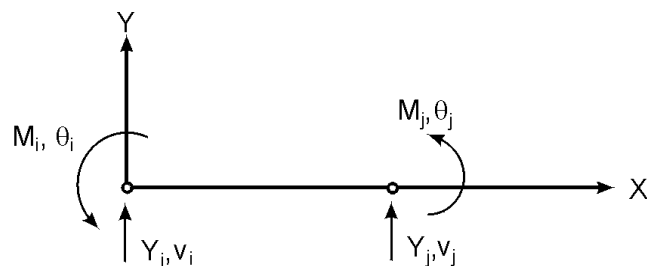


Figura 11.13 Elemento sometido a flexión y corte en sus extremos.

El planteamiento matricial del problema resulta en:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ M_i \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.43)$$

Recordando el significado físico de los términos de cada columna de la matriz de rigidez, se determinan las fuerzas que mantienen la estructura en equilibrio en cada una de las situaciones de la figura 11.14. Para ello resulta muy útil el método de la viga conjugada, como se recordará de lo visto en la deducción del método de Cross (numerales 6.4 a 6.6).

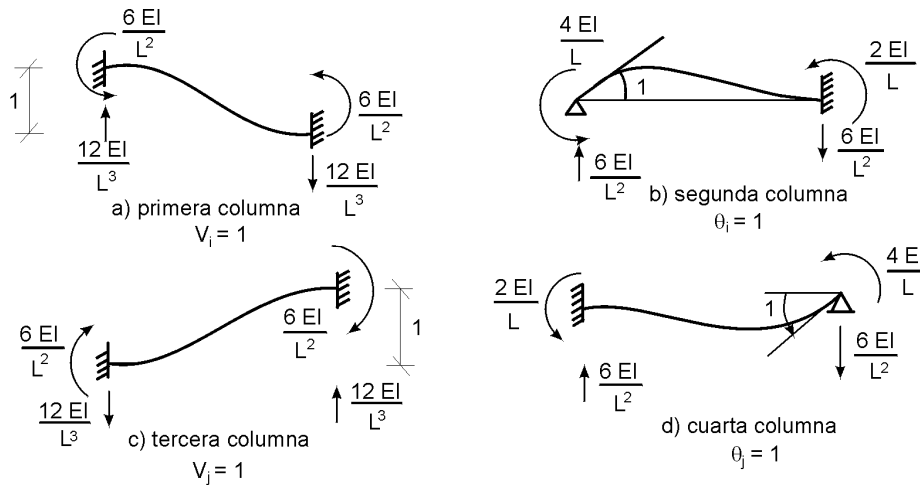


Figura 11.14 Significado físico de los términos de la matriz de rigidez de un elemento prismático sometido a flexión y corte. En todos los casos los desplazamientos nodales no indicados explícitamente son cero.

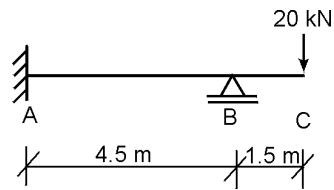
Ensamblando los términos correspondientes a las cuatro columnas, con debida consideración a la convención de signos adoptada (fuerzas hacia arriba y momentos antihorarios son positivos), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{matrix} \quad (11.44)$$

De nuevo se observa que la matriz $[K]$ es simétrica y que la suma de los términos Y correspondientes a cualquier columna da cero. No ocurre lo mismo con los términos M , puesto que en el equilibrio de momentos entran también las fuerzas de corte.

Ejemplo 11.7

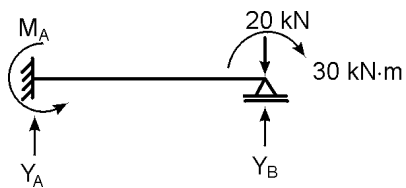
Encuentre para la estructura mostrada: a) las reacciones; b) la rotación en el apoyo B.



$$EI = 7290 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Solución

Como no piden el desplazamiento en C, se puede reemplazar la viga dada por la siguiente viga equivalente:



$$EI/L = 7290 / 4.5 = 1620 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$EI/L^2 = 7290 / (4.5)^2 = 360 \text{ kN}$$

$$EI/L^3 = 7290 / (4.5)^3 = 80 \text{ kN/m}$$

y aplicando la ecuación (11.44):

$$\begin{bmatrix} -30 \\ Y_A \\ M_A \\ Y_B - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6480 & 2160 & 3240 & -2160 \\ 2160 & 960 & 2160 & -960 \\ 3240 & 2160 & 6480 & -2160 \\ -2160 & -960 & -2160 & 960 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ v_A = 0 \\ \theta_A = 0 \\ v_B = 0 \end{bmatrix}$$

expandiendo el primer renglón:

$$[-30] = [2160 \quad 3240 \quad -2160] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6480 [\theta_B]$$

$$\rightarrow \theta_B = -30 / 6480 = -0.00463 \text{ rad } \curvearrowright$$

y reemplazando este valor en los tres últimos:

$$\begin{bmatrix} Y_A \\ M_A \\ Y_B - 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2160 \\ 3240 \\ -2160 \end{bmatrix} [-0.00463] = \begin{bmatrix} -10.0 \\ -15.0 \\ 10.0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

o sea

$$Y_A = -10.0 \text{ kN } \downarrow$$

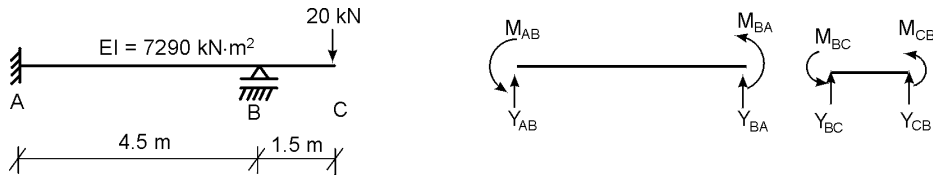
$$M_A = -15.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$Y_B = 30 \text{ kN } \uparrow$$

con lo cual queda resuelto totalmente el problema.

Ejemplo 11.8

En el problema anterior, encuentre la deflexión y rotación del punto C.

**Solución**

En este caso es necesario trabajar con la viga original y considerar dos elementos: AB y BC. Como no piden averiguar las reacciones, se pueden eliminar los términos correspondientes a desplazamientos nulos; queda entonces:

Para el tramo AB:

$$[M_{BA}] = [6480][\theta_B]$$

Para el tramo BC:

$$EI/L = 7290 / 1.5 = 4860 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$EI/L^2 = 7290 / (1.5)^2 = 3240 \text{ kN}$$

$$EI/L^3 = 7290 / (1.5)^3 = 2160 \text{ kN/m}$$

y por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} M_{BC} \\ Y_C \\ M_{CB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19440 & -19440 & 9720 \\ -19440 & 25920 & -19440 \\ 9720 & -19440 & 19440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix}$$

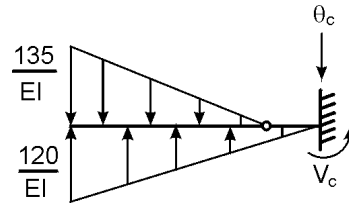
Superponiendo ahora y teniendo en cuenta que en B no se ha aplicado ningún momento externo y por consiguiente $M_{BA} + M_{BC} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25920 & -19440 & 9720 \\ -19440 & 25920 & -19440 \\ 9720 & -19440 & 19440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix}$$

y despejando los desplazamientos desconocidos:

$$\begin{bmatrix} \theta_B \\ v_c \\ \theta_c \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1.543 & 2.315 & 1.543 \\ 2.315 & 5.015 & 3.858 \\ 1.543 & 3.858 & 3.601 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00463 \text{ rad } \curvearrowright \\ -0.01003 \text{ m } \downarrow \\ -0.00772 \text{ rad } \curvearrowright \end{bmatrix}$$

El primer valor coincide con el obtenido anteriormente. Los otros dos se pueden verificar empleando la viga conjugada y las reacciones encontradas antes:



$$\theta_c = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 120 \times 6 - \frac{1}{2} 135 \times 4.5 \right) = 0.00772 \text{ rad} \quad \curvearrowright$$

$$v_c = \frac{1}{EI} \left[360 \times \frac{2}{3} 6 - 303.75 (1.5 + 3) \right] = 0.01003 \text{ m} \downarrow$$

que confirma la validez de las respuestas obtenidas.

Ejemplo 11.9

Resuelva la viga mostrada y halle su flecha máxima. EI es constante.



Solución

Al aplicar la ecuación (11.44) a los elementos de la figura derecha, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 96/L^3 & 24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ 24/L^2 & 8/L & -24/L^2 & 4/L \\ -96/L^3 & -24/L^2 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 4/L & -24/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 96/L^3 & 24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ 24/L^2 & 8/L & -24/L^2 & 4/L \\ -96/L^3 & -24/L^2 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 4/L & -24/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix}$$

en donde se ha tenido en cuenta la simetría para establecer que $\theta_2 = 0$. Ensamblando ahora en el orden apropiado para obtener la matriz de rigidez de la estructura y sabiendo que:

$$Y_{21} + Y_{23} = P$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} -P \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 192/L^3 & -96/L^3 & -24/L^2 & -96/L^3 & 24/L^2 \\ -96/L^3 & 96/L^3 & 24/L^2 & 0 & 0 \\ -24/L^2 & 24/L^2 & 8/L & 0 & 0 \\ -96/L^3 & 0 & 0 & 96/L^3 & -24/L^2 \\ 24/L^2 & 0 & 0 & -24/L^2 & 8/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix}$$

en donde se han eliminado la fila y la columna correspondiente a θ_2 por resultar inoficiosa.

Expandiendo la primera fila:

$$[-P] = EI [192/L^3] [v_2]$$

$$\rightarrow v_2 = -\frac{PL^3}{192 EI} \downarrow$$

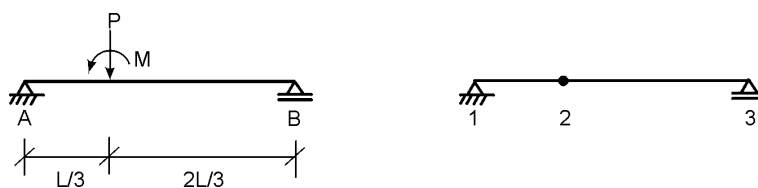
y reemplazando este valor en la segunda parte:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -96/L^3 \\ -24/L^2 \\ -96/L^3 \\ 24/L^2 \end{bmatrix} \left[-\frac{PL^3}{192EI} \right] = \begin{bmatrix} P/2 \\ PL/8 \\ P/2 \\ -PL/8 \end{bmatrix}$$

obviamente estos valores no son otros que las reacciones y momentos de empotramiento.

Ejemplo 11.10

Resuelva completamente la viga mostrada (tomado de la referencia 11.9).



Solución

Eliminando las columnas correspondientes a desplazamientos nulos, el planteamiento matricial para los dos elementos separados queda así:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 54/L^2 & -324/L^3 & 54/L^2 \\ 12/L & -54/L^2 & 6/L \\ -54/L^2 & 324/L^3 & -54/L^2 \\ 6/L & -54/L^2 & 12/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 81/2L^3 & 27/2L^2 & | & 27/2L^2 \\ 27/2L^2 & 6/L & | & 3/L \\ -81/2L^3 & -27/2L^2 & | & -27/2L^2 \\ 27/2L^2 & 3/L & | & 6/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Superponiendo ahora los dos elementos en el orden apropiado, resulta:

$$\begin{bmatrix} -P \\ M \\ 0 \\ 0 \\ Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 729/2L^3 & -81/2L^2 & -54/L^2 & 27/2L^2 & | & | & | \\ -81/2L^2 & 18/L & 6/L & 3/L & | & | & | \\ -54/L^2 & 6/L & 12/L & 0 & | & | & | \\ 27/2L^2 & 3/L & 0 & 6/L & | & | & | \\ \hline -324/L^3 & 54/L^2 & 54/L^2 & 0 & | & | & | \\ -81/2L^3 & -27/2L^2 & 0 & 27/2L^2 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{bmatrix}$$

Tomando ahora la parte superior:

$$\begin{bmatrix} -P \\ M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 729/2L^3 & -81/2L^2 & -54/L^2 & 27/2L^2 \\ -81/2L^2 & 18/L & 6/L & 3/L \\ -54/L^2 & 6/L & 12/L & 0 \\ 27/2L^2 & 3/L & 0 & 6/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

y por partición:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= EI \begin{bmatrix} -54/L^2 & 6/L \\ 27/2L^2 & 3/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 12/L & 0 \\ 0 & 6/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 12/L & 0 \\ 0 & L/6 \end{bmatrix}^{-1} EI \begin{bmatrix} -54/L^2 & 6/L \\ 27/2L^2 & 3/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} L/12 & 0 \\ 0 & 6/L \end{bmatrix}^{-1} EI \begin{bmatrix} -54/L^2 & 6/L \\ 27/2L^2 & 3/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9/2L & -1/2 \\ -9/4L & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y de la primera parte:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix} &= EI \begin{bmatrix} 729/2L^3 & -81/2L^2 \\ -81/2L^2 & 18/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} -54/L^2 & 27/2L^2 \\ 6/L & 3/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/2L & -1/2 \\ -9/4L & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} EI & 729/2L^3 & -81/2L^2 \\ EI & -81/2L^2 & 18/L \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} -2187/8L^3 & 81/4L^2 \\ 81/4L^2 & -9/2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= EI \begin{bmatrix} 729/8L^3 & -81/4L^2 \\ -81/4L^2 & 27/2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 729/8L^3 & -81/4L^2 \\ -81/4L^2 & 27/2L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4L^3/293 & 2L^2/81 \\ 2L^2/81 & L/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

que equivale a:

$$v_2 = -\frac{4L^3}{243EI} P + \frac{2L^2}{81EI} M$$

$$\theta_2 = -\frac{2L^2}{81EI} P + \frac{L}{9EI} M$$

se tenía:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2L & -1/2 \\ 9/4L & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4L^3/243EI & 2L^2/81EI \\ 2L^2/81EI & L/9EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5L^2/81EI & L/18EI \\ -4L^2/81EI & -L/9EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

por consiguiente:

$$\theta_1 = -\frac{5L^2}{81EI} P + \frac{L}{18EI} M$$

$$\theta_3 = \frac{4L^2}{81EI} P - \frac{L}{9EI} M$$

En cuanto a las reacciones:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -324/L^3 & 54/L^2 & 54/L^2 & 0 \\ -81/2L^3 & -27/2L^2 & 0 & -27/2L^2 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4L^3/243 & 2L^2/81 \\ 2L^2/81 & L/9 \\ 5L^2/81 & L/18 \\ -4L^2/81 & -L/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2/3 & 1/L \\ -1/3 & -1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \end{bmatrix}$$

o sea que:

$$Y_1 = \frac{2}{3} P + \frac{M}{L}$$

$$Y_3 = \frac{1}{3} P - \frac{M}{L}$$

que fácilmente se pueden verificar por estática. Naturalmente, el proceso de inversión podría haberse efectuado directamente, en cuyo caso:

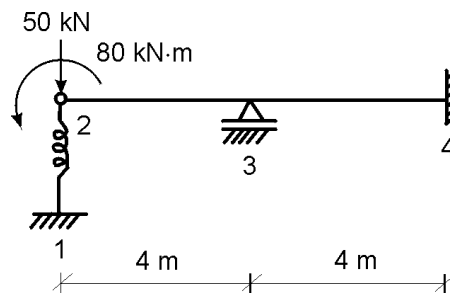
$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 729/2L^3 & -81/2L^2 & -54/L^2 & 27/2L^2 \\ -81/2L^2 & 18/L & 6/L & 3/L \\ -54/L^2 & 6/L & 12/L & 0 \\ 27/2L^2 & 3/L & 0 & 6/L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -P \\ M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4L^3/243 & 2L^2/81 & 5L^2/81 & -4L^2/81 \\ 2L^2/81 & L/9 & L/18 & -L/9 \\ 5L^2/81 & L/18 & L/3 & -L/6 \\ -4L^2/81 & -L/9 & -L/6 & L/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P \\ M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a lo obtenido anteriormente. Obsérvese que para el caso particular de las cargas dadas habría bastado con calcular las dos primeras columnas de la matriz inversa.

Ejemplo 11.11

Resuelva la estructura de la figura. Para la viga, $EI = 6400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ y la constante del resorte es $k = 10000 \text{ kN/m}$. (Tomado de la referencia 11.9).



Solución

Las condiciones de apoyo son:

$$v_1 = v_3 = v_4 = \theta_4 = 0$$

Escribiendo las matrices de rigidez individuales se tiene:

Para el elemento 1 – 2, $\theta = 90^\circ$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -10000 \\ -1000 & 10000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Para las vigas:

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & 2400 & -1200 & 2400 \\ 2400 & 6400 & -2400 & 3200 \\ -1200 & -2400 & 1200 & -2400 \\ 2400 & 3200 & -2400 & 6400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 & 2400 & -1200 & 2400 \\ 2400 & 6400 & -2400 & 3200 \\ -1200 & -2400 & 1200 & -2400 \\ 2400 & 3200 & -2400 & 6400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

y ensamblando por superposición, despreciando las columnas correspondientes a los desplazamientos nulos y teniendo en cuenta que $Y_{21} + Y_{23} = Y_2 = -50$ kN,

$M_{23} = M_2 = 80$ kN·m, $Y_{32} + Y_{34} = Y_3$ y $M_{32} + M_{34} = M_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} Y_2 = -50 \\ M_2 = 80 \\ M_3 = 0 \\ Y_{12} \\ Y_3 \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11200 & 2400 & 2400 & | & | & | & | \\ 2400 & 6400 & 3200 & | & | & | & | \\ 2400 & 3200 & 12800 & | & | & | & | \\ \hline -10000 & 0 & 0 & | & | & | & | \\ -1200 & -2400 & 0 & | & | & | & | \\ 0 & 0 & -2400 & | & | & | & | \\ 0 & 0 & 3200 & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_1 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 = 0 \end{bmatrix}$$

obsérvese que el orden se escogió de tal manera que no es necesario reordenar. Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11200 & 2400 & 2400 \\ 2400 & 6400 & 3200 \\ 2400 & 3200 & 12800 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -50 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

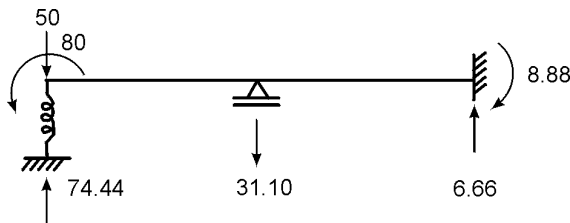
$$= \begin{bmatrix} 9.831 & -3.160 & -1.053 \\ -3.160 & 1.887 & -4.126 \\ -1.053 & -4.126 & 9.041 \end{bmatrix} 10^{-5} \begin{bmatrix} -50 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.00744 \text{ m} \\ 0.01668 \text{ rad} \\ -0.00277 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

y reemplazando estos valores para encontrar las reacciones:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 0 & 0 \\ -1200 & -2400 & 0 \\ 0 & 0 & -2400 \\ 0 & 0 & 3200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00744 \\ 0.01668 \\ -0.00277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.44 \text{ kN} \\ -31.10 \text{ kN} \\ 6.66 \text{ kN} \\ -8.88 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

y haciendo el diagrama de cuerpo libre:



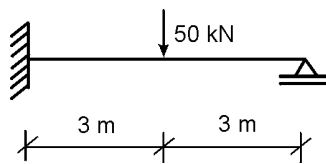
$$\Sigma F_y = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

que demuestra equilibrio perfecto.

Ejemplo 11.12

Resuelva completamente la viga mostrada.

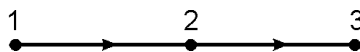


Dimensiones ($b \times h$): $300 \times 400 \text{ mm}$

Módulo de elasticidad: 19 kN/mm^2

Solución

Se empieza por numerar los nudos y orientar los miembros:



$$EI = 19 \times 10^6 \times \frac{0.3 \times (0.4)^3}{12} = 30400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Luego se evalúan las matrices de rigidez individuales; como $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$, no es necesario escribir las columnas correspondientes a dichos desplazamientos. La ecuación $[F] = [K][\delta]$ queda entonces, para cada elemento, así:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & -13510 & 20270 \\ | & | & -20270 & 20270 \\ | & | & 13510 & -20270 \\ | & | & -20270 & 40530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 13510 & 20270 & | & 20270 \\ 20270 & 40530 & | & 20270 \\ -13510 & -20270 & | & -20270 \\ 20270 & 20270 & | & 40530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Obsérvese de nuevo que no se han calculado algunas columnas por cuanto dicho cálculo resulta inoficioso, ya que corresponden a desplazamientos nulos.

Ensamblando ahora con un ordenamiento apropiado:

$$\begin{bmatrix} Y_2 = Y_{21} + Y_{23} \\ M_2 = M_{21} + M_{23} \\ M_2 = M_{32} \\ Y_1 = Y_{12} \\ M_1 = M_{12} \\ Y_3 = Y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13510 & -20270 & 20270 & | & | & | \\ 13510 & 20270 & & | & | & | \\ \hline -20270 & 40530 & 20270 & | & | & | \\ 20270 & 40530 & & | & | & | \\ \hline 20270 & 20270 & 40530 & | & | & | \\ -13510 & 20270 & & | & | & | \\ -20270 & 20270 & & | & | & | \\ -13510 & -20270 & -20270 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix}$$

que al efectuar las sumas y reemplazar por los valores conocidos se convierte en:

$$\begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \\ Y_1 \\ M_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20270 & 0 & 20270 \\ 0 & 81060 & 20270 \\ 20270 & 20270 & 40530 \\ \hline -13510 & 20270 & 0 \\ -20270 & 20270 & 0 \\ -13510 & -20270 & -20270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{bmatrix}$$

y de ahí se pueden despejar los desplazamientos, bien sea por inversión o por eliminación:

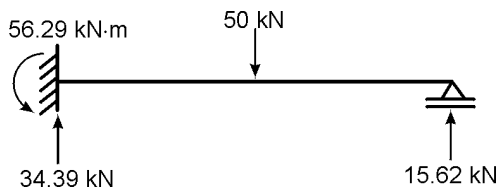
$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27020 & 0 & 20270 \\ 0 & 81060 & 20270 \\ 20270 & 20270 & 40530 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.240 \times 10^{-3} \text{ m } \downarrow \\ -4.631 \times 10^{-4} \text{ rad } \curvearrowright \\ 1.8519 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

Reemplazando ahora estos valores en las matrices individuales, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} = Y_1 \\ M_{12} = M_1 \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.49 \text{ kN } \uparrow \\ 56.29 \text{ kN}\cdot\text{m } \curvearrowright \\ -34.39 \text{ kN } \downarrow \\ 46.90 \text{ kN}\cdot\text{m } \curvearrowright \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} = Y_3 \\ M_{32} = M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.62 \text{ kN } \downarrow \\ -46.91 \text{ kN}\cdot\text{m } \curvearrowright \\ 15.62 \text{ kN } \uparrow \\ 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

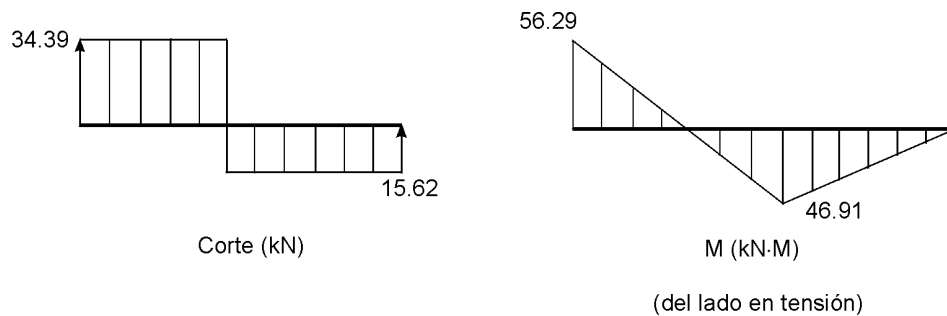
verificándose el equilibrio del nudo 2 y el momento nulo en el apoyo 3. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura para comprobar el equilibrio general:



$$\Sigma F_y = 0.01 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0.01 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

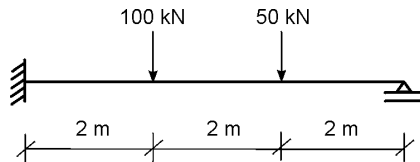
Para terminar, se dibujan los diagramas de corte y momento y la elástica aproximada de la viga:



Obsérvese que debido a la asimetría de la estructura no fue posible averiguar la deflexión máxima que evidentemente se presenta entre los puntos 2 y 3.

Ejemplo 11.13

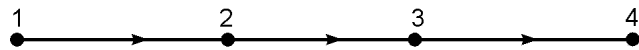
Resuelva la misma viga del ejemplo anterior, pero con las siguientes cargas:



$$EI = 30400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Solución

Como hay dos cargas puntuales, es necesario considerar tres tramos. Numerando los nudos de izquierda a derecha y dándoles a los miembros la misma orientación:



$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Ensamblando con un ordenamiento adecuado, la parte $[F_n] = [K_m][\delta_n]$ queda así:

$$\begin{bmatrix} Y_2 = Y_{21} + Y_{23} \\ M_2 = M_{21} + M_{23} \\ Y_3 = Y_{32} + Y_{34} \\ M_3 = M_{32} + M_{34} \\ M_4 = M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45600 & -45600 & & & \\ 45600 & 45600 & -45600 & 45600 & \\ -45600 & 60800 & & & \\ 45600 & 60800 & -45600 & 30400 & \\ -45600 & -45600 & 45600 & -45600 & \\ & & 45600 & 45600 & 45600 \\ 45600 & 30400 & -45600 & 60800 & \\ & & 45600 & 60800 & 30400 \\ & & & 45600 & 30400 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Efectuando las sumas y reemplazando los valores conocidos:

$$\begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91200 & 0 & -45600 & 45600 & 0 \\ 0 & 121600 & -45600 & 30400 & 0 \\ -45600 & -45600 & 91200 & 0 & 45600 \\ 45600 & 30400 & 0 & 121600 & 30400 \\ 0 & 0 & 45600 & 30400 & 60800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

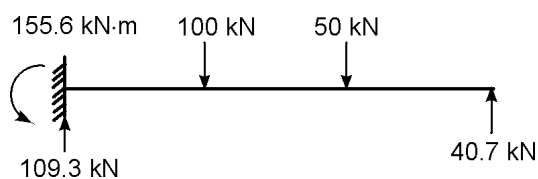
Y resolviendo este sistema para hallar los desplazamientos, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_2 &= -5.442 \times 10^{-3} \text{ m } \downarrow \\ \theta_2 &= -3.046 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright \\ v_3 &= -6.985 \times 10^{-3} \text{ m } \downarrow \\ \theta_3 &= 1.706 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright \\ \theta_4 &= 4.386 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en las matrices individuales y efectuando las multiplicaciones respectivas, se obtienen las fuerzas internas en cada tramo:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= 109.3 \text{ kN } \uparrow & Y_{23} &= 9.3 \text{ kN } \uparrow & Y_{34} &= -40.7 \text{ kN } \downarrow \\ M_{12} &= 155.6 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{23} &= -63.0 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{34} &= -81.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ Y_{21} &= -109.3 \text{ kN } \downarrow & Y_{32} &= -9.3 \text{ kN } \downarrow & Y_{43} &= 40.7 \text{ kN } \uparrow \\ M_{21} &= 63.0 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{32} &= 81.5 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright & M_{43} &= 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

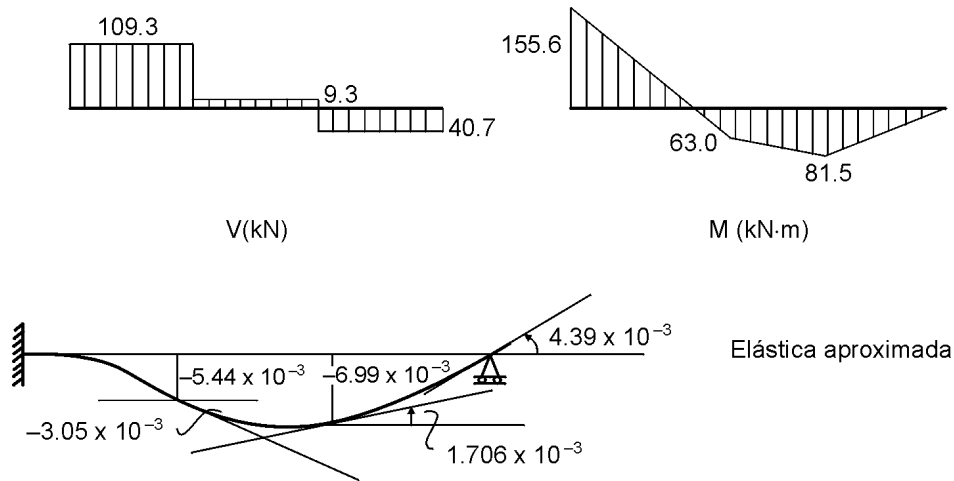
comprobándose el equilibrio en los nudos 2 y 3 y el momento nulo en el nudo 4. Verificando ahora el equilibrio general:



$$\Sigma F_y = 0.0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = -0.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Finalmente se dibujan los diagramas de corte y de momento, y la elástica aproximada:



Obsérvese que la deflexión máxima se presenta en el tramo intermedio y no se puede averiguar directamente por este método.

11.17 VIGAS CON CARGAS REPARTIDAS

El procedimiento empleado en los ejemplos anteriores sirve para resolver vigas con cargas concentradas, pues los tramos de viga comprendidos entre los puntos de aplicación de las cargas están sometidos únicamente a flexión y corte en sus extremos. No sucede así cuando la carga es repartida, ya que entonces el corte varía continuamente dentro del tramo y la relación entre fuerzas y desplazamientos no es la indicada por la ecuación (11.44). Sin embargo, el problema se podría resolver en forma aproximada, reemplazando la carga repartida por varias cargas concentradas, equivalentes en magnitud. Naturalmente, el error disminuye en la medida en que se emplee un mayor número de cargas, pero esto requiere a su vez que se aumente el número de tramos y, en consecuencia, la magnitud del problema, ya que cada tramo introduce dos grados adicionales de libertad. Esto hace que para una estructura grande tal aproximación no tenga importancia práctica, pues consume demasiada memoria de la computadora.

Afortunadamente, el problema de las cargas repartidas se puede tratar en forma similar a la utilizada en armaduras, para el caso de efectos de temperatura o errores de fabricación. En efecto, al considerar la viga de la figura 11.15a, sometida a las cargas repartidas mostradas, es evidente que cada tramo, si estuviera solo, se deformaría como se indica en la figura (b) y su ensamblaje sería imposible, puesto que la continuidad de la viga exige que las rotaciones de todos ellos sean iguales en los nudos comunes.

Es evidente que si a cada tramo cargado se le aplican las reacciones de empotramiento, como se muestra en (c), ya no habrá problema para efectuar el ensamblaje; no obstante, será necesario aplicar a la estructura ensamblada en estas condiciones unas fuerzas iguales en magnitud y de sentido opuesto a las de empotramiento, con el fin de lograr, al efectuar la superposición, la equivalencia de los dos sistemas. Esto se ilustra en la sección

(e) de la misma figura. Como la última viga quedó sometida únicamente a cargas en los apoyos, es posible resolverla con el procedimiento visto anteriormente para tramos sometidos sólo a flexión y corte en sus extremos.

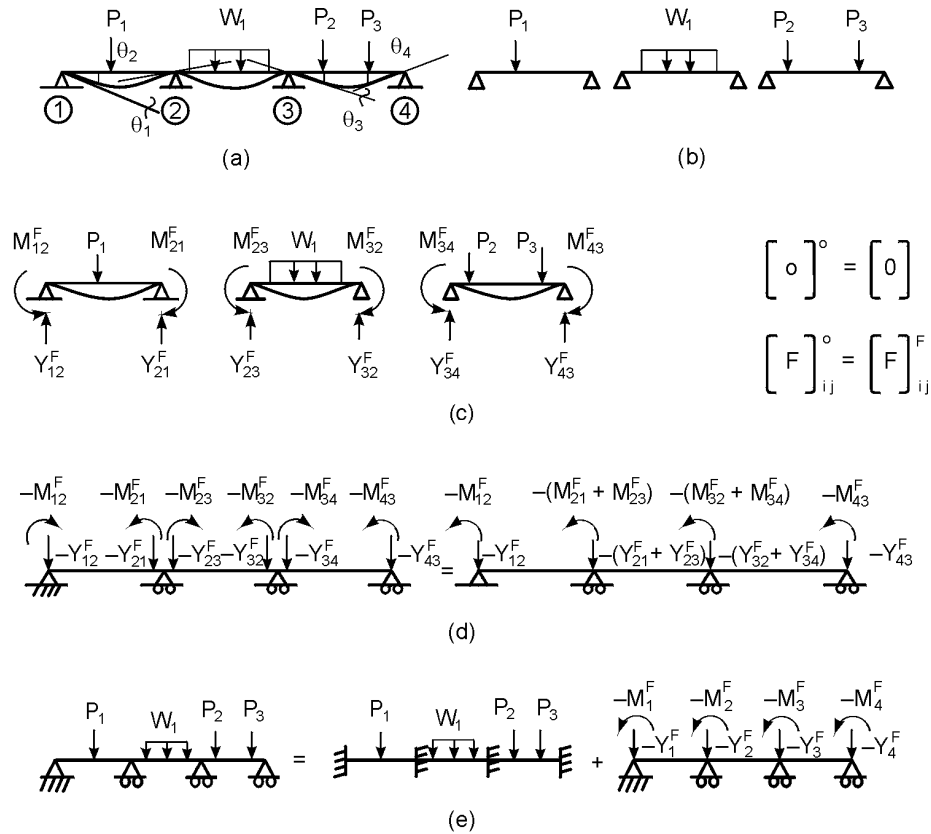


Figura 11.15 Reemplazo de una viga continua con cargas sobre los tramos por un sistema equivalente con cargas concentradas en los apoyos.

Matemáticamente, la superposición se puede expresar así:

$$[F] = [F]^F + [K] [\delta] \tag{11.45}$$

que una vez ordenada permite partirla y escribir:

$$[F]_n = [F]_n^F + \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{na} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_a \end{bmatrix} \tag{11.46}$$

Cuando los desplazamientos de los apoyos son cero, la ecuación anterior se reduce a:

$$[F]_n = [F]_n^F + [K_{nn}] [\delta_n] \tag{11.47}$$

y despejando los desplazamientos libres:

$$[\delta_n] = [K_{nn}]^{-1} [F - F^F]_n \tag{11.48}$$

Como los desplazamientos de la primera etapa, o sea la de la estructura con nudos fijos, son nulos, los desplazamientos encontrados con la ecuación (11.48) resultan idénticos a los de la estructura original.

Después de hallar $[\delta_n]$, las reacciones de los apoyos se calculan así:

$$[F]_a = [F]_a^F + [K]_{an} [\delta_n] \quad (11.49)$$

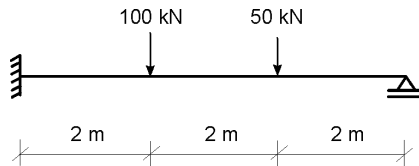
y finalmente se encuentran las fuerzas internas en cada tramo mediante la ecuación:

$$[F]_{ij} = [F]_{ij}^F + [K]_{ij} [\delta]_{ij} \quad (11.50)$$

Puede observarse la analogía que existe con los procesos iterativos de Cross, Kani y Takabeya, en que se parte de la estructura fija, representada acá por el primer término del lado derecho de las ecuaciones (11.45), (11.46), (11.47) y (11.49), y en que el proceso iterativo tiene por objeto evaluar el segundo término del lado derecho de dichas ecuaciones, o sea el efecto de los giros en los apoyos.

Ejemplo 11.14

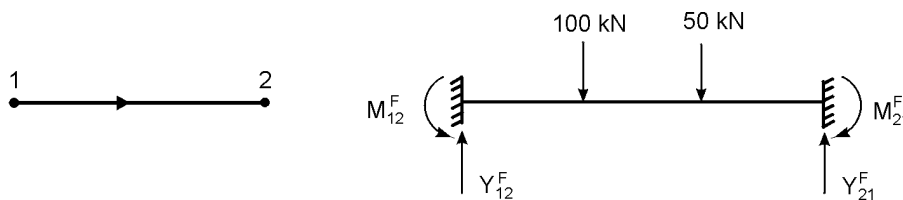
Resuelva la viga mostrada, utilizando un solo tramo y el procedimiento indicado en el artículo anterior.



$$EI = 30400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Solución

En primer lugar se numeran los nudos y se asigna una orientación al tramo. Luego se calculan las reacciones de empotramiento, que para una viga con esas cargas son:



$$M_{12}^F = \frac{100 \times 16 \times 2 + 50 \times 4 \times 4}{36} = 111.1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{21}^F = -\frac{100 \times 4 \times 4 + 50 \times 16 \times 2}{36} = -88.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_{12}^F = \frac{100 \times 4 + 5 \times 2 + (111.1 - 88.9)}{6} = 87.0 \text{ kN}$$

$$Y_{21}^F = \frac{100 \times 2 + 50 \times 4 - (111.1 - 88.9)}{6} = 63.0 \text{ kN}$$

y empleando la ecuación (11.44) para evaluar la matriz de rigidez, el planteamiento matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & 5067 \\ | & | & | & 10133 \\ | & | & | & -5067 \\ | & | & | & 20267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 87.0 \\ 111.1 \\ 63.0 \\ -88.9 \end{bmatrix}$$

en que se ha omitido el cálculo de las columnas 1, 2 y 3 por ser innecesario para la solución del problema. Despejando θ_2 o empleando la ecuación (11.48):

$$[\theta_2] = [20267]^{-1} [88.9] = 88.9 / 20267 = 4.3864 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright$$

que prácticamente coincide con el valor obtenido antes.

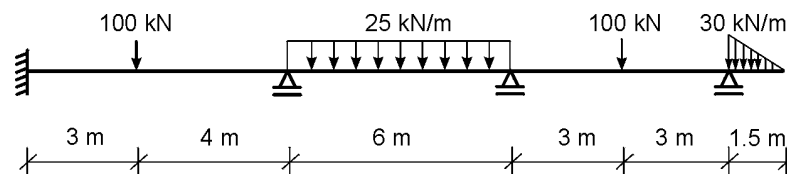
El vector de reacciones será entonces:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5067 \\ 10133 \\ -5067 \end{bmatrix} [4.3864 \times 10^{-3}] + \begin{bmatrix} 87.0 \\ 111.1 \\ 63.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 109.2 \text{ kN } \uparrow \\ 155.6 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright \\ 40.8 \text{ kN } \uparrow \end{bmatrix}$$

que de nuevo coincide, desde el punto de vista práctico, con el encontrado anteriormente. Con esto queda terminada la solución, ya que la estructura consta de un solo miembro y, por tanto, sus fuerzas internas coinciden con las reacciones.

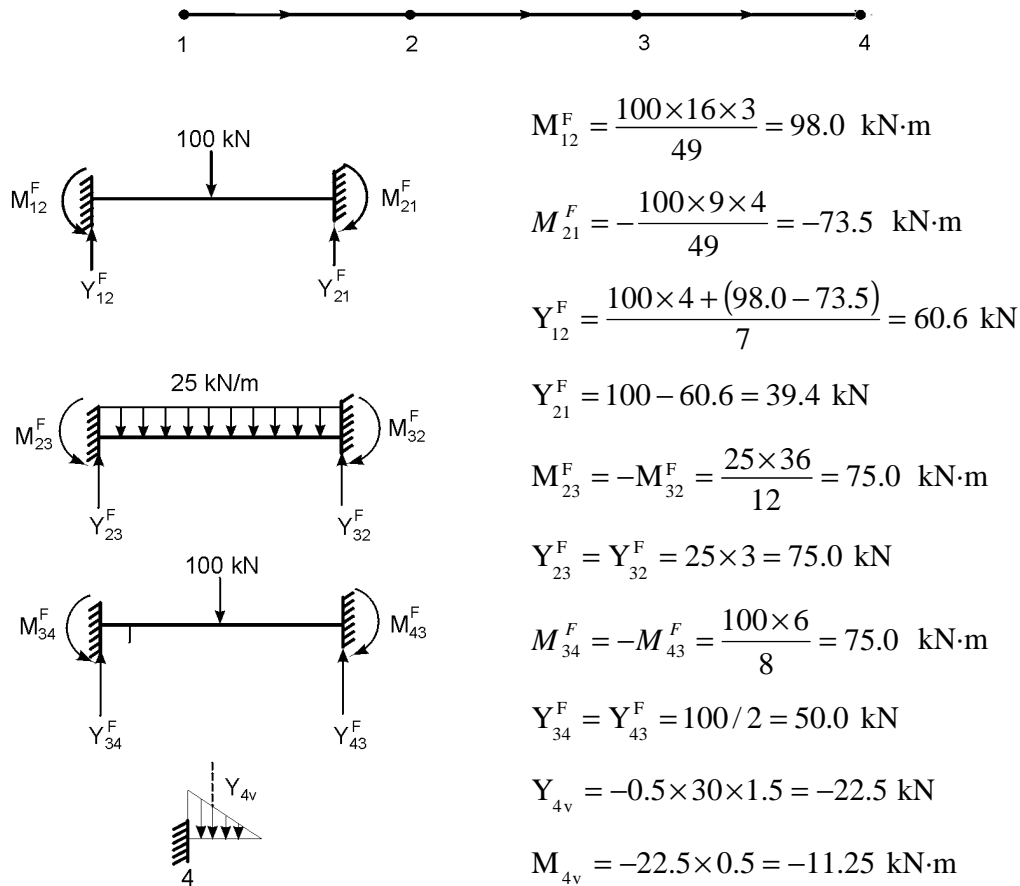
Ejemplo 11.15

Resuelva completamente la viga indicada, cuya sección mide $300 \times 350 \text{ mm}$.
 $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.



Solución

Se empieza por numerar los nudos y se les asigna a los miembros sentido positivo de izquierda a derecha. Luego se calculan las reacciones de empotramiento y las cargas que actúan sobre el nudo 4 por efecto del voladizo:



Ahora se utiliza la ecuación (11.44) para evaluar la matriz de rigidez de cada elemento.

$$EI = 19 \times 10^6 \times 0.3 \times (0.35)^3 / 12 = 20370 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

El planteamiento básico para cada uno queda entonces así:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60.6 \\ 98.0 \\ 39.4 \\ -73.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60.6 \\ 98.0 \\ 39.4 \\ -73.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ | & 3395 & | & 3395 \\ | & 13580 & | & 6790 \\ | & -3395 & | & -3395 \\ | & 6790 & | & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50.0 \\ 75.0 \\ 50.0 \\ -75.0 \end{bmatrix}$$

A continuación se ensamblan los tres elementos en tal forma que la matriz $[K]$ quede de una vez ordenada, como se muestra en seguida.

En ella se tuvo en cuenta que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{12} & Y_2 &= Y_{21} + Y_{23} & Y_3 &= Y_{32} + Y_{34} \\ Y_4 &= Y_{43} + Y_{4v} \\ M_1 &= M_{12} & M_2 &= M_{21} + M_{23} & M_3 &= M_{32} + M_{34} \\ M_4 &= M_{43} + M_{4v} \end{aligned}$$

y por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \\ M_4 = -1.12 \\ Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_4 - 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25220 & 6790 & 0 \\ 6790 & 27160 & 6790 \\ 0 & 6790 & 13580 \\ \hline 2494 & 0 & 0 \\ 5820 & 0 & 0 \\ 901 & 3395 & 0 \\ -3395 & 0 & 3395 \\ 0 & -3395 & -3395 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -75.0 \\ \hline 60.6 \\ 98.0 \\ 114.4 \\ 125.0 \\ 50.0 \end{bmatrix}$$

Despejando los desplazamientos desconocidos:

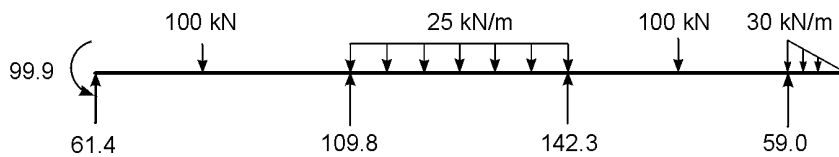
$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25220 & 6790 & 0 \\ 6790 & 27160 & 6790 \\ 0 & 6790 & 13580 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 63.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.296 & -1.227 & 0.614 \\ -1.227 & 4.559 & -2.279 \\ 0.614 & -2.279 & 8.503 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 63.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.271 \times 10^{-4} \curvearrowright \\ -1.436 \times 10^{-3} \curvearrowleft \\ 5.416 \times 10^{-3} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

radianes

Substituyendo estos valores en la parte inferior de la ecuación anterior, se obtienen las reacciones:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 61.4 \text{ kN } \uparrow & M_1 &= 99.9 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\
 Y_2 &= 109.8 \text{ kN } \uparrow & Y_3 &= 142.3 \text{ kN } \uparrow & Y_4 &= 59.0 \text{ kN } \uparrow
 \end{aligned}$$

Con estos valores se puede comprobar el equilibrio general de la estructura:



$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y &= 61.4 + 109.8 + 142.3 + 59.0 - 100 - 25 \times 6 - 100 + \\
 &\quad -0.5 \times 1.5 \times 30 = 0.0 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_1 &= 59.0 \times 19 + 142.3 \times 13 + 109.8 \times 7 + 99.9 + \\
 &\quad -22.5 \times 19.5 - 100 \times 16 - 150 \times 10 - 100 \times 3 = 0.6 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

que se puede considerar aceptable.

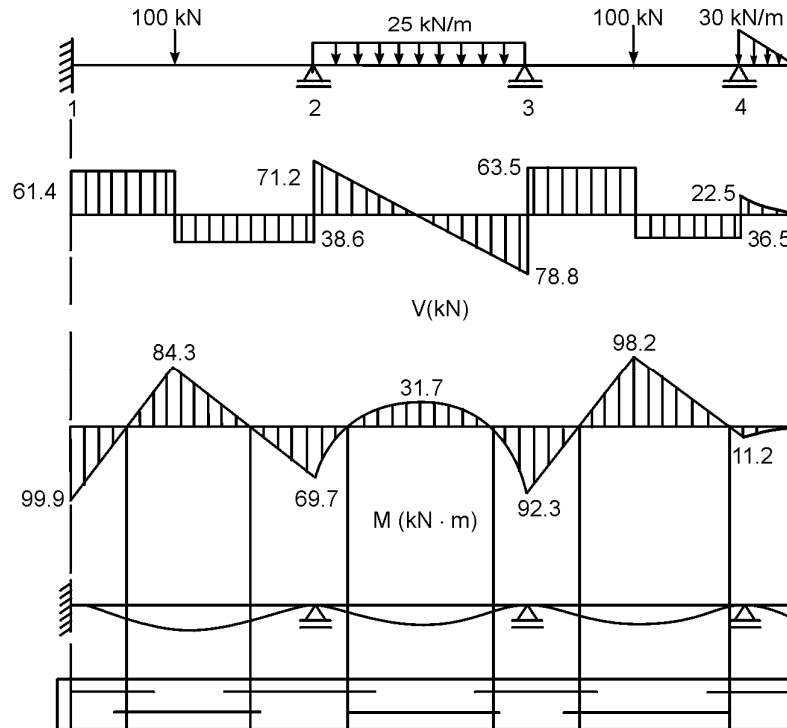
Finalmente, se utilizan las ecuaciones básicas de los elementos para encontrar sus fuerzas internas:

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2494 \\ 11640 \end{bmatrix} [3.271 \times 10^{-4}] + \begin{bmatrix} 39.4 \\ -73.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38.6 \text{ kN } \uparrow \\ -69.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3395 & 3395 \\ 13580 & 6790 \\ -3395 & -3395 \\ 6790 & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.271 \times 10^{-4} \\ -1.436 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75.0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.2 \text{ kN } \uparrow \\ 69.7 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ 78.8 \text{ kN } \uparrow \\ -92.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

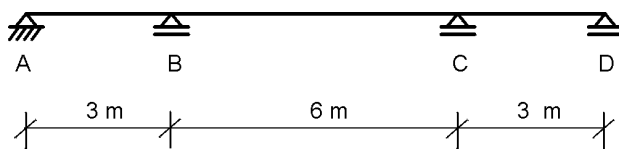
$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3395 & 3395 \\ 13580 & 6790 \\ -3395 & -3395 \\ 6790 & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.436 \times 10^{-3} \\ 5.416 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50.0 \\ 75.0 \\ 50.0 \\ 75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63.5 \text{ kN } \uparrow \\ 92.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \\ 36.5 \text{ kN } \uparrow \\ -11.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

En consecuencia, los diagramas de fuerzas internas y la elástica aproximada quedan así:



Ejemplo 11.16

Estudiar en la siguiente viga el efecto de un asentamiento diferencial de 1.5 cm en el apoyo B.



Inercias

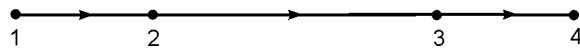
$$AB \text{ y } CD: 28125 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$BC: 225000 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$E: 21.9 \text{ kN/mm}^2$$

Solución

Se numeran los nudos y a los miembros se les asigna sentido positivo de izquierda a derecha:



$$(EI)_{12} = (EI)_{34} = 21.9 \times 10^6 \times 28125 \times 10^{-8} = 6160 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$(EI)_{23} = 21.9 \times 225000 \times 10^{-8} = 49280 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Como no existen cargas sobre los miembros, las fuerzas de empotramiento son cero y la ecuación $[F] = [K] [\delta]$ queda entonces, para cada elemento, así:

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ M_{12} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ | & 4110 & -2740 & 4110 \\ | & 8210 & -4110 & 4110 \\ | & -4110 & 2740 & -4110 \\ | & 4110 & -4110 & 8210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 = -0.015 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ | & 2740 & 8210 & | & 8210 \\ | & 8210 & 32850 & | & 16420 \\ | & -2740 & -8210 & | & -8210 \\ | & 8210 & 16420 & | & 32850 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 = -0.015 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ | & 4110 & | & 4110 \\ | & 8210 & | & 4110 \\ | & -4110 & | & -4110 \\ | & 4110 & | & 8210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Y ensamblándolas en forma ordenada, resulta la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = 0 \\ M_3 = 0 \\ M_4 = 0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8210 & 4110 & 0 & 0 & -4110 \\ 4110 & 41060 & 16420 & 0 & 4100 \\ 0 & 16420 & 41060 & 4110 & 8210 \\ 0 & 0 & 4110 & 8210 & 0 \\ \hline 4110 & 4110 & 0 & 0 & -2740 \\ -4110 & 4100 & 8210 & 0 & 5480 \\ 0 & -8210 & -4100 & 4110 & -2740 \\ 0 & 0 & -4110 & -4110 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ v_2 = -0.015 \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones de la porción superior, resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8210 & 4110 & 0 & 0 \\ 4110 & 41060 & 16420 & 0 \\ 0 & 16420 & 41060 & 4110 \\ 0 & 0 & 4110 & 8210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 61.6 \\ -61.5 \\ -123.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De ella se puede despejar el vector de giros desconocidos, que equivale a aplicar la ecuación (11.15):

$$[\delta_n] = [K_{nn}]^{-1} [F_n] - [K_{na}] [\delta_a] \quad (11.15)$$

Y resolviendo este sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.134 \times 10^{-3} \curvearrowright \\ 1.261 \times 10^{-3} \curvearrowright \\ 2.628 \times 10^{-3} \curvearrowright \\ -1.316 \times 10^{-3} \curvearrowleft \end{bmatrix} \text{radianes}$$

Para evaluar las reacciones se reemplazan estos valores y el de v_2 en la porción inferior de la matriz general. Los resultados son:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4110 & 4110 & 0 & 0 \\ -4110 & 4100 & 8210 & 0 \\ 0 & -8210 & -4100 & 4110 \\ 0 & 0 & -4110 & -4110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2740 \\ 5480 \\ -2740 \\ 0 \end{bmatrix} [-0.015] =$$

$$= \begin{bmatrix} 12.85 \uparrow \\ -22.02 \downarrow \\ 14.56 \uparrow \\ -5.39 \downarrow \end{bmatrix} \text{ kN}$$

El siguiente paso es verificar el equilibrio general:

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 12.85 & 22.02 & 14.56 & 5.39 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Sigma F_y = 0.00 \text{ kN} \\ \Sigma M_1 = 0.30 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{array}$$

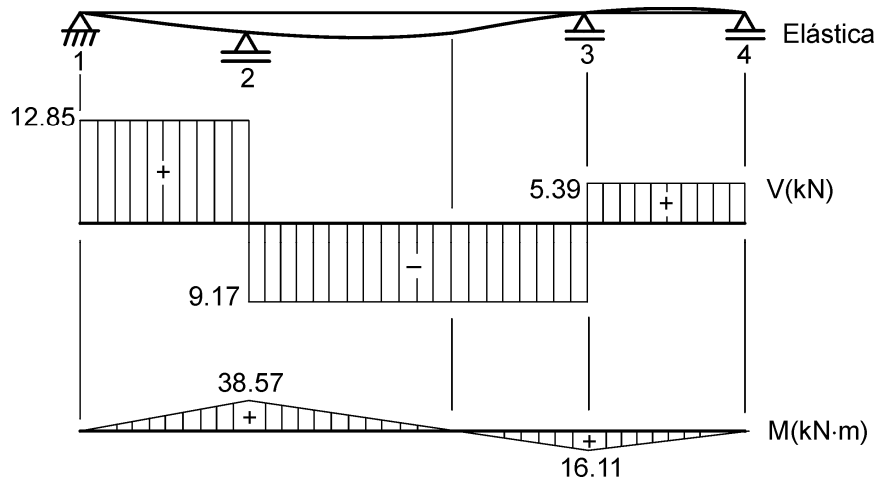
que se considera aceptable. Por último se calculan las fuerzas internas de los elementos con las ecuaciones básicas de cada uno:

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4110 & 2740 & -4110 \\ 4110 & -4110 & 8210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.008134 \\ -0.015 \\ 0.001261 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.85 \text{ kN} \downarrow \\ 38.57 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{23} \\ M_{23} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2740 & 8210 & 8210 \\ 8210 & 32850 & 16420 \\ -2740 & -8210 & -8210 \\ 8210 & 16420 & 32850 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.015 \\ 0.001261 \\ 0.002628 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.17 \text{ kN} \downarrow \\ -38.57 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \\ 9.17 \text{ kN} \uparrow \\ -16.11 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{34} \\ M_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4110 & 4110 \\ 8210 & 4110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002628 \\ -0.001316 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.39 \text{ kN } \uparrow \\ 16.16 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

Finalmente, con estos valores pueden dibujarse todos los diagramas:



11.18 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO PRISMÁTICO SOMETIDO EN SUS EXTREMOS A FUERZA AXIAL, FLEXIÓN Y CORTE

Si se incluye ahora una fuerza axial, se tendrá el caso de una viga prismática de un pórtico plano, cuya representación esquemática se puede ver en la figura 11.16.

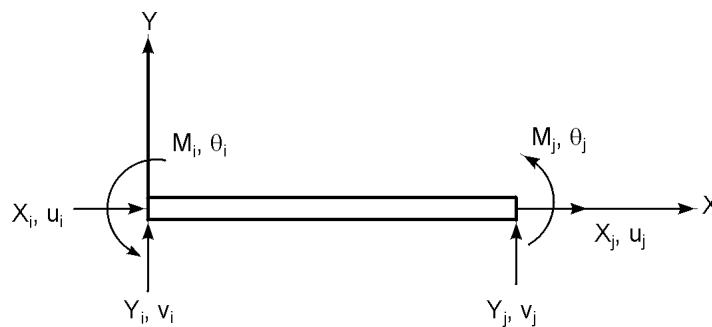


Figura 11.16 Elemento sometido en sus extremos a fuerza axial, flexión y corte (viga típica de un pórtico plano).

Su planteamiento matricial está dado por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

Para averiguar los términos de la matriz de rigidez correspondiente se puede utilizar la definición del significado físico de cada columna o, si se desprecian los efectos de segundo orden, superponer los dos casos ya vistos, como se indica en la figura 11.17.

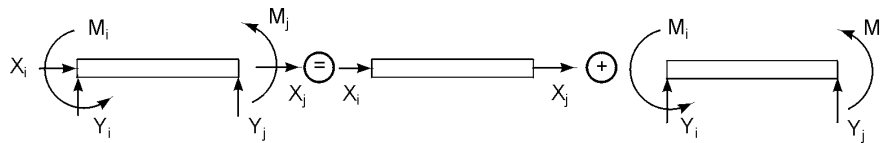


Figura 11.17 Equivalencia por superposición de una viga sometida a fuerza axial, flexión y corte.

Siguiendo este último procedimiento, se empieza por expandir los planteamientos fundamentales, con base en las ecuaciones (11.20) y (11.44), para que sean compatibles. El correspondiente a fuerza axial queda entonces así:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

y el de corte y flexión:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Ahora sí se puede efectuar su superposición, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.52)$$

Y si se compara esta ecuación con la (11.51) se ve que la matriz de rigidez buscada es:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

Esta matriz se puede aplicar directamente a cualquier viga horizontal de un pórtico plano. Constituye, además, para cualquier viga con orientación diferente, la matriz de rigidez básica referida al sistema de ejes locales, que se emplea en el triple producto de transformación al sistema de ejes generales explicado más adelante.

11.19 EVALUACIÓN DIRECTA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA COLUMNA PRISMÁTICA, VERTICAL, REFERIDA AL SISTEMA DE EJES GENERALES O DE LA ESTRUCTURA

Cuando el elemento prismático del artículo anterior está orientado verticalmente, constituye la columna típica de un pórtico plano. Para poder resolver pórticos ortogonales, sin utilizar matrices de transformación, conviene entonces deducir la matriz de rigidez de las columnas, refiriéndola directamente al sistema de coordenadas generales. Esto se logra fácilmente utilizando el significado físico de los términos de cada columna, como se ilustra en la figura 11.18. Tomando de ella las fuerzas respectivas, resulta:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (11.54)$$

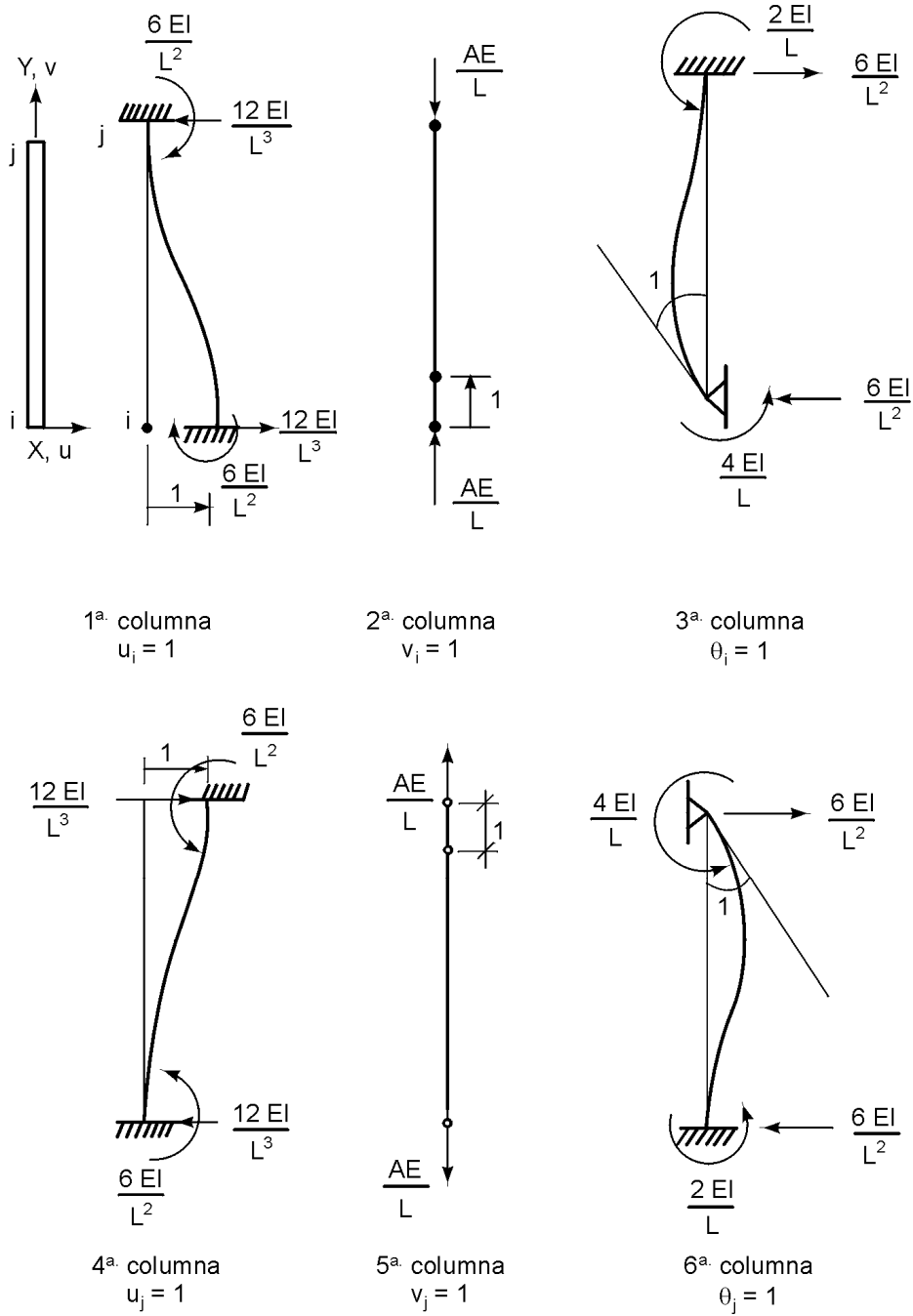


Figura 11.18 Fuerzas correspondientes a cada columna de la matriz de rigidez de un elemento vertical de pórtico plano.

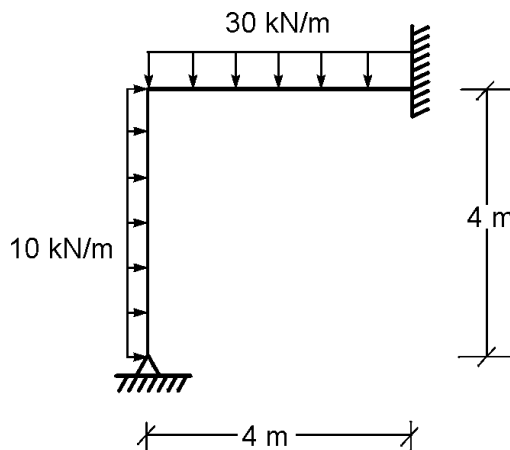
o sea que la matriz de rigidez de una columna vertical de un pórtico plano es:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{matrix} \quad (11.55)$$

Usando las ecuaciones (11.52) y (11.54) se puede resolver cualquier pórtico plano ortogonal. Tanto las cargas nodales originales como las correspondientes a fuerzas de empotramiento equivalentes, si hay cargas sobre los miembros, deberán referirse también al sistema de ejes generales. Todo esto se ilustra con los ejemplos siguientes.

Ejemplo 11.17

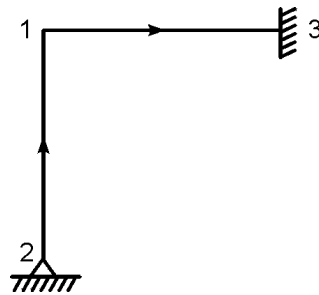
Resuelva el pórtico siguiente:



Viga: 300 × 350 mm
 Columna: 300 × 400 mm
 E : 19 kN/mm²

Solución

Se numeran los nudos, comenzando por el nudo libre para facilitar el ordenamiento, y se orientan los elementos en forma compatible con las figuras 11.16 y 11.18, así:



Para evaluar la matriz de rigidez de cada elemento conviene elaborar el siguiente cuadro (kilonewtons y metros):

Elemento	AE/L	EI	$2 EI/L$	$4 EI/L$	$6 EI/L^2$	$12 EI/L^3$
1 - 3	498750	20360	10180	20360	7640	3820
2 - 1	570000	30400	15200	30400	11400	5700

Las reacciones de empotramiento son:

$$Y_{13}^F = Y_{31}^F = (30 \times 4) / 2 = 60.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{13}^F = -M_{31}^F = (30 \times 16) / 12 = 40.0 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$$

$$X_{21}^F = X_{12}^F = -(10 \times 4) / 2 = -20.0 \text{ kN } \leftarrow$$

$$M_{21}^F = -M_{12}^F = (10 \times 16) / 12 = (40/3) \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$$

Conocidos estos valores, se aplican las ecuaciones (11.50), (11.53) y (11.55), obteniéndose entonces para la viga:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \\ X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \end{bmatrix} = \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 498750 & 0 & 0 \\ 0 & 3820 & 7640 \\ 0 & 7640 & 20360 \\ -498750 & 0 & 0 \\ 0 & -3820 & -7640 \\ 0 & 7640 & 10180 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

y para la columna:

$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \\ X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & -11400 & -5700 & 0 & -11400 \\ | & | & | & 0 & 0 & -570000 & 0 \\ | & | & | & 30400 & 11400 & 0 & 15200 \\ | & | & | & 11400 & 5700 & 0 & 11400 \\ | & | & | & 0 & 0 & 570000 & 0 \\ | & | & | & 15200 & 11400 & 0 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2=0 \\ v_2=0 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ -40/3 \end{bmatrix}$$

Como las reacciones son iguales a las fuerzas internas en uno de los extremos de las barras respectivas, basta con ensamblar la parte correspondiente a los desplazamientos desconocidos. Al hacerlo, se llega a:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{13} + X_{12} = 0 \\ Y_1 = Y_{13} + Y_{12} = 0 \\ M_1 = M_{13} + M_{12} = 0 \\ M_2 = M_{21} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504450 & 0 & 11400 & 11400 \\ 0 & 573820 & 7640 & 0 \\ 11400 & 7640 & 50760 & 15200 \\ 11400 & 0 & 15200 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0 \\ 60.0 \\ 80/3 \\ 40/3 \end{bmatrix}$$

Y de ahí se despeja el siguiente sistema que se puede resolver por inversión o por eliminación gaussiana.

$$\begin{bmatrix} 504450 & 0 & 11400 & 11400 \\ 0 & 573820 & 7640 & 0 \\ 11400 & 7640 & 50760 & 15200 \\ 11400 & 0 & 15200 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0 \\ -60.0 \\ -80/3 \\ -40/3 \end{bmatrix}$$

Utilizando este último procedimiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 5.515 \times 10^{-5} \text{ m} \rightarrow \\ v_1 &= -9.853 \times 10^{-5} \text{ m} \downarrow \\ \theta_1 &= -4.532 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright \\ \theta_2 &= -2.327 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright \end{aligned}$$

Las fuerzas internas y reacciones se calculan reemplazando estos valores en las ecuaciones de los miembros individuales (páginas 494 y 495):

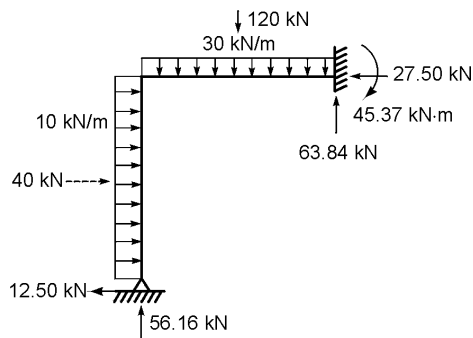
$$\begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \\ X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 498750 & 0 & 0 \\ 0 & 3820 & 7640 \\ 0 & 7640 & 20360 \\ -498750 & 0 & 0 \\ 0 & -3820 & -7640 \\ 0 & 7640 & 10180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.515 \times 10^{-5} \\ -9.853 \times 10^{-5} \\ -4.532 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 27.51 \\ -3.84 \\ -9.98 \\ -27.51 \\ 3.84 \\ -5.37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 40.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -40.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27.51 \text{ kN} \rightarrow \\ 56.16 \text{ kN} \uparrow \\ 30.02 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -27.51 \text{ kN} \leftarrow \\ 63.84 \text{ kN} \uparrow \\ -45.37 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \\ X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11400 & -5700 & 0 & -11400 \\ 0 & 0 & -570000 & 0 \\ 30400 & 11400 & 0 & 15200 \\ 11400 & 5700 & 0 & 11400 \\ 0 & 0 & 570000 & 0 \\ 15200 & 11400 & 0 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.327 \times 10^{-4} \\ 5.515 \times 10^{-5} \\ -9.853 \times 10^{-5} \\ -4.532 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7.50 \\ 56.16 \\ -13.33 \\ -7.50 \\ -56.16 \\ -16.69 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20.0 \\ 0 \\ 40/3 \\ -20.0 \\ 0 \\ -40/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12.50 \text{ kN} \leftarrow \\ 56.16 \text{ kN} \uparrow \\ 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -27.50 \text{ kN} \leftarrow \\ -56.16 \text{ kN} \downarrow \\ -30.02 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

Con estos valores se puede verificar el equilibrio general:

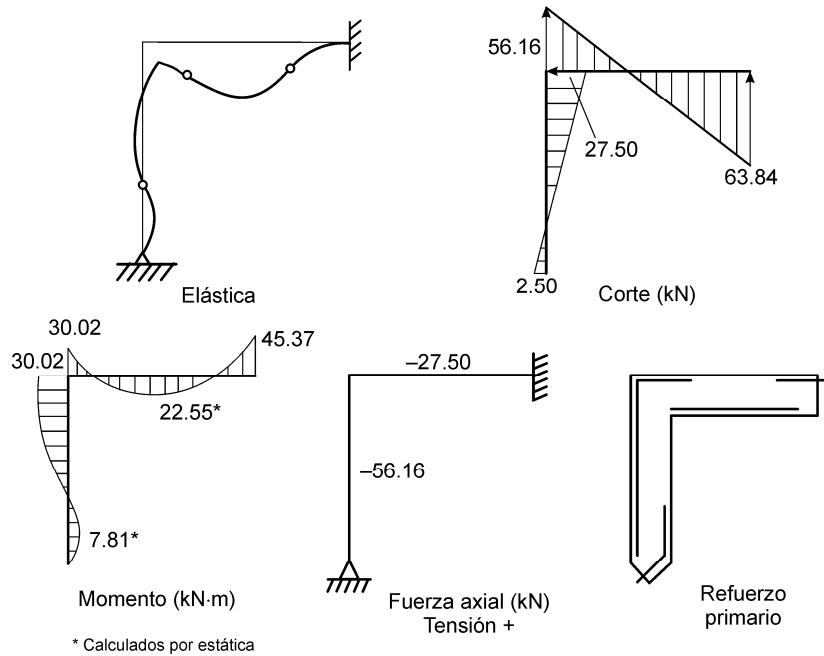


$$\Sigma F_x = -0.01 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\Sigma F_y = 0.00 \text{ kN}$$

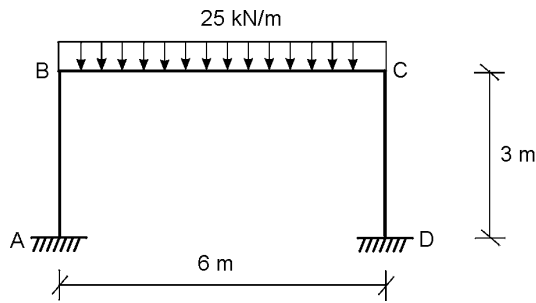
$$\Sigma M_2 = 0.03 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \beta$$

Finalmente se dibujan los diagramas:



Ejemplo 11.18

Analice el pórtico de la figura por el método matricial de los desplazamientos.



Dimensiones $b \times h$ (mm)

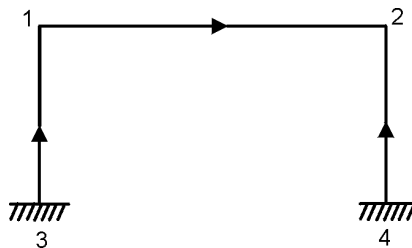
Viga: 300 × 500

Columnas: 300 × 300

E: 19 kN/mm²

Solución

Se empieza por numerar los nudos y orientar los elementos como se indica a continuación:



Se comenzó por los nudos libres para facilitar el ordenamiento. El cuadro auxiliar de propiedades (en kilonewtons y metros) resulta así:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L ²	12 EI/L ³
1 - 2	475000	59380	19790	39580	9900	3300
3 - 1 y 4 - 2	570000	12820	8550	17100	8550	5700

Las reacciones de empotramiento en la viga, único miembro cargado, son:

$$Y_{12}^F = Y_{21}^F = \frac{25 \times 6}{2} = 75.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{12}^F = -M_{21}^F = \frac{25 \times 36}{12} = 75.0 \text{ kN} \cdot \text{m } \curvearrowright$$

De manera que las ecuaciones individuales para cada miembro resultan como se indica en seguida. Para la viga:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 475000 & 0 & 0 & -475000 & 0 & 0 \\ 0 & 3300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\ 0 & 9900 & 39580 & 0 & -9900 & 19790 \\ -475000 & 0 & 0 & 475000 & 0 & 0 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 3300 & -9900 \\ 0 & 9900 & 19790 & 0 & -9900 & 39580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ 0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix}$$

y para las columnas:

$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ | & | & | & -5700 & 0 & -8550 \\ | & | & | & 0 & -570000 & 0 \\ | & | & | & 8550 & 0 & 8550 \\ | & | & | & 5700 & 0 & 8550 \\ | & | & | & 0 & 570000 & 0 \\ | & | & | & 8550 & 0 & 17100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{42} \\ Y_{42} \\ M_{42} \\ X_{24} \\ Y_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ | & | & | & -5700 & 0 & -8550 \\ | & | & | & 0 & -570000 & 0 \\ | & | & | & 8550 & 0 & 8550 \\ | & | & | & 5700 & 0 & 8550 \\ | & | & | & 0 & 570000 & 0 \\ | & | & | & 8550 & 0 & 17100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ensamblando ahora la parte correspondiente a los nudos libres, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{12} + X_{13} = 0 \\ Y_1 = Y_{12} + Y_{13} = 0 \\ M_1 = M_{12} + M_{13} = 0 \\ X_2 = X_{21} + X_{24} = 0 \\ Y_2 = Y_{21} + Y_{24} = 0 \\ M_2 = M_{21} + M_{24} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 480700 & 0 & 8550 & -475000 & 0 & 0 \\ 0 & 573300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\ 8550 & 9900 & 56680 & 0 & -9900 & 19790 \\ -475000 & 0 & 0 & 480700 & 0 & 8550 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 573300 & -9900 \\ 0 & 9900 & 19790 & 8550 & -9900 & 56680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ 0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix}$$

que equivale a:

$$= \begin{bmatrix} 480700 & 0 & 8550 & -475000 & 0 & 0 \\ 0 & 573300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\ 8550 & 9900 & 56680 & 0 & -9900 & 19790 \\ -475000 & 0 & 0 & 480700 & 0 & 8550 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 573300 & -9900 \\ 0 & 9900 & 19790 & 8550 & -9900 & 56680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -75.0 \\ -75.0 \\ 0 \\ -75.0 \\ 75.0 \end{bmatrix}$$

Es obvio que en este momento podría aprovecharse la simetría para reducir el sistema a la mitad, pero esto se dejará para más adelante cuando se hable de técnicas de condensación. Por tanto, resolviendo este sistema de seis ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1.823 \times 10^{-5} \text{ m } \rightarrow \\ v_1 &= -1.316 \times 10^{-4} \text{ m } \downarrow \\ \theta_1 &= -2.037 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright \\ u_2 &= -1.823 \times 10^{-5} \text{ m } \leftarrow \\ v_2 &= -1.316 \times 10^{-4} \text{ m } \downarrow \\ \theta_2 &= 2.037 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowleft \end{aligned}$$

Y reemplazando estos valores en las ecuaciones individuales (página 498), y efectuando las operaciones indicadas

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.32 \\ 0 \\ 40.31 \\ -17.32 \\ 0 \\ 40.31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 75.0 \\ 75.0 \\ 0 \\ 75.0 \\ -75.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.32 \text{ kN} \rightarrow \\ 75.0 \text{ kN} \uparrow \\ 34.69 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -17.32 \text{ kN} \leftarrow \\ 75.0 \text{ kN} \uparrow \\ -34.69 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

$$X_{31} = X_3 = 17.31 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Y_{31} = Y_3 = 75.0 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_{31} = M_3 = -17.26 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft$$

$$X_{13} = -17.31 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{13} = -75.0 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_{13} = -34.68 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft$$

$$X_{42} = X_4 = -17.31 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{42} = Y_4 = 75.0 \text{ kN} \uparrow$$

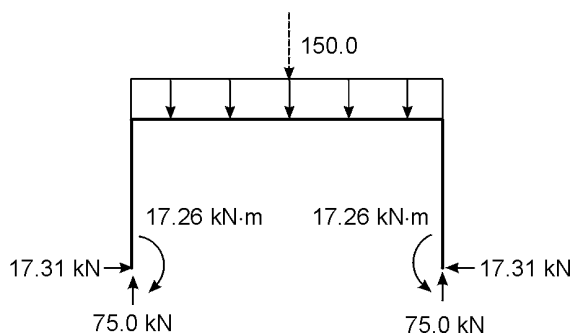
$$M_{42} = M_4 = 17.26 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$X_{24} = 17.31 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Y_{24} = -75.0 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_{24} = 34.68 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

Con estos resultados se puede verificar el equilibrio general:

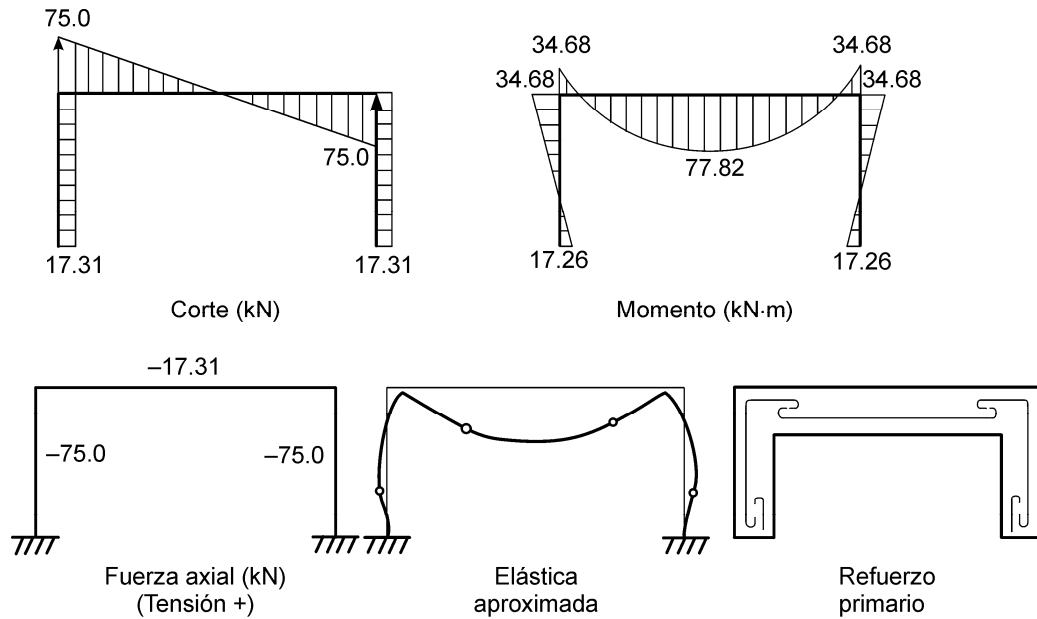


$$\Sigma F_x = 0.00 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0.00 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

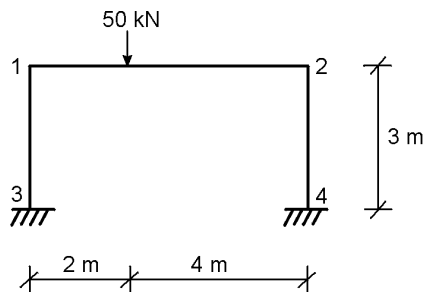
y dibujar la elástica aproximada y los diagramas de refuerzo primario y fuerzas internas:



Con lo cual queda terminado el problema.

Ejemplo 11.19

Analice el mismo pórtico del ejemplo anterior cuando está sometido a la carga mostrada.



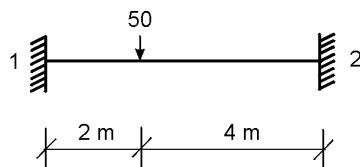
Viga: 300×500 mm

Columnas: 300×300 mm

E : 19 kN/mm^2

Solución

Es evidente que lo único que cambia con respecto al problema anterior son los vectores de fuerzas de empotramiento, que en este caso valen:



$$X_{12}^F = X_{21}^F = 0$$

$$M_{12}^F = \frac{50 \times 2 \times 16}{36} = 44.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$M_{21}^F = \frac{-50 \times 4 \times 4}{36} = -22.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft$$

$$Y_{12}^F = \frac{50 \times 4 + (44.4 - 22.2)}{6} = 37.0 \text{ kN} \uparrow$$

$$Y_{21}^F = \frac{5 \times 2 - (4.44 - 2.22)}{6} = 1.30 \text{ kN} \uparrow$$

Por consiguiente, al ensamblar la parte de la matriz de rigidez correspondiente a los nudos libres y despejar queda ahora:

$$\begin{bmatrix} 480700 & 0 & 8550 & -475000 & 0 & 0 \\ 0 & 573300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\ 8550 & 9900 & 56680 & 0 & -9900 & 19790 \\ -475000 & 0 & 0 & 480700 & 0 & 8550 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 573300 & -9900 \\ 0 & 9900 & 19790 & 8550 & -9900 & 56680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -37.0 \\ -44.4 \\ 0 \\ -13.0 \\ 22.2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, resulta:

$$u_1 = 2.627 \times 10^{-4} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_1 = -5.883 \times 10^{-5} \text{ m} \downarrow$$

$$\theta_1 = -1.074 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowleft$$

$$u_2 = 2.465 \times 10^{-4} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_2 = -2.888 \times 10^{-5} \text{ m} \downarrow$$

$$\theta_2 = 7.348 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright$$

Volviendo a las ecuaciones individuales y efectuando:

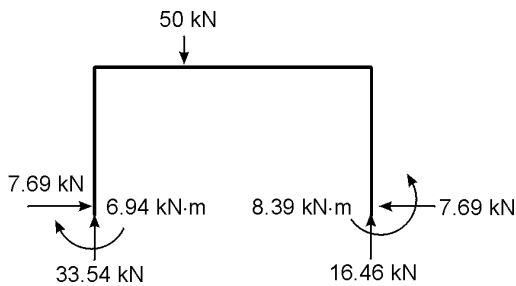
$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.69 \\ -3.46 \\ -28.26 \\ -7.69 \\ 3.46 \\ 7.53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 37.0 \\ 44.4 \\ 0 \\ 13.0 \\ -22.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.69 \text{ kN} \rightarrow \\ 33.54 \text{ kN} \uparrow \\ 16.14 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -7.69 \text{ kN} \leftarrow \\ 16.14 \text{ kN} \uparrow \\ -14.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

$$X_{31} = X_3 = 7.69 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Y_{31} = Y_3 = 33.54 \text{ kN} \uparrow$$

$$\begin{aligned}
 M_{31} &= M_3 = -6.94 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright \\
 X_{13} &= -7.69 \text{ kN} \quad \leftarrow \\
 Y_{13} &= -33.54 \text{ kN} \quad \downarrow \\
 M_{13} &= -16.14 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright \\
 X_{42} &= X_4 = -7.69 \text{ kN} \quad \leftarrow \\
 Y_{42} &= Y_4 = 16.46 \text{ kN} \quad \uparrow \\
 M_{42} &= M_4 = 8.39 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright \\
 X_{24} &= 7.69 \text{ kN} \quad \rightarrow \\
 Y_{24} &= -16.46 \text{ kN} \quad \downarrow \\
 M_{24} &= 14.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Se puede verificar el equilibrio general:

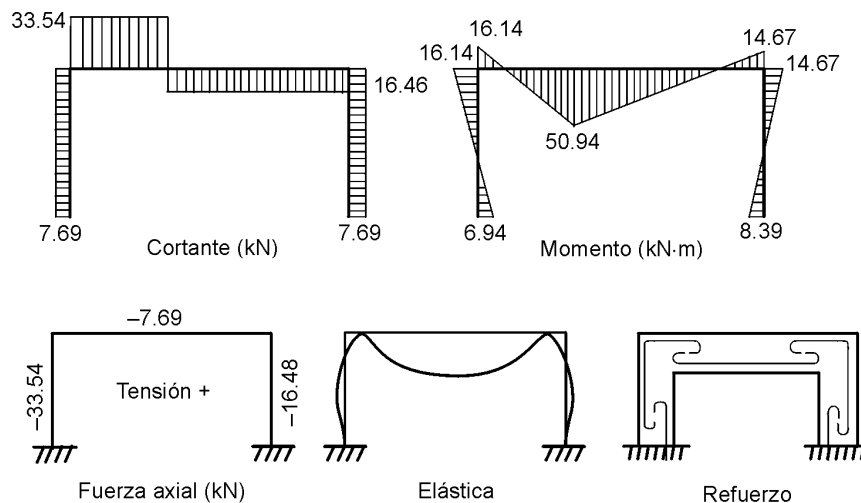


$$\sum F_x = 0.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0.0 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y dibujar los diagramas acostumbrados:



Es interesante comparar estos resultados con los obtenidos mediante métodos que desprecian las deformaciones axiales (Cross, Kani, Takabeya, etc., páginas 226, 286 y 321).

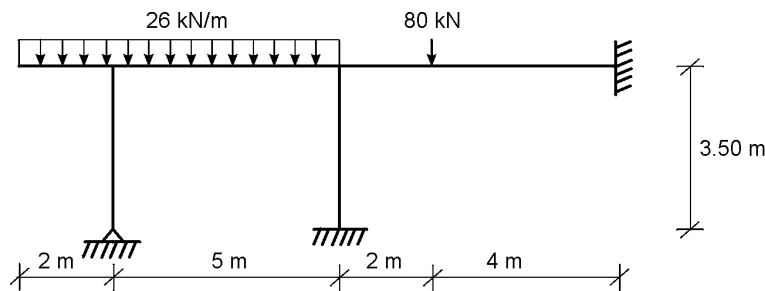
Limitando la comparación a los momentos en los extremos de los miembros y a los giros y desplazamiento de piso, se puede elaborar el siguiente cuadro (kN·m y rad):

	Cross (3 ciclos)	Kani (4 ciclos)	Takabeya (5 ciclos)	Matricial
M_{12}	15.6	16.2	16.2	16.1
M_1	-15.6	-16.2	-16.2	-16.1
M_{21}	-14.0	-14.7	-14.6	-14.7
M_{24}	14.0	14.6	14.7	14.7
M_{31}	-6.6	-7.0	-7.0	-6.9
M_{42}	8.3	8.4	8.5	8.4
θ_1			-10.77×10^{-4}	-10.74×10^{-4}
θ_2			7.29×10^{-4}	7.35×10^{-4}
Δ			2.62×10^{-4}	2.63×10^{-4}

Del cual se puede concluir que, para fines prácticos de diseño, las diferencias son despreciables. La mayor discrepancia que se observa con los resultados obtenidos mediante el método de Cross se debe a los pocos ciclos con que se trabajó éste.

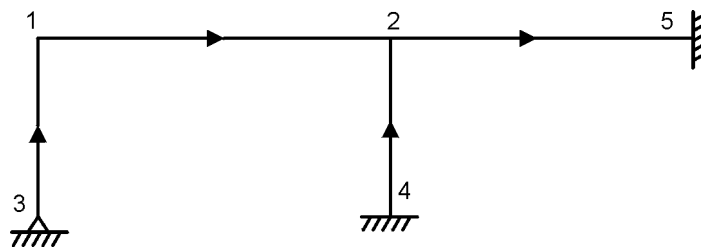
EJEMPLO 11.20

Analizar por el método matricial de los desplazamientos el pórtico mostrado. La viga es de 300 mm × 500 mm (b × h) y las columnas de 300 mm × 300 mm; $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.



Solución

En primer lugar se numeran los nudos y se orientan los elementos; se considera que el voladizo sirve únicamente para transmitir la carga respectiva al nudo 1.



Luego se elabora el cuadro auxiliar:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L ²	12 EI/L ³
1 - 2	570000	59380	23750	47500	14250	5700
2 - 5	475000	59380	19790	39580	9900	3300
3 - 1						
y	488600	12820	7330	14660	6280	3590
4 - 2						

La carga causada por el voladizo sobre el nudo 1 es:

$$Y_1 = -26 \times 2 = -52.0 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_1 = 52.0 \times 1 = 52.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

Y las reacciones de empotramiento causadas por las cargas que actúan sobre los miembros:

$$Y_{12} = Y_{21} = 26 \times \frac{5}{2} = 65.0 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_{12} = -M_{21} = 26 \times \frac{25}{12} = 54.2 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$M_{25} = \frac{80 \times 2 \times 16}{36} = -71.1 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$M_{52} = \frac{-80 \times 4 \times 4}{36} = -35.6 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$Y_{25} = \frac{80 \times 4 + (71.1 - 35.6)}{6} = 59.3 \text{ kN} \uparrow$$

$$Y_{52} = \frac{80 \times 2 - (71.1 - 35.6)}{6} = 20.7 \text{ kN} \uparrow$$

Las ecuaciones individuales de vigas y columnas se plantean utilizando las fórmulas 11.50, 11.52 y 11.53. Resultan así:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 570000 & 0 & 0 & -570000 & 0 & 0 \\ 0 & 5700 & 14250 & 0 & -5700 & 14250 \\ 0 & 14250 & 47500 & 0 & -14250 & 23750 \\ -570000 & 0 & 0 & 570000 & 0 & 0 \\ 0 & -5700 & -14250 & 0 & 5700 & -14250 \\ 0 & 14250 & 23750 & 0 & -14250 & 47500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 65.0 \\ 45.2 \\ 0 \\ 65.0 \\ -54.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{25} \\ Y_{25} \\ M_{25} \\ X_{52} \\ Y_{52} \\ M_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & \theta_2 & u_5 & v_5 & \theta_5 \\ 475000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 3300 & 9900 & | & | & | \\ 0 & 9900 & 39580 & | & | & | \\ -475000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & -3300 & -9900 & | & | & | \\ 0 & 9900 & 19790 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \\ \theta_5 = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 59.3 \\ 71.1 \\ 0 \\ 20.7 \\ -35.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ | & | & -6280 & -350 & 0 & -6280 \\ | & | & 0 & 0 & -488600 & 0 \\ | & | & 14660 & 6280 & 0 & 7330 \\ | & | & 6280 & 3590 & 0 & 6280 \\ | & | & 0 & 0 & 488600 & 0 \\ | & | & 7330 & 6280 & 0 & 14660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{42} \\ Y_{42} \\ M_{42} \\ X_{24} \\ Y_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ | & | & | & -3590 & 0 & -6280 \\ | & | & | & 0 & -488600 & 0 \\ | & | & | & 6280 & 0 & 7330 \\ | & | & | & 3590 & 0 & 6280 \\ | & | & | & 0 & 488600 & 0 \\ | & | & | & 6280 & 0 & 14660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ensamblando todos los miembros en la parte concerniente a los nudos libres, se llega a:

$$X_1 = X_{12} + X_{13} = 0 \text{ kN}$$

$$Y_1 = Y_{12} + Y_{13} = -51.0 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_1 = M_{12} + M_{13} = 52.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$X_2 = X_{21} + X_{25} + X_{24} = 0 \text{ kN}$$

$$Y_2 = Y_{21} + Y_{25} + Y_{24} = 0 \text{ kN}$$

$$M_2 = M_{21} + M_{25} + M_{24} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_3 = M_{31} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -52.0 \\ 52.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & \theta_3 \\ 573590 & 0 & 6280 & -570000 & 0 & 0 & 6280 \\ 0 & 494300 & 14250 & 0 & -5700 & 14250 & 0 \\ 6280 & 14250 & 62160 & 0 & -14250 & 23750 & 7330 \\ -570000 & 0 & 0 & 1048590 & 0 & 6280 & 0 \\ 0 & -5700 & -14250 & 0 & 497600 & -4350 & 0 \\ 0 & 14250 & 23750 & 6280 & -4350 & 101740 & 0 \\ 6280 & 0 & 7330 & 0 & 0 & 0 & 14660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 65.0 \\ 54.2 \\ 0 \\ 124.3 \\ 16.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a:

$$\begin{bmatrix} 573590 & 0 & 6280 & -570000 & 0 & 0 & 6280 \\ 0 & 494300 & 14250 & 0 & -5700 & 14250 & 0 \\ 6280 & 14250 & 62160 & 0 & -14250 & 23750 & 7330 \\ -570000 & 0 & 0 & 1048590 & 0 & 6280 & 0 \\ 0 & -5700 & -14250 & 0 & 497600 & -4350 & 0 \\ 0 & 14250 & 23750 & 6280 & -4350 & 101740 & 0 \\ 6280 & 0 & 7330 & 0 & 0 & 0 & 14660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -117.0 \\ -2.2 \\ 0 \\ -124.3 \\ -16.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$u_1 = 1.721 \times 10^{-6} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_1 = -2.353 \times 10^{-4} \text{ m} \downarrow$$

$$\theta_1 = 1.815 \times 10^{-5} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$u_2 = 1.824 \times 10^{-6} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_2 = -2.533 \times 10^{-4} \text{ m} \downarrow$$

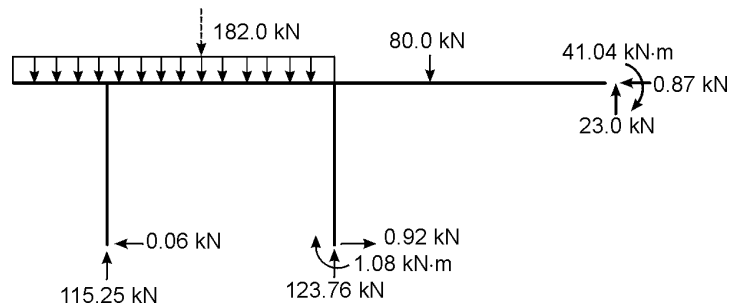
$$\theta_2 = -1.483 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_3 = -9.814 \times 10^{-6} \text{ rad } \curvearrowright$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones originales (páginas 505 y 506) y efectuando las operaciones indicadas, e obtiene:

$X_{12} = -0.06 \text{ kN } \leftarrow$	$X_{25} = 0.87 \text{ kN } \rightarrow$
$Y_{12} = 63.25 \text{ kN } \uparrow$	$Y_{25} = 57.00 \text{ kN } \uparrow$
$M_{12} = 51.80 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowright$	$M_{25} = 62.72 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowright$
$X_{21} = 0.06 \text{ kN } \rightarrow$	$X_{52} = X_5 = -0.87 \text{ kN } \leftarrow$
$Y_{21} = 66.75 \text{ kN } \uparrow$	$Y_{52} = Y_5 = 23.00 \text{ kN } \uparrow$
$M_{21} = -60.56 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowleft$	$M_{52} = M_5 = -41.04 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowleft$
$X_{31} = X_3 = -0.06 \text{ kN } \leftarrow$	$X_{42} = X_4 = 0.92 \text{ kN } \rightarrow$
$Y_{31} = Y_3 = 115.25 \text{ kN } \uparrow$	$Y_{42} = Y_4 = 123.76 \text{ kN } \uparrow$
$M_{31} = M_3 = 0.00 \text{ KN}\cdot\text{m}$	$M_{42} = M_4 = -1.08 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowleft$
$X_{13} = 0.06 \text{ kN } \rightarrow$	$X_{24} = -0.92 \text{ kN } \leftarrow$
$Y_{13} = -115.25 \text{ kN } \downarrow$	$Y_{24} = -123.76 \text{ kN } \downarrow$
$M_{13} = 0.20 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowright$	$M_{24} = -2.16 \text{ KN}\cdot\text{m } \curvearrowleft$

Con las reacciones se verifica el equilibrio general:

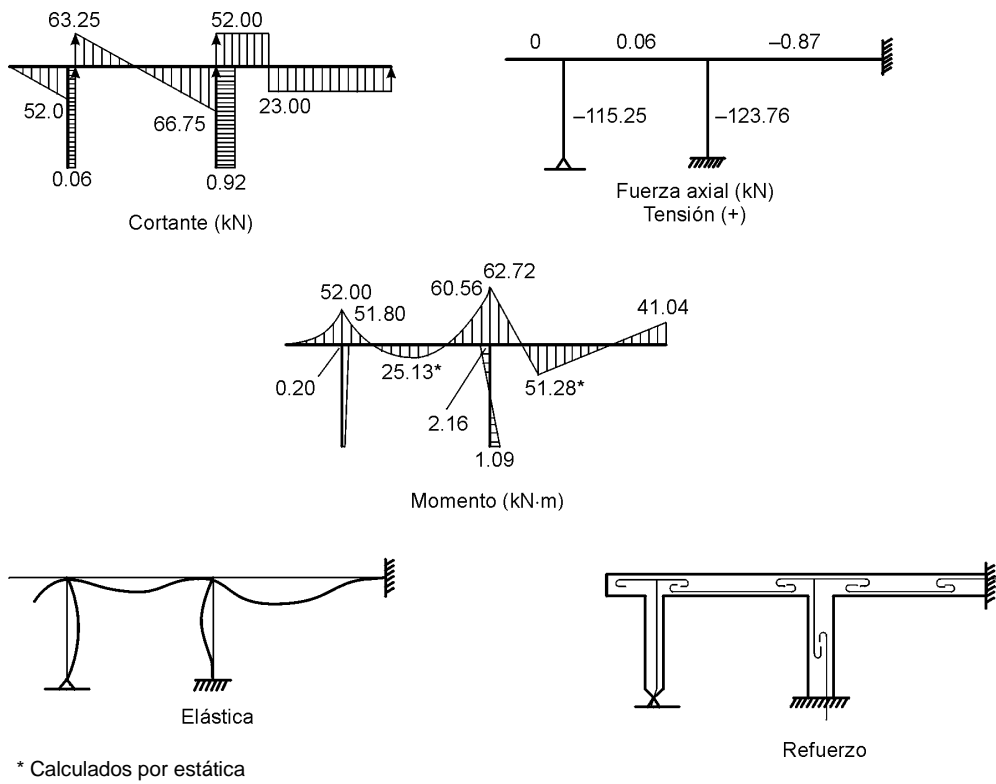


$$\sum F_x = 0.01 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0.01 \text{ kN}$$

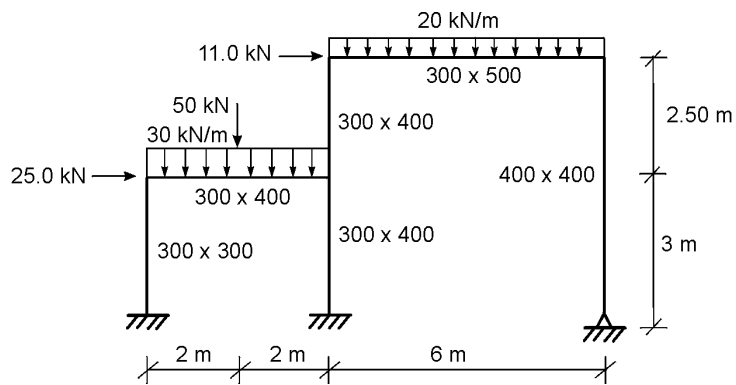
$$\sum M_3 = 0.28 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Y con los otros valores se dibujan los diagramas acostumbrados:



EJEMPLO 11.21

Analice matricialmente la estructura siguiente ($E = 19 \text{ kN/mm}^2$):

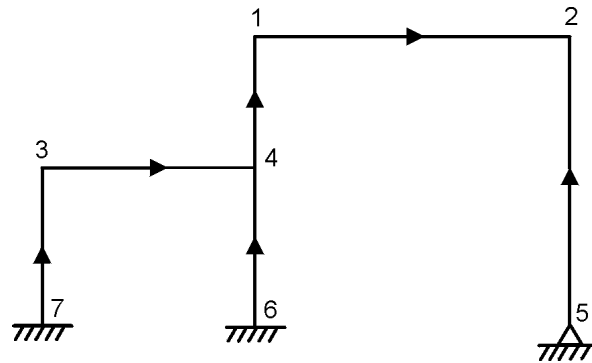


Solución

La estructura tiene trece grados de libertad y por lo tanto sería muy dispendioso analizarla manualmente. Para una mejor comprensión del método se detalla a continuación la

formación de las ecuaciones individuales de cada miembro y el ensamblaje de la matriz de rigidez total.

Se empieza por numerar los nudos y por escoger una orientación de las vigas de izquierda a derecha y de las columnas de abajo hacia arriba, para que sean compatibles con las utilizadas en la deducción de las matrices de rigidez respectivas. Obsérvese que los nudos restringidos se han dejado de últimos, con el objeto de facilitar el ordenamiento al ensamblar.



El cuadro auxiliar queda así:

Elemento	AE/L	EI	2 EI/L	4 EI/L	6 EI/L ²	12 EI/L ³
1 – 2	475000	59380	19790	39580	9900	3300
3 – 4	570000	30400	15200	30400	11400	5700
4 – 1	912000	30400	24320	48640	29180	23350
5 – 2	552730	40530	14740	29480	8040	2920
7 – 3	570000	12820	8550	17100	8550	5700
6 – 4	760000	30400	20270	40540	20270	13510

Las reacciones de empotramiento son:

$$Y_{12}^F = Y_{21}^F = 20 \times 6 / 2 = 60.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{12}^F = -M_{21}^F = 20 \times 36 / 12 = 60.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$Y_{34}^F = Y_{43}^F = 50 / 2 + 30 \times 4 / 2 = 85.0 \text{ kN } \uparrow$$

$$M_{34}^F = -M_{43}^F = 50 \times 4 / 8 + 30 \times 16 / 12 = 65.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para las vigas se utilizan las ecuaciones (11.50) y (11.53):

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 475000 & 0 & 0 & -475000 & 0 & 0 \\ 0 & 3300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\ 0 & 9900 & 39580 & 0 & -9900 & 19790 \\ -475000 & 0 & 0 & 475000 & 0 & 0 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 3300 & -9900 \\ 0 & 9900 & 19790 & 0 & -9900 & 39580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 60.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -60.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{34} \\ Y_{34} \\ M_{34} \\ X_{43} \\ Y_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_4 & v_4 & \theta_4 \\ 570000 & 0 & 0 & -570000 & 0 & 0 \\ 0 & 5700 & 11400 & 0 & -5700 & 11400 \\ 0 & 11400 & 30400 & 0 & -11400 & 12500 \\ -570000 & 0 & 0 & 570000 & 0 & 0 \\ 0 & -5700 & -11400 & 0 & 5700 & -11400 \\ 0 & 11400 & 15200 & 0 & -11400 & 30400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 85.0 \\ 65.0 \\ 0 \\ 85.0 \\ -65.0 \end{bmatrix}$$

Para las columnas se emplean las ecuaciones (11.50) y (11.53):

$$\begin{bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ M_{41} \\ X_{14} \\ Y_{14} \\ M_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 & v_4 & \theta_4 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ 23350 & 0 & -29180 & -23350 & 0 & -29180 \\ 0 & 912000 & 0 & 0 & -912000 & 0 \\ -29180 & 0 & 48640 & 29180 & 0 & 24320 \\ -23350 & 0 & 29180 & 23350 & 0 & 29180 \\ 0 & -912000 & 0 & 0 & 912000 & 0 \\ -29180 & 0 & 24320 & 29180 & 0 & 48640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{52} \\ Y_{52} \\ M_{52} \\ X_{25} \\ Y_{25} \\ M_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_5 & v_5 & \theta_5 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ | & | & -8040 & -2920 & 0 & -8040 \\ | & | & 0 & 0 & -552730 & 0 \\ | & | & 29480 & 8040 & 0 & 14740 \\ | & | & 8040 & 2920 & 0 & 8040 \\ | & | & 0 & 0 & 552730 & 0 \\ | & | & 14740 & 8040 & 0 & 29480 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \\ \theta_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 X_{73} \\
 Y_{73} \\
 M_{73} \\
 X_{37} \\
 Y_{37} \\
 M_{37}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 | & | & | & -5700 & 0 & -8550 \\
 | & | & | & 0 & -570000 & 0 \\
 | & | & | & 8550 & 0 & 8550 \\
 | & | & | & 5700 & 0 & 8550 \\
 | & | & | & 0 & 570000 & 0 \\
 | & | & | & 8550 & 0 & 17100
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 u_7 = 0 \\
 v_7 = 0 \\
 \theta_7 = 0 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 \theta_3
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 X_{64} \\
 Y_{64} \\
 M_{64} \\
 X_{46} \\
 Y_{46} \\
 M_{46}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 | & | & | & -13510 & 0 & -20270 \\
 | & | & | & 0 & -760000 & 0 \\
 | & | & | & 20270 & 0 & 20270 \\
 | & | & | & 13510 & 0 & 20270 \\
 | & | & | & 0 & 760000 & 0 \\
 | & | & | & 20270 & 0 & 40540
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 u_6 = 0 \\
 v_6 = 0 \\
 \theta_6 = 0 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 \theta_4
 \end{bmatrix}$$

Ahora se procede a ensamblar la parte $[K_{nn}]$ de la matriz de rigidez. El resultado se presenta en la página siguiente. En el vector de fuerzas se ha tenido en cuenta que:

$$\begin{array}{ll}
 X_1 = X_{12} + X_{14} = 11.0 \text{ kN} \rightarrow & X_3 = X_{34} + X_{37} = 25.0 \text{ kN} \rightarrow \\
 Y_1 = Y_{12} + Y_{14} = 0 \text{ kN} & Y_3 = Y_{34} + Y_{37} = 0 \text{ kN} \\
 M_1 = M_{12} + M_{14} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_3 = M_{34} + M_{37} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 X_2 = X_{21} + X_{25} = 0 \text{ kN} & X_4 = X_{43} + X_{41} + X_{46} = 0 \text{ kN} \\
 Y_2 = Y_{21} + Y_{25} = 0 \text{ kN} & Y_4 = Y_{43} + X_{41} + Y_{46} = 0 \text{ kN} \\
 M_2 = M_{21} + M_{25} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_4 = M_{43} + X_{41} + M_{46} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 & M_5 = M_{52} = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 498350 & 0 & 29180 & -475000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23350 & 0 & 29180 & 0 \\ 0 & 915300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 & 0 & 0 & 0 & 0 & -912000 & 0 & 0 \\ 29180 & 9900 & 88220 & 0 & -9900 & 19790 & 0 & 0 & 0 & -29180 & 0 & 24320 & 0 \\ -475000 & 0 & 0 & 477920 & 0 & 8040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8040 \\ 0 & -3300 & -9900 & 0 & 556030 & -9900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9900 & 19790 & 8040 & -9900 & 69060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14740 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 575700 & 0 & 8550 & -570000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 575700 & 11400 & 0 & -5700 & 11400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8550 & 11400 & 47500 & 0 & -11400 & 15200 & 0 \\ -23350 & 0 & -29180 & 0 & 0 & 0 & -570000 & 0 & 0 & 606860 & 0 & -8910 & 0 \\ 0 & -912000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5700 & -11400 & 0 & 1677700 & -11400 & 0 \\ 29180 & 0 & 24320 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11400 & 15200 & -8910 & -11400 & 119580 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8040 & 0 & 14740 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29480 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \\ 600 \\ -600 \\ 0 \\ 850 \\ 650 \\ 0 \\ 850 \\ -650 \\ 0 \end{bmatrix}$$

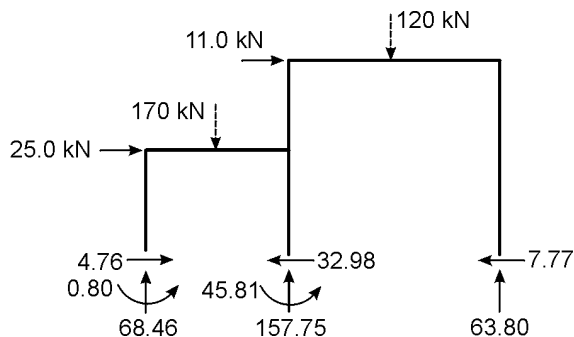
Al resolver el sistema, se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = 3.600 \times 10^{-3} \text{ m} & \rightarrow \\
 v_1 = -0.269 \times 10^{-3} \text{ m} & \downarrow \\
 \theta_1 = -1.613 \times 10^{-3} \text{ rad} & \curvearrowright \\
 u_2 = 3.584 \times 10^{-3} \text{ m} & \rightarrow \\
 v_2 = -0.115 \times 10^{-3} \text{ m} & \downarrow \\
 \theta_2 = 1.281 \times 10^{-3} \text{ rad} & \curvearrowleft \\
 u_3 = 1.950 \times 10^{-3} \text{ m} & \rightarrow \\
 v_3 = -0.120 \times 10^{-3} \text{ m} & \downarrow \\
 \theta_3 = -1.856 \times 10^{-3} \text{ rad} & \curvearrowright \\
 u_4 = 1.898 \times 10^{-3} \text{ m} & \rightarrow \\
 v_4 = -0.208 \times 10^{-3} \text{ m} & \downarrow \\
 \theta_4 = 0.362 \times 10^{-3} \text{ rad} & \curvearrowleft \\
 \theta_5 = -1.618 \times 10^{-3} \text{ rad} & \curvearrowright
 \end{array}$$

Con estos valores y las matrices individuales (páginas 511 y 512) se obtienen las reacciones y las fuerzas internas en los miembros. Estas son:

$$\begin{array}{llll}
 X_{12} = 7.74 \text{ kN} & \rightarrow & X_{21} = -7.74 \text{ kN} & \leftarrow \\
 Y_{12} = 56.12 \text{ kN} & \uparrow & Y_{21} = 63.79 \text{ kN} & \uparrow \\
 M_{12} = 19.98 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright & M_{21} = -42.73 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowleft \\
 X_{34} = 29.75 \text{ kN} & \rightarrow & X_{43} = -29.75 \text{ kN} & \leftarrow \\
 Y_{34} = 68.47 \text{ kN} & \uparrow & Y_{43} = 101.54 \text{ kN} & \uparrow \\
 M_{34} = 15.07 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright & M_{43} = -81.21 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowleft \\
 X_{41} = -3.23 \text{ kN} & \leftarrow & X_{14} = 3.23 \text{ kN} & \rightarrow \\
 Y_{41} = 56.21 \text{ kN} & \uparrow & Y_{14} = -56.21 \text{ kN} & \downarrow \\
 M_{41} = 28.06 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright & M_{14} = -19.98 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowleft \\
 \\
 X_{52} = X_5 = -7.77 \text{ kN} & \leftarrow & X_{25} = 7.77 \text{ kN} & \rightarrow \\
 Y_{52} = Y_5 = 63.80 \text{ kN} & \uparrow & Y_{25} = -63.80 \text{ kN} & \downarrow \\
 M_{52} = M_5 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m} & & M_{25} = 42.73 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright \\
 X_{73} = X_7 = 4.75 \text{ kN} & \rightarrow & X_{37} = -4.76 \text{ kN} & \leftarrow \\
 Y_{73} = Y_7 = 68.46 \text{ kN} & \uparrow & Y_{37} = -68.46 \text{ kN} & \downarrow \\
 M_{73} = M_7 = 0.80 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright & M_{37} = -15.07 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowleft \\
 X_{64} = X_6 = -32.96 \text{ kN} & \leftarrow & X_{46} = 32.98 \text{ kN} & \rightarrow \\
 Y_{64} = Y_6 = 157.75 \text{ kN} & \uparrow & Y_{46} = -157.75 \text{ kN} & \downarrow \\
 M_{64} = M_6 = 45.81 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright & M_{46} = 53.15 \text{ kN}\cdot\text{m} & \curvearrowright
 \end{array}$$

Ahora se puede verificar el equilibrio general del pórtico:

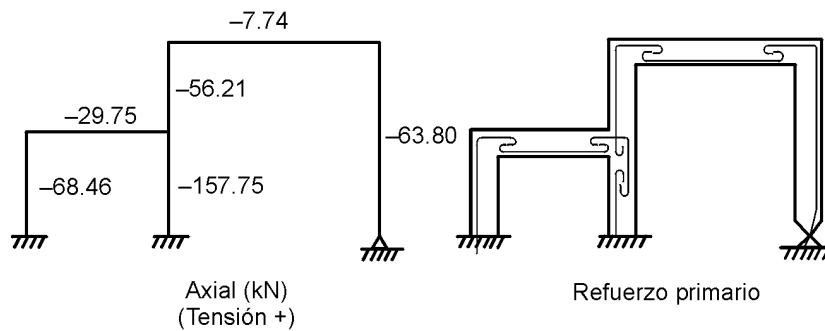
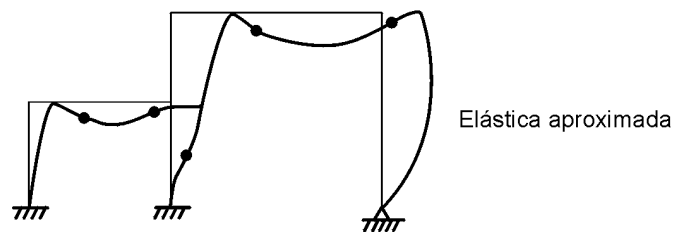
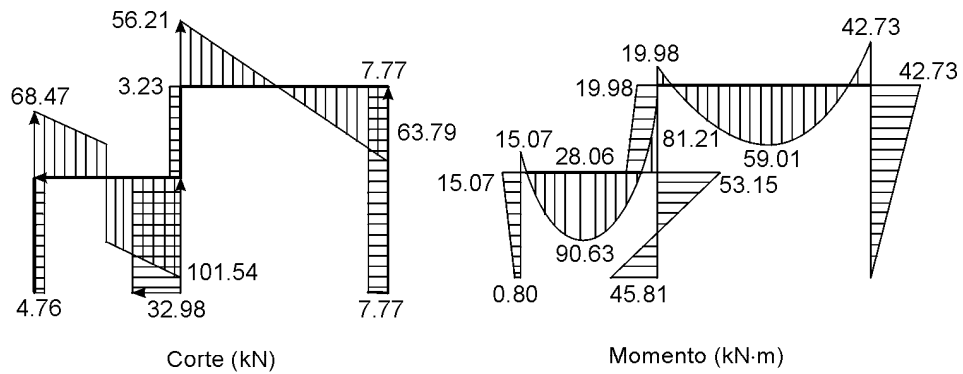


$$\Sigma F_x = 0.01 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0.01 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_7 = 0.11 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

y dibujar, finalmente, todos los diagramas:



11.20 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO, ARBITRARIAMENTE ORIENTADO

En el caso general, un elemento de pórtico plano está sometido en sus extremos a fuerza axial, corte y flexión y se encuentra arbitrariamente orientado con respecto al eje X de la estructura, como se ilustra en la figura 11.19. En ella los ejes con barra son particulares, locales o de miembro, mientras que los ejes sin barra corresponden a los globales, generales o de la estructura.

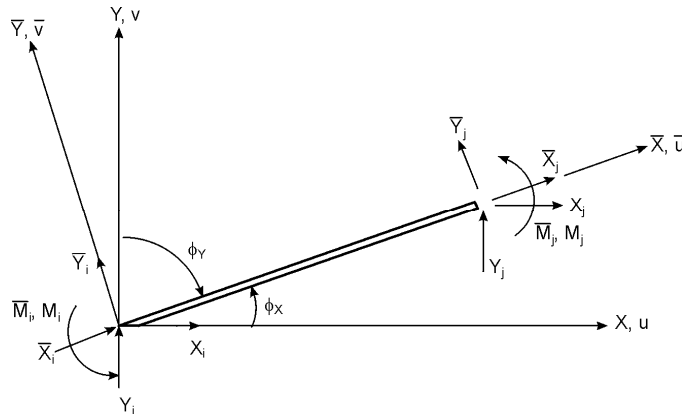


Figura 11.19 Caso general del elemento de pórtico plano, arbitrariamente orientado.

En la figura se observa que la relación entre las fuerzas axiales y cortantes de los dos sistemas es idéntica a la que existe entre las fuerzas correspondientes de una armadura plana [véanse la figura 11.10 y las ecuaciones (11.22)]; por otra parte, los momentos son idénticos en ambos sistemas por ser vectores libres o, lo que es lo mismo, porque los ejes Z y \bar{Z} , a los cuales están referidos, coinciden. En consecuencia, la matriz de transformación $[T]$ definida por la ecuación (11.23a):

$$[\bar{F}] = [T][F]$$

queda así:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{M}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_x & \text{sen } \phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi_x & \cos \phi_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi_x & \text{sen } \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \phi_x & \cos \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

Para simplificar la escritura se aprovecha la igualdad de las cofunciones de ángulos complementarios y se definen, como antes:

$$\lambda = \cos \phi_x \quad (11.57)$$

$$\mu = \cos \phi_y = \text{sen } \phi_x$$

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu & -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu \\ \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & \frac{6EI}{L^2}\lambda & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & \frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} \\ -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu \\ -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

(11.59)

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu & -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\frac{6EI}{L^2}\mu \\ \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & \frac{6EI}{L^2}\lambda & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & \frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} \\ -\left[\frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2\right] & -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{AE}{L}\lambda^2 + \frac{12EI}{L^3}\mu^2 & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{6EI}{L^2}\mu \\ -\left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & -\left[\frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2\right] & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \left[\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right]\lambda\mu & \frac{AE}{L}\mu^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2}\lambda \\ -\frac{6EI}{L^2}\mu & \frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\mu & -\frac{6EI}{L^2}\lambda & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

11.21 CÁLCULO DE LAS FUERZAS INTERNAS EN UN ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO ARBITRARIAMENTE ORIENTADO

Las fuerzas internas en los extremos de un elemento de pórtico plano se calculan fácilmente, después de averiguar los desplazamientos desconocidos, mediante la ecuación (11.51) vista antes. Sin embargo, dichas fuerzas se refieren a coordenadas generales y antes de poderlas utilizar en diseño o en el dibujo de los diagramas respectivos es necesario transformarlas a coordenadas locales. De nuevo, dicha transformación puede hacerse por trigonometría o empleando la ecuación (11.23a):

$$[\bar{F}]_{ij} = [T]_{ij} [F]_{ij}$$

y la ecuación (11.58), que define la matriz $[T]_{ij}$.

En soluciones manuales puede ser preferible calcular inicialmente todas las matrices de rigideces referidas a ejes locales, evaluar las matrices de transformación respectivas y efectuar el triple producto de la ecuación (11.28) para calcular en cada caso la matriz de rigidez referida a coordenadas generales, en vez de aplicar directamente la ecuación (11.60), que es difícil de memorizar. En tales circunstancias, es más fácil calcular las fuerzas internas transformando primero los desplazamientos nodales respectivos mediante la ecuación (11.26):

$$[\bar{\delta}]_{ij} = [T]_{ij} [\delta]_{ij}$$

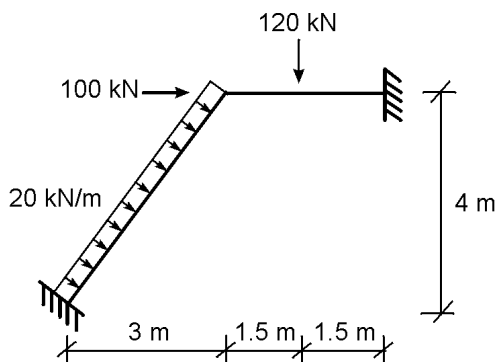
y reemplazar luego estos valores en la ecuación (11.50):

$$[\bar{F}]_{ij} = [\bar{F}^F]_{ij} + [\bar{K}]_{ij} [\bar{\delta}]_{ij}$$

El proceso completo se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.22

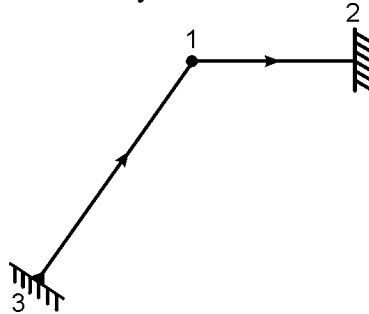
Resuelva por análisis matricial el siguiente pórtico. La viga tiene una sección transversal de 300 mm × 300 mm y el elemento inclinado una de 300 mm × 400 mm.



$$E = 19 \text{ kN/mm}^2$$

Solución

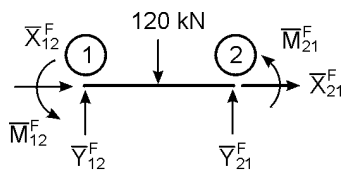
Se escoge la siguiente numeración de nudos y orientación de elementos:



Se utilizarán las ecuaciones (11.23), (11.58) y (11.59), que son fáciles de recordar, para ilustrar su aplicación. El cuadro auxiliar de propiedades de los miembros, en kilonewtons y metros, resulta así:

Elemento	ϕ	λ	μ	AE/L	EI	$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$
1 – 2	0°	1	0	570000	12820	8550	17100	8550	5700
3 – 1	53.13°	0.6	0.8	456000	30400	12160	24320	7300	2920

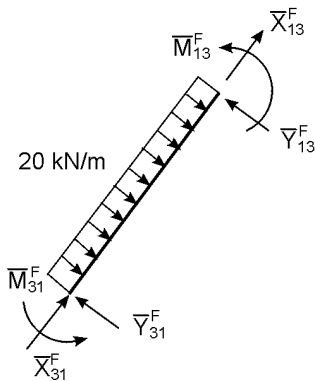
Las fuerzas de empotramiento, referidas a coordenadas locales, se calculan como sigue:



$$\bar{X}_{12}^F = \bar{X}_{21}^F = 0$$

$$\bar{Y}_{12}^F = \bar{Y}_{21}^F = 120/2 = 60.0 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$\bar{M}_{12}^F = -\bar{M}_{21}^F = 120 \times 3/8 = 45.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright$$

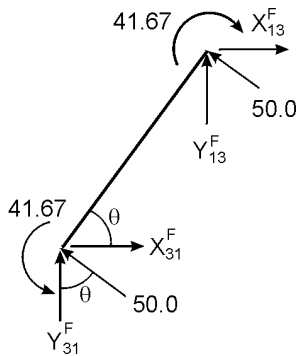


$$\bar{X}_{31}^F = \bar{X}_{13}^F = 0$$

$$\bar{Y}_{31}^F = \bar{Y}_{13}^F = 20 \times 5/2 = 50.0 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$\bar{M}_{31}^F = -\bar{M}_{13}^F = 20 \times 5^2/12 = 41.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright$$

Las fuerzas de empotramiento de la viga permanecen idénticas cuando se refieren a coordenadas generales, pues ambos sistemas coinciden. Las del elemento inclinado, en cambio, deben transformarse en un sistema equivalente. Esto puede hacerse aplicando simplemente trigonometría:



$$X_{31}^F = X_{13}^F = -50.0 \times \sin \phi = -40.0 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{31}^F = Y_{13}^F = 50.0 \times \cos \phi = 30.0 \text{ kN} \uparrow$$

Los momentos coinciden en ambos sentidos:

$$M_{31}^F = -M_{13}^F = 41.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

El mismo resultado se obtiene al aplicar las ecuaciones (11.23a), (11.56) y (11.58), que definen la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{31}^F \\ \bar{Y}_{31}^F \\ \bar{M}_{31}^F \\ \bar{X}_{13}^F \\ \bar{Y}_{13}^F \\ \bar{M}_{13}^F \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} X_{31}^F \\ Y_{31}^F \\ M_{31}^F \\ X_{13}^F \\ Y_{13}^F \\ M_{13}^F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{31}^F = 0 \\ \bar{Y}_{31}^F = 50.0 \\ \bar{M}_{31}^F = 41.67 \\ \bar{X}_{13}^F = 0 \\ \bar{Y}_{13}^F = 50.0 \\ \bar{M}_{13}^F = -41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{31}^F \\ Y_{31}^F \\ M_{31}^F \\ X_{13}^F \\ Y_{13}^F \\ M_{13}^F \end{bmatrix}$$

Despejando:

$$\begin{bmatrix} F^F \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F}^F \end{bmatrix} = [T]^T \begin{bmatrix} \bar{F}^F \end{bmatrix} \quad (11.23b)$$

y reemplazando:

$$\begin{bmatrix} X_{31}^F \\ Y_{31}^F \\ M_{31}^F \\ X_{13}^F \\ Y_{13}^F \\ M_{13}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50.0 \\ 41.67 \\ 0 \\ 50.0 \\ -41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.0 \\ 30.0 \\ 41.67 \\ -40.0 \\ 30.0 \\ -41.67 \end{bmatrix}$$

Por medio de las ecuaciones (11.50) y (11.53) se calculan las ecuaciones fundamentales de ambos miembros, referidas a coordenadas locales, recordando que para la viga este sistema coincide con el de coordenadas generales:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 570000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 5700 & 8550 & | & | & | \\ 0 & 8550 & 17100 & | & | & | \\ -570000 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & -5700 & -8550 & | & | & | \\ 0 & 8550 & 8550 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 45.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -45.0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

Para el elemento inclinado:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{31} \\ \bar{Y}_{31} \\ \bar{M}_{31} \\ \bar{X}_{13} \\ \bar{Y}_{13} \\ \bar{M}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_3 & \bar{v}_3 & \bar{\theta}_3 & \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{\theta}_1 \\ 456000 & 0 & 0 & -456000 & 0 & 0 \\ 0 & 2920 & 7300 & 0 & -2920 & 7300 \\ 0 & 7300 & 24320 & 0 & -7300 & 12160 \\ -456000 & 0 & 0 & 456000 & 0 & 0 \\ 0 & -2920 & -7300 & 0 & 2920 & -7300 \\ 0 & 7300 & 12160 & 0 & -7300 & 24320 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_3 = 0 \\ \bar{v}_3 = 0 \\ \bar{\theta}_3 = 0 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50.0 \\ 41.67 \\ 0 \\ 50.0 \\ -41.67 \end{bmatrix}$$

(b)

Efectuando ahora $[T]^T [\bar{K}]$, resulta la matriz:

$$\begin{bmatrix} 273600 & -2340 & -5840 & -273600 & 2340 & -5840 \\ 364800 & 1750 & 4380 & -364800 & -1750 & 4380 \\ 0 & 7300 & 24320 & 0 & -7300 & 12160 \\ -273600 & 2340 & 5840 & 273600 & -2340 & 5840 \\ -364800 & -1750 & -4380 & 364800 & 1750 & -4380 \\ 0 & 7300 & 12160 & 0 & -7300 & 24320 \end{bmatrix}$$

y multiplicándola por la matriz $[T]$ se obtiene la matriz de rigidez referida a coordenadas generales $[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] =$

$$\begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_1 & v_1 & \theta_1 \\ 166030 & 217480 & -5840 & -166030 & -217480 & -5840 \\ 217480 & 292890 & 4380 & -217480 & -292890 & 4380 \\ -5840 & 4380 & 24320 & 5840 & -4380 & 12160 \\ -166030 & -217480 & 5840 & 166030 & 217480 & 5840 \\ -217480 & -292890 & -4380 & 217480 & 292890 & -4380 \\ -5840 & 4380 & 12160 & 5840 & -4380 & 24320 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación básica queda así:

$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 & v_3 & \theta_3 \\ u_1 & v_1 & \theta_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -166030 & -217480 & -5840 \\ -217480 & -292890 & 4380 \\ 5840 & -4380 & 12160 \\ 166030 & 217480 & 5840 \\ 217480 & 292890 & -4380 \\ 5840 & -4380 & 24320 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40.0 \\ 30.0 \\ 41.67 \\ -40.0 \\ 30.0 \\ -41.67 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Vale la pena señalar que como sólo interesan las tres últimas columnas de la matriz de rigidez, se podía haber trabajado únicamente la parte correspondiente de la referida a coordenadas locales. Ensamblando ahora la parte correspondiente al nudo libre:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{12} + X_{13} = 100 \\ Y_1 = Y_{12} + Y_{13} = 0 \\ M_1 = M_{12} + M_{13} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 736030 & 217480 & 5840 \\ 217480 & 298590 & 4170 \\ 5840 & 4170 & 41420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40.0 \\ 90.0 \\ 3.3 \end{bmatrix}$$

y efectuando:

$$\begin{bmatrix} 736030 & 217480 & 5840 \\ 217480 & 298590 & 4170 \\ 5840 & 4170 & 41420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140.0 \\ -90.0 \\ -3.3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

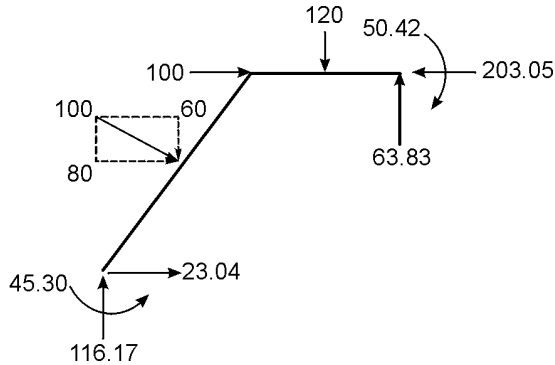
$$\begin{aligned} u_1 &= 0.356 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \\ v_1 &= -0.560 \times 10^{-3} \text{ m} \downarrow \\ \theta_1 &= -0.736 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright \end{aligned}$$

Las reacciones se calculan reemplazando estos valores en la parte inferior de la ecuación (a) y en la superior de la (c):

$$\begin{bmatrix} X_2 = X_{21} \\ Y_2 = Y_{21} \\ M_2 = M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -570000 & 0 & 0 \\ 0 & -5700 & -8550 \\ 0 & 8550 & 8550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ -45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20305 \text{ kN} \leftarrow \\ 63.83 \text{ kN} \uparrow \\ -50.42 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_3 = X_{31} \\ Y_3 = Y_{31} \\ M_3 = M_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -166030 & -217480 & -5840 \\ -217480 & -292890 & 4380 \\ 5840 & -4380 & 12160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40.00 \\ 30.0 \\ 41.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.04 \text{ kN} \rightarrow \\ 116.17 \text{ kN} \uparrow \\ 45.30 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

Verificación del equilibrio general:



$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= -0.01 \text{ kN} \\ \Sigma F_y &= 0.00 \text{ kN} \\ \Sigma M_3 &= 0.06 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Finalmente se averiguan las fuerzas internas en los miembros. En la viga sólo faltan las correspondientes al nudo 1, que se calculan con la parte superior de la ecuación (a):

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 570000 & 0 & 0 \\ 0 & 5700 & 8550 \\ 0 & 8550 & 17100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 45.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 203.05 \text{ kN} \rightarrow \\ 56.18 \text{ kN} \uparrow \\ 38.95 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

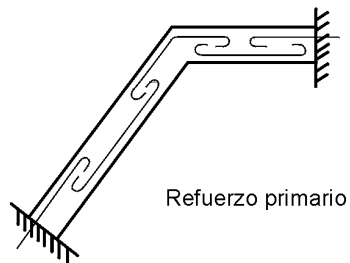
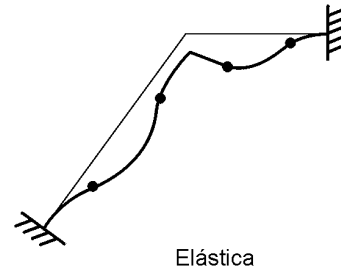
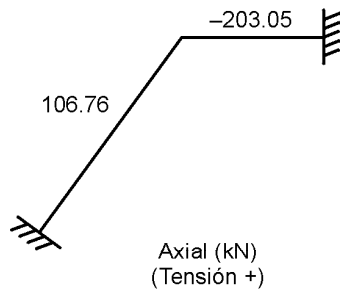
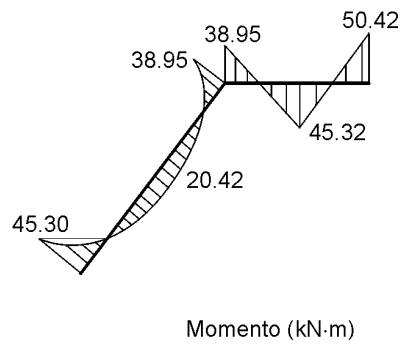
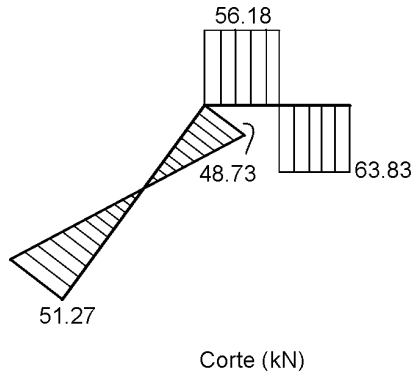
Para el elemento inclinado hay dos alternativas: una es calcular las fuerzas nodales en coordenadas generales mediante la ecuación (c) para transformarlas luego a coordenadas locales. La otra consiste en transformar primero los desplazamientos a coordenadas locales para aplicar entonces la ecuación (b). Siguiendo esta última:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000356 \\ -0.000560 \\ -0.0000736 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000234 \text{ m} \swarrow \\ -0.000621 \text{ m} \searrow \\ -0.0000736 \text{ rad} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

y reemplazando en (b) estos valores, se obtiene:

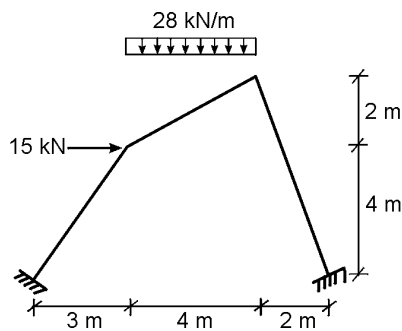
$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{31} \\ \bar{Y}_{31} \\ \bar{M}_{31} \\ \bar{X}_{13} \\ \bar{Y}_{13} \\ \bar{M}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.76 \text{ kN} \nearrow \\ 51.27 \text{ kN} \nwarrow \\ 45.30 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -106.76 \text{ kN} \swarrow \\ 48.73 \text{ kN} \nwarrow \\ -38.95 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

Por último se dibujan los diagramas:



Ejemplo 11.23

Analice el pórtico de la figura. La carga sobre la viga es de 28 kN/m de proyección horizontal.



Dimensiones ($b \times h$ en mm)

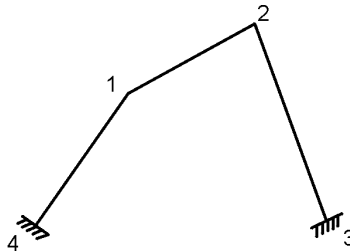
Viga: 300×350

Columnas: 300×300

$E = 19 \text{ kN/mm}^2$

Solución

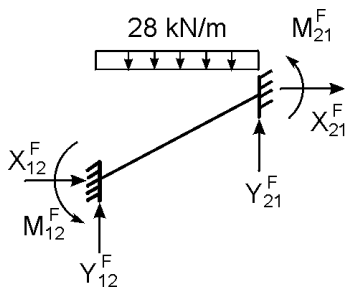
Se adoptan las siguientes numeración y orientación:



Los miembros tienen las siguientes propiedades:

Miembro	ϕ°	λ	μ	AE/L	EI	2EI/L	4EI/L	6EI/L ²	12EI/L ³
1 – 2	26.56	0.89443	0.44721	446100	20370	9110	18220	6110	2730
4 – 1	53.13	0.60000	0.80000	342000	12820	5130	10260	3080	1230
2 – 3	-71.56	0.31623	-0.94868	270370	12820	4060	8110	1920	610

Teniendo en cuenta que la carga sobre la viga está especificada por metro horizontal, sus fuerzas de empotramiento son:



$$X_{12}^F = X_{21}^F = 0$$

$$Y_{12}^F = Y_{21}^F = 28 \times 2 = 56.00 \text{ kN}$$

$$M_{12}^F = -M_{21}^F = \frac{28 \times 16}{12} = 37.33 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Aplicando las ecuaciones (11.59) y (11.61) a cada miembro, se obtiene:

$$\theta_2 \begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 \\ 357430 & 177350 & -2730 & -357430 & -177350 & -2730 \\ -177350 & 91410 & 5460 & -177350 & -91410 & 5460 \\ -2730 & 5460 & 18220 & 2730 & -5460 & 9110 \\ -377430 & -177350 & 2730 & 357430 & 177350 & 2730 \\ -177350 & -91410 & -5460 & 177350 & 91410 & -5460 \\ -2730 & 5460 & 9110 & 2730 & -5460 & 18220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 56.00 \\ 37.33 \\ 0 \\ 56.00 \\ -37.33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ M_{41} \\ X_{14} \\ Y_{14} \\ M_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_4 \quad v_4 \quad \theta_4 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{array} \begin{bmatrix} -123910 & -163570 & -2460 \\ -163570 & -219320 & 1850 \\ 2460 & -1850 & 5130 \\ 123910 & 163570 & 2460 \\ 163570 & 219320 & -1850 \\ 2460 & -1850 & 10260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (b)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} X_{23} \\ Y_{23} \\ M_{23} \\ X_{32} \\ Y_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \begin{bmatrix} 27580 & -80930 & 1820 \\ -80930 & 243390 & 610 \\ 1820 & 610 & 8110 \\ -27580 & 80930 & -1820 \\ 80930 & -243390 & -610 \\ 1820 & 610 & 4060 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (c)$$

Al ensamblar los términos correspondientes a los nudos libres, se llega a:

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} X_1 = X_{12} + X_{14} = 15 \\ Y_1 = Y_{12} + Y_{14} = 0 \\ M_1 = M_{12} + M_{14} = 0 \\ X_2 = X_{21} + X_{23} = 0 \\ Y_2 = Y_{21} + Y_{23} = 0 \\ M_2 = M_{21} + M_{23} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 481340 & 340920 & -270 & -357430 & -177350 & -2730 \\ 340920 & 310730 & 3620 & -177350 & -91410 & 5460 \\ -270 & 3620 & 28480 & 2730 & -5460 & 9110 \\ -357430 & -177350 & 2730 & 385020 & 96420 & 4560 \\ -177350 & -91410 & -5460 & 96420 & 334800 & -4860 \\ -2730 & 5460 & 9110 & 4560 & -4860 & 26330 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 56.00 \\ 37.33 \\ 0 \\ 56.00 \\ -37.33 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

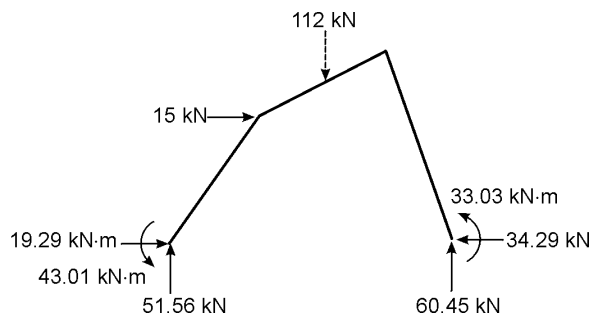
Y resolviendo el sistema resultante:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 13.29 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow & v_1 &= -10.16 \times 10^{-3} \text{ m} \downarrow & \theta_1 &= -1.655 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright \\
 u_2 &= 7.09 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow & v_2 &= 2.10 \times 10^{-3} \text{ m} \uparrow & \theta_2 &= 4.64 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtienen las fuerzas internas, referidas a coordenadas generales:

$$\begin{aligned}
 X_{12} &= 34.28 \text{ kN} \rightarrow & X_{21} &= -34.29 \text{ kN} \leftarrow \\
 Y_{12} &= 51.55 \text{ kN} \uparrow & Y_{21} &= 60.45 \text{ kN} \uparrow \\
 M_{12} &= -34.52 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright & M_{21} &= -51.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\
 X_{41} &= X_4 = 19.29 \text{ kN} \rightarrow & X_{14} &= -19.29 \text{ kN} \leftarrow \\
 Y_{41} &= Y_4 = 51.56 \text{ kN} \uparrow & Y_{14} &= -51.56 \text{ kN} \downarrow \\
 M_{41} &= M_4 = 43.01 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright & M_{14} &= 34.52 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\
 X_{23} &= 34.29 \text{ kN} \rightarrow & X_{32} = X_3 &= -34.29 \text{ kN} \leftarrow \\
 Y_{23} &= -60.45 \text{ kN} \downarrow & Y_{32} = Y_3 &= 60.45 \text{ kN} \uparrow \\
 M_{23} &= 51.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright & M_{32} = M_3 &= 33.03 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright
 \end{aligned}$$

Las fuerzas en los nudos 3 y 4 son las reacciones con las cuales se puede verificar el equilibrio general:



$$\sum F_x = 0.00 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0.01 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = 0.09 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para hallar las fuerzas internas referidas a coordenadas locales se utilizan las transpuestas de las matrices de transformación, $[\bar{F}] = [T]^T [F]$

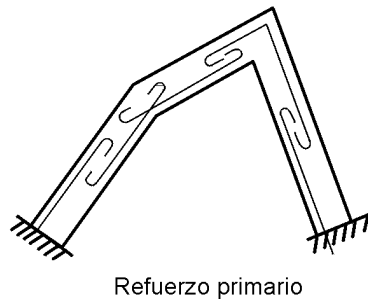
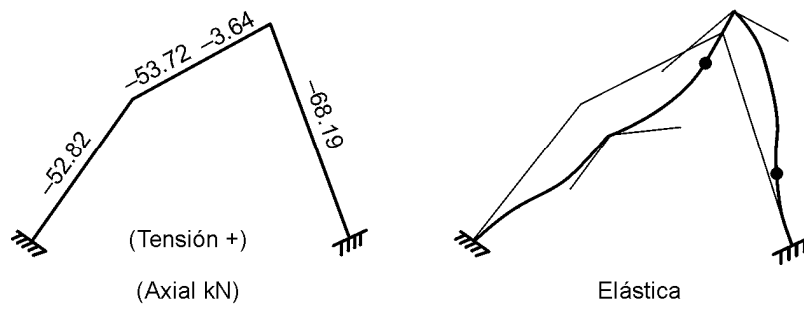
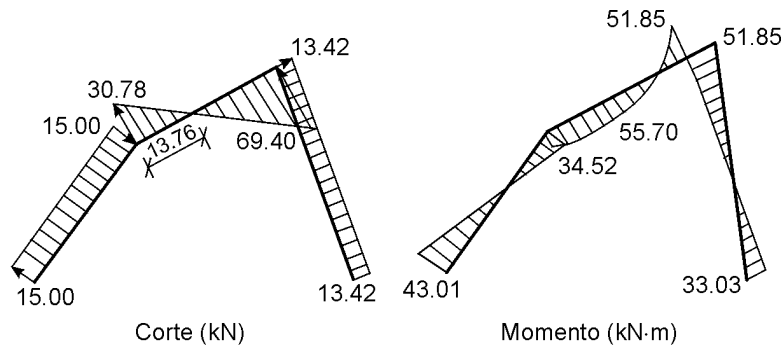
$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{12} \\ \bar{Y}_{12} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{X}_{21} \\ \bar{Y}_{21} \\ \bar{M}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89443 & -0.44721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.44721 & 0.89443 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.89443 & -0.44721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44721 & 0.89443 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34.28 \\ 51.55 \\ -34.52 \\ -34.29 \\ 60.45 \\ -51.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53.72 \text{ kN} \nearrow \\ 30.78 \text{ kN} \nwarrow \\ -34.52 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -3.64 \text{ kN} \swarrow \\ 69.40 \text{ kN} \nwarrow \\ -51.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{41} \\ \bar{Y}_{41} \\ \bar{M}_{41} \\ \bar{X}_{14} \\ \bar{Y}_{14} \\ \bar{M}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19.29 \\ 51.56 \\ -43.01 \\ -19.29 \\ -51.56 \\ 34.52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52.82 \text{ kN} \nearrow \\ 15.50 \text{ kN} \nwarrow \\ 43.01 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -52.82 \text{ kN} \swarrow \\ -15.50 \text{ kN} \searrow \\ 34.52 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{23} \\ \bar{Y}_{23} \\ \bar{M}_{23} \\ \bar{X}_{32} \\ \bar{Y}_{32} \\ \bar{M}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.31623 & -0.94868 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.94868 & 0.31623 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.31623 & -0.94868 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.94868 & 0.31623 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34.29 \\ -60.45 \\ 51.85 \\ -34.29 \\ 60.45 \\ 33.03 \end{bmatrix}$$

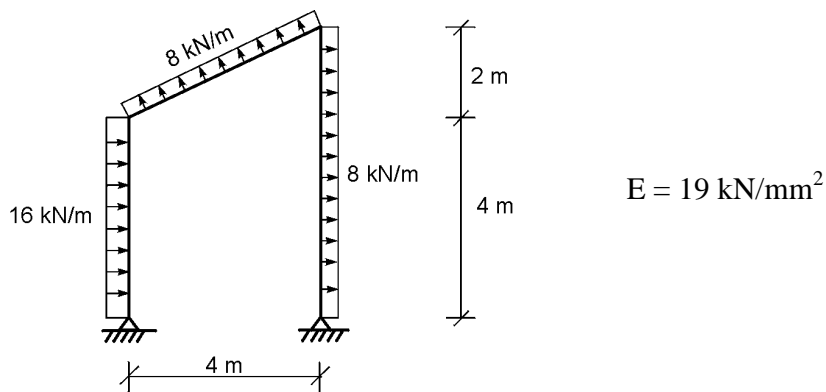
$$= \begin{bmatrix} 68.19 \text{ kN} \searrow \\ 13.42 \text{ kN} \nearrow \\ 51.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ -68.19 \text{ kN} \nwarrow \\ -13.42 \text{ kN} \swarrow \\ 33.03 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

Finalmente se dibujan los diagramas:



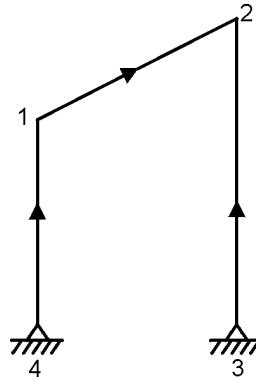
Ejemplo 11.24

Resuelva completamente el pórtico siguiente, teniendo en cuenta que todos los elementos son de 300×350 mm.



Solución

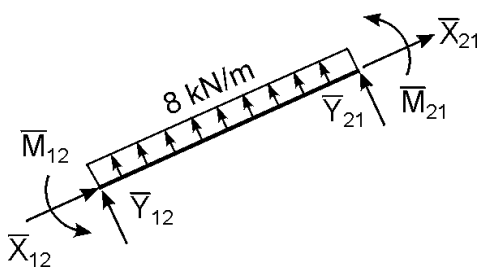
Se empieza por asignar el número de los nudos y la orientación de los miembros:



El cuadro de propiedades de los miembros resulta entonces así:

Elemento	ϕ	λ	μ	AE/L	EI	2EI/L	4EI/L	6EI/L ²	12EI/L ³
1 – 2	26.57°	0.89443	0.44721	446100	20370	9110	18220	6110	2730
4 – 1	90°	0	1	498750	20370	10180	20370	7640	3820
3 – 2	90°	0	1	332500	20370	6790	13580	3390	1130

Las reacciones de empotramiento de la viga, en coordenadas locales, son:



$$X_{12}^F = X_{21}^F = 0$$

$$\bar{Y}_{12}^F = \bar{Y}_{21}^F = -8 \times 4.472 / 2 = -17.89 \text{ kN}$$

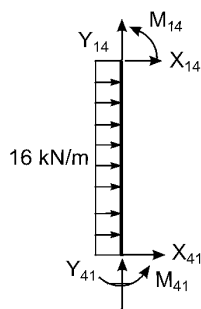
$$\bar{M}_{12}^F = -\bar{M}_{21}^F = -8.0 \times 4.472^2 / 12 = -13.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para convertirlas a coordenadas generales se utiliza la siguiente ecuación:

$$[F^F] = [T]^{-1} [\bar{F}^F]$$

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89443 & -0.44721 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.44721 & 0.89443 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.89443 & -0.44721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44721 & 0.89443 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -17.89 \\ -13.33 \\ 0 \\ -17.89 \\ 13.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.00 \text{ kN} \rightarrow \\ -16.00 \text{ kN} \downarrow \\ -13.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \\ 8.00 \text{ kN} \rightarrow \\ -16.00 \text{ kN} \downarrow \\ 13.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright \end{bmatrix}$$

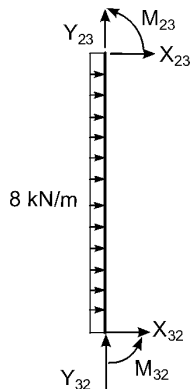
Las reacciones de empotramiento en las columnas, referidas a coordenadas generales, se pueden hallar directamente:



$$X_{41} = X_{14} = -\frac{16 \times 4}{2} = -32.00 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{41} = Y_{14} = 0 \text{ kN}$$

$$M_{41} = -M_{14} = \frac{16 \times 16}{12} = 21.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$



$$X_{32} = X_{23} = -\frac{8 \times 6}{2} = -24.00 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{32} = Y_{23} = 0 \text{ kN}$$

$$M_{32} = -M_{23} = \frac{8 \times 36}{12} = 24.00 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

Y al aplicar a los miembros las ecuaciones (11.59) y (11.61), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 357430 & 177350 & -2730 & -357430 & -177350 & -2730 \\ 177350 & 91410 & 5460 & -177350 & -91410 & 5460 \\ -2730 & 5460 & 18220 & 2730 & -5460 & 9110 \\ -357430 & -177350 & 2730 & 357430 & 177350 & 2730 \\ -177350 & -91410 & -5460 & 177350 & 91410 & -5460 \\ -2730 & 5460 & 9110 & 2730 & -5460 & 18220 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.00 \\ -16.00 \\ -13.33 \\ 8.00 \\ -16.00 \\ 13.33 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

$$\begin{bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ M_{41} \\ X_{14} \\ Y_{14} \\ M_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4 & v_4 & \theta_4 \\ u_1 & v_1 & \theta_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -7640 & -3820 & 0 & -7640 \\ 0 & 0 & -498750 & 0 \\ 20370 & 7640 & 0 & 10180 \\ 7640 & 3820 & 0 & 7640 \\ 0 & 0 & 498750 & 0 \\ 10180 & 7640 & 0 & 20370 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -32.00 \\ 0 \\ 21.33 \\ -32.00 \\ 0 \\ -21.33 \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ M_{32} \\ X_{23} \\ Y_{23} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 & v_3 & \theta_3 \\ u_2 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3390 & -1130 & 0 & -3390 \\ 0 & 0 & -332500 & 0 \\ 13580 & 3390 & 0 & 6790 \\ 3390 & 1130 & 0 & 3390 \\ 0 & 0 & 332500 & 0 \\ 6790 & 3390 & 0 & 13580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24.00 \\ 0 \\ 24.00 \\ -24.00 \\ 0 \\ -24.00 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Y ensamblando los términos correspondientes a los nudos libres:

$$\begin{bmatrix} X_1 = X_{12} + X_{14} = 0 \\ Y_1 = Y_{12} + Y_{14} = 0 \\ M_1 = M_{12} + M_{14} = 0 \\ X_2 = X_{21} + X_{23} = 0 \\ Y_2 = Y_{21} + Y_{23} = 0 \\ M_2 = M_{21} + M_{23} = 0 \\ M_3 = M_{32} = 0 \\ M_4 = M_{41} = 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 361250 & 177350 & 4900 & -357430 & -177350 & -2730 & 0 & 7640 \\ 177350 & 590160 & 5460 & -177350 & -91410 & 5460 & 0 & 0 \\ 4900 & 5460 & 38580 & 2730 & -5460 & 9110 & 0 & 10180 \\ -357430 & -177350 & 2730 & 358560 & 177350 & 6130 & 3390 & 0 \\ -177350 & -91410 & -5460 & 177350 & 423910 & -5460 & 0 & 0 \\ -2730 & 5460 & -9110 & 6130 & -5460 & 31790 & 6790 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3390 & 0 & 6790 & 13580 & 0 \\ 7640 & 0 & 10180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20370 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -24.00 \\ -16.00 \\ -34.66 \\ -16.00 \\ -16.00 \\ -10.67 \\ 24.00 \\ 21.33 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema se obtienen los desplazamientos desconocidos:

$$u_1 = 6.208 \times 10^{-2} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_1 = 1.283 \times 10^{-4} \text{ m} \uparrow$$

$$\theta_1 = -5.439 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$u_2 = 6.226 \times 10^{-2} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_2 = -0.962 \times 10^{-4} \text{ m} \downarrow$$

$$\theta_2 = -1.239 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_3 = -1.671 \times 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

$$\theta_4 = -2.161 \times 10^{-2} \text{ rad} \curvearrowright$$

Con estos valores y las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtienen las fuerzas internas referidas a coordenadas generales:

$$X_{12} = 1.51 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Y_{12} = -64.00 \text{ kN} \downarrow$$

$$X_{21} = 14.49 \text{ kN} \rightarrow$$

$$Y_{21} = 32.00 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_{12} = -121.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$X_{41} = -62.94 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{41} = -64.00 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_{41} = 0$$

$$X_{32} = -33.51 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{32} = 32.00 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_{32} = 0$$

$$M_{21} = -57.05 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$X_{14} = -1.51 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow$$

$$Y_{14} = 64.00 \text{ kN} \uparrow$$

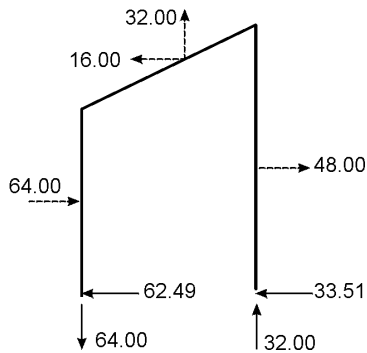
$$M_{14} = 121.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$X_{23} = -14.49 \text{ kN} \leftarrow$$

$$Y_{23} = -32.00 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_{23} = 57.05 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

Comprobación del equilibrio general:



$$\sum F_x = 0.000$$

$$\sum F_y = 0.000$$

$$\sum M_4 = 0.000$$

Las fuerzas internas de las columnas se pueden pasar a coordenadas locales por simple inspección. Las de la viga, en cambio, requieren el empleo de la matriz de transformación; con ella se obtiene:

$$\bar{X}_{12} = -27.27 \text{ kN} \swarrow$$

$$\bar{Y}_{12} = -57.29 \text{ kN} \searrow$$

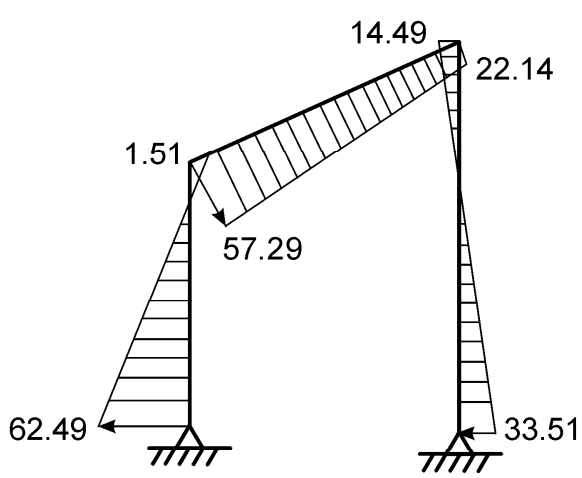
$$\bar{M}_{12} = -121.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

$$\bar{X}_{21} = 27.27 \text{ kN} \nearrow$$

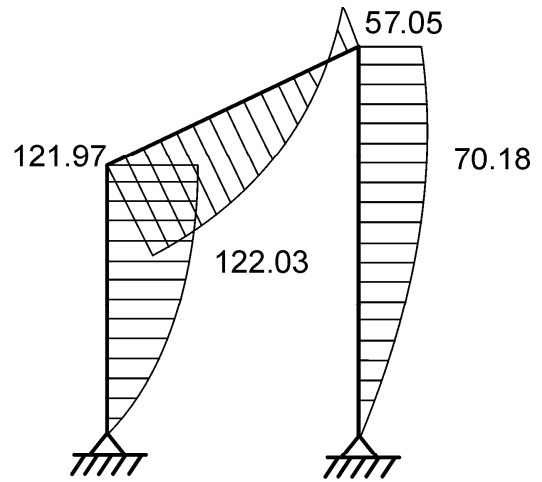
$$\bar{Y}_{21} = 22.14 \text{ kN} \nwarrow$$

$$\bar{M}_{21} = -57.05 \text{ kN}\cdot\text{m} \curvearrowright$$

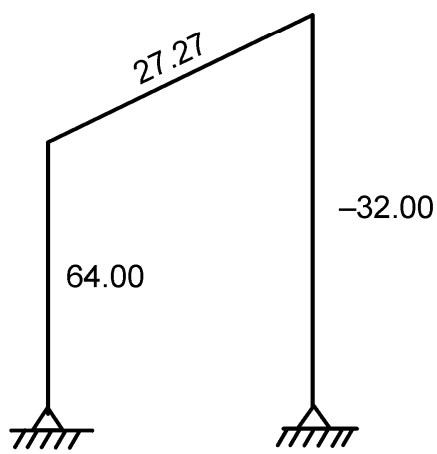
Por último se dibujan los diagramas:



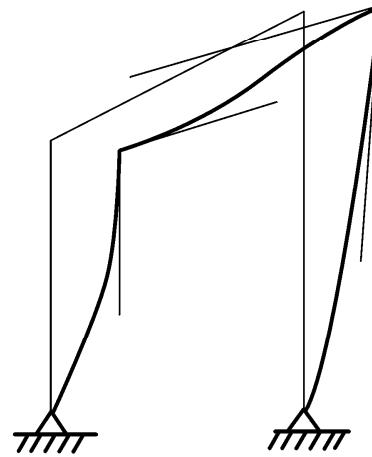
Corte (kN)



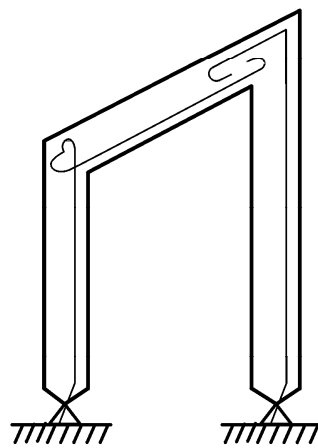
Momento (kN·m)



Axial (kN)
(Tensión +)



Elástica



Refuerzo primario

11.22 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO PRISMÁTICO SOMETIDO A TORSIÓN Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE PARRILLAS

Cuando se tiene un elemento prismático sometido a torsión, como el de la figura 11.20, se sabe que el giro producido por ella está dado por:

$$\theta_x = \frac{M_x L}{JG} \quad (11.62)$$

Donde:

- θ_x = Giro relativo entre los dos extremos, en radianes
- M_x = Momento torsor aplicado
- L = Longitud del elemento
- J = Constante torsional
- G = Módulo cortante

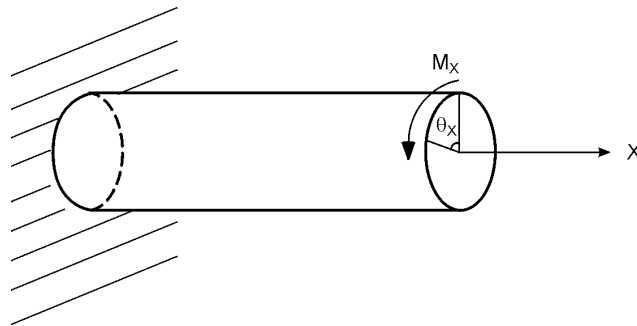


Figura 11.20 Elemento prismático sometido a torsión.

Si la sección es circular, maciza o hueca, la constante torsional es el momento polar de inercia. Para secciones rectangulares, en cambio, dicha constante se puede calcular con las fórmulas siguientes:

$$J = Cbt^3 \quad (11.63)$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \left(\frac{t}{b} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right] \quad (11.64)$$

donde b y t son las dimensiones transversales del elemento y b mayor o igual a t .

Si se aplica ahora la ecuación general $[F] = [K][\delta]$ al mismo elemento, referido al sistema de ejes de la figura 11.21 y con los momentos y giros representados esquemáticamente por vectores de doble flecha, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{bmatrix} \quad (11.65)$$



Figura 11.21 Representación esquemática de un elemento prismático sometido a torsión.

De la ecuación (11.62) se puede despejar el momento torsor:

$$M_x = \frac{GJ}{L} \theta_x \quad (11.66)$$

y recordando el significado físico de los términos de la matriz de rigidez se demuestra fácilmente que en este caso dicha matriz vale:

$$[K] = \begin{bmatrix} \theta_{xi} & \theta_{xj} \\ \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (11.67)$$

de manera que la ecuación general queda así:

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{bmatrix} \quad (11.65-a)$$

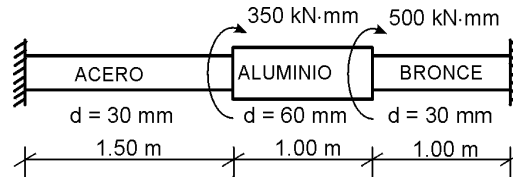
Naturalmente, si hay cargas intermedias que producen torsión, es necesario añadir el vector correspondiente de fuerzas de empotramiento y aplicar la ecuación (11.50), que se convierte en:

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{xj}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{bmatrix} \quad (11.68)$$

Las ecuaciones (11.65) y (11.68) son útiles en el análisis de parrillas, como se verá más adelante.

Ejemplo 11.25

El eje cilíndrico de la figura está sometido a los dos momentos torsores que se indican en ella. Analízelo matricialmente por el método de los desplazamientos.

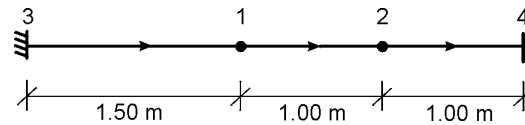


Módulo cortante (G , kN/mm^2)

Acero	84
Aluminio	28
Bronce	42

Solución

Para empezar, se numeran los nudos y se orientan los elementos:



se sabe que:

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

Por consiguiente, el cuadro auxiliar de propiedades (en kN y mm) resulta así:

Tramo	G	J	L	GJ/L
3 - 1	84	7.952×10^4	1500	4453
1 - 2	28	127.235×10^4	1000	35626
2 - 4	42	7.952×10^4	1000	3340

y llevando estos valores a las ecuaciones individuales:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{x21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35626 & -35626 \\ -35626 & 35626 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x31} \\ M_{x13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & -4453 \\ | & 4453 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{x1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x24} \\ M_{x42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3340 & | \\ -3340 & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x2} \\ \theta_{x4} = 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblando ahora la parte correspondiente a los nudos libres, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} = M_{x13} + M_{x12} = -350 \\ M_{x2} = M_{x21} + M_{x24} = -500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40077 & -35626 \\ -35626 & 38966 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix}$$

y resolviendo el sistema:

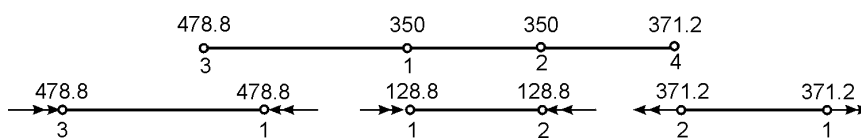
$$\theta_{x1} = -0.10752 \text{ rad} \quad \leftarrow\leftarrow$$

$$\theta_{x2} = -0.11114 \text{ rad} \quad \leftarrow\leftarrow$$

volviendo a las ecuaciones individuales y efectuando:

$$\begin{array}{l} M_{31} = M_3 = 478.8 \text{ kN}\cdot\text{mm} \rightarrow\rightarrow \\ M_{13} = -478.8 \text{ kN}\cdot\text{mm} \leftarrow\leftarrow \\ M_{12} = 128.8 \text{ kN}\cdot\text{mm} \rightarrow\rightarrow \\ M_{21} = -128.8 \text{ kN}\cdot\text{mm} \leftarrow\leftarrow \\ M_{24} = -371.2 \text{ kN}\cdot\text{mm} \leftarrow\leftarrow \\ M_{42} = M_4 = 371.2 \text{ kN}\cdot\text{mm} \rightarrow\rightarrow \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ M_1 = -350.0 \text{ kN}\cdot\text{mm} \leftarrow\leftarrow \\ \\ M_2 = -500.0 \text{ kN}\cdot\text{mm} \leftarrow\leftarrow \end{array}$$

Verificando el equilibrio:



se ve que en todos los casos se cumple la condición $\sum M_x = 0$.

11.23 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE PARRILLA

Las parrillas son estructuras reticulares sometidas a cargas que actúan perpendicularmente a su plano. Ejemplos de ellas se encuentran en muchas estructuras industriales, en losas de entrepiso con viguetas en dos direcciones, en tableros de puentes y en culatas de bodegas y fábricas sometidas a la acción del viento. Los nudos se suponen rígidos y en consecuencia las acciones principales sobre sus miembros son torsión, flexión y corte. En

la deducción de la matriz de rigidez de sus miembros se utilizará el principio de superposición. En la figura 11.22 se muestra una parrilla típica.

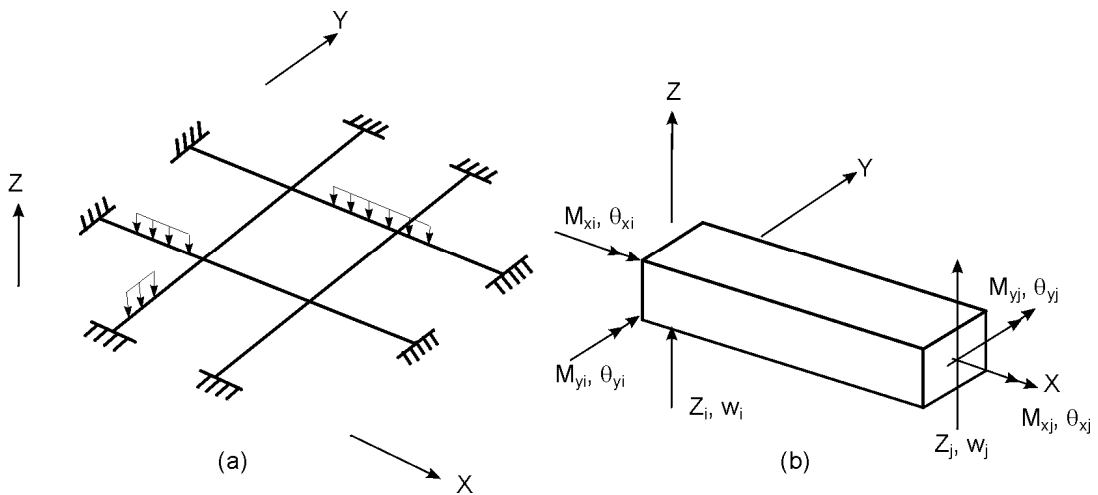


Figura 11.22 a) Esquema de una parrilla típica. b) Fuerzas que actúan sobre un elemento orientado en la dirección del eje X.

Nótese que en dicha figura el sistema de ejes generales se ha rotado 90° , en tal forma que la parrilla queda contenida en el plano horizontal X-Y y las cargas quedan actuando verticalmente en la dirección del eje Z. Esto permite el empleo de las matrices de transformación deducidas antes, como se verá más adelante.

Es obvio que el elemento representado en la figura 11.22 (b) puede considerarse como la superposición de un elemento sometido a flexión y corte y otro sometido a torsión.

Para el primer caso, teniendo en cuenta la rotación de ejes, se puede deducir la ecuación fundamental con base en los diagramas de la figura 11.23.

Dicha ecuación resulta entonces así:

$$\begin{bmatrix} M_{yi} \\ Z_i \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.69)$$

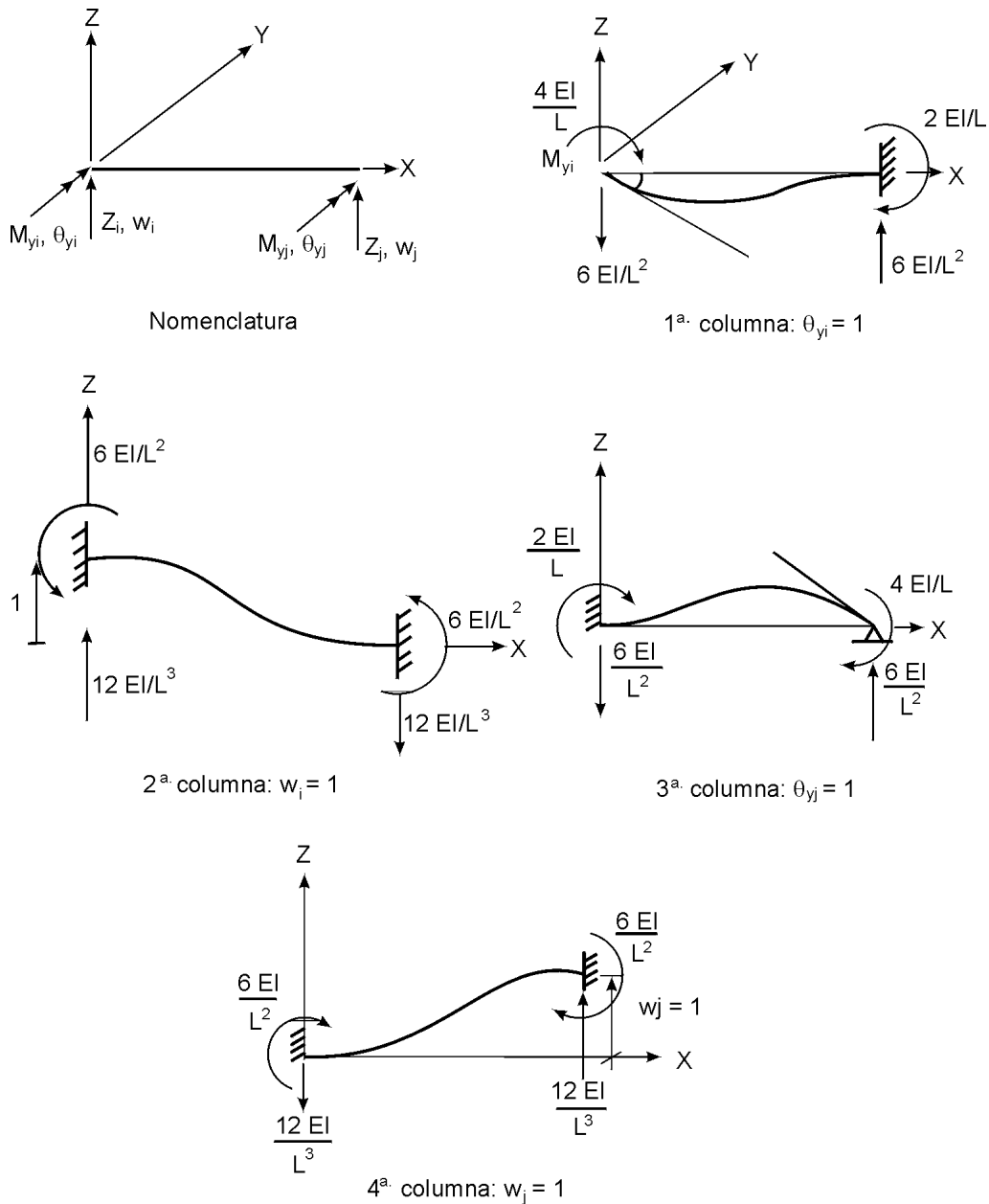


Figura 11.23 Efecto de la flexión y el corte en un elemento de parrilla.

Obsérvese que ahora los momentos en sentido horario resultan positivos, contrario a lo que se tenía para elementos de pórticos. En cuanto al segundo caso, o sea la parte de torsión, la ecuación básica es la (11.68), vista en el artículo anterior. Ampliando ahora las ecuaciones (11.68) y (11.69) para poderlas sumar, teniendo en cuenta en ambos casos los momentos de empotramiento que reemplazan las cargas intermedias, se obtiene la ecuación definitiva del elemento de parrilla, referida a coordenadas locales, que se

muestra a continuación. Es obvio que dicha ecuación es también válida en el sistema de coordenadas generales para aquellos elementos orientados en la dirección del eje X.

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{JG}{L} & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.70)$$

Figura 11.24 Ecuación básica de un elemento de parrilla en coordenadas locales. También es válida para elementos orientados en la dirección del eje X del sistema de coordenadas generales.

Un caso frecuente es el de parrillas con miembros dispuestos perpendicularmente entre sí; ejemplos de ello son el sistema conocido como reticular celular, algunas superestructuras de puentes y cierto tipo de cimentaciones. Para un elemento orientado en la dirección del eje Y, el significado físico de la matriz de rigidez y las figuras 11.25 y 11.26 conducen a la ecuación (11.71). Con esta ecuación y la (11.70), deducida antes, es posible analizar toda clase de parrillas ortogonales, como las de los siguientes ejemplos.

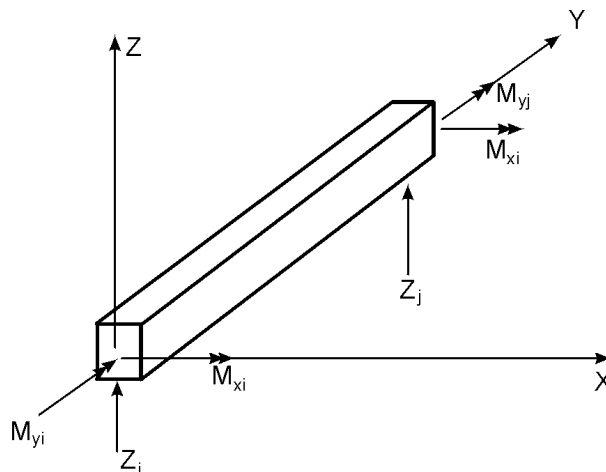


Figura 11.25 Elemento de parrilla orientado en la dirección positiva del eje Y.

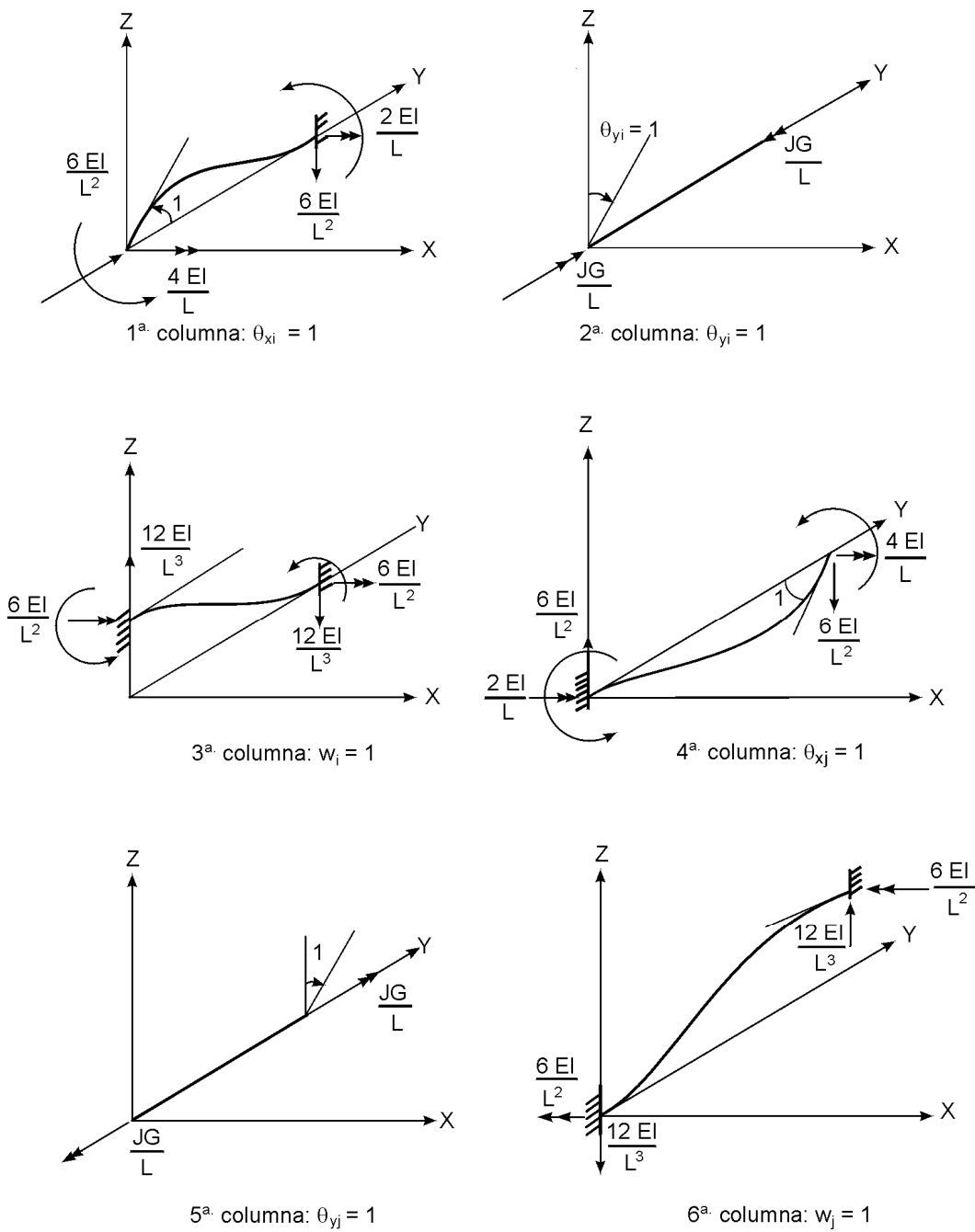


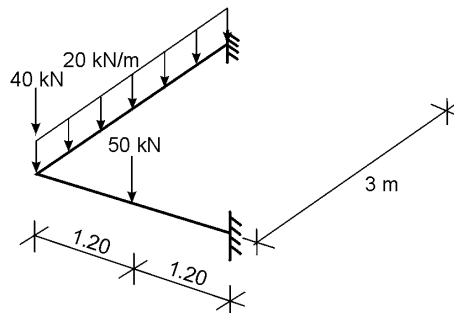
Figura 11.26 Condiciones utilizadas en la deducción de la matriz de rigidez de un elemento de parrilla orientado en la dirección del eje Y.

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.71)$$

Figura 11.27 Ecuación básica de un elemento de parrilla orientado en la dirección del eje Y del sistema de coordenadas generales.

Ejemplo 11.26

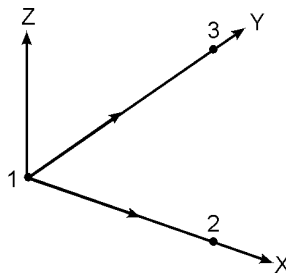
Resuelva matricialmente la estructura descrita a continuación:



Ambos elementos tienen una sección de $300 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ ($b \times h$), el módulo de elasticidad vale 19 kN/mm^2 y la relación de Poisson 0.20.

Solución

Se numeran los nudos y se orientan los elementos en la forma siguiente:



La constante torsional vale:

$$J = Cbt^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \times \frac{t}{b} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{t}{b} \right)^4 \right] =$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \times \frac{300}{400} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{300}{400} \right)^4 \right] = 0.1800$$

$$J = 0.1800 \times 400 \times (300)^3 = 1.944 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.944 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{19}{2(1+0.2)} = 7.920 \text{ kN/mm}^2 = 7.92 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$GJ = 7.92 \times 10^6 \times 1.944 \times 10^{-3} = 15400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI = 19 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.4^3 / 12 = 30400 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Y el cuadro auxiliar de propiedades resulta así:

Elemento	L	GJ/L	2EI/L	4EI/L	6EI/L	12EI/L ³ 2
1-2	2.40	6410	25330	50670	31670	26390
1-3	3.00	5130	20270	40530	20270	13510

Las fuerzas de empotramiento son:

$$M_{y12}^F = -M_{y21}^F = -50 \times 2.40 / 8 = -15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Z_{12}^F = Z_{21}^F = 50 / 2 = 25.0 \text{ kN}$$

$$M_{x13}^F = -M_{x31}^F = 20 \times 9 / 12 = 15.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Z_{13}^F = Z_{31}^F = 20 \times 3 / 2 = 30.0 \text{ kN}$$

De manera que al reemplazar en la ecuación (11.70), aplicable al elemento 1-2, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{y12} \\ Z_{12} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15.0 \\ 25.0 \\ 0 \\ 15.0 \\ 25.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6410 & 0 & 0 \\ 0 & 50670 & -31670 \\ 0 & -31670 & 26390 \\ -6410 & 0 & 0 \\ 0 & 25330 & 31670 \\ 0 & 31670 & -26390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} = 0 \\ \theta_{y2} = 0 \\ w_2 = 0 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 1-3 se utiliza la ecuación (11.71):

$$\begin{bmatrix} M_{x13} \\ M_{y13} \\ Z_{13} \\ M_{x31} \\ M_{y31} \\ Z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.0 \\ 0 \\ 30.0 \\ -15.0 \\ 0 \\ 30.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40530 & 0 & 20270 \\ 0 & 5130 & 0 \\ 20270 & 0 & 13510 \\ 20270 & 0 & 20270 \\ 0 & -5130 & 0 \\ -20270 & 0 & -13510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{y3} = 0 \\ w_3 = 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblando las partes correspondientes al nudo libre, resulta:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} = 0 \\ M_{y1} = 0 \\ Z_1 = -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.0 \\ -15.0 \\ 55.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 46940 & 0 & 20270 \\ 0 & 55800 & -31670 \\ 20270 & -31670 & 39900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Despejando:

$$\begin{bmatrix} 46940 & 0 & 20270 \\ 0 & 55800 & -31670 \\ 20270 & -31670 & 39900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.0 \\ 15.0 \\ -95.0 \end{bmatrix}$$

Y resolviendo el sistema, se obtiene:

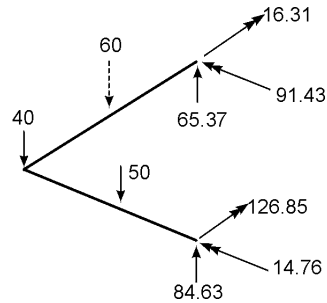
$$\begin{aligned} \theta_{x1} &= 2.303 \times 10^{-3} \text{ rad} \rightarrow \\ \theta_{y1} &= -3.179 \times 10^{-3} \text{ rad} \swarrow \\ w_1 &= -6.074 \times 10^{-3} \text{ m} \downarrow \end{aligned}$$

Las fuerzas internas se calculan reemplazando estos valores en las ecuaciones individuales, así:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{y12} \\ Z_{12} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15.0 \\ 25.0 \\ 0 \\ 15.0 \\ 25.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6410 & 0 & 0 \\ 0 & 50670 & -31670 \\ 0 & -31670 & 26390 \\ -6410 & 0 & 0 \\ 0 & 25330 & 31670 \\ 0 & 31670 & -26390 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.76 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow \\ 16.31 \text{ kN}\cdot\text{m} \nearrow \\ -34.63 \text{ kN} \downarrow \\ -14.76 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow \\ 126.85 \text{ kN}\cdot\text{m} \nearrow \\ 84.63 \text{ kN} \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x13} \\ M_{y13} \\ Z_{13} \\ M_{x31} \\ M_{y31} \\ Z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.0 \\ 0 \\ 30.0 \\ -15.0 \\ 0 \\ 30.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40530 & 0 & 20270 \\ 0 & 5130 & 0 \\ 20270 & 0 & 13510 \\ 20270 & 0 & 20270 \\ 0 & -5130 & 0 \\ -20270 & 0 & -13510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.76 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow \\ -16.31 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow \\ -5.37 \text{ kN} \downarrow \\ -91.43 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow \\ 16.31 \text{ kN}\cdot\text{m} \nearrow \\ 65.37 \text{ kN} \uparrow \end{bmatrix}$$

Ahora es posible verificar el equilibrio general:

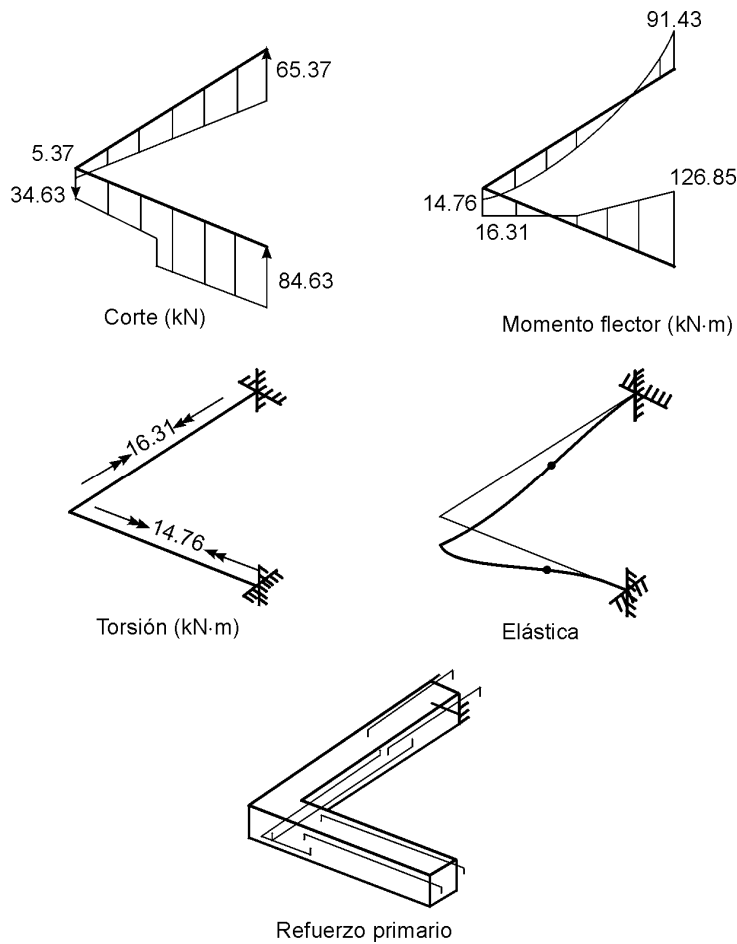


$$\sum M_x = -91.43 - 14.76 - 60 \times 1.5 + 65.37 \times 3 = -0.08 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum M_y = 16.31 + 126.85 + 50 \times 1.2 - 84.63 \times 2.4 = 0.05 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

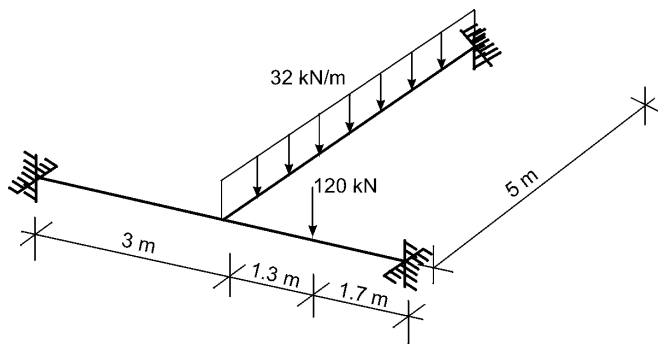
$$\sum Z = 65.37 + 84.63 - 60 - 50 - 40 = 0.00 \text{ kN}$$

Finalmente se dibujan todos los diagramas:



Ejemplo 11.27

Resuelva completamente la parrilla mostrada, por el método matricial de los desplazamientos.



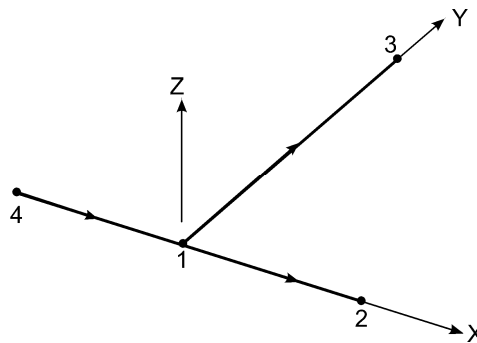
Sección: 300 × 350 mm

$E = 19 \text{ kN/mm}^2$

$G = 7.5 \text{ kN/mm}^2$

Solución

Se empieza numerando los nudos y orientando los elementos:



Luego se calculan las propiedades:

$$J = Cbt^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \times \frac{300}{350} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{300}{350} \right)^4 \right] = 0.1614$$

$$J = 0.1614 \times 350 \times (300)^3 = 1.526 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.526 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 7.5 \times 10^6 \times 1.562 \times 10^{-3} = 11440 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI = 19 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.35^3 / 12 = 20370 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

y se elabora el cuadro resumen (kN y m):

Elemento	L	GJ/L	2EI/L	4EI/L	6EI/L	12EI/L ³
1-2, 4-1	3.00	3810	13580	27150	13580	9050
1-3	5.00	2290	8150	16290	4890	1960

Sólo existen fuerzas de empotramiento en los elementos 1-2 y 1-3. Valen:

$$M_{y12}^F = -120 \times 1.7^2 \times 1.3 / 9 = -50.09 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \swarrow$$

$$M_{y21}^F = -120 \times 1.3^2 \times 1.7 / 9 = 38.31 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nearrow$$

$$Z_{12}^F = (120 \times 1.7 + 50.09 - 38.31) / 3 = 71.93 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$Z_{12}^F = (120 \times 1.3 - 50.09 + 38.31) / 3 = 48.07 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$M_{x13}^F = 320 \times 25 / 12 = 66.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \rightarrow$$

$$M_{x31}^F = -66.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow$$

$$Z_{13}^F = Z_{31}^F = 320 \times 2.5 = 80.0 \text{ kN} \quad \uparrow$$

Aplicando ahora la ecuación (11.70) a los elementos 1-2 y 4-1, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{y12} \\ Z_{12} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50.09 \\ 71.93 \\ 0 \\ 38.31 \\ 48.07 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3810 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 27150 & -13580 & | & | & | \\ 0 & -13580 & 9050 & | & | & | \\ -3810 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 13580 & -13580 & | & | & | \\ 0 & 13580 & -9050 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} = 0 \\ \theta_{y2} = 0 \\ w_2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x41} \\ M_{y41} \\ Z_{41} \\ M_{x14} \\ M_{y14} \\ Z_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3810 & 0 & 0 \\ 0 & 13580 & 13580 \\ 0 & -13580 & -9050 \\ 3810 & 0 & 0 \\ 0 & 27150 & 13580 \\ 0 & 13580 & 9050 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x4} = 0 \\ \theta_{y4} = 0 \\ w_4 = 0 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Al elemento 1-3 se le aplica la ecuación (11.71):

$$\begin{bmatrix} M_{x13} \\ M_{y13} \\ Z_{13} \\ M_{x31} \\ M_{y31} \\ Z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.67 \\ 0 \\ 80.00 \\ -66.67 \\ 0 \\ 80.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16290 & 0 & 4890 \\ 0 & 2290 & 0 \\ 4890 & 0 & 1960 \\ 815 & 0 & 4890 \\ 0 & -2290 & 0 \\ -4890 & 0 & -1960 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{y3} = 0 \\ w_3 = 0 \end{bmatrix}$$

Ensamblando las partes correspondientes al nudo libre, se llega a:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} = 0 \\ M_{y1} = 0 \\ Z_1 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23910 & 0 & 4890 \\ 0 & 56590 & 0 \\ 4890 & 0 & 20060 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 66.67 \\ -50.09 \\ 151.93 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned} \theta_{x1} &= -1.304 \times 10^{-3} \text{ rad} \leftarrow\leftarrow \\ \theta_{y1} &= 8.851 \times 10^{-4} \text{ rad} \nearrow \\ w_1 &= -7.256 \times 10^{-3} \text{ m} \downarrow \end{aligned}$$

Para obtener las fuerzas internas se reemplazan estos valores en las ecuaciones individuales. Efectuando las respectivas operaciones, resulta:

$$\begin{aligned} M_{x12} &= -4.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow\leftarrow \\ M_{y12} &= 72.48 \text{ kN}\cdot\text{m} \nearrow \\ Z_{12} &= -5.76 \text{ kN} \downarrow \\ M_{x21} &= 4.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow\rightarrow \\ M_{y21} &= 148.86 \text{ kN}\cdot\text{m} \nearrow \\ Z_{21} &= 125.76 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

Para el elemento 4-1:

$$\begin{aligned} M_{x42} &= -4.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow\leftarrow \\ M_{y41} &= -86.51 \text{ kN}\cdot\text{m} \nwarrow \\ Z_{41} &= -53.64 \text{ kN} \downarrow \\ M_{x14} &= -4.97 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow\leftarrow \\ M_{y14} &= -74.50 \text{ kN}\cdot\text{m} \nwarrow \end{aligned}$$

$$Z_{14} = -53.64 \text{ kN} \quad \downarrow$$

Para el elemento 1-3:

$$M_{x13} = 9.92 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \rightarrow$$

$$M_{y13} = 2.03 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nearrow$$

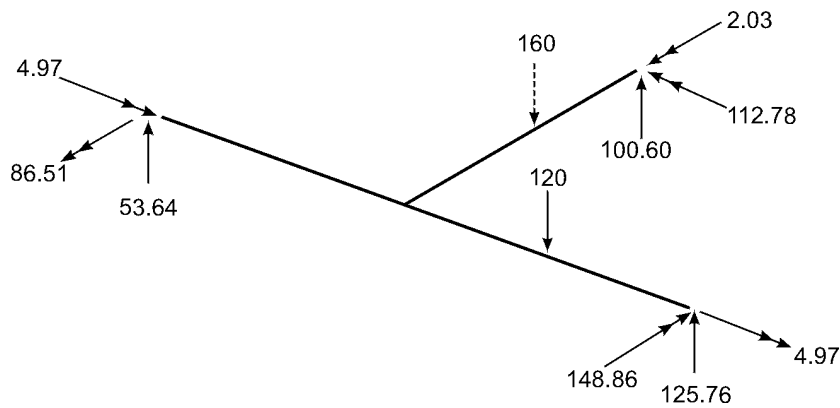
$$Z_{13} = 59.40 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$M_{x31} = -112.78 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow$$

$$M_{y31} = -2.03 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \searrow$$

$$Z_{31} = 100.60 \text{ kN} \quad \uparrow$$

Para verificar el equilibrio se dibuja el diagrama de cuerpo libre general:

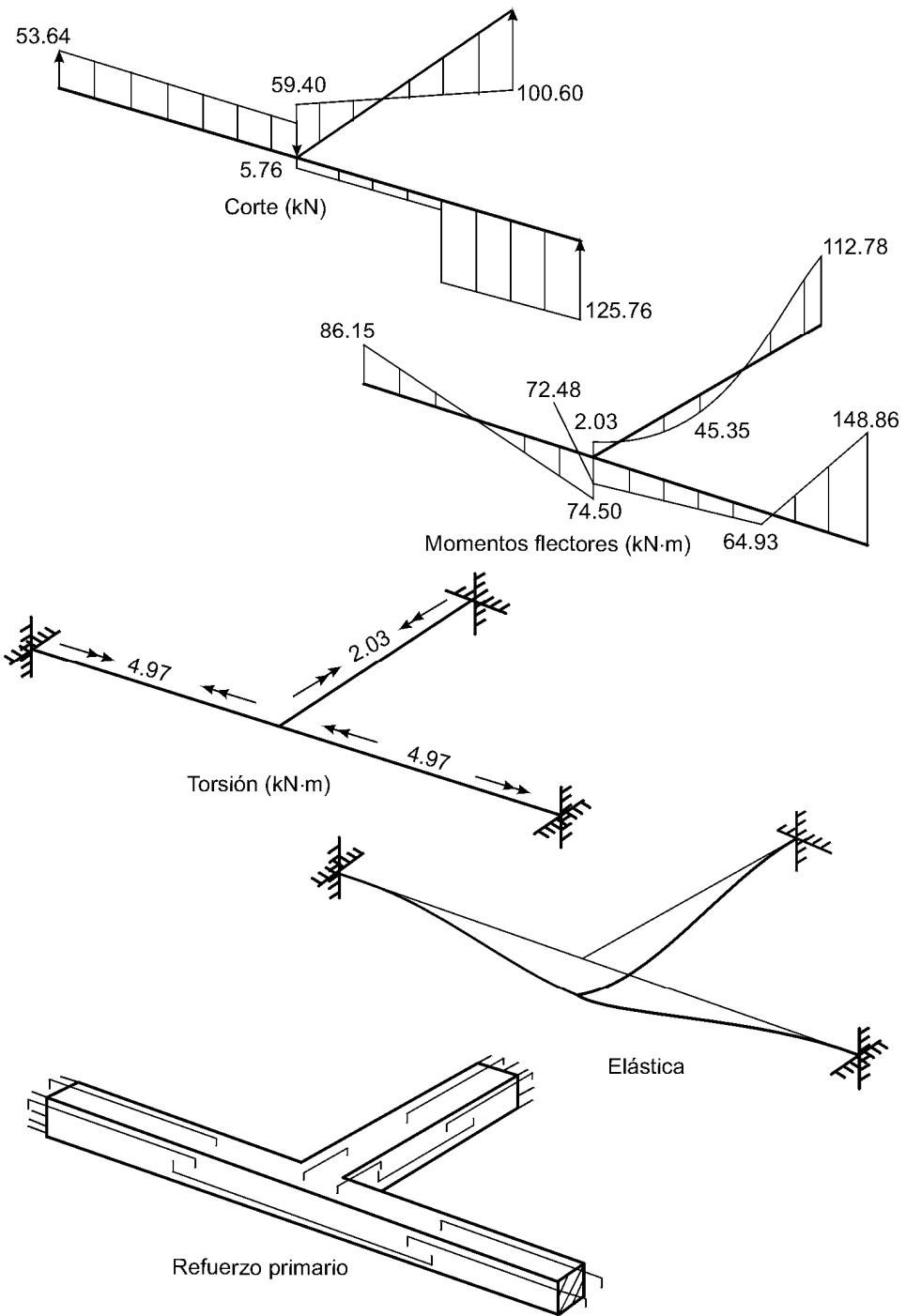


$$\sum M_x = 4.97 - 112.78 + 4.97 + 100.60 \times 5 - 160 \times 2.5 = 0.16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\sum M_y = 148.86 - 2.03 - 86.51 + 120 \times 1.3 - 125.76 \times 3 + 53.64 \times 3 = -0.04 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

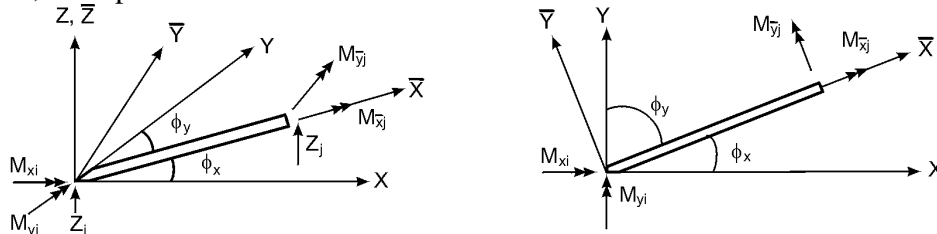
$$\sum Z = 125.76 + 100.60 + 53.64 - 120 - 160 = 0.00 \text{ kN}$$

Finalmente, se dibujan todos los diagramas:



11.24 ELEMENTO DE PARRILLA ARBITRARIAMENTE ORIENTADO

En la figura 11.28 se representa el caso general de un elemento de parrilla arbitrariamente orientado, en el plano de la misma.



(a) Visto en el espacio.

(b) Visto en el plano X-Y.

Figura 11.28 Elemento de parrilla arbitrariamente orientado.

Comparando la parte (b) de esta figura con la 11.19, se ve que gracias a la rotación de ejes los dos casos son completamente análogos y, por consiguiente, la matriz de transformación $[T]$ resulta definida así: $[\bar{F}] = [T] [F]$.

$$\begin{bmatrix} M_{\bar{x}i} \\ M_{\bar{y}i} \\ Z_i \\ M_{\bar{x}j} \\ M_{\bar{y}j} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} \quad (11.72)$$

donde, como antes:

$$\lambda = \cos \phi_x \quad \mu = \cos \phi_y = \sin \phi_x \quad (11.57)$$

Obsérvese que ahora son las fuerzas cortantes Z las que coinciden con las \bar{Z} y que anteriormente eran los vectores M_z y $M_{\bar{z}}$ los iguales. Similarmente, los vectores M_x y M_y se relacionan con los $M_{\bar{x}}$ y $M_{\bar{y}}$ de la misma forma que antes lo hacían los X y Y con los \bar{X} y \bar{Y} . La rotación del sistema de ejes generales tuvo por objeto lograr esta concordancia para beneficiarse de ella, en especial al resolver los problemas mediante computadora; pero, naturalmente, podrían haberse dejado los mismos ejes y haber localizado la parrilla en los planos XY , XZ o YZ , según prefiriera el calculista.

Recordando que la matriz de rigidez referida a coordenadas generales se puede obtener mediante el triple producto:

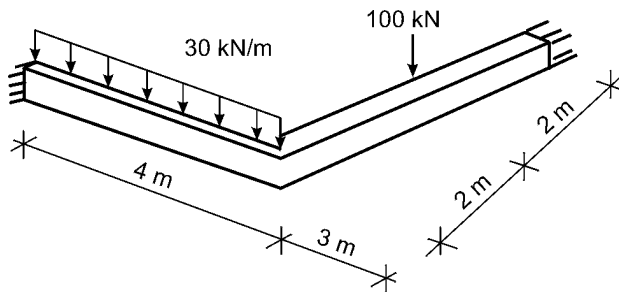
$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T]$$

y reemplazando en esta fórmula las matrices definidas por las ecuaciones (11.70) y (11.72), se llega a la ecuación (11.73), aplicable al elemento de parrilla arbitrariamente orientado en el plano de ésta.

Con la ecuación (11.73) es posible resolver toda clase de parrillas planas; su utilización se explica en un ejemplo más adelante.

Ejemplo 11.28

Analice completamente la estructura de la figura; ambos elementos tienen una sección de 300×350 mm.

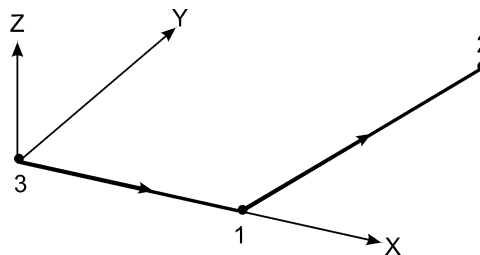


$$E = 19 \text{ kN/mm}^2$$

$$G = 7.5 \text{ kN/mm}^2$$

Solución

Se numeran los nudos y se escoge la orientación de los elementos, así:



Del problema anterior resulta:

$$GJ = 11440 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI = 20370 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Para el elemento 1-2:

$$\lambda = \cos \phi_x = 3/5 = 0.6$$

$$\mu = \cos \phi_y = 4/5 = 0.8$$

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ Z_i \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ Z_i^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ Z_j^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{4EI}{L} \mu^2 & \left[\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right] \lambda \mu & \frac{6EI}{L^2} \mu & -\frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{2EI}{L} \mu^2 & -\left[\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right] \lambda \mu & -\frac{6EI}{L^2} \mu \\ \left[\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right] \lambda \mu & \frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{4EI}{L} \lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2} \lambda & -\left[\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right] \lambda \mu & -\frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{2EI}{L} \lambda^2 & \frac{6EI}{L^2} \lambda \\ \frac{6EI}{L^2} \mu & -\frac{6EI}{L^2} \lambda & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \mu & -\frac{6EI}{L^2} \lambda & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{2EI}{L} \mu^2 & -\left[\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right] \lambda \mu & \frac{6EI}{L^2} \mu & \frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{4EI}{L} \mu^2 & \left[\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right] \lambda \mu & -\frac{6EI}{L^2} \mu \\ -\left[\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right] \lambda \mu & -\frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{2EI}{L} \lambda^2 & -\frac{6EI}{L^2} \lambda & \left[\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right] \lambda \mu & \frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{4EI}{L} \lambda^2 & \frac{6EI}{L^2} \lambda \\ -\frac{6EI}{L^2} \mu & \frac{6EI}{L^2} \lambda & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \mu & \frac{6EI}{L^2} \lambda & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{bmatrix} \quad (11.73)$$

Figura 11.29 Matriz de rigidez de un elemento de parrilla, arbitrariamente orientado en el plano de la misma, referida al sistema de coordenadas generales.

$$\frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{4EI}{L} \mu^2 = 11250$$

$$\frac{6EI}{L^2} \lambda = 2930$$

$$\left[\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right] \lambda \mu = -6720$$

$$-\frac{GJ}{L} \lambda^2 + \frac{2EI}{L} \mu^2 = 4390$$

$$\frac{6EI}{L^2} \mu = 3910$$

$$-\frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{2EI}{L} \lambda^2 = 1470$$

$$\frac{GJ}{L} \mu^2 + \frac{4EI}{L} \lambda^2 = 7330$$

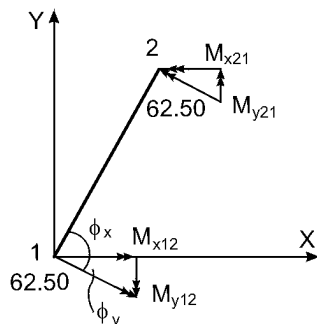
$$-\left[\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L} \right] \lambda \mu = -5010$$

Fuerzas de empotramiento:

$$M_{x12}^F = -M_{x21}^F = \frac{100 \times 5}{8} = 62.50 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \searrow$$

$$\bar{Z}_{12}^F = \bar{Z}_{21}^F = \frac{100}{2} = 50.00 \text{ kN} \quad \uparrow$$

La transformación a coordenadas generales se puede hacer utilizando la ecuación (11.72), o directamente por trigonometría:



$$M_{x12}^F = 62.50 \times 0.8 = 50.00 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \rightarrow$$

$$M_{y12}^F = -62.50 \times 0.6 = -37.50 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \downarrow$$

$$M_{x21}^F = -50.00 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow$$

$$M_{y21}^F = 37.50 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \uparrow$$

Las fuerzas en Z, por ser normales al plano, no sufren ningún cambio:

$$Z_{12}^F = Z_{21}^F = 50.00 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$M_{y31}^F = -M_{y13}^F = -30 \times 16 / 12 = -40.00 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow$$

$$Z_{31}^F = Z_{13}^F = 30 \times 16 / 2 = 60.00 \text{ kN} \quad \uparrow$$

Por consiguiente, al reemplazar en las ecuaciones (11.73) y (11.70), los planteamientos individuales quedan así:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{y12} \\ Z_{12} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.00 \\ -37.50 \\ 50.00 \\ -50.00 \\ 37.50 \\ 50.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11250 & -6720 & 3910 & | & | & | \\ -6720 & 7330 & -2930 & | & | & | \\ 3910 & -2930 & 1960 & | & | & | \\ 4390 & -5010 & 3910 & | & | & | \\ -5010 & 1470 & -293 & | & | & | \\ -3910 & 2930 & -1960 & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} = 0 \\ \theta_{y2} = 0 \\ w_2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x31} \\ M_{y31} \\ Z_{31} \\ M_{x13} \\ M_{y13} \\ Z_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -40.00 \\ 60.00 \\ 0 \\ 40.00 \\ 60.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | & | & | & -2860 & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 10180 & 7640 \\ | & | & | & 0 & -7640 & -3820 \\ | & | & | & 2860 & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 20370 & 7640 \\ | & | & | & 0 & 7640 & 3820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{y3} = 0 \\ w_3 = 0 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Y ensamblando los términos correspondientes al nudo libre:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} = 0 \\ M_{y1} = 0 \\ Z_1 = -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.00 \\ 2.50 \\ 110.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14110 & -6720 & 3910 \\ -6720 & 27700 & 4710 \\ 3910 & 4710 & 5780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los desplazamientos desconocidos:

$$\begin{aligned} \theta_{x1} &= 8.240 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \rightarrow\rightarrow \\ \theta_{y1} &= 7.073 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nearrow \\ w_1 &= -3.037 \times 10^{-2} \text{ m} \quad \downarrow \end{aligned}$$

Para hallar las fuerzas internas y las reacciones se reemplazan estos valores en las ecuaciones individuales. Al hacerlo se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{x12} &= -23.57 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow\leftarrow \\ M_{y12} &= 47.95 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nearrow \\ Z_{12} &= 1.97 \text{ kN} \quad \uparrow \\ M_{x21} &= -168.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow\leftarrow \\ M_{y21} &= 95.59 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nearrow \\ Z_{21} &= 98.03 \text{ kN} \quad \uparrow \end{aligned}$$

Para pasar estos valores a coordenadas locales se emplea la ecuación (11.72):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{x12} \\ \bar{M}_{y12} \\ \bar{Z}_{12} \\ \bar{M}_{x21} \\ \bar{M}_{y21} \\ \bar{Z}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -23.57 \\ 47.95 \\ 1.97 \\ -168.00 \\ 95.59 \\ 98.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.22 \text{ kN} \cdot \text{m} \nearrow \\ 47.62 \text{ kN} \cdot \text{m} \nearrow \\ 1.97 \text{ kN} \uparrow \\ -24.33 \text{ kN} \cdot \text{m} \searrow \\ 191.76 \text{ kN} \cdot \text{m} \nearrow \\ 98.03 \text{ kN} \uparrow \end{bmatrix}$$

Para el elemento 3-1:

$$M_{x31} = -23.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \leftarrow \leftarrow$$

$$M_{y31} = -200.02 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \nearrow$$

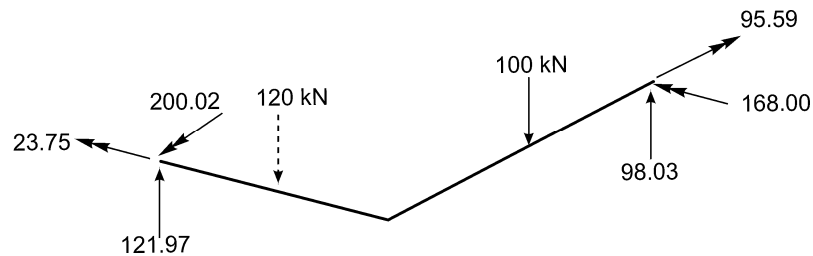
$$Z_{31} = 121.97 \text{ kN} \quad \uparrow$$

$$M_{x13} = 23.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \rightarrow \rightarrow$$

$$M_{y13} = -47.95 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \searrow$$

$$Z_{13} = -1.97 \text{ kN} \quad \downarrow$$

Verificando el equilibrio del diagrama de cuerpo libre de toda la estructura.

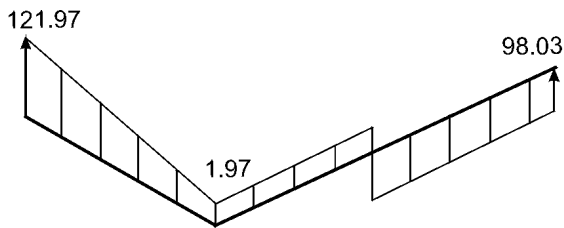


$$\sum M_{x3} = -23.57 - 168.00 + 98.03 \times 4 - 100 \times 2 = 0.55 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

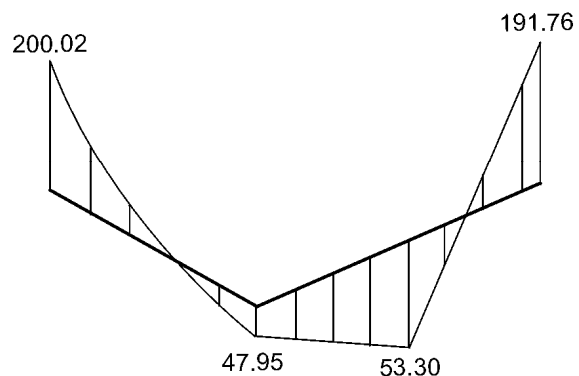
$$\sum M_{y3} = -200.02 + 95.59 - 98.03 \times 7 + 100 \times 5.5 + 120 \times 2 = -0.64 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum Z = 121.97 + 98.03 - 120 - 100 = 0.00 \text{ kN}$$

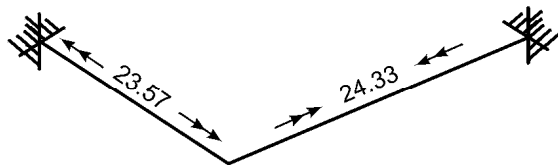
Por último se dibujan todos los diagramas:



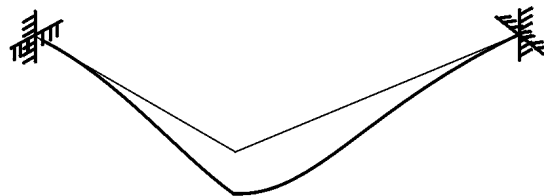
Corte (kN)



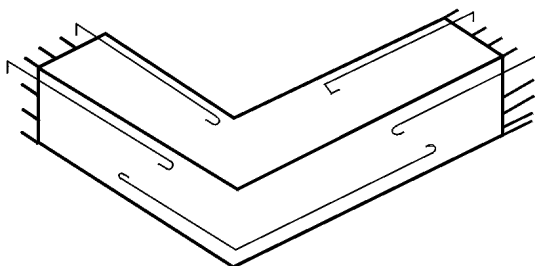
Momentos flectores (kN·m)



Torsión (kN·m)



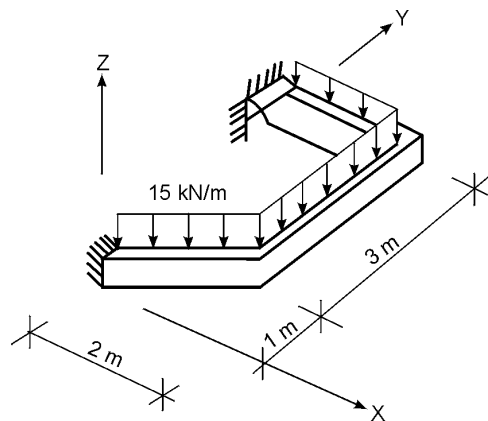
Elástica



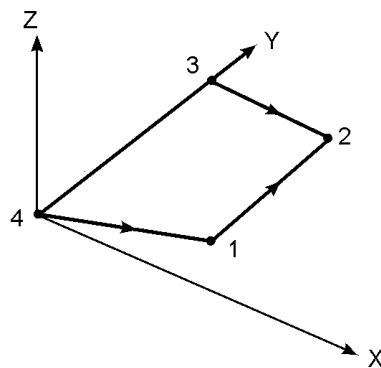
Refuerzo a flexión

EJEMPLO 11.29

Resuelva la estructura mostrada. El apoyo A puede considerarse como un empotramiento perfecto, mientras que el B admite giro con respecto al eje Y. Todos los elementos soportan una carga vertical de 15 kN/m, que actúa en el sentido negativo del eje Z. Su sección transversal mide 300 mm × 400 mm, el módulo de elasticidad E, vale 22 kN/mm² y el de corte, G, 8.5 kN/mm².

**Solución**

Se adoptan las siguientes numeración y orientación:



Del ejemplo 11.26 (página 546)

$$J = 1.944 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times 1.944 \times 10^{-3} = 16520 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI = 22 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.4^3 / 12 = 35200 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

y el cuadro de propiedades básicas queda así:

Elemento	L	GJ/L	2EI/L	4EI/L	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$
1 - 2	3.000	5510	23470	46930	23470	15640
3 - 2	2.000	8260	35200	70400	52800	52800
4 - 1	2.236	7390	31480	62970	42240	37780

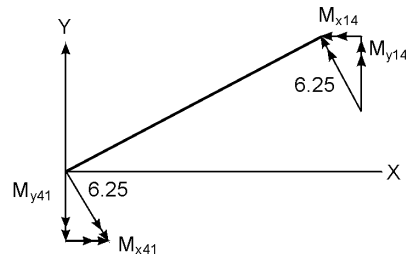
Además, para el elemento 4-1:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2/2.236 = 0.894 & \lambda^2 &= 0.800 \\ \mu &= 1/2.236 = 0.447 & \mu^2 &= 0.200 \\ \lambda\mu &= 0.400 \\ \frac{GJ}{L}\lambda^2 + \frac{4EI}{L}\mu^2 &= 18510 & -\left(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}\right)\lambda\mu &= -15550 \\ \left(\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}\right)\lambda\mu &= -22230 & \frac{GJ}{L}\mu^2 + \frac{4EI}{L}\lambda\mu &= 50 \\ \frac{6EI}{L^2}\mu &= 18890 & \frac{6EI}{L^2}\lambda &= 37780 \\ -\frac{GJ}{L}\lambda^2 + \frac{2EI}{L}\mu^2 &= 384 & \frac{GJ}{L}\mu^2 + \frac{2EI}{L}\lambda^2 &= 23710 \end{aligned}$$

Fuerzas de empotramiento:

$$\begin{aligned} M_{x12}^F &= -M_{x21}^F = 15 \times 9/12 = 11.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \leftarrow\leftarrow \\ Z_{12}^F &= Z_{21}^F = 15 \times 3/2 = 22.50 \text{ kN} \quad \uparrow \\ M_{y32}^F &= -M_{y23}^F = -15 \times 4/12 = -5.00 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \swarrow \\ Z_{32}^F &= Z_{23}^F = 15 \times 2/2 = 15.00 \text{ kN} \quad \uparrow \\ M_{y41}^F &= -M_{y14}^F = -15 \times 5/12 = -6.25 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \swarrow \\ \bar{Z}_{41}^F &= \bar{Z}_{14}^F = 15 \times 2.236/2 = 16.77 \text{ kN} \quad \uparrow \end{aligned}$$

Los valores de este elemento deben pasarse a coordenadas generales:



$$M_{x41} = 6.25 \mu = 2.80 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow$$

$$M_{x14} = -2.80 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow$$

$$M_{y41} = -6.25 \lambda = -5.59 \text{ kN}\cdot\text{m} \downarrow$$

$$M_{y14} = 5.59 \text{ kN}\cdot\text{m} \uparrow$$

Las fuerzas en Z no cambian; por consiguiente, al aplicar las ecuaciones (11.71), (11.70) y (11.73) resulta:

$$\begin{bmatrix} M_{x12} \\ M_{y12} \\ Z_{12} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.25 \\ 0 \\ 22.50 \\ -11.25 \\ 0 \\ -22.50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_1 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_2 \\ 46930 & 0 & 23470 & 23470 & 0 & -23470 \\ 0 & 5510 & 0 & 0 & -5510 & 0 \\ 23470 & 0 & 15640 & 23470 & 0 & -15640 \\ 23470 & 0 & 23470 & 46930 & 0 & -23470 \\ 0 & -5510 & 0 & 0 & 5510 & 0 \\ -23470 & 0 & -15640 & -23470 & 0 & 15640 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x32} \\ M_{y32} \\ Z_{32} \\ M_{x23} \\ M_{y23} \\ Z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5.00 \\ 15.00 \\ 0 \\ 5.00 \\ 15.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{x3} & \theta_{y3} & w_3 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_2 \\ 0 & -8260 & 0 & 0 & 0 \\ 70400 & 0 & 35200 & 52800 \\ 52800 & 0 & -52800 & -52800 \\ 0 & 8260 & 0 & 0 \\ 35200 & 0 & 70400 & 52800 \\ 52800 & 0 & 52800 & 52800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{y3} \\ w_3 = 0 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x41} \\ M_{y41} \\ Z_{41} \\ M_{x14} \\ M_{y14} \\ Z_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.80 \\ -5.59 \\ 16.77 \\ -2.80 \\ 5.59 \\ 16.67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{x4} & \theta_{y4} & w_4 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_1 \\ 380 & -15550 & -18890 \\ -15550 & 23710 & 37780 \\ 18890 & -37780 & -37780 \\ 18510 & -22230 & -18890 \\ -22230 & 51850 & 37780 \\ -18890 & 37780 & 37780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x4} = 0 \\ \theta_{y4} = 0 \\ w_4 = 0 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{bmatrix}$$

Y ensamblando los términos correspondientes a los desplazamientos libres:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} = 0 \\ M_{y1} = 0 \\ Z_1 = 0 \\ M_{x2} = 0 \\ M_{y2} = 0 \\ Z_2 = 0 \\ M_{y3} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.45 \\ 5.59 \\ 39.27 \\ -11.25 \\ 5.00 \\ 37.50 \\ -5.00 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_1 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_2 & \theta_{y3} \\ 65440 & -22230 & 4580 & 23470 & 0 & -23470 & 0 \\ -22230 & 57360 & 37780 & 0 & -5510 & 0 & 0 \\ 4580 & 37780 & 53420 & 23470 & 0 & -15640 & 0 \\ 23470 & 0 & 23470 & 55190 & 0 & -23470 & 0 \\ 0 & -5510 & 0 & 0 & 75910 & 52800 & 35200 \\ -23470 & 0 & -15640 & -23470 & 52800 & 68440 & 52800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35200 & 52800 & 70400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \\ \theta_{y3} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_{x1} &= -4.771 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \\ \theta_{y1} &= 5.073 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \nearrow \\ w_1 &= -9.064 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \downarrow \\ \theta_{y3} &= 1.213 \times 10^{-2} \text{ rad} \quad \nearrow \\ \theta_{x2} &= -3.849 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \\ \theta_{y2} &= 1.093 \times 10^{-2} \text{ rad} \quad \nearrow \\ w_2 &= -2.337 \times 10^{-2} \text{ m} \quad \downarrow \end{aligned}$$

y reemplazando estos valores en las ecuaciones originales se hallan las fuerzas internas:

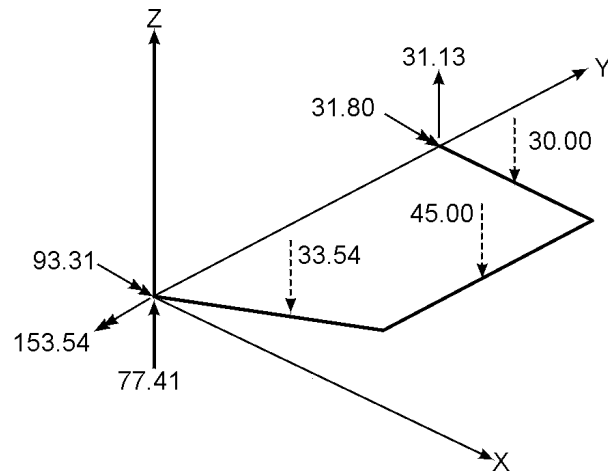
$$\begin{aligned} M_{x12} &= 32.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \rightarrow = M_{y12}^- \\ M_{y12} &= -32.27 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nwarrow = M_{x12}^- \\ Z_{12} &= 43.87 \text{ kN} \quad \uparrow = \bar{Z}_{12} \\ M_{x21} &= 31.80 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \rightarrow = M_{y21}^- \\ M_{y21} &= 32.27 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \nearrow = M_{x21}^- \\ Z_{21} &= 1.13 \text{ kN} \quad \uparrow = \bar{Z}_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{x32} &= 31.80 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow\rightarrow = M_{x32}^- \\
 M_{y32} &= 0 = M_{y32}^- \\
 Z_{32} &= 31.13 \text{ kN} \uparrow = \bar{Z}_{32} \\
 M_{x23} &= -31.80 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow\leftarrow = M_{x23}^- \\
 M_{y23} &= -32.27 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow = M_{y23}^- \\
 Z_{23} &= 0 \text{ kN} \downarrow = \bar{Z}_{23} \\
 M_{x41} &= 93.31 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow\rightarrow \\
 M_{y41} &= -153.54 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow \\
 Z_{41} &= 77.41 \text{ kN} \uparrow \\
 M_{x14} &= -32.67 \text{ kN}\cdot\text{m} \leftarrow\leftarrow \\
 M_{y14} &= 32.27 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow \\
 Z_{14} &= -43.87 \text{ kN} \downarrow
 \end{aligned}$$

Para convertir las fuerzas internas del miembro 4-1 a coordenadas locales, se utiliza la matriz de transformación respectiva.

$$\begin{bmatrix} M_{x41}^- \\ M_{y41}^- \\ \bar{Z}_{41} \\ M_{x14}^- \\ M_{y14}^- \\ \bar{Z}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.894 & 0.477 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.447 & 0.894 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.894 & 0.447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.447 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 93.31 \\ -153.54 \\ 77.41 \\ -32.67 \\ 32.27 \\ -43.87 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.79 \text{ kN}\cdot\text{m} \rightarrow\rightarrow \\ -179.06 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow \\ 77.41 \text{ kN} \uparrow \\ -14.79 \text{ kN} \leftarrow\leftarrow \\ 43.47 \text{ kN}\cdot\text{m} \swarrow \\ -43.87 \text{ kN} \downarrow \end{bmatrix}$$

Verificación del equilibrio general:

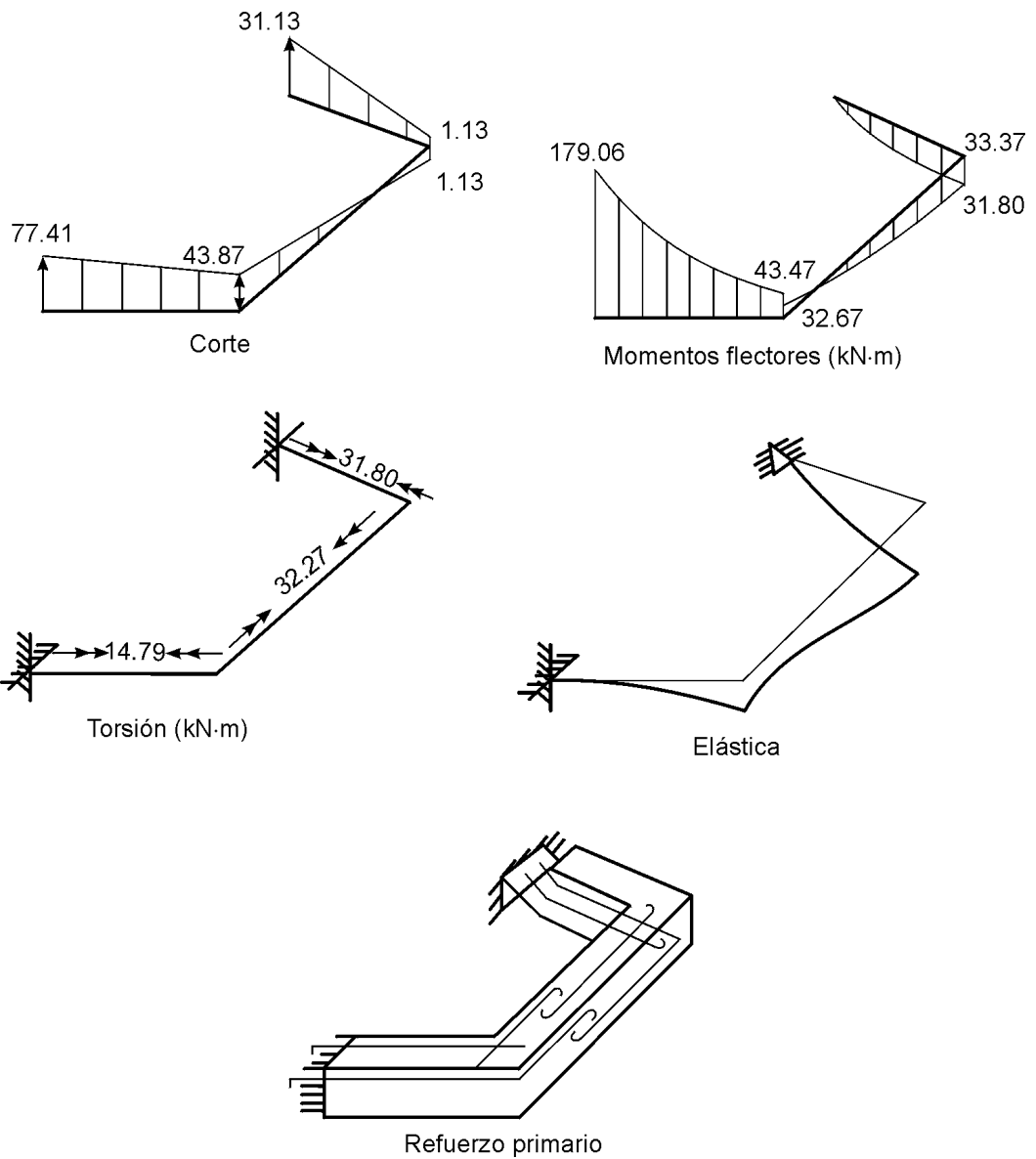


$$\Sigma M_x = 31.80 + 93.31 - 30 \times 4 - 45 \times 2.5 - 33.54 \times 0.5 + 31.13 \times 4 = 0.36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma M_y = -153.54 + 30 \times 1 + 45 \times 2 + 33.54 \times 1 = 0.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma Z = 77.41 + 31.13 - 30.00 - 45.00 - 33.54 = 0.00 \text{ kN}$$

A continuación se dibujan todos los diagramas:



Con lo cual queda terminado el problema.

11.25 MATRIZ DE RIGIDEZ, REFERIDA A COORDENADAS LOCALES, DE UN ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO EN EL ESPACIO

El caso más general de estructura reticular es el de un pórtico en el espacio cuyos nudos tienen seis grados de libertad, correspondientes a tres desplazamientos y tres rotaciones. Éstos resultan, a su vez, de seis solicitaciones: fuerza axial, corte en dos direcciones, flexión biaxial y torsión, como se ve en la figura 11.30, en la cual se ha supuesto que las cargas que las originan están contenidas en los planos principales del elemento.

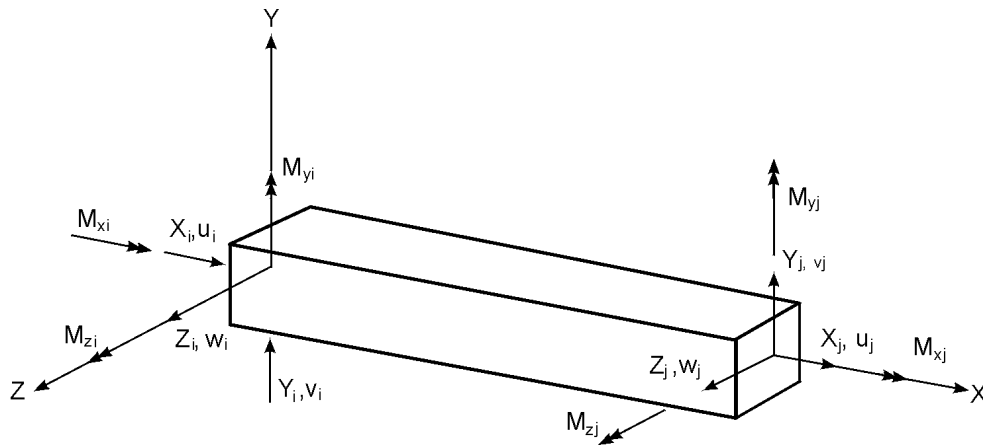


Figura 11.30 Solicitaciones de un elemento de pórtico espacial.

Para obtener la matriz de rigidez de tal elemento basta con aplicar el significado físico de los términos de cada columna, como se explica en la figura 11.31. El resultado es la ecuación (11.74), que define la matriz $[\bar{K}]$, necesaria para el cálculo de la matriz de rigidez referida a coordenadas generales, de un elemento arbitrariamente orientado en el espacio. Además, dicha ecuación (11.74) se puede aplicar directamente a elementos orientados en la dirección del eje X de la estructura. El significado de los términos se explica en la figura referida.

11.26 MATRICES DE RIGIDEZ, REFERIDAS A COORDENADAS GENERALES, DE ELEMENTOS ORIENTADOS EN LA DIRECCIÓN DE LOS EJES Y Y Z DE LA ESTRUCTURA

Para facilitar el cálculo manual o la solución con computadora de pórticos espaciales ortogonales se presentan las ecuaciones (11.75) y (11.76), aplicables a elementos orientados en la dirección de los ejes Y y Z de la estructura, respectivamente. Su deducción se basa en las figuras 11.33 y 11.35 y en el significado físico de los términos de las matrices correspondientes.

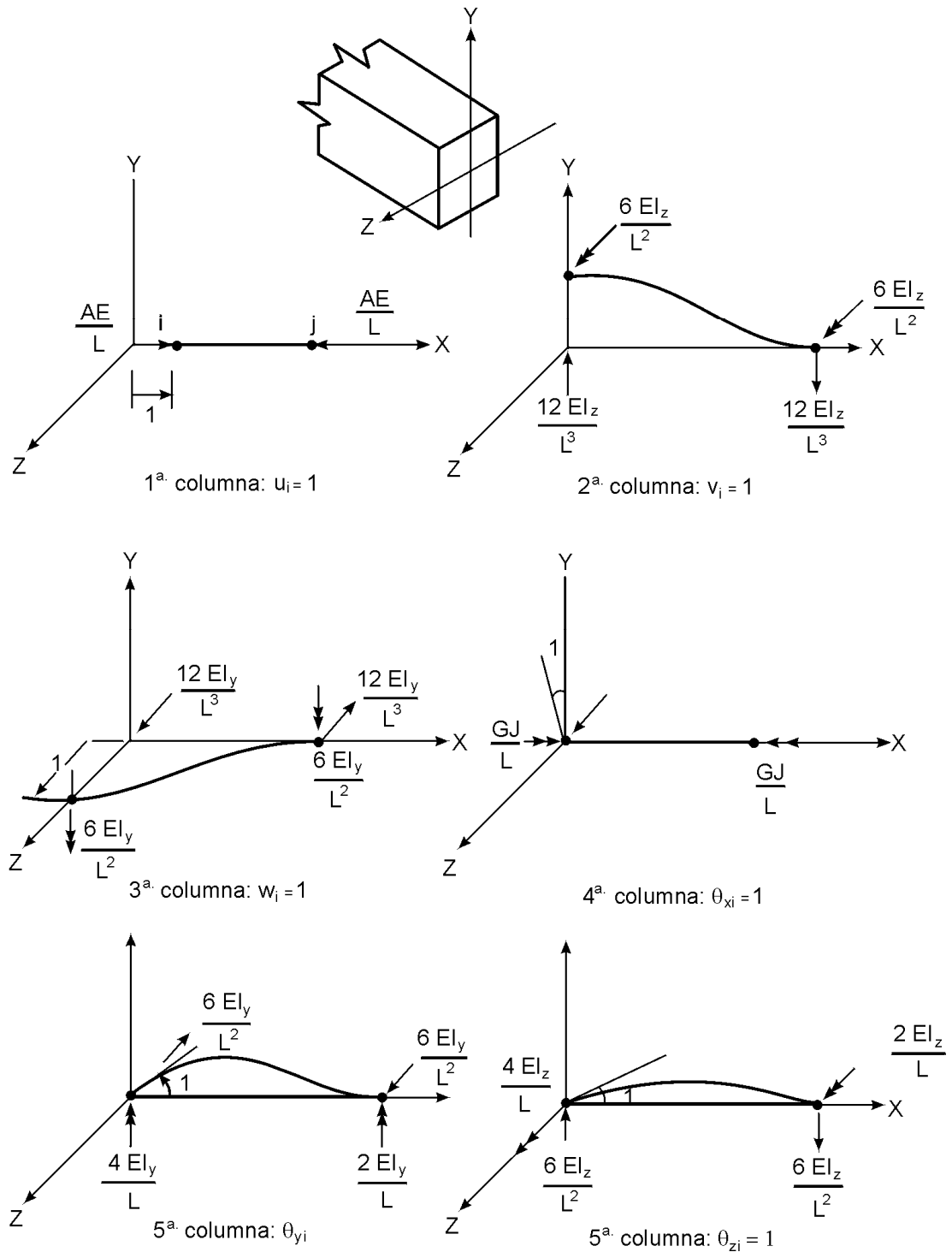


Figura 11.31 Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje X de la estructura, referida a coordenadas generales.

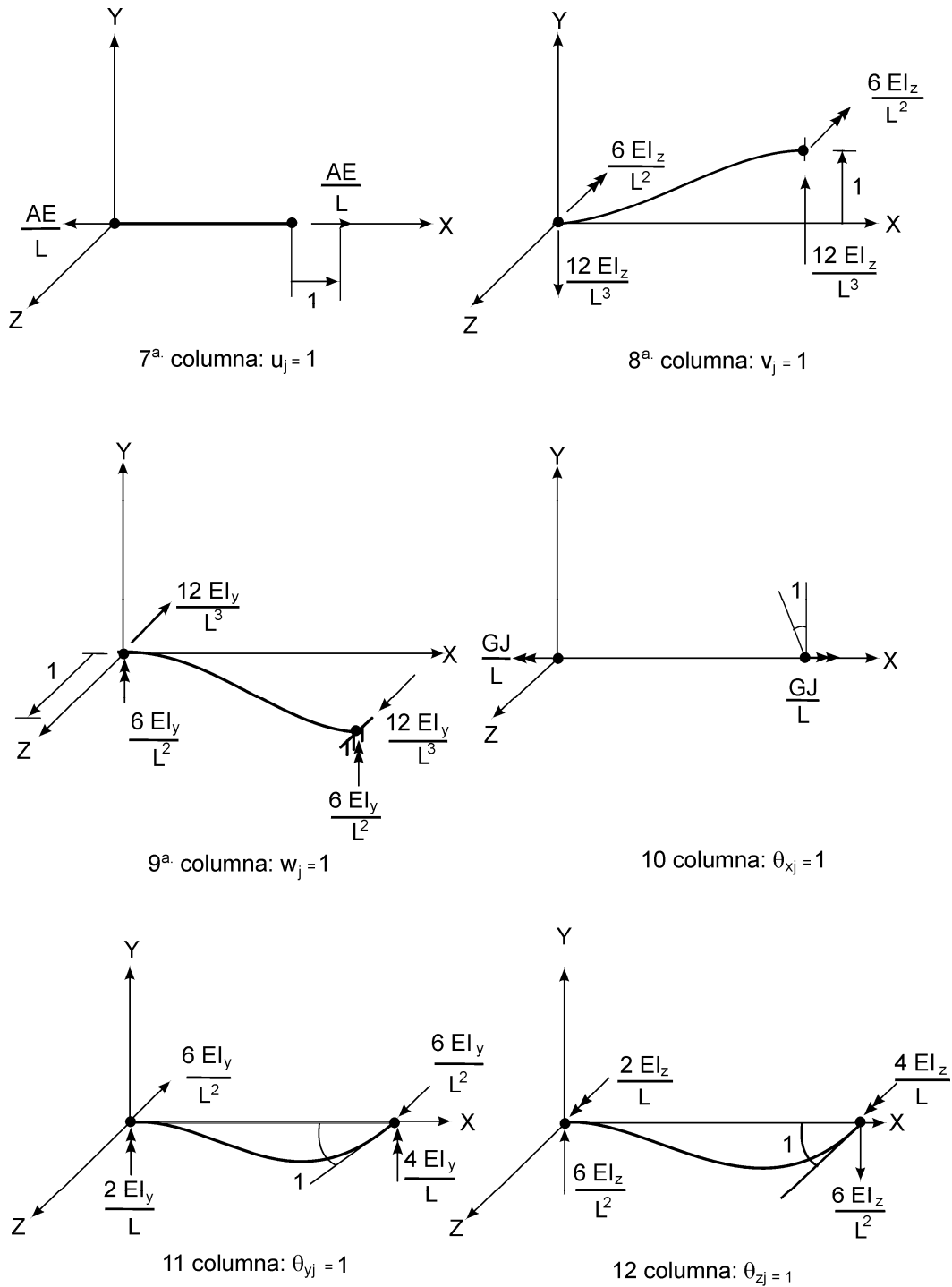


Figura 11.31 (Continuación) Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje X de la estructura, referida a coordenadas generales.

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^F \\ Y_i^F \\ Z_i^F \\ M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ M_{zi}^F \\ X_j^F \\ Y_j^F \\ Z_j^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ M_{zj}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (11.74)$$

Figura 11.32 Ecuación básica de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje X de la estructura, referida a coordenadas generales.

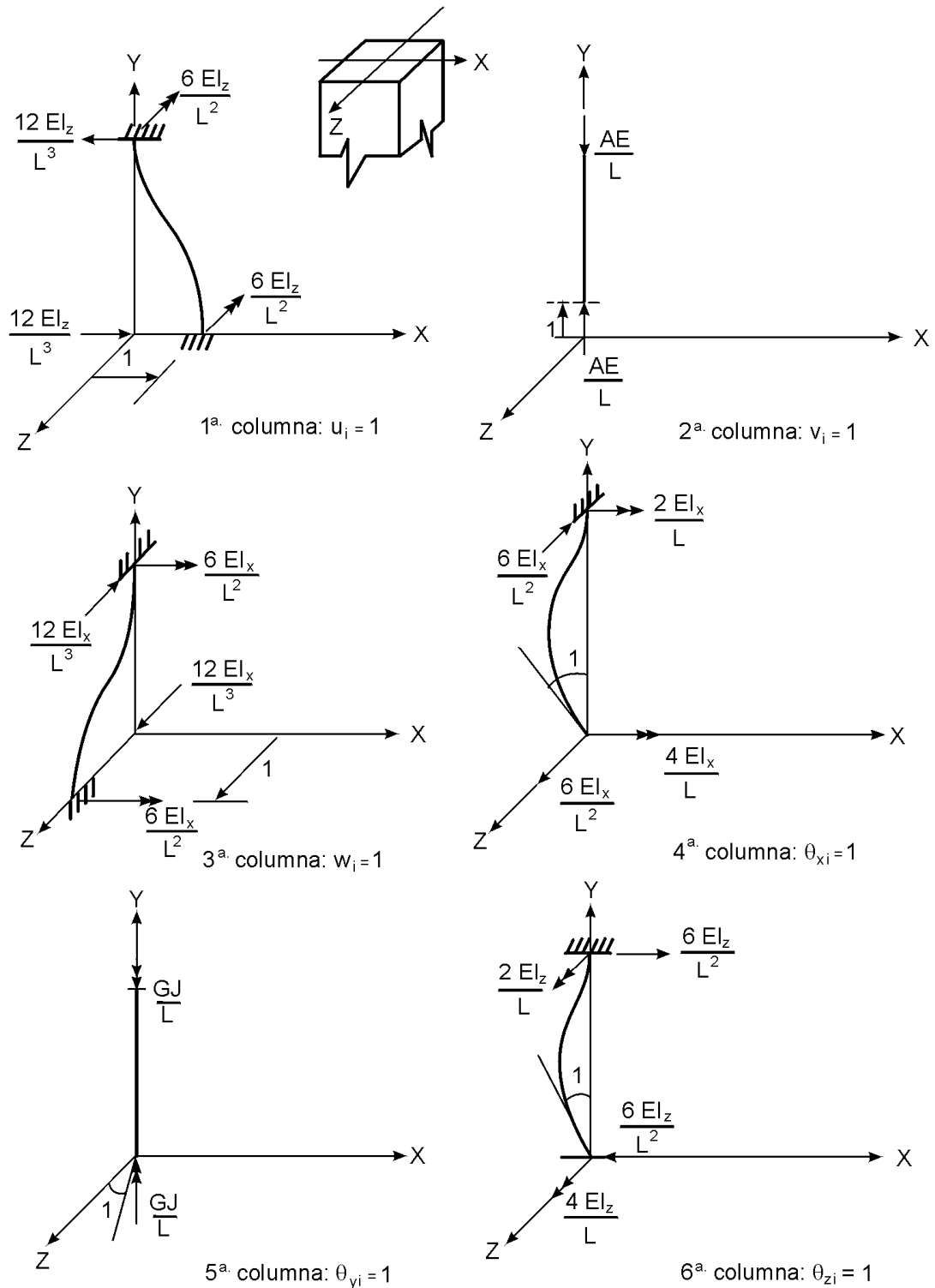


Figura 11.33 Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Y de la estructura, referida a coordenadas generales.

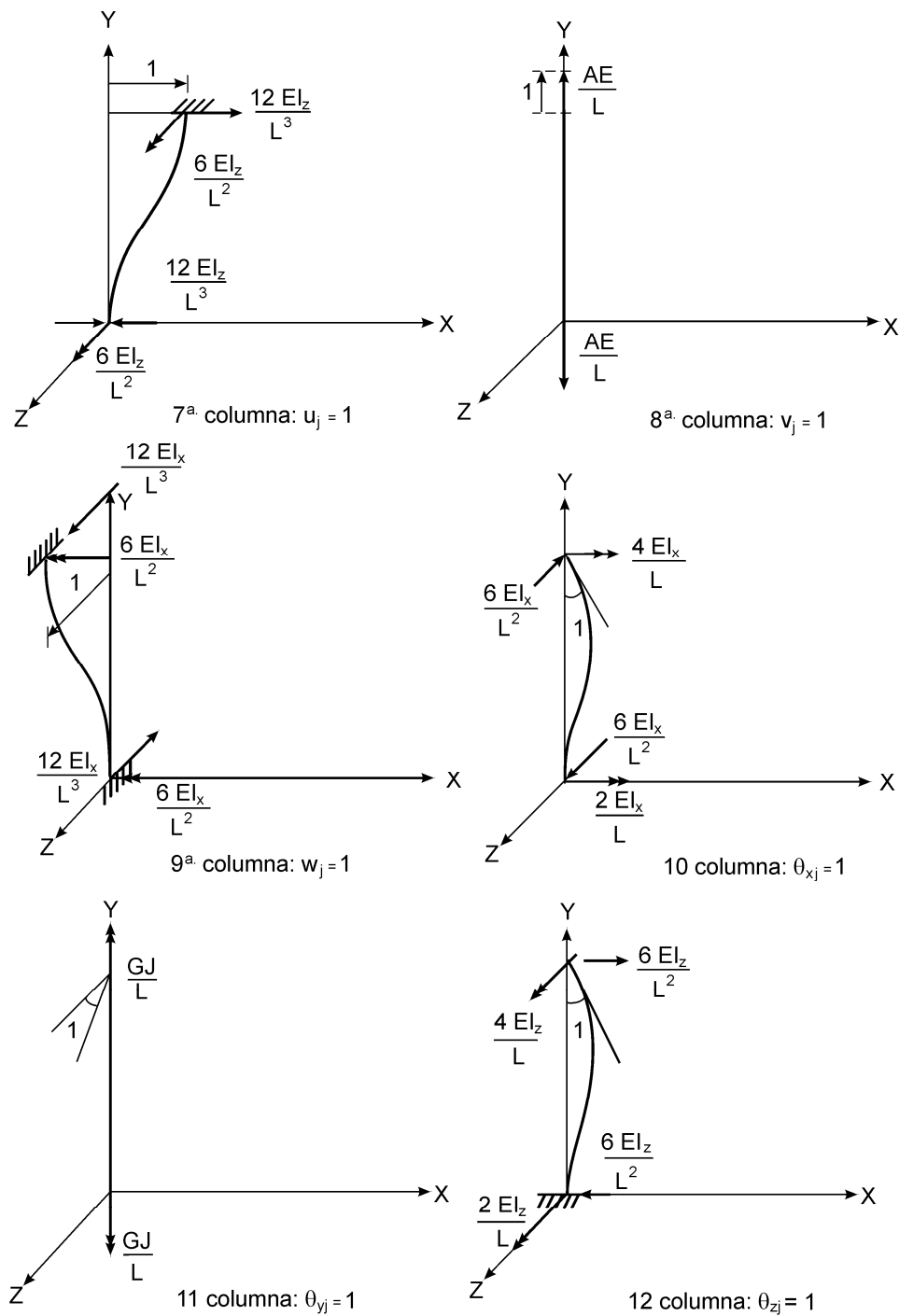


Figura 11.33 (Continuación) Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Y de la estructura, referida a coordenadas generales.

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^F \\ Y_i^F \\ Z_i^F \\ M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ M_{zi}^F \\ X_j^F \\ Y_j^F \\ Z_j^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ M_{zj}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix}$$

(11.75)

Figura 11.34 Ecuación básica de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Y de la estructura, referida a coordenadas generales.

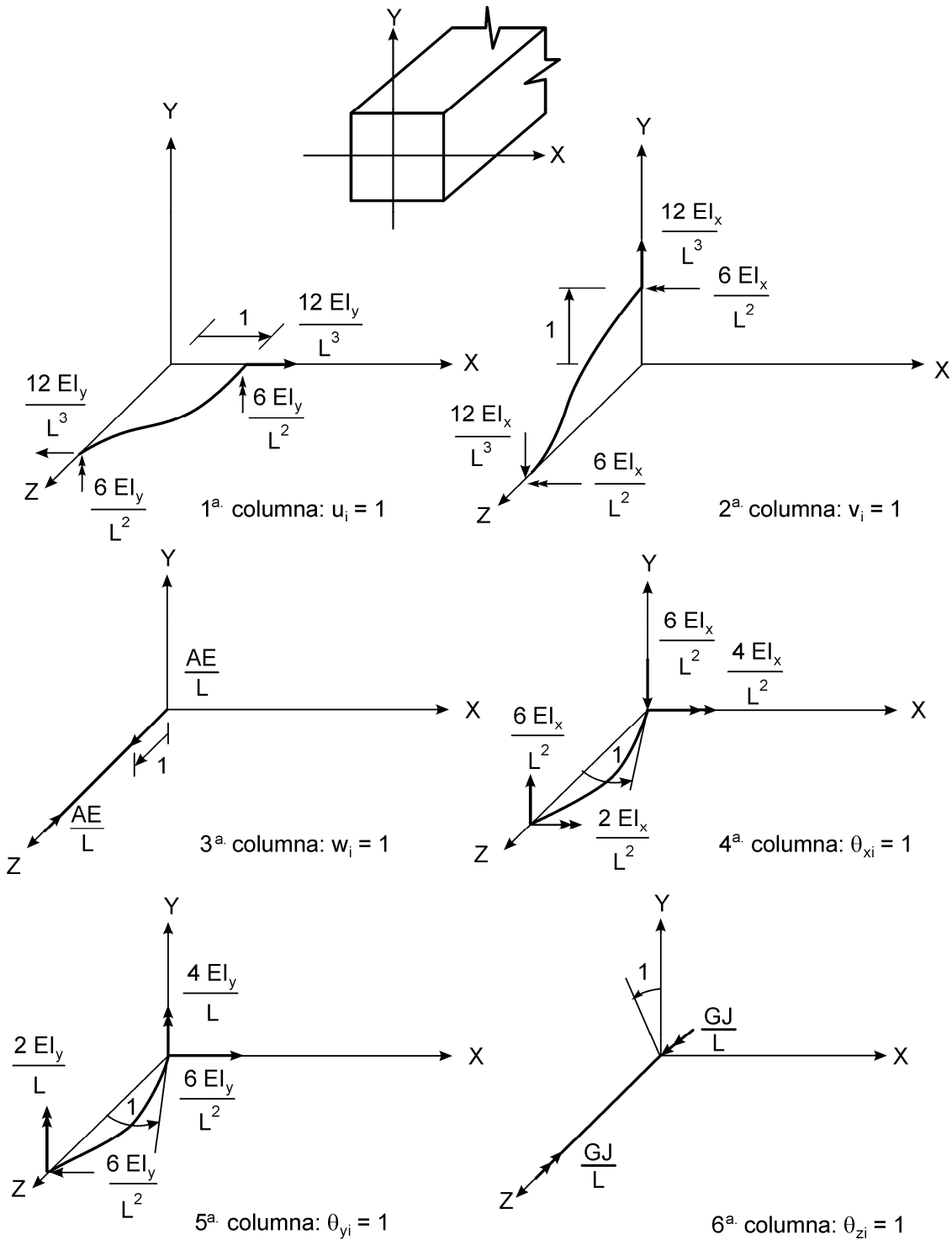


Figura 11.35 Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Z de la estructura, referida a coordenadas generales.

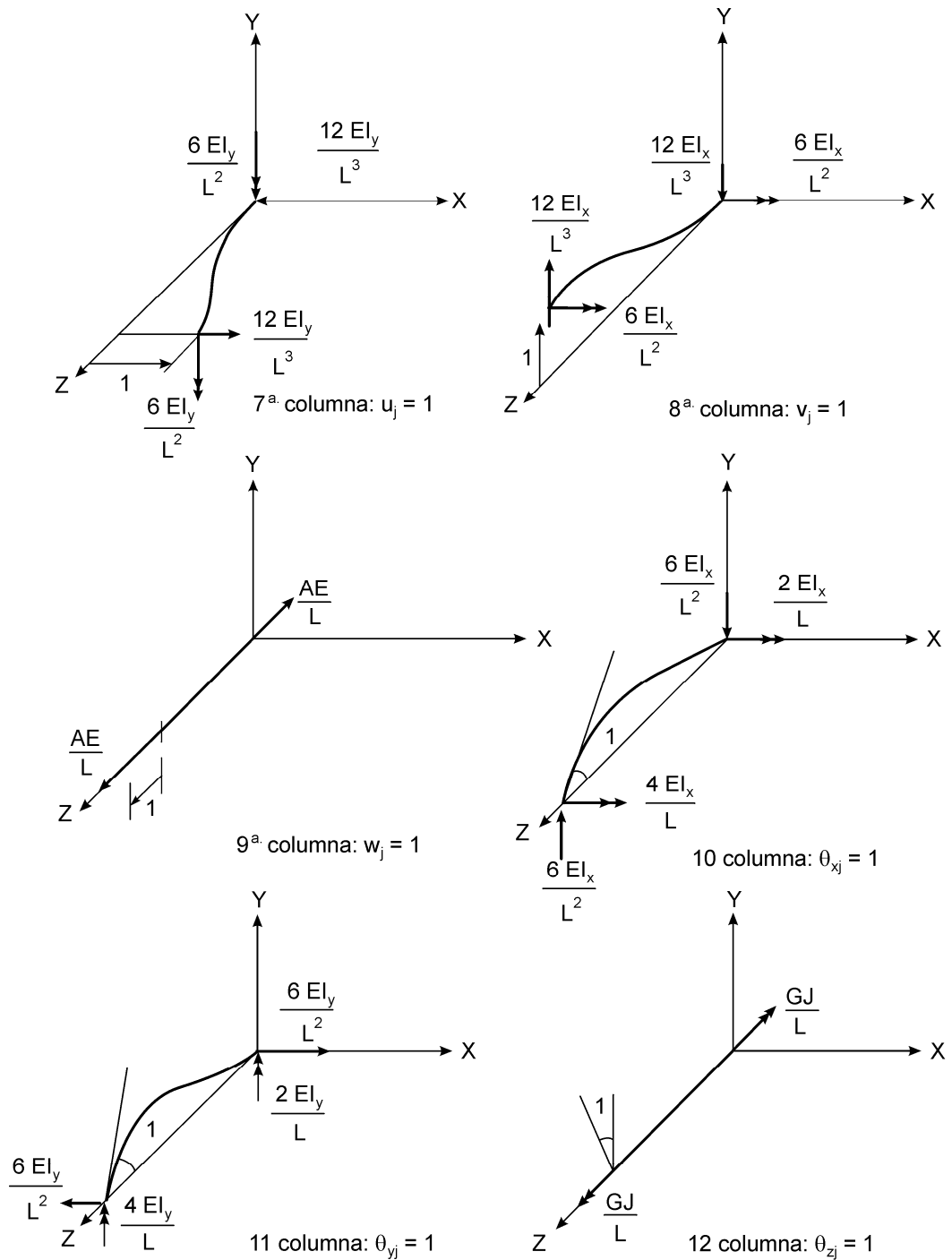


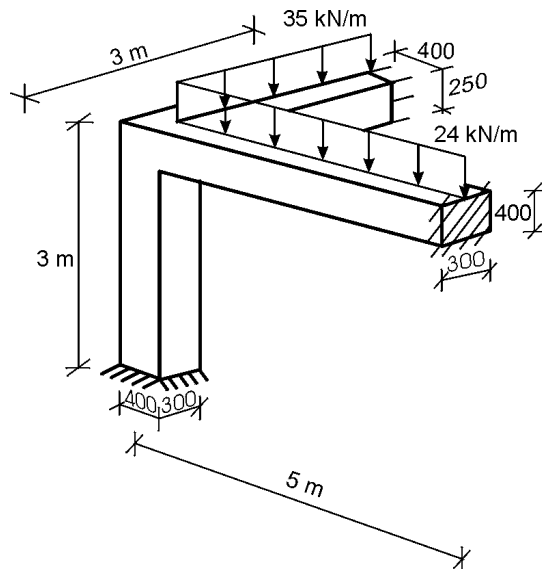
Figura 11.35 (Continuación) Deducción de los términos de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Z de la estructura, referida a coordenadas generales.

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^F \\ Y_i^F \\ Z_i^F \\ M_{xi}^F \\ M_{yi}^F \\ M_{zi}^F \\ X_j^F \\ Y_j^F \\ Z_j^F \\ M_{xj}^F \\ M_{yj}^F \\ M_{zj}^F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} \quad (11.76)$$

Figura 11.36 Ecuación básica de un elemento de pórtico espacial, orientado en la dirección del eje Z de la estructura, referida a coordenadas generales.

Ejemplo 11.30

Resuelva matricialmente el pórtico de la figura.

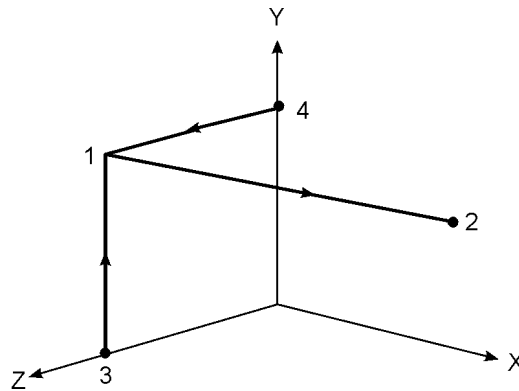


$$E = 22 \text{ kN/mm}^2$$

$$G = 8.5 \text{ N/mm}^2$$

Solución

Se adopta la siguiente numeración de nudos y orientación de elementos, que coincide con la de los miembros estudiados en el artículo anterior.



Al calcular las propiedades elásticas es necesario tener especial cuidado con la nomenclatura y recordar que los subíndices corresponden a los ejes generales.

Elemento 1-2:

$$A = 300 \times 400 = 120000 \text{ mm}^2$$

$$I_z = 300 \times (400)^3 / 12 = 1.600 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.600 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_y = 400 \times (300)^3 / 12 = 9.000 \times 10^8 \text{ mm}^4 = 9.000 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J = Cbt^3$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \times \frac{300}{400} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{300}{400} \right)^4 \right] = 0.1800$$

$$J = 0.1800 \times 400 \times (300)^3 = 1.944 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.944 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times 1.944 \times 10^{-3} = 16520 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_y = 22 \times 10^6 \times 9.000 \times 10^{-4} = 19800 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_z = 22 \times 10^6 \times 1.600 \times 10^{-3} = 35200 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Elemento 4-1:

$$A = 400 \times 250 = 100000 \text{ mm}^2$$

$$I_x = 400 \times (250)^3 / 12 = 5.208 \times 10^8 \text{ mm}^4 = 5.208 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_y = 250 \times (400)^3 / 12 = 1.333 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.333 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$C = \frac{1}{3} - 0.21 \times \frac{250}{400} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{250}{400} \right)^4 \right] = 0.20375$$

$$J = 0.20375 \times 400 \times (250)^3 = 1.2734 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1.2734 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$GJ = 8.5 \times 10^6 \times 1.2734 \times 10^{-3} = 10820 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_x = 22 \times 10^6 \times 5.208 \times 10^{-4} = 11460 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_y = 220 \times 10^5 \times 1.600 \times 10^{-3} = 29330 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Elemento 3-1:

Por analogía con el elemento 1-2:

$$A = 120000 \text{ mm}^2$$

$$GJ = 16520 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_x = 19800 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_z = 35200 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

De tal manera que el cuadro auxiliar de propiedades básicas queda así:

Elemento	AE/L	GJ/L	2EI _x /L	4EI _x /L	6EI _x /L ²	12EI _x /L ³	2EI _y /L
1 – 2	528000	3300					7920
4 – 1	733330	3610	7640	15280	7640	5090	19550
3 – 1	880000	5510	13200	26400	13200	8800	

Elemento	4EI _y /L	6EI _y /L ²	12EI _y /L ³	2EI _z /L	4EI _z /L	6EI _z /L ²	12EI _z /L ³
1 – 2	15840	4750	1900	14080	28160	8450	3380
4 – 1	39110	19550	13040				
3 – 1				23470	46930	23470	15640

Las fuerzas de empotramiento son:

$$M_{z12}^F = -M_{z21}^F = 24 \times 25 / 12 = 50.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$F_{12}^F = F_{21}^F = 24 \times 5 / 2 = 60.00 \text{ kN}$$

$$M_{x41}^F = -M_{z14}^F = -35 \times 9 / 12 = -26.25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_{41}^F = Y_{14}^F = 35 \times 3 / 2 = 52.50 \text{ kN}$$

Y al utilizar las ecuaciones (11.74), (11.75) y (11.76) las expresiones individuales quedan como se muestra en las páginas siguientes:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \\ M_{x12} \\ M_{y12} \\ M_{z12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \\ M_{z21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 60.00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50.00 \\ 0 \\ 60.00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \\ 528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3380 & 0 & 0 & 0 & 8450 \\ 0 & 0 & 1900 & 0 & -4750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4750 & 0 & 15840 & 0 \\ 0 & 8450 & 0 & 0 & 0 & 2816 \\ -528000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3380 & 0 & 0 & 0 & -8450 \\ 0 & 0 & -1900 & 0 & 4750 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4750 & 0 & 7920 & 0 \\ 0 & 8450 & 0 & 0 & 0 & 14080 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ w_2 = 0 \\ \theta_{x2} = 0 \\ \theta_{y2} = 0 \\ \theta_{z2} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ Z_{41} \\ M_{x41} \\ M_{y41} \\ M_{z41} \\ X_{14} \\ Y_{14} \\ Z_{14} \\ M_{x14} \\ M_{y14} \\ M_{z14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 52.50 \\ 0 \\ -26.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 52.50 \\ 0 \\ 26.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -13040 & 0 & 0 & 0 & 19550 & 0 \\ 0 & -5090 & 0 & -7640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -733330 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7640 & 0 & 7640 & 0 & 0 \\ -19550 & 0 & 0 & 0 & 19550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3610 \\ 13040 & 0 & 0 & 0 & -19550 & 0 \\ 0 & 5090 & 0 & 7640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 733330 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7640 & 0 & 15280 & 0 & 0 \\ -19550 & 0 & 0 & 0 & 39110 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3610 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \\ w_4 = 0 \\ \theta_{x4} = 0 \\ \theta_{y4} = 0 \\ \theta_{z4} = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \\ M_{x31} \\ M_{y31} \\ M_{z31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \\ Z_{13} \\ M_{x13} \\ M_{y13} \\ M_{z13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15640 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 23470 \\ 15640 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 23470 \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23470 \\ -880000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8800 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13200 & 13200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5510 & 0 \\ 23470 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23470 \\ 15640 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23470 \\ 880000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8800 & -13200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13200 & 26400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5510 & 0 \\ 23470 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46930 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ w_3 = 0 \\ \theta_{x3} = 0 \\ \theta_{y3} = 0 \\ \theta_{z3} = 0 \\ u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix}$$

Al ensamblar los términos correspondientes al nudo libre, resulta:

$$\begin{bmatrix} X_1=0 \\ Y_1=0 \\ Z_1=0 \\ M_{x1}=0 \\ M_{y1}=0 \\ M_{z1}=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 112.50 \\ 0 \\ 26.25 \\ 0 \\ 50.00 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} \\ 556680 & 0 & 0 & 0 & -19550 & 23470 \\ 0 & 888470 & 0 & 7640 & 0 & 8450 \\ 0 & 0 & 744030 & -13200 & -4750 & 0 \\ 0 & 764 & -13200 & 44980 & 0 & 0 \\ -19550 & 0 & -4750 & 0 & 60460 & 0 \\ 23470 & 8450 & 0 & 0 & 0 & 78700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix}$$

Y resolviendo este sistema de ecuaciones:

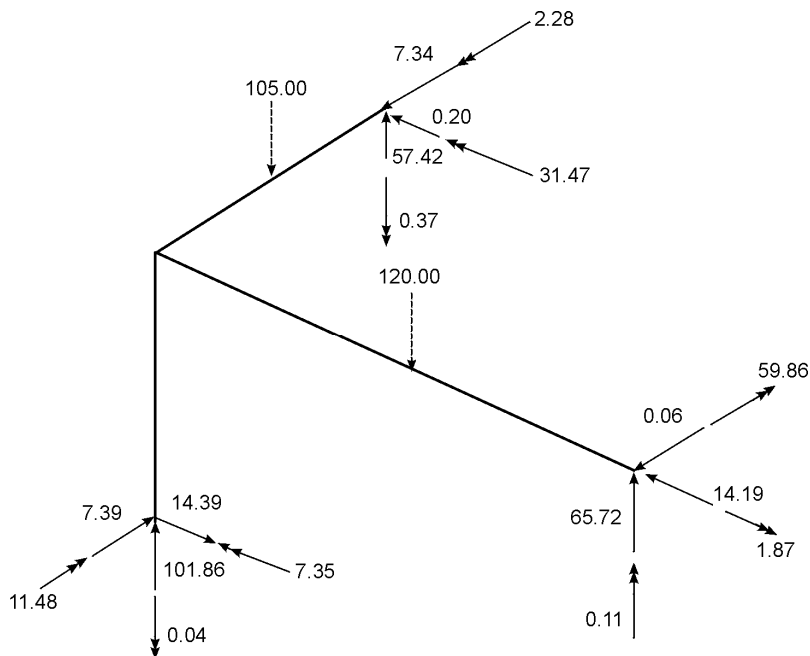
$$\begin{aligned} u_1 &= 2.688 \times 10^{-5} \text{ m} \rightarrow \\ v_1 &= -1.157 \times 10^{-4} \text{ m} \downarrow \\ w_1 &= -1.001 \times 10^{-5} \text{ m} \nearrow \\ \theta_{x1} &= -5.669 \times 10^{-4} \text{ rad} \leftarrow \\ \theta_{y1} &= 7.905 \times 10^{-5} \text{ rad} \uparrow \\ \theta_{z1} &= -6.309 \times 10^{-4} \text{ rad} \nearrow \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones originales, se obtiene:

$$\begin{aligned} X_{12} &= 14.19 \text{ kN} & X_{21} &= -14.19 \text{ kN} \\ Y_{12} &= 54.28 \text{ kN} & Y_{21} &= 65.72 \text{ kN} \\ Z_{12} &= -0.06 \text{ kN} & Z_{21} &= 0.06 \text{ kN} \\ M_{x12} &= -1.87 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{x21} &= 1.87 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{y12} &= 0.17 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{y21} &= 0.11 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{z12} &= 31.26 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{z21} &= -59.86 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ \\ X_{41} &= -0.20 \text{ kN} & X_{14} &= 0.20 \text{ kN} \\ Y_{41} &= 57.42 \text{ kN} & Y_{13} &= 47.58 \text{ kN} \\ Z_{41} &= 7.34 \text{ kN} & Z_{14} &= -7.34 \text{ kN} \\ M_{x41} &= -31.47 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{x14} &= 16.70 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{y41} &= -0.37 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{y14} &= -0.22 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ M_{z41} &= 2.28 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{z14} &= -2.28 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 X_{31} = 14.39 \text{ kN} & X_{13} = -14.39 \text{ kN} \\
 Y_{31} = 101.86 \text{ kN} & Y_{13} = -101.86 \text{ kN} \\
 Z_{31} = -7.39 \text{ kN} & Z_{13} = 7.39 \text{ kN} \\
 M_{x31} = -7.35 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{x13} = -14.83 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{y31} = -0.04 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{y13} = 0.04 \text{ kN}\cdot\text{m} \\
 M_{z31} = -14.18 \text{ kN}\cdot\text{m} & M_{z13} = -28.98 \text{ kN}\cdot\text{m}
 \end{array}$$

Verificación del equilibrio general:



$$\sum F_x = 14.39 - 0.20 - 14.19 = 0.00 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 101.86 + 65.72 + 57.42 - 105.00 - 120.00 = 0.00 \text{ kN}$$

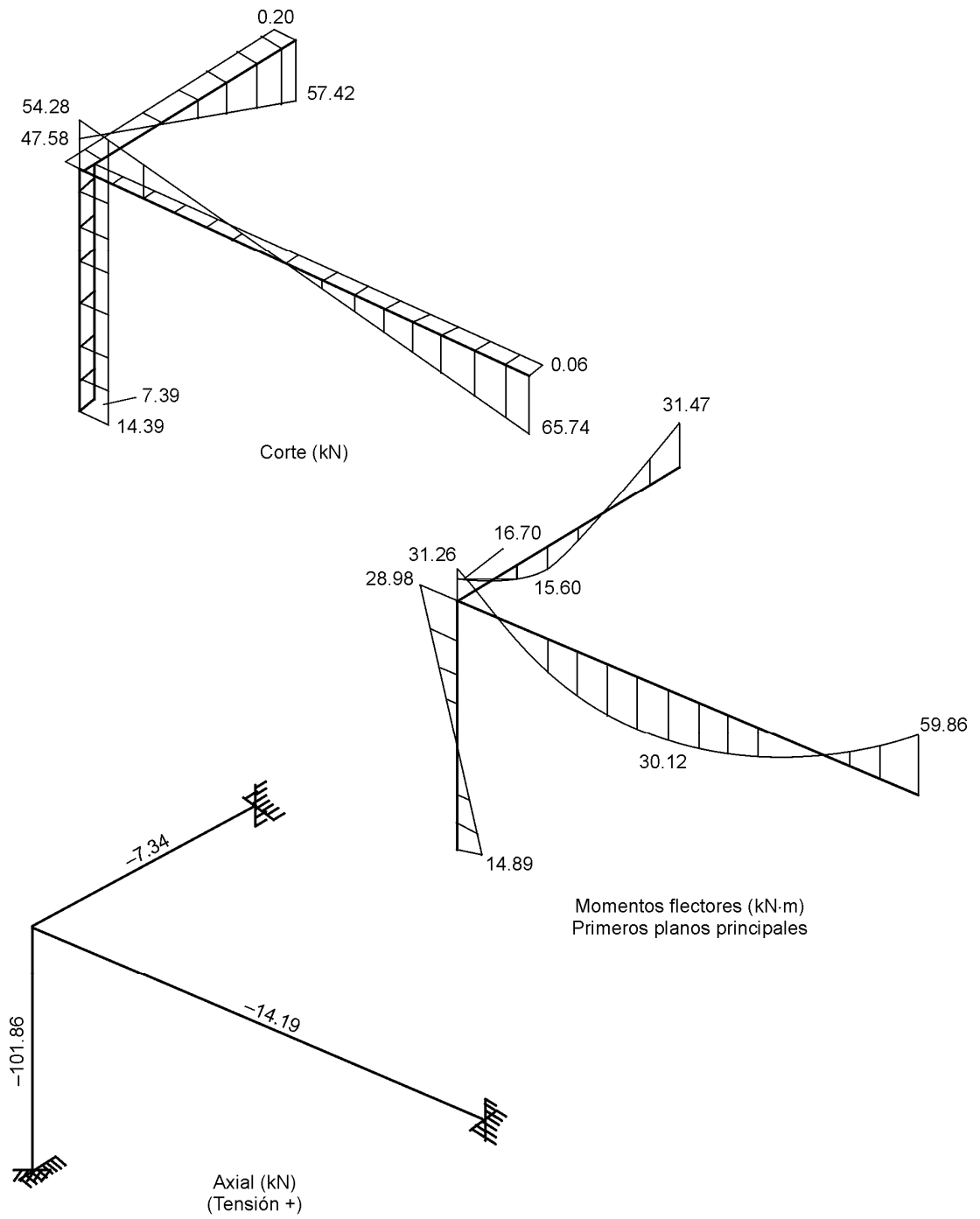
$$\sum F_z = 7.34 + 0.06 - 7.34 = 0.01 \text{ kN}$$

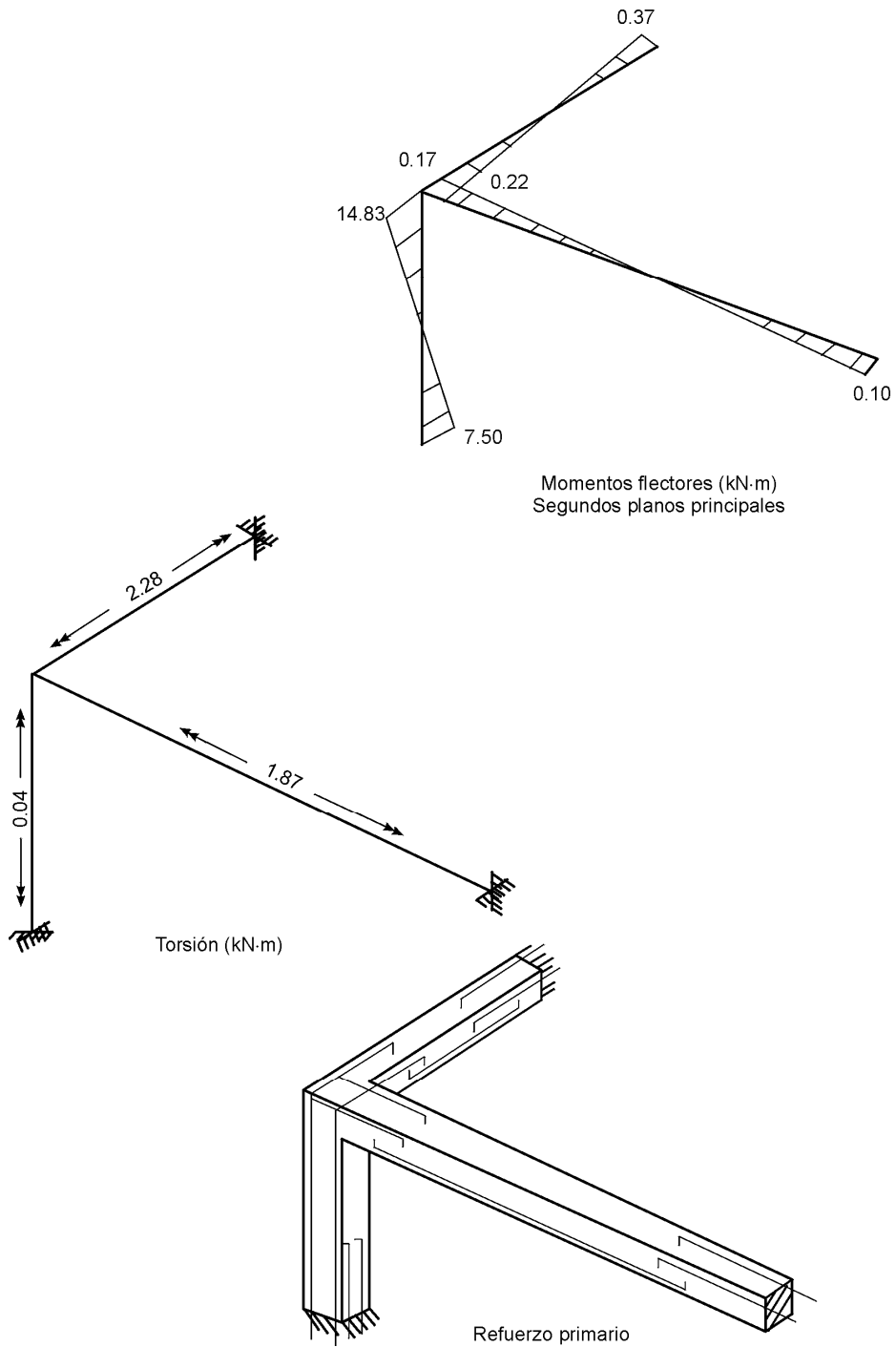
$$(\sum M_x)_1 = 1.87 - 31.47 - 7.35 - 105 \times 1.5 + 57.42 \times 3 + 7.39 \times 3 = -0.02 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

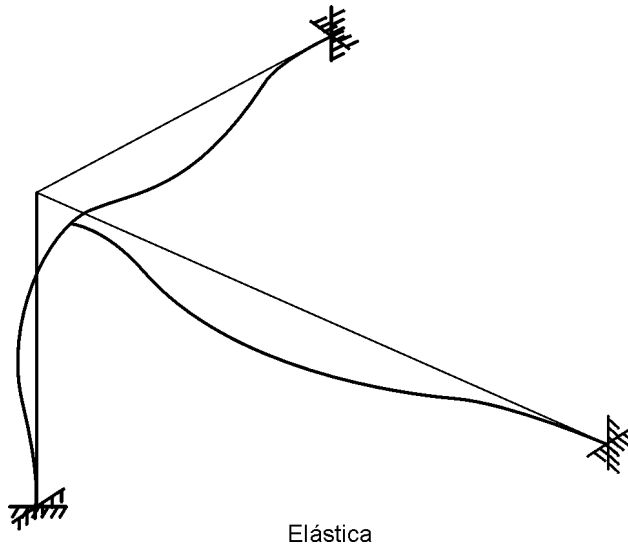
$$(\sum M_y)_1 = 0.11 - 0.37 - 0.04 - 0.06 \times 5 + 0.20 \times 3 = 0.00 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$(\sum M_z)_1 = 2.28 - 59.86 - 14.18 - 120 \times 2.5 + 65.72 \times 5 + 14.39 \times 3 = 0.01 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Finalmente, se dibujan todos los diagramas:







11.27 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE PÓRTICO, ARBITRARIAMENTE ORIENTADO EN EL ESPACIO, REFERIDA A COORDENADAS GENERALES

En la figura 11.37 se representa un elemento de pórtico arbitrariamente orientado en el espacio.

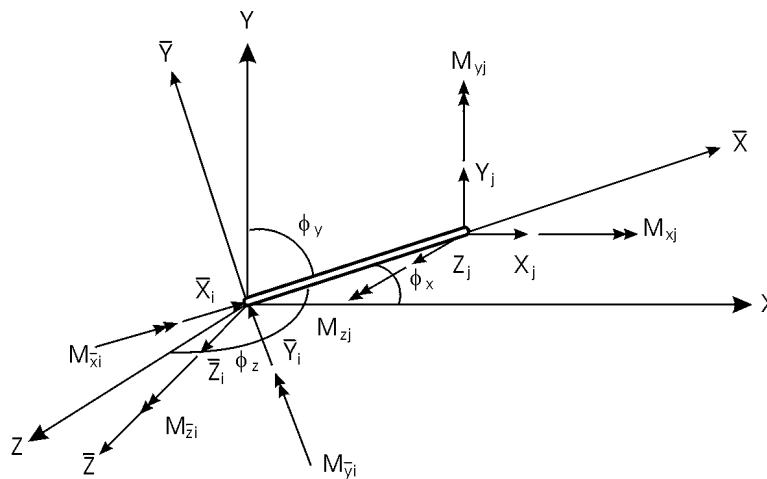


Figura 11.37 Elemento de pórtico, arbitrariamente orientado en el espacio.

Al comparar esta figura con la 11.19, se ve que la única diferencia es que ahora aparecen en cada uno vectores adicionales con doble flecha, correspondientes a los momentos y giros respectivos. En consecuencia, con base en la ecuación (11.38) se puede deducir que

la matriz de transformación de coordenadas locales a coordenadas generales de tal elemento es:

$$[T] = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_0 \end{bmatrix} \quad (11.77)$$

en donde:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (11.78)$$

con los significados vistos anteriormente [ecuación (11.37)] y:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.79)$$

Las ecuaciones (11.76) y (11.77) se pueden reemplazar entonces en la ecuación (11.28) para obtener la matriz de rigidez del elemento de pórtico espacial referida a coordenadas generales:

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T] \quad (11.28)$$

Este triple producto resulta muy complejo para desarrollarlo literalmente en el presente texto. En su lugar se acostumbra efectuarlo con valores numéricos en los problemas específicos.

11.28 PROGRAMACIÓN DE LOS MÉTODOS MATRICIALES PARA TODO TIPO DE ESTRUCTURAS RETICULARES CON MIEMBROS PRISMÁTICOS

La solución manual de una estructura grande por métodos matriciales no es fácil, como puede apreciarse en los ejemplos desarrollados en este capítulo. Por otra parte, el proceso sistemático de dichos métodos, idéntico para todo tipo de estructuras, los hace ideales para su utilización con computadora digital.

Gere y Weaver, en la primera edición de la referencia 11.13, presentaron diagramas de flujo para la solución de estructuras reticulares con miembros prismáticos. En la segunda

y tercera ediciones de la referencia citada, los diagramas de flujo fueron modificados para aprovechar las ventajas de la simetría y del carácter de banda de la matriz de rigidez.

El autor desarrolló, con base en los primeros diagramas, los programas en BASIC que constituyen los apéndices H e I de las ediciones anteriores de este libro. Posteriormente elaboró el sistema ANALEST (ANÁLisis de ESTRUCTuras), formado por 42 programas que permiten analizar los siguientes tipos de estructuras reticulares, compuestas por elementos prismáticos:

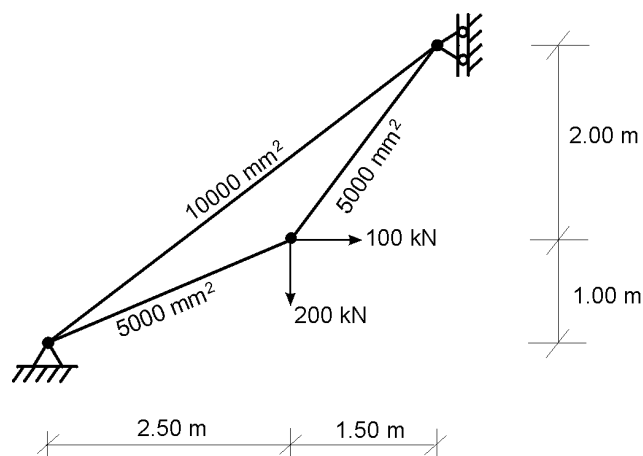
1. Vigas continuas
2. Armaduras planas
3. Armaduras en el espacio
4. Pórticos planos
5. Pórticos en el espacio
6. Parrillas planas

El lector interesado podrá encontrar una descripción de dichos programas y la codificación básica en el libro *Microcomputadores en ingeniería estructural* (referencia 11.15). En dicha obra se incluye un disquete con todos ellos.

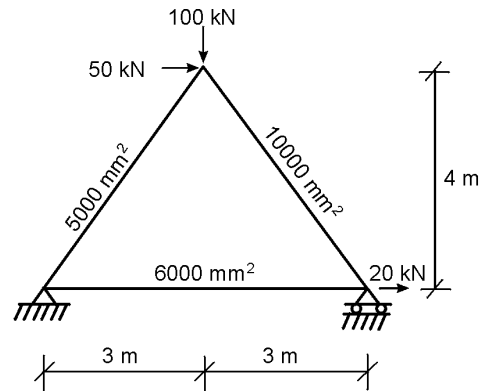
Para esta edición el autor contó con la colaboración del ingeniero Carlos Fernando Ariza Moreno, quien modificó los programas para que puedan correr en ambiente *Windows*. Esta versión se incluye en el disquete que se adjunta como obsequio para quienes adquieran el libro.

EJERCICIOS

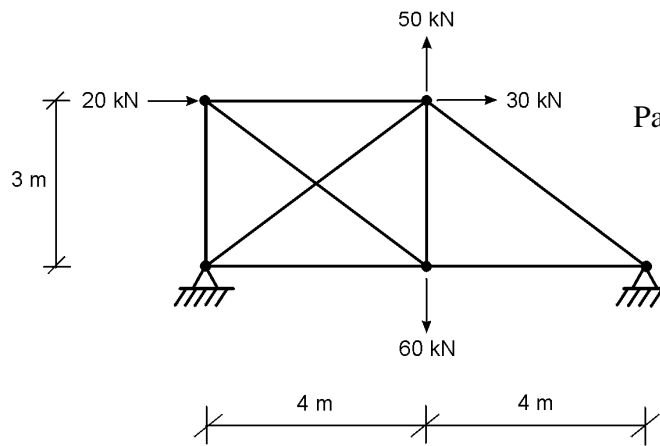
11.1 Calcule los desplazamientos de los nudos, las reacciones y las fuerzas internas en todas las barras de las cerchas siguientes, por el método que utiliza la matriz de rigidez. El material es acero estructural con $E = 200 \text{ kN/mm}^2$.



(a)



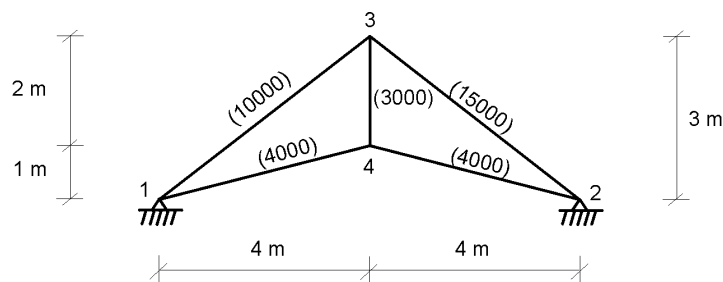
(b)



Para todas las barras:
 $A = 10000 \text{ mm}^2$

(c)

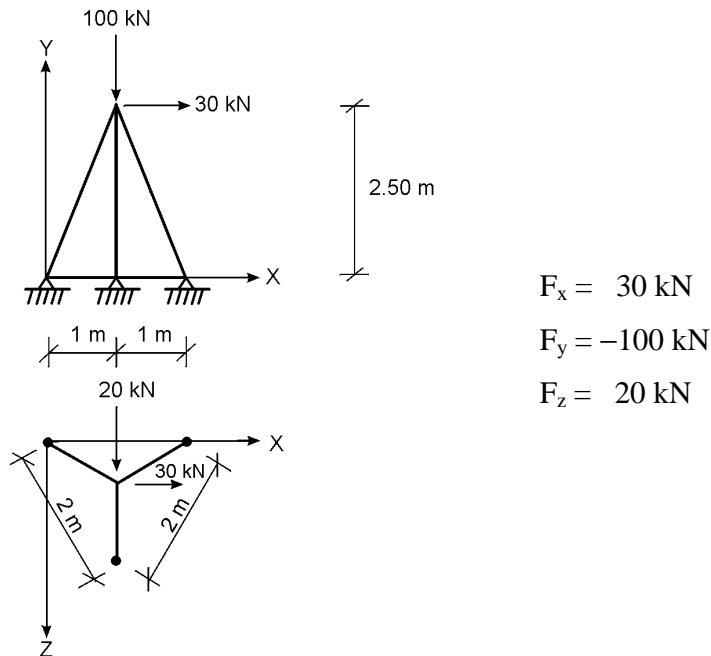
11.2 Calcule los esfuerzos producidos en la armadura del ejemplo 11.5 por un incremento de 40°C en la temperatura del cordón superior y un error de fabricación del montante, por defecto, de 3 mm. Las áreas, en mm^2 , aparecen entre paréntesis. El material es acero con $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ y $\alpha = 0.000012 / ^\circ\text{C}^{-1}$.



Barras 1-3 y 2-3: $\Delta T = 40^\circ\text{C}$

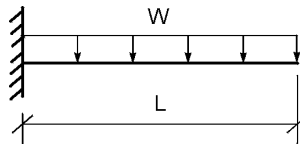
3-4: $\Delta L = -3 \text{ mm}$

11.3 Resuelva completamente el trípode mostrado, por el método matricial de los desplazamientos. Todas las barras tienen igual longitud y $AE = 1000000 \text{ kN}$.

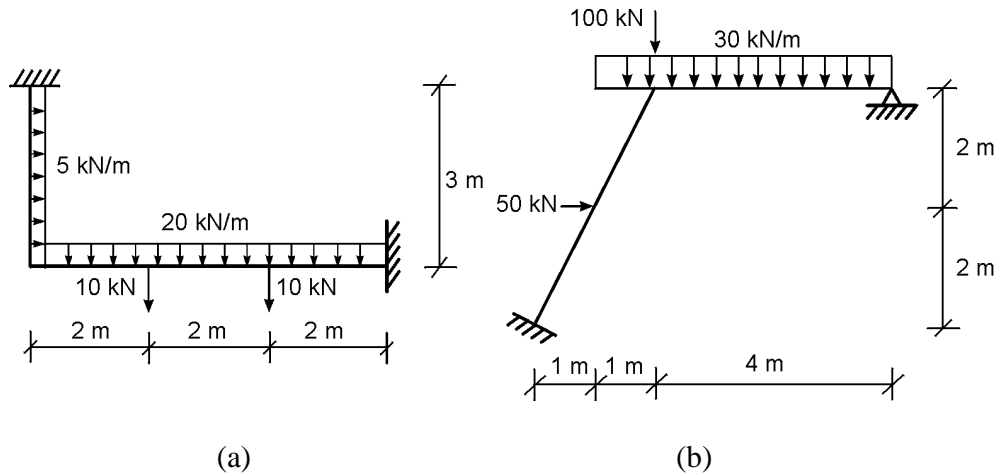


11.4 Analice por métodos matriciales las vigas de los ejemplos 4.7, 4.12a y 5.3.

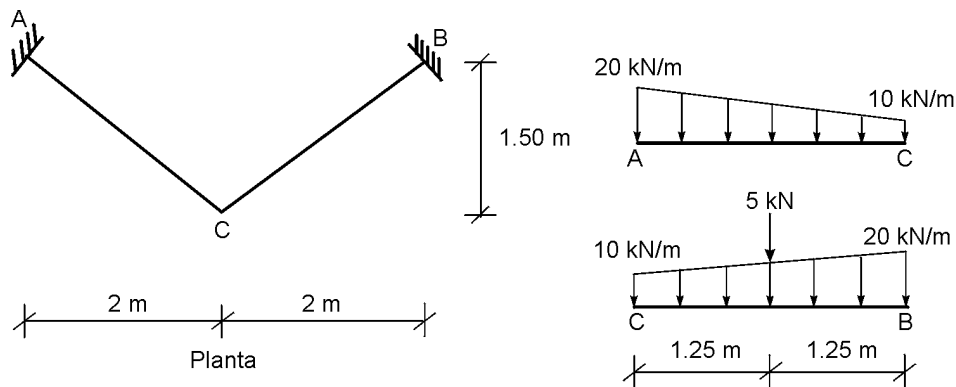
11.5 Encuentre matricialmente el giro y desplazamientos del extremo de una viga en voladizo sometida a una carga repartida de modo uniforme. Compare esta solución con la de cualquiera de los métodos vistos anteriormente.



11.6 Resuelva completamente los siguientes pórticos por el método matricial de los desplazamientos. Dibuje todos los diagramas. No olvide verificar el equilibrio general ni calcular los momentos máximos. Suponga para todos los elementos $b = 300 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.



11.7 Un balcón triangular está soportado por dos vigas de borde de 300 mm de ancho y 350 mm de altura, sometidas a las cargas que se indican en la figura. Analice matricialmente la estructura resultante. Suponga $E = 20 \text{ kN/mm}^2$ y $G = 8.5 \text{ kN/mm}^2$.



11.8 Una placa de $6.0 \text{ m} \times 4.5 \text{ m}$ está sometida a una carga de 25 kN/m^2 , que incluye su peso propio. La soportan cuatro vigas de borde de $300 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ ($b \times h$), apoyadas en cuatro columnas de las mismas dimensiones, localizadas en las esquinas de la placa, con su mayor dimensión en el sentido de la luz de 6 m. Analice matricialmente la estructura de soporte, suponiendo que las columnas están empotradas en la base. Considere que los módulos E y G valen 19 kN/mm^2 y 8.5 kN/mm^2 , respectivamente, y aproveche la simetría. La altura del pórtico es 3.00 m.

REFERENCIAS

- 11.1 Levy, S.- *Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 14, No. 10, octubre de 1947, pp. 547-560.
- 11.2 Lang, A.L. y Bisplinghoff, R.L.- *Some Results of Sweptback Wing Structural Studies*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 18, No. 11, noviembre de 1951, pp. 705-717.
- 11.3 Langefors, B.- *Analysis of Elastic Structures by Matrix Transformation with Special Regard to Semimonocoque Structures*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 19, No. 7, julio de 1952, pp. 451-458.
- 11.4 Wehle, L.B. y Lansing, W.A.- *Method for Reducing the Analysis of Complex Redundant Structures to a Routine Procedure*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 19, No. 10, octubre de 1952, pp. 677-684.
- 11.5 Rand, T.- *An Approximate Method for the Calculation of Stresses in Sweptback Wings*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 18, No. 1, enero de 1951, pp. 61-63.
- 11.6 Levy, S.- *Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 7, julio de 1953, pp. 449-454.
- 11.7 Schuerch, H.U.- *Delta Wing Design Analysis*, trabajo presentado en la reunión aeronáutica nacional de la SAE, Los Ángeles, septiembre 29 a octubre 3 de 1953, preimpreso No. 141.
- 11.8 Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. y Topp, L.J.- *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, J. Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, septiembre de 1956, pp. 805-824.
- 11.9 Martin, H.C.- *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- 11.10 Beaufait, F.W., Rowan Jr., W.H., Hoadley, P.G. y Hackett, R.M.- *Computer Methods of Structural Analysis*, Prentice-Hall, 1970.
- 11.11 Vanderbilt, M.D.- *Matrix Structural Analysis*, Quantum Publishers Inc., 1974.
- 11.12 McGuire, W. y Gallagher, R.H.- *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
- 11.13 Weaver Jr., W y Gere, J.M.- *Matrix Analysis of Framed Structures*, 3rd ed., D. Van Nostrand Company, 1990.
- 11.14 Meyers, V.J.- *Matrix Analysis of Structures*, Harper & Row, 1983.
- 11.15 Uribe, J.- *Microcomputadores en ingeniería estructural*, Universidad Nacional de Colombia y Ecoe Ediciones, 1995.

11.12 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE CERCHA ESPACIAL

Las cerchas espaciales son difíciles de analizar por los métodos tradicionales, especialmente en lo referente a su estabilidad. En el método matricial de los desplazamientos, el no poder invertir la matriz $[K_{nn}]$ por tener su determinante igual a cero, es signo automático de inestabilidad.

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en el numeral 11.10 para las cerchas planas, se empieza por expandir la matriz de rigidez del elemento sometido a carga axial, pues ahora, al estar éste arbitrariamente orientado en el espacio, cada nudo tiene tres grados de libertad; en consecuencia, la matriz de rigidez total debe quedar de 6×6 .

Considerando el elemento de la figura 11.11, en el que se sigue utilizando la barra para designar los términos referidos al sistema de ejes locales, se tendrá:

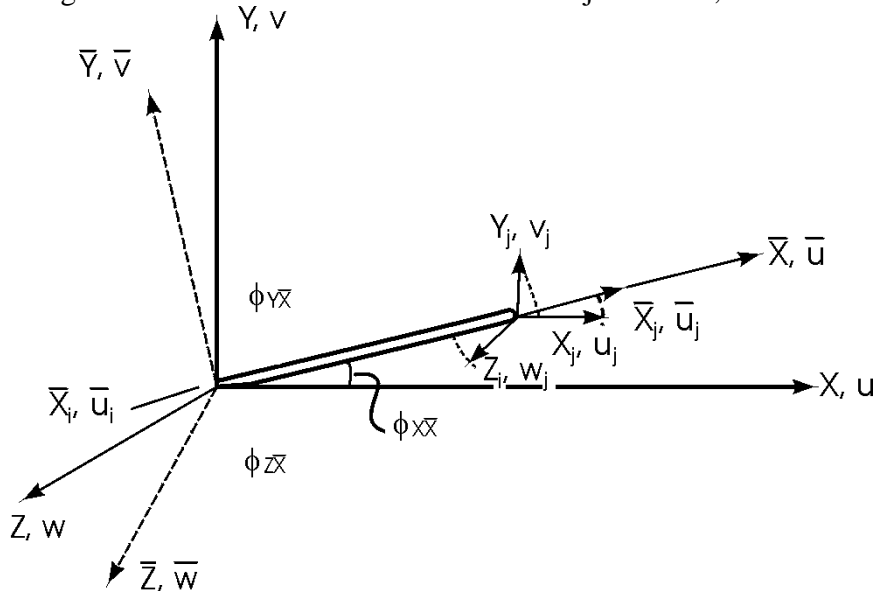


Figura 11.11 Barra prismática sometida a carga axial, arbitrariamente orientada en el espacio.

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

Los sistemas de coordenadas locales y generales están relacionados mediante ángulos que se denominarán como sigue (referencia 11.9):

$$\begin{aligned}
 \phi_{xx}^- &= \text{ángulo entre } X \text{ y } \bar{X} \\
 \phi_{xy}^- &= \text{ángulo entre } X \text{ y } \bar{Y} \\
 \phi_{zy}^- &= \text{ángulo entre } Z \text{ y } \bar{Y}
 \end{aligned}
 \tag{11.35}$$

Las fuerzas nodales resultan entonces relacionadas mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= X \cos \phi_{xx}^- + Y \cos \phi_{yx}^- + Z \cos \phi_{zx}^- \\
 \bar{Y} &= X \cos \phi_{xy}^- + Y \cos \phi_{yy}^- + Z \cos \phi_{zy}^- \\
 \bar{Z} &= X \cos \phi_{xz}^- + Y \cos \phi_{yz}^- + Z \cos \phi_{zz}^-
 \end{aligned}
 \tag{11.36}$$

Para simplificar la escritura se definen los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
 \lambda_x^- &= \cos \phi_{xx}^- & \lambda_y^- &= \cos \phi_{xy}^- & \lambda_z^- &= \cos \phi_{xz}^- \\
 \mu_x^- &= \cos \phi_{yx}^- & \mu_y^- &= \cos \phi_{yy}^- & \mu_z^- &= \cos \phi_{yz}^- \\
 \nu_x^- &= \cos \phi_{zx}^- & \nu_y^- &= \cos \phi_{zy}^- & \nu_z^- &= \cos \phi_{zz}^-
 \end{aligned}
 \tag{11.37}$$

Fácil de recordar, pues λ siempre se refiere a x, μ a y y ν a z, y el subíndice define el segundo eje. Con esta notación las ecuaciones (11.36) se pueden escribir para los dos nudos como sigue:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x^- & \mu_x^- & \nu_x^- & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y^- & \mu_y^- & \nu_y^- & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_z^- & \mu_z^- & \nu_z^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x^- & \mu_x^- & \nu_x^- \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y^- & \mu_y^- & \nu_y^- \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_z^- & \mu_z^- & \nu_z^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix}
 \tag{11.38}$$

o en forma simplificada:

$$[\bar{X}] = [T] [X]$$

Reemplazando ahora las ecuaciones (11.38) y (11.34) en la ecuación (11.28):

$$[K] = [T]^T [\bar{K}] [T]$$

se obtiene la matriz de rigidez del elemento de cercha espacial en coordenadas generales:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & u_j & v_j & w_j \\ \lambda_x^2 & & & & & \\ \lambda_x \mu_x & \mu_x^2 & & & & \\ \lambda_x \nu_x & \mu_x \nu_x & \nu_x^2 & & & \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \mu_x & -\lambda_x \nu_x & \lambda_x^2 & & \\ -\lambda_x \mu_x & -\mu_x^2 & -\mu_x \nu_x & \lambda_x \mu_x & \mu_x^2 & \\ -\lambda_x \nu_x & -\mu_x \nu_x & -\nu_x^2 & \lambda_x \nu_x & \mu_x \nu_x & \nu_x^2 \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA}$$

y observando que todos los subíndices corresponden al eje \bar{X} , se pueden eliminar, con lo cual la ecuación anterior queda:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & u_j & v_j & w_j \\ \lambda^2 & & & & & \\ \lambda\mu & \mu^2 & & & & \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & & & \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda^2 & & \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & \mu^2 & \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix} \quad \text{SIMÉTRICA} \quad (11.39)$$

donde se debe recordar que λ , μ y ν son los cosenos direccionales del eje \bar{X} , con respecto a los ejes X, Y y Z, respectivamente.

Una vez determinadas las matrices de rigidez $[K]_{ij}$ para cada elemento de la estructura mediante la ecuación (11.39), se procede a ensamblar la matriz de rigidez total y se continúa el proceso en la misma forma vista para las cerchas planas.

11.13 MATRIZ DE FUERZAS INTERNAS DE UN ELEMENTO DE CERCHA ESPACIAL

La matriz de transformación $[T]$ definida en la ecuación (11.23a) se puede utilizar con las ecuaciones (11.13) y (11.19) para obtener la matriz de fuerzas internas de un elemento, arbitrariamente orientado en el espacio, y sometido a carga axial.

Sin embargo, es mucho más fácil extender la ecuación (11.33), de manera que cubra el caso espacial, lo cual se logra por observación directa de sus términos ya que el $\sin \phi_x$ utilizado en ella, equivale al $\cos \phi_y$ empleado ahora.

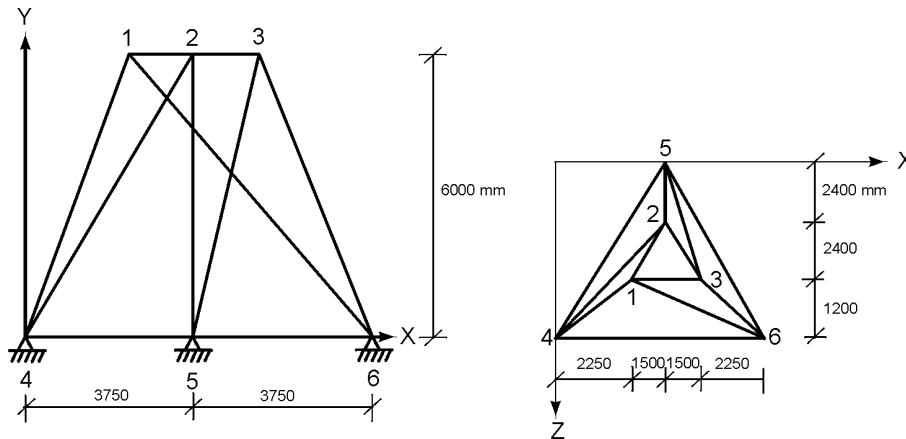
En consecuencia, la nueva matriz de fuerzas internas queda así:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} [\lambda \ \mu \ \nu]_{ij} \begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \\ w_j - w_i \end{bmatrix} \quad (11.40)$$

Su aplicación permite encontrar las fuerzas internas en todos los elementos de cualquier cercha espacial.

Ejemplo 11.4

Resuelva la estructura que se muestra a continuación (adaptado de la referencia 11.9).



Módulo de elasticidad:

$$E = 210 \text{ kN/mm}^2$$

Cuadro de áreas:

Barra	Área (mm ²)
1 - 2	2000
1 - 3	2000
1 - 4	4000
1 - 6	5000
2 - 3	2000
2 - 4	5000
2 - 5	4000
3 - 5	5000
3 - 6	4000
4 - 5	1000
4 - 6	1000
5 - 6	1000

Cargas aplicadas (kN):

Nudo	F_x	F_y	F_z
1	100.0	150.0	-120.0
2	50.0	-30.0	-100.0
3	-40.0	-20.0	-60.0

Coordenadas de los nudos (mm):

Nudo	X	Y	Z
1	2250	6000	4800
2	3750	6000	2400
3	5250	6000	4800
4	0	0	6000
5	3750	0	0
6	7500	0	6000

Solución

Con los datos anteriores se procede a elaborar los siguientes cuadros. Los miembros se han designado de manera que el primer número corresponde al nudo inicial, y el segundo al nudo final.

Miembro	Área mm ²	ΔX mm	ΔY mm	ΔZ mm	Longitud mm	λ	μ	ν
1 - 2	2000	1500	0	-2400	2830	.5300	0	-.8481
1 - 3	2000	3000	0	0	3000	1.0000	0	0
2 - 3	2000	1500	0	2400	2830	.5300	0	.8481
4 - 5	1000	3750	0	-6000	7075	.5300	0	-.8481
4 - 6	1000	7500	0	0	7500	1.0000	0	0
5 - 6	1000	3750	0	6000	7075	.5300	0	.8481
1 - 6	5000	5250	-6000	1200	8062	.6512	-.7442	.1488
2 - 4	5000	-3750	-6000	3600	7939	-.4724	-.7558	.4534
3 - 5	5000	-1500	-6000	-4800	7829	-.1916	-.7664	-.6131
1 - 4	4000	-2250	-6000	1200	6519	-.3551	-.9204	.1841
3 - 6	4000	2250	-6000	1200	6519	.3451	-.9204	.1841
2 - 5	4000	0	-6000	-2400	6462	0	-.9285	-.3714

Miembro	$\frac{AE}{L}$	$\frac{AE}{L}\lambda^2$	$\frac{AE}{L}\mu^2$	$\frac{AE}{L}\nu^2$	$\frac{AE}{L}\lambda\mu$	$\frac{AE}{L}\lambda\nu$	$\frac{AE}{L}\mu\nu$
1 – 2	148.41	41.69	0	106.74	0	-66.71	0
1 – 3	140.00	140.00	0	0	0	0	0
2 – 3	148.41	41.69	0	106.74	0	66.71	0
4 – 5	29.68	8.34	0	21.35	0	-13.34	0
4 – 6	28.00	28.00	0	0	0	0	0
5 – 6	29.68	8.34	0	21.35	0	13.34	0
1 – 6	130.24	55.23	72.14	2.88	-63.12	12.62	-14.43
2 – 4	132.26	29.51	75.54	27.20	47.21	-28.33	-45.33
3 – 5	130.41	4.92	78.77	50.41	19.69	15.75	63.02
1 – 4	128.85	15.35	109.15	4.37	40.93	-8.19	-21.83
3 – 6	128.85	15.35	109.15	4.37	-40.93	8.19	-21.83
2 – 5	129.99	0	112.06	17.93	0	0	44.82

Con los valores de los cuadros se evalúan ahora las matrices de rigidez de todos los miembros, referidas a coordenadas generales, cuidando de calcular únicamente los términos de las columnas indispensables, es decir, las que corresponden a los nudos libres.

Así, se obtiene para el miembro 1 – 2:

$$[K_{12}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 41.69 & 0 & -66.71 & -41.69 & 0 & 66.71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -66.71 & 0 & 106.74 & 66.71 & 0 & -106.74 \\ -41.69 & 0 & 66.71 & 41.69 & 0 & -66.71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 66.71 & 0 & -106.74 & -66.71 & 0 & 106.74 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

y similarmente para los otros elementos:

$$[K_{13}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_3 & v_3 & w_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 140.00 & 0 & 0 & -140.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -140.00 & 0 & 0 & 140.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[\mathbf{K}_{23}] = \begin{array}{ccccc} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 41.69 & 0 & 66.71 \\ 0 & 0 & 0 \\ 66.71 & 0 & 106.74 \\ -41.69 & 0 & -66.71 \\ 0 & 0 & 0 \\ -66.71 & 0 & -106.74 \end{array} \right] & \begin{array}{l} -41.69 & 0 & -66.71 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41.69 & 0 & 66.71 \\ 0 & 0 & 0 \\ 66.71 & 0 & 106.74 \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \end{array} \end{array}$$

$$[\mathbf{K}_{16}] = \begin{array}{ccc} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_1 \\ \left[\begin{array}{ccc} 55.23 & -63.12 & 12.62 \\ -63.12 & 72.14 & -14.43 \\ 12.62 & -14.43 & 2.88 \\ -55.23 & 63.12 & -12.62 \\ 63.12 & -72.14 & 14.43 \\ -12.62 & 14.43 & -2.88 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{u}_6 \\ \mathbf{v}_6 \\ \mathbf{w}_6 \end{array} \end{array}$$

$$[\mathbf{K}_{24}] = \begin{array}{ccc} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \\ \left[\begin{array}{ccc} 29.51 & 47.21 & -28.33 \\ 47.21 & 75.54 & -45.33 \\ -28.33 & -45.33 & 27.20 \\ -29.51 & -47.21 & 28.30 \\ -47.21 & -75.54 & 45.33 \\ 28.33 & 45.33 & -27.20 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_4 \end{array} \end{array}$$

$$[\mathbf{K}_{35}] = \begin{array}{ccc} & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 4.92 & 19.69 & 15.75 \\ 19.69 & 78.77 & 63.02 \\ 15.75 & 63.02 & 50.41 \\ -4.92 & -19.69 & -15.75 \\ -19.69 & -78.77 & -63.02 \\ -15.75 & -63.02 & -50.41 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{u}_5 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{w}_5 \end{array} \end{array}$$

$$[K_{14}] = \begin{array}{ccc|c} & u_1 & v_1 & w_1 \\ \hline & 15.35 & 40.93 & -8.19 \\ & 40.93 & 109.15 & -21.83 \\ & -8.19 & -21.83 & 4.37 \\ & -15.35 & -40.93 & 8.19 \\ & -40.93 & -109.15 & 21.83 \\ & 8.19 & 21.83 & -4.37 \\ \hline & u_1 & v_1 & w_1 \\ & u_4 & v_4 & w_4 \end{array}$$

$$[K_{36}] = \begin{array}{ccc|c} & u_3 & v_3 & w_3 \\ \hline & 15.35 & -40.93 & 8.19 \\ & -40.93 & 109.15 & -21.83 \\ & 8.19 & -21.83 & 4.37 \\ & -15.35 & 40.93 & -8.19 \\ & 40.93 & -109.15 & 21.83 \\ & -8.19 & 21.83 & -4.37 \\ \hline & u_3 & v_3 & w_3 \\ & u_6 & v_6 & w_6 \end{array}$$

$$[K_{25}] = \begin{array}{ccc|c} & u_2 & v_2 & w_2 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 112.06 & 44.82 \\ & 0 & 44.82 & 17.93 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -112.06 & -44.82 \\ & 0 & -44.82 & -17.93 \\ \hline & u_2 & v_2 & w_2 \\ & u_5 & v_5 & w_5 \end{array}$$

El siguiente paso es el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.

Como los tres apoyos 4, 5 y 6 son de segundo género, no tienen ningún desplazamiento y basta ensamblar las porciones $[K_{nn}]$ y $[K_{an}]$ de la matriz de rigidez total, para luego aplicar las ecuaciones simplificadas (11.17) y (11.18). Este proceso se lleva a cabo en las páginas siguientes.

12.1 GENERALIDADES

En el capítulo anterior se vieron los principios generales del análisis matricial de estructuras, en especial el método de la rigidez, y su programación. En estructuras pequeñas no suelen presentarse dificultades para su solución; en las grandes, en cambio, es frecuente que surjan complicaciones por el tamaño del problema. Éste puede requerir más memoria de la disponible y algoritmos más eficientes, que disminuyan el costo del análisis y garanticen adecuada precisión en las respuestas.

En este capítulo se presentan algunas de las técnicas empleadas para obviar dichas dificultades. También se indica cómo tratar el caso particular de apoyos con sistema propio de coordenadas y la manera de ajustar los resultados de un primer análisis para tener en cuenta las variaciones en propiedades estructurales que se hayan hecho con base en él. Luego se explican las matrices de transferencia que resultan más eficientes que las de rigidez o de flexibilidad cuando hay que considerar efectos dinámicos o no lineales, como en el caso de los arcos y de las estructuras constituidas por cables. Por último se presentan algunas simplificaciones para estructuras con miembros ortogonales, el tratamiento de vigas con sección transversal variable y una breve descripción de algunos programas comerciales de uso común en América Latina.

El lector interesado podrá encontrar mayor información sobre estos temas en Weaver y Gere (referencia 12.1), en McGuire y Gallagher (referencia 12.2), y en García (referencia 12.3).

12.2 CONDENSACIÓN

Una de las técnicas, de aplicación general, utilizadas es la de condensación matricial, que consiste en reducir el tamaño de un sistema de ecuaciones mediante la eliminación de ciertos grados de libertad. Las ecuaciones condensadas se expresan en función de los grados de libertad preseleccionados $[\delta_c]$ que, junto con los eliminados $[\delta_e]$, conforman el conjunto original de grados de libertad:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

Partiendo de la ecuación básica del método de la matriz de rigidez:

$$[F] = [K][\delta] \quad (12.2)$$

o en forma expandida:

$$\begin{bmatrix} F_c \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ce} \\ K_{ec} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

se busca llegar a una ecuación de la forma:

$$[F_c^*] = [K_{cc}^*][\delta_c] \quad (12.4)$$

Para ello basta con expandir la parte inferior de la ecuación (12.3) y despejar en ella $[\delta_e]$:

$$\begin{aligned} [F_e] &= [K_{ec}][\delta_c] + [K_{ee}][\delta_e] \\ [\delta_e] &= -[K_{ee}]^{-1} [K_{ec}][\delta_c] + [K_{ee}]^{-1} [F_e] \end{aligned} \quad (12.5)$$

Substituyendo este valor en la expansión de la parte superior de dicha ecuación y factorizando:

$$\begin{aligned} [F_c] &= [K_{cc}][\delta_c] + [K_{ce}][\delta_e] = \\ &= [K_{cc}][\delta_c] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [K_{ec}][\delta_c] + [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [F_e] = \\ &= \left[[K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \right] [\delta_c] + [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [F_e] \end{aligned}$$

que se puede reescribir así:

$$[F_c] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [F_e] = \left[[K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \right] [\delta_c] \quad (12.6)$$

Comparando esta ecuación con la (12.4) se concluye que:

$$[F_c^*] = [F_c] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [F_e] \quad (12.7)$$

y

$$[K_{cc}^*] = [K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] \quad (12.8)$$

Con esta formulación se pueden encontrar los desplazamientos desconocidos en dos etapas. Primero se hallan los condensados, despejándolos de la ecuación (12.4):

$$[\delta_c] = [K_{cc}^*]^{-1} [F_c^*] \quad (12.9)$$

y luego los eliminados mediante la ecuación (12.5) o su equivalente:

$$[\delta_e] = [K_{ee}]^{-1} [F_e] - [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] [K_{cc}^*]^{-1} [F_c^*] \quad (12.10)$$

Naturalmente, esta solución en dos etapas requiere un mayor número de operaciones aritméticas que la solución directa de la ecuación (12.2). Sin embargo, las matrices por invertir, $[K_{ee}]$ y $[K_{cc}^*]$, son de menor tamaño que la matriz $[K]$ de la solución directa, lo cual puede ser provechoso al trabajar con problemas de gran tamaño, tanto desde el punto de vista de precisión como de limitaciones de memoria de la computadora.

Vale la pena señalar que los desplazamientos *eliminados* en el proceso anterior lo son sólo en el sentido de reemplazo o sustitución y no deben confundirse con los grados de libertad considerados *despreciables* en las simplificaciones que se verán más adelante.

Un caso especial de aplicación de la técnica de condensación se presenta cuando hay varias fuerzas del vector $[F]$ que son cero. En tales circunstancias, con un reordenamiento adecuado, puede hacerse que los grados de libertad asociados con ellas sean los eliminados en el proceso de condensación. Por consiguiente:

$$[F_e] = [0] \quad (12.11)$$

y las ecuaciones (12.5), (12.9) y (12.10) se reducen a:

$$[\delta_e] = - [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] [\delta_c] \quad (12.12)$$

$$[\delta_c] = [K_{cc}^*]^{-1} [F_c] \quad (12.13)$$

La aplicación de estas ecuaciones se explicará más adelante en el análisis de un pórtico sometido a cargas sísmicas.

12.3 GRADOS DE LIBERTAD CONSIDERADOS DESPRECIABLES

Una de las prácticas más utilizadas en los métodos tradicionales de análisis es la de despreciar deformaciones que, en opinión del analista, influyen poco en el resultado. Ejemplo de ellas son las deformaciones por corte y las debidas a fuerzas axiales.

Las primeras tampoco se tuvieron en cuenta al definir las matrices de rigidez del capítulo 11. Las segundas, en cambio, constituyeron parte fundamental en la solución de armaduras y se consideraron también en la de pórticos, tanto en un plano como en el espacio.

El hecho de despreciar las deformaciones axiales en pórticos de tamaño moderado no conduce generalmente a errores apreciables, pero sí disminuye notablemente el tamaño de las matrices involucradas en la solución.

y despejando los desplazamientos dependientes:

$$[\delta_d] = -[A_1]^{-1} [A_o] [\delta^*] = [R_o] [\delta^*] \quad (12.18)$$

Definiendo ahora:

$$[R] = \begin{bmatrix} I \\ R_o \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

en donde $[I]$ representa la matriz identidad, se puede escribir:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta^* \\ \delta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ R_o \end{bmatrix} [\delta^*] = [R] [\delta^*] \quad (12.20)$$

Ahora bien, por la ecuación básica del método matricial de los desplazamientos:

$$[F] = [K] [\delta] = [K] [R] [\delta^*] \quad (12.21)$$

Se quiere llegar a una expresión de la forma:

$$[F^*] = [K^*] [\delta^*] \quad (12.22)$$

en donde $[F^*]$ representa las fuerzas asociadas con los grados de libertad independientes. Por la ley de Betti y la ecuación (12.20) se puede probar que (referencia 12.3):

$$[F^*] = [R]^T [F] \quad (12.23)$$

y al reemplazar la ecuación (12.21) en la (12.23):

$$[F^*] = [R]^T [K] [R] [\delta^*] \quad (12.24)$$

equivalente por la ecuación (12.20) a:

$$[F^*] [R]^T [K] [\delta] \quad (12.25)$$

Finalmente, si se comparan las ecuaciones (12.22) y (12.24) se concluye que:

$$[K^*]_{k \times k} = [R]_{k \times n}^T [K]_{n \times n} [R]_{n \times k} \quad (12.26)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (12.24), se pueden despejar los desplazamientos independientes:

$$[\delta^*] = [K^*]^{-1} [F^*] \quad (12.27)$$

y luego, aplicando la ecuación (12.18), se calculan los grados de libertad dependientes. En resumen, para resolver un problema por este método se empieza por definir la matriz $[A]$ y hacer la partición correspondiente a los desplazamientos independientes $[\delta^*]$ y a los

dependientes $[\delta_d]$, de acuerdo con la ecuación (12.16). Luego se calculan las matrices $[\mathbf{R}_0]$ y $[\mathbf{R}]$ con las ecuaciones (12.18) y (12.19). Conocidas éstas se calcula $[\mathbf{K}^*]$ con la ecuación (12.26) y los grados de libertad independientes con la (12.27). Finalmente, para calcular los dependientes se utiliza la ecuación (12.18).

Se puede observar que lo mismo que en el proceso de condensación, aunque el método involucra un mayor número de operaciones, la única matriz por invertir, $[\mathbf{K}^*]$, se ha reducido al orden $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$.

12.4.2 Simplificaciones por simetría y antisimetría

Las ecuaciones de relación resultan muy sencillas en el caso de estructuras simétricas sometidas a cargas simétricas o antisimétricas y el método se simplifica muchísimo en dichos casos. En efecto, si se toma un pórtico ortogonal, por ejemplo el de la figura 8.1, y la deformada es simétrica (a):

$$u_{si} = -u_i \quad v_{si} = v_i \quad \theta_{si} = -\theta_i \quad (12.28)$$

en donde el subíndice si representa un punto simétrico al i .

Para el caso de deformada antisimétrica (b), en cambio:

$$u_{si} = u_i \quad v_{si} = -v_i \quad \theta_{si} = \theta_i \quad (12.29)$$

en donde adicionalmente se han despreciado las deformaciones axiales en las vigas.

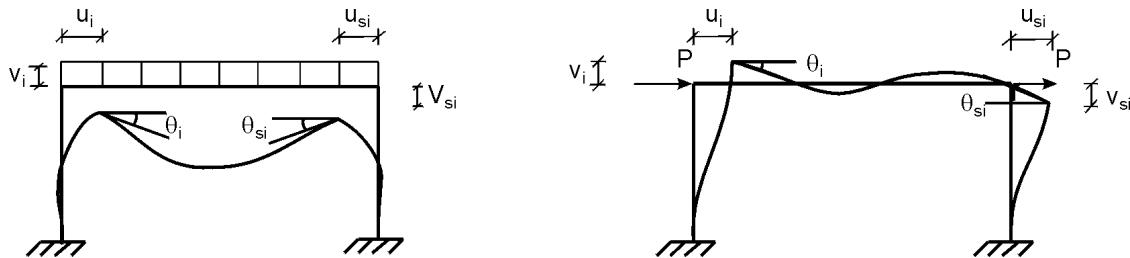
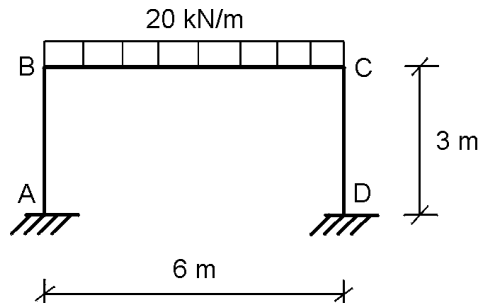


Figura 12.1 Casos especiales de deformación de un pórtico:
a) simétrica; b) antisimétrica.

Siendo tan sencillas las relaciones entre los desplazamientos dadas por las ecuaciones (12.28) y (12.29), se ve que no es necesario en estos casos seguir todo el proceso descrito en el artículo 12.4.1. Basta ahora con sumar o restar las correspondientes columnas y filas de los desplazamientos de puntos simétricos que constituyen los grados de libertad dependientes, según que dichos desplazamientos tengan igual signo o signo contrario, respectivamente.

Ejemplo 12.1

Resuelva el pórtico mostrado aprovechando las condiciones de simetría.



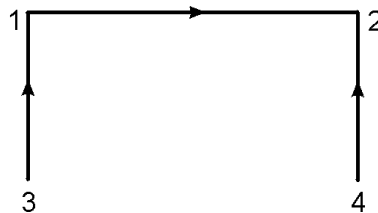
Viga: $300 \times 400 \text{ mm}$

Columnas: $300 \times 300 \text{ mm}$

$E = 18 \text{ kN/mm}^2$

Solución

Se adoptan la siguiente numeración de los nudos y la orientación de los miembros:



Las propiedades básicas de los miembros son:

Viga

$$AE = 300 \times 400 \times 18 = 2160000 \text{ kN}$$

$$EI = \frac{18 \times 10^6 \times 0.3 \times (0.4^3)}{12} = 28800 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Columnas

$$AE = (0.3)^2 \times 18 \times 10^6 = 1620000 \text{ kN}$$

$$EI = \frac{18 \times 10^6 \times (0.3)^4}{12} = 12150 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

Cuadro resumen:

Elemento	$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	AE/L
Viga	9600	19200	4800	1600	360000
Columnas	8100	16200	8100	5400	54000

Reacciones de empotramiento:

$$M_{12}^F = -M_{12}^F = \frac{wL^2}{12} = \frac{20 \times 36}{2} = 60.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$Y_{12}^F = Y_{21}^F = \frac{wL}{2} + \frac{M_{12}^F + M_{21}^F}{L} = \frac{20 \times 6}{2} + \frac{60.0 - 60.0}{6} = 60.0 \text{ kN}$$

Planteando las ecuaciones (11.52) y (11.54) para vigas y columnas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 360000 & 0 & 0 & -360000 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & 4800 & 0 & -1600 & 4800 \\ 0 & 4800 & 19200 & 0 & -4800 & 9600 \\ -36000 & 0 & 0 & 360000 & 0 & 0 \\ 0 & -1600 & -4800 & 0 & 1600 & -4800 \\ 0 & 4800 & 9600 & 0 & -4800 & 19200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 60.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -60.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{31(42)} \\ Y_{31(42)} \\ M_{31(42)} \\ X_{13(24)} \\ Y_{13(24)} \\ M_{13(24)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{3(4)} & v_{3(4)} & \theta_{3(4)} & u_{1(2)} & v_{1(2)} & \theta_{1(2)} \\ 5400 & 0 & -8100 & -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & 540000 & 0 & 0 & -540000 & 0 \\ -8100 & 0 & 16200 & 8100 & 0 & 8100 \\ -5400 & 0 & 8100 & 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & -540000 & 0 & 0 & 540000 & 0 \\ -8100 & 0 & 8100 & 8100 & 0 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3(4)} = 0 \\ v_{3(4)} = 0 \\ \theta_{3(4)} = 0 \\ u_{1(2)} \\ v_{1(2)} \\ \theta_{1(2)} \end{bmatrix}$$

Eliminando las columnas correspondientes a desplazamientos nulos y ensamblando se obtienen las ecuaciones de la página siguiente, cuya solución se hará tanto con el artificio indicado en el artículo 12.4.2 como con las ecuaciones generales del artículo 12.4.1.

a) *Solución utilizando sólo las ecuaciones básicas*

Como las ecuaciones de relación por simetría son:

$$u_2 = -u_1 \quad v_2 = v_1 \quad \theta_2 = -\theta_1$$

en la ecuación intermedia de la página 603 se restan la cuarta columna de la primera y la sexta de la tercera, y se suma la quinta a la segunda. Además el último vector se pasa al lado izquierdo de la ecuación. Al hacerlo, resulta la ecuación de la parte inferior de la página siguiente.

$$\begin{array}{l}
 X_1 = X_{12} + X_{13} = 0 \\
 Y_1 = Y_{12} + Y_{13} = 0 \\
 M_1 = M_{12} + M_{13} = 0 \\
 X_2 = X_{21} + X_{24} = 0 \\
 Y_2 = Y_{21} + Y_{24} = 0 \\
 M_2 = M_{21} + M_{24} = 0 \\
 X_3 = X_{31} \\
 Y_3 = Y_{31} \\
 M_3 = M_{31} \\
 X_4 = X_{42} \\
 Y_4 = Y_{42} \\
 M_4 = M_{42}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 360000 & 0 & 8100 & -360000 & 0 & 0 \\
 5400 & 1600 & 4800 & 0 & -1600 & 4800 \\
 0 & 540000 & 19200 & 0 & -4800 & 9600 \\
 8100 & 4800 & 16200 & 360000 & 0 & 8100 \\
 -360000 & 0 & 0 & 5400 & 1600 & -4800 \\
 0 & -1600 & -4800 & 0 & 540000 & 19200 \\
 0 & 4800 & 9600 & 8100 & -4800 & 16200 \\
 -5400 & 0 & -8100 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -540000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8100 & 0 & 8100 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -5400 & 0 & -8100 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -540000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 8100 & 0 & 8100
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \theta_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \theta_2
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 60.0 \\
 60.0 \\
 0 \\
 60.0 \\
 -60.0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 X_1 = 0 \\
 Y_1 = 0 \\
 M_1 = 0 \\
 X_2 = 0 \\
 Y_2 = 0 \\
 M_2 = 0 \\
 X_3 \\
 Y_3 \\
 M_3 \\
 X_4 \\
 Y_4 \\
 M_4
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 365400 & 0 & 8100 & -360000 & 0 & 0 \\
 0 & 541600 & 4800 & 0 & -1600 & 4800 \\
 8100 & 4800 & 35400 & 0 & -4800 & 9600 \\
 -360000 & 0 & 0 & 365400 & 0 & 8100 \\
 0 & -1600 & -4800 & 0 & 541600 & -4800 \\
 0 & 4800 & 9600 & 8100 & -4800 & 35400 \\
 -5400 & 0 & -8100 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -540000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8100 & 0 & 8100 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -5400 & 0 & -8100 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -540000 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 8100 & 0 & 8100
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \theta_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 \theta_2
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 60.0 \\
 60.0 \\
 0 \\
 60.0 \\
 -60.0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 \\
 -60.0 \\
 -60.0 \\
 0 \\
 -60.0 \\
 60.0 \\
 X_3 \\
 Y_3 \\
 M_3 \\
 X_4 \\
 Y_4 \\
 M_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 725400 & 0 & 8100 \\
 0 & 540000 & 4800 \\
 8100 & 4800 & 25800 \\
 -725400 & 0 & -8100 \\
 0 & 540000 & 0 \\
 -8100 & 0 & -25800 \\
 -5400 & 0 & -8100 \\
 0 & -540000 & 0 \\
 8100 & 0 & 8100 \\
 5400 & 0 & 8100 \\
 0 & -540000 & 0 \\
 -8100 & 0 & -8100
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \theta_1
 \end{bmatrix}$$

Las mismas operaciones se hacen ahora con las filas de la parte superior:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -120.0 \\ -120.0 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1450800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1080000 & 0 \\ 16200 & 0 & 51600 \\ -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & -540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 8100 \\ 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & -540000 & 0 \\ -8100 & 0 & -8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la parte superior:

$$u_1 = -u_2 = 2.606 \times 10^{-5} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_1 = v_2 = -1.111 \times 10^{-4} \text{ m} \downarrow$$

$$\theta_1 = -\theta_2 = -2.334 \times 10^{-3} \text{ rad} \curvearrowright$$

y empleando estos valores para calcular las reacciones con la submatriz inferior:

$$X_3 = 18.76 \text{ kN} \quad Y_3 = 60.00 \text{ kN} \quad M_3 = -18.69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_4 = -18.76 \text{ kN} \quad Y_4 = 60.00 \text{ kN} \quad M_4 = 18.69 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con las matrices individuales modificadas se pueden calcular las fuerzas externas.
En la viga:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9600 \\ -720000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.606 \times 10^{-5} \\ -1.111 \times 10^{-4} \\ -2.334 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 60.0 \\ 60.0 \\ 0 \\ 60.0 \\ -60.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.76 \text{ kN} \\ 60.00 \text{ kN} \\ 37.60 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ -18.76 \text{ kN} \\ 60.00 \text{ kN} \\ -37.60 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

y en las columnas:

$$\begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & 540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.606 \times 10^{-5} \\ -1.111 \times 10^{-4} \\ -2.334 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18.76 \text{ kN} \\ -60.00 \text{ kN} \\ -37.60 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{24} \\ Y_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & 540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.606 \times 10^{-5} \\ -1.111 \times 10^{-4} \\ -2.334 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.76 \text{ kN} \\ -60.00 \text{ kN} \\ 37.60 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Todos los resultados concuerdan exactamente con los obtenidos sin emplear la simplificación.

b) Solución con las ecuaciones generales del numeral 12.4.1

Las ecuaciones de relación por simetría de la página 602 se pueden escribir matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [0]$$

Comparando con la ecuación (12.16):

$$[A_o \quad A_1] \begin{bmatrix} \delta^* \\ \delta_d \end{bmatrix} = [0]$$

en donde: δ^* = grados de libertad independientes (nudo 1)
 δ_d = grados de libertad dependientes (nudo 2)

se deduce que:

$$[A_o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad [\delta_d] = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

según la ecuación (12.18):

$$[R_o] = -[A_1]^{-1} [A_o]$$

$$\rightarrow [R_o] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y aplicando la ecuación (12.19):

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Según la ecuación (12.26):

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}] [\mathbf{R}]$$

En este caso:

$$[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La parte superior de la ecuación intermedia de la página 603 define la matriz $[\mathbf{K}]$:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}] [\delta]$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -60.0 \\ -60.0 \\ 0 \\ -60.0 \\ 60.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 365400 & 0 & 8100 & -360000 & 0 & 0 \\ 0 & 541600 & 4800 & 0 & -1600 & 4800 \\ 8100 & 4800 & 35400 & 0 & -4800 & 9600 \\ -360000 & 0 & 0 & 365400 & 0 & 8100 \\ 0 & -1600 & -4800 & 0 & 541600 & -4800 \\ 0 & 4800 & 9600 & 8100 & -4800 & 35400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

y efectuando el triple producto para hallar $[\mathbf{K}^*]$:

$$[\mathbf{K}^*] = \begin{bmatrix} 1450800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1080000 & 0 \\ 16200 & 0 & 51600 \end{bmatrix}$$

Por la ecuación (12.23):

$$[F^*] = [R]^T [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -60.0 \\ -60.0 \\ 0 \\ -60.0 \\ 60.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -120.0 \\ -120.0 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (12.27):

$$[\delta^*] = [K^*]^{-1} [F^*]$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1450800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1080000 & 0 \\ 16200 & 0 & 51600 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ -120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.606 \times 10^{-5} \text{ m } \rightarrow \\ -1.111 \times 10^{-4} \text{ m } \downarrow \\ -2.334 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright \end{bmatrix}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (12.18):

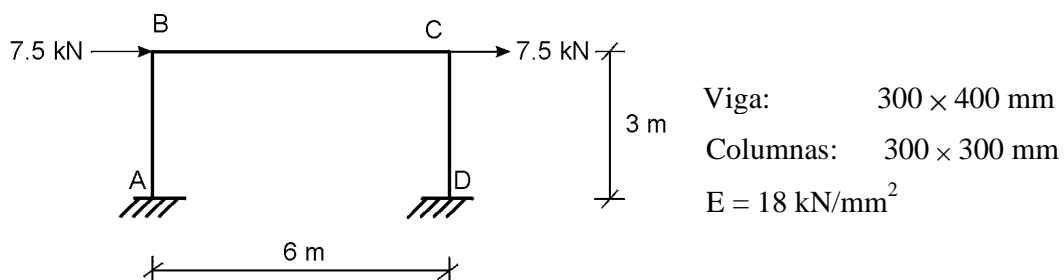
$$[\delta_d] = [R_o] [\delta^*]$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.606 \times 10^{-5} \\ -1.111 \times 10^{-4} \\ 2.334 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.606 \times 10^{-5} \text{ m } \leftarrow \\ -1.111 \times 10^{-4} \text{ m } \downarrow \\ 2.334 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowleft \end{bmatrix}$$

que coinciden con los desplazamientos obtenidos antes.

Ejemplo 12.2

Resuelva el mismo pórtico anterior pero sometido ahora a las cargas mostradas y utilizando las ecuaciones de relación entre desplazamientos.



Solución

Por ser simétrica la estructura, las cargas dadas conducen ahora a una condición de antisimetría. En consecuencia, si se conserva la misma numeración del ejemplo anterior, las ecuaciones de relación son:

$$u_2 = u_1 \quad v_2 = -v_1 \quad \theta_2 = \theta_1$$

a) Utilizando el artificio del numeral 12.4.2

Para aplicar estas condiciones a la ecuación general, se suman la cuarta columna a la primera y la sexta a la tercera, y se resta la quinta de la segunda.

Teniendo en cuenta que ahora no hay fuerzas de empotramiento pero sí fuerzas nodales, resulta:

$$\begin{bmatrix} 7.5 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & 543200 & 9600 \\ 8100 & 9600 & 45000 \\ 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & -543200 & -9600 \\ 8100 & 9600 & 45000 \\ \hline -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & -540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 8100 \\ -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & -540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

Efectuando ahora las mismas operaciones con las filas correspondientes:

$$\begin{bmatrix} 15.0 \\ 0 \\ 0 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1086400 & 19200 \\ 16200 & 19200 & 90000 \\ \hline -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & -540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 8100 \\ -5400 & 0 & -8100 \\ 0 & 540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

y resolviendo la porción superior:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1086400 & 19200 \\ 16200 & 19200 & 90000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$u_1 = u_2 = 1.905 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow$$

$$v_1 = -v_2 = 6.084 \times 10^{-6} \text{ m} \uparrow$$

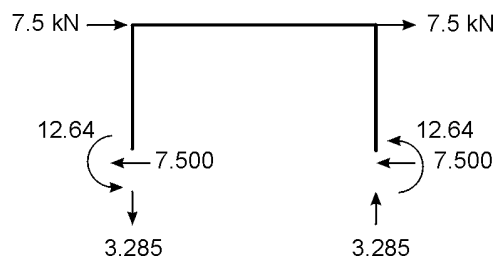
$$\theta_1 = \theta_2 = -3.442 \times 10^{-4} \text{ rad} \curvearrowright$$

Evaluando las reacciones:

$$X_3 = -7.500 \text{ kN} \quad Y_3 = -3.285 \text{ kN} \quad M_3 = 12.64 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$X_4 = -7.500 \text{ kN} \quad Y_4 = 3.285 \text{ kN} \quad M_4 = 12.64 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Verificación del equilibrio:



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_3 = (7.5 + 7.5) \times 3 - 3.285 \times 6 - 2 \times 12.64 = 0.01 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Con estos valores se podrían averiguar todas las fuerzas internas en los miembros, sin necesidad de aplicar las ecuaciones individuales. Al utilizarlas resulta:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 9600 \\ 0 & 9600 & 28800 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3200 & -9600 \\ 0 & 9600 & 28800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \\ 6.084 \times 10^{-6} \\ -3.442 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.285 \text{ kN} \\ -9.856 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ 0 \\ 3.285 \text{ kN} \\ -9.856 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & 540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \\ 6.084 \times 10^{-6} \\ -3.442 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.500 \text{ kN} \\ 3.285 \text{ kN} \\ 9.856 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{24} \\ Y_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 8100 \\ 0 & 540000 & 0 \\ 8100 & 0 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \\ -6.084 \times 10^{-6} \\ -3.442 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.500 \text{ kN} \\ -3.285 \text{ kN} \\ 9.856 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

b) Con las ecuaciones generales del numeral 12.4.1

La relación entre desplazamientos se puede expresar matricialmente así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

Comparando con la ecuación (12.16), se concluye que:

$$[A_o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad [\delta_d] = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Según la ecuación (12.18):

$$[R_o] = -[A_1]^{-1} [A_o] = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la ecuación (12.19):

$$[R] = \begin{bmatrix} I \\ R_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [R]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz $[K]$ es la misma de la página 606; por tanto, con dicho valor y las dos matrices anteriores:

$$[K^*] = [R]^T [K] [R] = \begin{bmatrix} 10800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1086400 & 19200 \\ 16200 & 19200 & 90000 \end{bmatrix}$$

Por la ecuación (12.23): $[F^*] = [R]^T [F]$

$$[F^*] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.5 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (12.27): $[\delta^*] = [K^*]^{-1} [F^*]$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & 0 & 16200 \\ 0 & 1086400 & 19200 \\ 16200 & 19200 & 90000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 6.084 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -3.442 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

aplicando ahora la ecuación (12.18):

$$[\delta_d] = [R_o] [\delta^*]$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \\ 6.804 \times 10^{-6} \\ -3.442 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.905 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -6.084 \times 10^{-6} \text{ m} \\ -3.442 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Como era de esperarse, todos los desplazamientos coinciden con los obtenidos anteriormente.

Ejemplo 12.3

Resuelva los pórticos de los ejemplos 12.1 y 12.2, pero esta vez despreciando las deformaciones axiales.

Solución

a) El despreciar las deformaciones axiales en el pórtico con carga uniformemente repartida equivale a decir que:

$$u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$$

Al aplicar estas condiciones a la ecuación general de dicho pórtico, se deben eliminar las filas y columnas números 1, 2, 4 y 5 de la ecuación original, o las 1 y 2 de la ecuación reducida. Resulta entonces:

$$[-120.0] = [51600] [\theta_1]$$

$$\theta_1 = -2.326 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (\text{vs } -2.334 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

que difiere tan sólo en 0.4% del valor verdadero.

b) En el pórtico con cargas horizontales, en cambio:

$$u_1 = u_2 \quad v_1 = v_2 = 0$$

y al eliminar la segunda viga y columna de la ecuación reducida, ésta queda así:

$$\begin{bmatrix} 15.0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & 16200 \\ 16200 & 90000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

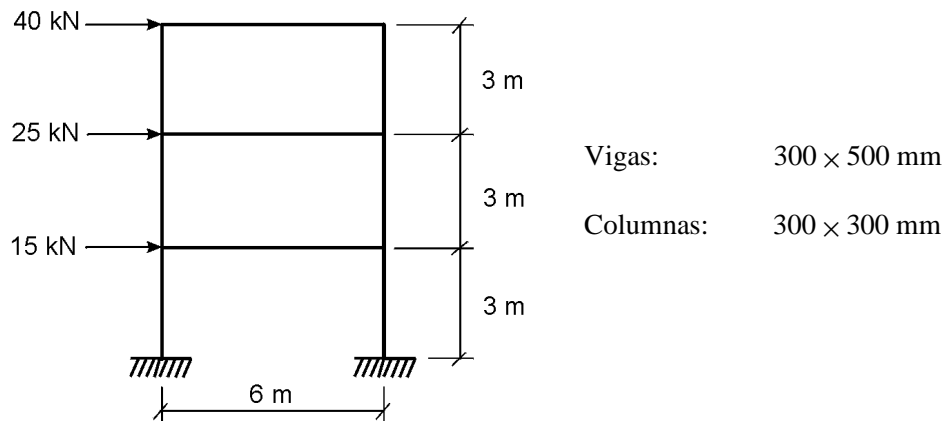
$$u_1 = 1.903 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (\text{vs } 1.905 \times 10^{-3} \text{ m})$$

$$\theta_1 = -3.425 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (\text{vs } -3.442 \times 10^{-4} \text{ rad})$$

que corresponden a errores del 0.1% y del 0.5%, respectivamente.

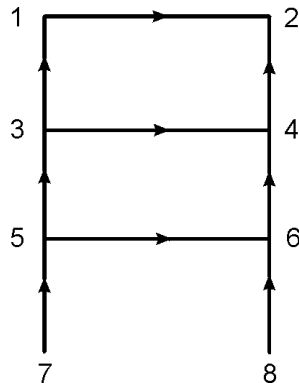
Ejemplo 12.4

Utilice la matriz condensada para resolver completamente el pórtico de la figura considerando: a) todas las deformaciones; b) despreciando las deformaciones axiales en vigas y columnas, y c) edificio de cortante. $E = 19 \text{ kN/mm}^2$.



Solución

Se adopta la siguiente numeración de los nudos y orientación de los miembros:



Solución

El cuadro de propiedades resulta así:

Elemento	$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	AE/L
Viga	19790	39580	9900	3300	475000
Columnas	8550	17100	8550	5700	570000

Con estos valores se calculan las matrices de rigidez, referidas de una vez a coordenadas generales.

Para las vigas:

$$[K]_{\text{viga}} = \begin{bmatrix}
 & u_{1(3,5)} & v_{1(3,5)} & \theta_{1(3,5)} & u_{2(4,6)} & v_{2(4,6)} & \theta_{2(4,6)} \\
 \begin{bmatrix}
 475000 & 0 & 0 & -475000 & 0 & 0 \\
 0 & 3300 & 9900 & 0 & -3300 & 9900 \\
 0 & 9900 & 39580 & 0 & -9900 & 19790 \\
 -475000 & 0 & 0 & 475000 & 0 & 0 \\
 0 & -3300 & -9900 & 0 & 3300 & -9900 \\
 0 & 9900 & 19790 & 0 & -9900 & 39580
 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}
 u_{1(3,5)} \\
 v_{1(3,5)} \\
 \theta_{1(3,5)} \\
 u_{2(4,6)} \\
 v_{2(4,6)} \\
 \theta_{2(4,6)}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}$$

y para las columnas:

$$[K]_{\text{col}} = \begin{bmatrix}
 & u_{3(4,5,6,7,8)} & v_{3(4,5,6,7,8)} & \theta_{3(4,5,6,7,8)} & u_{1(2,3,4,5,6)} & v_{1(2,3,4,5,6)} & \theta_{1(2,3,4,5,6)} \\
 \begin{bmatrix}
 5700 & 0 & -8550 & -5700 & 0 & -8550 \\
 0 & 570000 & 0 & 0 & -570000 & 0 \\
 -8550 & 0 & 17100 & 8550 & 0 & 8550 \\
 -5700 & 0 & 8550 & 5700 & 0 & 8550 \\
 0 & -570000 & 0 & 0 & 570000 & 0 \\
 -8550 & 0 & 8550 & 8550 & 0 & 17100
 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}
 u_{3(4,5,6,7,8)} \\
 v_{3(4,5,6,7,8)} \\
 \theta_{3(4,5,6,7,8)} \\
 u_{1(2,3,4,5,6)} \\
 v_{1(2,3,4,5,6)} \\
 \theta_{1(2,3,4,5,6)}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}$$

a) Solución considerando todas las deformaciones

Al ensamblar estas matrices para toda la estructura resultan las matrices $[K_{nn}]$ y $[K_{an}]$ de la página siguiente.

Reordenando la primera para aplicar condensación se obtiene la expresión de la página 615, que define las diferentes submatrices necesarias para aplicar las ecuaciones (12.3) y (12.14).

Para obtener la matriz condensada, definida por la ecuación (12.8), es necesario hallar el inverso $[K_{ee}]^{-1}$ que está dado en la página 616. Con base en él y en las otras matrices de la página 615 se obtienen los resultados de la página 617.

	480700	0	8550	-475000	0	0	-5700	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	573300	9900	0	-3300	9900	0	-570000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8550	9900	56680	0	-9900	19790	-8550	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-475000	0	0	480700	0	8550	0	0	0	0	-5700	0	8550	0	0	0	0	0	0	0
0	-3300	-9900	0	573300	-9900	0	0	0	0	0	-570000	0	0	0	0	0	0	0	0
0	9900	19790	8550	-9900	56680	0	0	0	-8550	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	0
-5700	0	-8550	0	0	0	486400	0	0	-475000	0	0	-5700	0	8550	0	0	0	0	0
0	-570000	0	0	0	0	0	1143300	9900	0	-3300	9900	0	-570000	0	0	0	0	0	0
8550	0	8550	0	0	0	0	9900	73780	0	-9900	19790	-8550	0	8550	0	0	0	0	0
0	0	0	-5700	0	-8550	-475000	0	0	486400	0	0	0	0	0	0	-5700	0	8550	K_{nn}
0	0	0	0	-570000	0	0	-3300	-9900	0	1143300	-9900	0	0	0	0	0	-570000	0	
0	0	0	8550	0	8550	0	9900	19790	0	-9900	73780	0	0	0	0	-8550	0	8550	
0	0	0	0	0	0	-5700	0	-8550	0	0	0	486400	0	0	-475000	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	0	0	0	0	1143300	9900	0	-3300	9900	0	
0	0	0	0	0	0	8550	0	8550	0	0	0	0	9900	73780	0	-9900	19790	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5700	0	-8550	-475000	0	0	486400	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	0	-3300	-9900	0	1143300	-9900	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	8550	0	8550	0	9900	19790	0	-9900	73780	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5700	0	-8550	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8550	0	8550	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5700	0	-8550	0	K_{an}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8550	0	8550	0	

$$\begin{bmatrix} F_c \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ce} \\ K_{ec} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_e \end{bmatrix}$$

$X_1 = 40$	480700	-5700	0	0	8550	-475000	0	0	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	0	u_1
$X_3 = 25$	-5700	486400	-5700	0	-8550	0	0	0	0	0	-475000	0	0	0	8550	0	0	0	u_3
$X_5 = 15$	0	-5700	486400	0	0	0	0	0	0	-8550	0	0	0	0	0	-475000	0	0	u_5
$Y_1 = 0$	0	0	0	573300	9900	0	-3300	9900	-570000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	v_1
$M_1 = 0$	8550	-8550	0	9900	56680	0	-9900	19790	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	0	θ_1
$X_2 = 0$	-475000	0	0	0	0	480700	0	8550	0	0	-5700	0	8550	0	0	0	0	0	u_2
$Y_2 = 0$	0	0	0	-3300	-9900	0	573300	-9900	0	0	0	-570000	0	0	0	0	0	0	v_2
$M_2 = 0$	0	0	0	9900	19790	8550	-9900	56680	0	0	-8550	0	8550	0	0	0	0	0	θ_2
$Y_3 = 0$	0	0	0	-570000	0	0	0	0	1143300	9900	0	-3300	9900	-570000	0	0	0	0	v_3
$M_3 = 0$	8550	0	-8550	0	8550	0	0	0	9900	73780	0	-9900	19790	0	8550	0	0	0	θ_3
$X_4 = 0$	0	-475000	0	0	0	-5700	0	-8550	0	0	486400	0	0	0	0	-5700	0	8550	u_4
$Y_4 = 0$	0	0	0	0	0	0	-570000	0	-3300	-9900	0	1143300	-9900	0	0	0	-570000	0	v_4
$M_4 = 0$	0	0	0	0	0	8550	0	8550	9900	19790	0	-9900	73780	0	0	-8550	0	8550	θ_4
$Y_5 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	0	0	0	1143300	9900	0	-3300	9900	v_5
$M_5 = 0$	0	8550	0	0	0	0	0	0	0	8550	0	0	0	9900	73780	0	-9900	19790	θ_5
$X_6 = 0$	0	0	-475000	0	0	0	0	0	0	0	-5700	0	-8550	0	0	486400	0	0	u_6
$Y_6 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-570000	0	-3300	-9900	0	1143300	-9900	v_6
$M_6 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8550	0	8550	9900	19790	0	-9900	73780	θ_6

$$[K_{ee}]^{-1} \times 10^5 =$$

0.5216	-0.0635	0.0017	0.0047	-0.0640	0.3469	-0.0290	-0.0008	0.0040	-0.0293	0.1732	-0.0155	-0.0005	0.0022	-0.0153
-0.0635	2.0860	0.0098	0.0635	-0.7358	-0.0408	-0.2827	-0.0123	0.0408	0.1742	-0.0205	0.0451	0.0029	0.0205	-0.0254
0.0017	0.0098	0.2090	-0.0017	-0.0319	0.0013	0.0047	0.0018	-0.0013	-0.0225	0.0006	-0.0014	-0.0004	-0.0006	0.0026
0.0047	0.0635	-0.0017	0.5216	0.0640	0.0040	0.0290	0.0008	0.3469	0.0293	0.0022	0.0155	0.0005	0.1732	0.0153
-0.0640	-0.7358	-0.0319	0.0640	2.0960	-0.0412	0.1744	0.0357	0.0412	-0.2802	-0.0206	-0.0256	-0.0045	0.0206	0.0407
0.3469	-0.0408	0.0013	0.0040	-0.0412	0.3475	-0.0312	-0.0004	0.0034	-0.0315	0.1735	-0.0153	-0.0006	0.0019	-0.0152
-0.0290	-0.2827	0.0047	0.0290	0.1744	-0.0312	1.5377	0.0011	0.0312	-0.4384	-0.0147	-0.2036	-0.0077	0.0147	0.1092
-0.0008	-0.0123	0.0018	0.0008	0.0357	-0.0004	0.0011	0.2067	0.0004	-0.0013	-0.0001	0.0068	0.0024	0.0001	-0.0256
0.0040	0.0408	-0.0013	0.3469	0.0412	0.0034	0.0312	0.0004	0.3475	0.0315	0.0019	0.0153	0.0006	0.1735	0.0152
-0.0293	0.1742	-0.0225	0.0293	-0.2802	-0.0315	-0.4384	-0.0013	0.0315	1.5433	-0.0148	0.1095	0.0271	0.0148	-0.2041
0.1732	-0.0205	0.0006	0.0022	-0.0206	0.1735	-0.0147	-0.0001	0.0019	-0.0148	0.1743	-0.0170	-0.0003	0.0012	-0.0169
-0.0155	0.0451	-0.0014	0.0155	-0.0256	-0.0153	-0.2036	0.0068	0.0153	0.1095	-0.0170	1.4934	0.0020	0.0170	-0.4095
-0.0005	0.0029	-0.0004	0.0005	-0.0045	-0.0006	-0.0077	0.0024	0.0006	0.0271	-0.0003	0.0020	0.2061	0.0003	-0.0039
0.0022	0.0205	-0.0006	0.1732	0.0206	0.0019	0.0147	0.0001	0.1735	0.0148	0.0012	0.0170	0.0003	0.1743	0.0169
-0.0153	-0.0254	0.0026	0.0153	0.0407	-0.0152	0.1092	-0.0256	0.0152	-0.2041	-0.0169	-0.4095	-0.0039	0.0169	1.4964

$$[\mathbf{K}_{ce}] [\mathbf{K}_{ee}]^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.0158 & 0.1074 & -0.9916 & 0.0158 & 0.1034 & -0.0123 & 0.0849 & -0.0097 & 0.0123 & 0.0842 & -0.0060 & -0.0068 & 0.0014 & 0.0060 & -0.0052 \\ 0.0081 & -0.1159 & -0.0097 & -0.0081 & -0.1089 & 0.0043 & 0.0015 & -0.9803 & -0.0043 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0917 & -0.0115 & -0.0006 & 0.0888 \\ 0.0050 & 0.0103 & 0.0014 & -0.0050 & 0.0065 & 0.0053 & -0.0949 & -0.0115 & -0.0053 & -0.0913 & 0.0025 & 0.0079 & -0.9783 & -0.0025 & 0.0091 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{ce}] [\mathbf{K}_{ee}]^{-1} [\mathbf{K}_{cc}] = \begin{bmatrix} 472650 & 3630 & -1380 \\ 3630 & 467410 & 5440 \\ -1380 & 5440 & 465510 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{ee}]^{-1} [\mathbf{K}_{cc}] = \begin{bmatrix} -0.0158 & 0.0081 & 0.0050 \\ 0.1074 & -0.1159 & 0.0103 \\ -0.9916 & -0.0097 & 0.0014 \\ 0.0158 & -0.0081 & 0.0050 \\ 0.1034 & -0.1089 & 0.0065 \\ -0.0123 & 0.0043 & 0.0053 \\ 0.0849 & 0.0015 & -0.0949 \\ -0.0097 & -0.9803 & -0.0115 \\ 0.0123 & -0.0043 & -0.0053 \\ 0.0842 & 0.0006 & -0.0913 \\ -0.0060 & 0.0006 & 0.0025 \\ -0.0068 & 0.0917 & 0.0079 \\ 0.0014 & -0.0115 & -0.9783 \\ 0.0060 & -0.0006 & -0.0025 \\ -0.0052 & 0.0888 & 0.0091 \end{bmatrix}$$

Aplicando ahora sí la ecuación (12.8):

$$[\mathbf{K}_{cc}^*] = [\mathbf{K}_{cc}] - [\mathbf{K}_{ce}] [\mathbf{K}_{ee}]^{-1} [\mathbf{K}_{cc}] =$$

$$[\mathbf{K}_{cc}^*] = \begin{bmatrix} 480700 & -5700 & 0 \\ -5700 & 486400 & -5700 \\ 0 & -5700 & 486400 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 472650 & 3630 & -1380 \\ 3630 & 467410 & 5440 \\ -1380 & 5440 & 465510 \end{bmatrix} =$$

$$[\mathbf{K}_{cc}^*] = \begin{bmatrix} 8050 & -9330 & 1380 \\ -9330 & 18990 & -11140 \\ 1380 & -11140 & 20890 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] = \begin{bmatrix} 0.1026 & -0.1120 & 0.0104 \\ 0.1026 & -0.1120 & 0.0104 \\ 0.0827 & 0.0019 & -0.0931 \\ 0.0827 & 0.0019 & -0.0931 \\ -0.0076 & 0.0912 & 0.0085 \\ -0.0076 & 0.0912 & 0.0085 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [K_{cc}^*] &= [K_{cc}] - [K_{ce}] [K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] = \\ &= \begin{bmatrix} 11400 & -11400 & 0 \\ -11400 & 22800 & -11400 \\ 0 & -11400 & 22800 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3170 & -1880 & -1410 \\ -1880 & 3480 & -30 \\ -1410 & -30 & 1590 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8230 & -9520 & 1410 \\ -9520 & 19320 & -11370 \\ 1410 & -11370 & 21210 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los desplazamientos correspondientes a las cargas aplicadas son entonces:

$$\begin{aligned} [\delta_c] &= [K_{cc}^*]^{-1} [F_c] = \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.000430 & 0.000285 & 0.000124 \\ 0.000285 & 0.000264 & 0.000123 \\ 0.000124 & 0.000123 & 0.000105 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0262 \\ 0.0198 \\ 0.0096 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

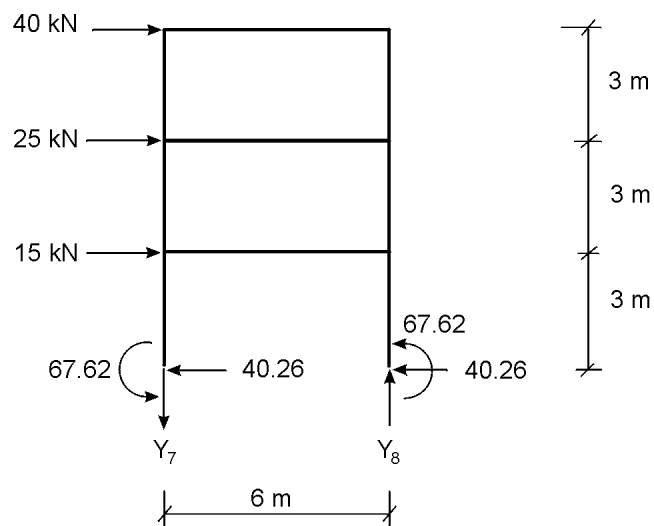
y los que corresponden a fuerzas condensadas:

$$\begin{aligned} [\delta_e] &= -[K_{ee}]^{-1} [K_{ec}] [\delta_c] + [K_{ee}]^{-1} [F_e] = \\ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 0.1026 & -0.1120 & 0.0104 \\ 0.1026 & -0.1120 & 0.0104 \\ 0.0827 & 0.0019 & -0.0931 \\ 0.0827 & 0.0019 & -0.0931 \\ -0.0076 & 0.0912 & 0.0085 \\ -0.0076 & 0.0912 & 0.0085 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0262 \\ 0.0198 \\ 0.0096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00056 \\ -0.00056 \\ -0.00131 \\ -0.00131 \\ -0.00169 \\ -0.00169 \end{bmatrix}_{\text{rad}} \end{aligned}$$

Ahora se pueden calcular parcialmente las reacciones, pues el haber eliminado las filas y columnas de los desplazamientos \mathbf{v} impide que se calculen las componentes \mathbf{Y} .

$$\begin{bmatrix} X_7 \\ M_7 \\ X_8 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5700 & -8550 & 0 & 0 \\ 8550 & 8550 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5700 & -8550 \\ 0 & 0 & 8550 & 8550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0096 \\ -0.00169 \\ 0.0096 \\ -0.00169 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.26 \text{ kN} \\ 67.62 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -40.26 \text{ kN} \\ 67.62 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Las reacciones verticales se pueden hallar por equilibrio:



$$\sum F_x = 40 + 25 + 15 - 40.26 \times 2 = 0.52 \text{ kN}$$

$$\sum M_7 = -40 \times 9 - 25 \times 6 - 15 \times 3 + 67.62 \times 2 + Y_8 \times 6 = 0$$

$$Y_8 = 69.96 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = Y_7 + 69.96 = 0$$

$$Y_7 = -69.96 \text{ kN}$$

Se puede observar que los desplazamientos horizontales, los giros y las reacciones son aproximadamente iguales a los obtenidos en la parte a), pero para lograrlos se simplificaron mucho las operaciones necesarias.

c) *Edificio de cortante*

Se denomina edificio de cortante aquel en que se supone que las vigas son infinitamente rígidas; en consecuencia, los giros de los nudos son nulos y los desplazamientos en ambos extremos de las vigas son iguales en cada piso. Si además se desprecian las deformaciones axiales de las columnas, el tratamiento matricial exige que se eliminen las filas y columnas correspondientes a giros y desplazamientos verticales, y que se sumen las filas y columnas correspondientes a desplazamientos horizontales que sean iguales. Al hacerlo, la ecuación básica queda reducida a:

$$\begin{bmatrix} X_1 = 40 \\ X_3 = 25 \\ X_5 = 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11400 & -11400 & 0 \\ -11400 & 22800 & -11400 \\ 0 & -11400 & 22800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000263 & 0.000175 & 0.000088 \\ 0.000175 & 0.000175 & 0.000088 \\ 0.000088 & 0.000088 & 0.000088 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0162 \\ 0.0127 \\ 0.0070 \end{bmatrix}_m$$

y evaluando las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_7 \\ M_7 \\ X_8 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5700 & -8550 & 0 & 0 \\ 8550 & 8550 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5700 & -8550 \\ 0 & 0 & 8550 & 8550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00702 \\ 0 \\ 0.00702 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40.0 \\ 60.0 \\ -40.0 \\ 60.0 \end{bmatrix}$$

Las reacciones verticales se calculan de nuevo planteando equilibrio de momentos:

$$\sum F_x = 40 + 25 + 15 - 40.0 \times 2 = 0.0 \text{ kN}$$

$$\sum M_7 = -40 \times 9 - 25 \times 6 - 15 \times 3 + 60.0 \times 2 + Y_8 \times 6 = 0$$

$$Y_8 = 72.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = Y_7 + 72.5 = 0$$

$$Y_7 = -72.5 \text{ kN}$$

Estos valores difieren bastante de los obtenidos en las partes a) y b), como consecuencia de las aproximaciones hechas.

12.4.3 Pórticos espaciales con entrepisos de diafragmas rígidos

Algo similar ocurre al analizar pórticos espaciales con losas de entrepiso que se puedan considerar infinitamente rígidas en su plano. En tal caso, los grados de libertad de los extremos de las columnas que llegan a la losa estarán relacionados con los de un nudo particular, considerado nudo *maestro* mediante las ecuaciones:

$$u_x = u_m - y \theta_m \quad v_y = v_m + x \theta_m \quad \theta_z = \theta_m \quad (12.30)$$

como se puede deducir de la figura 12.2.

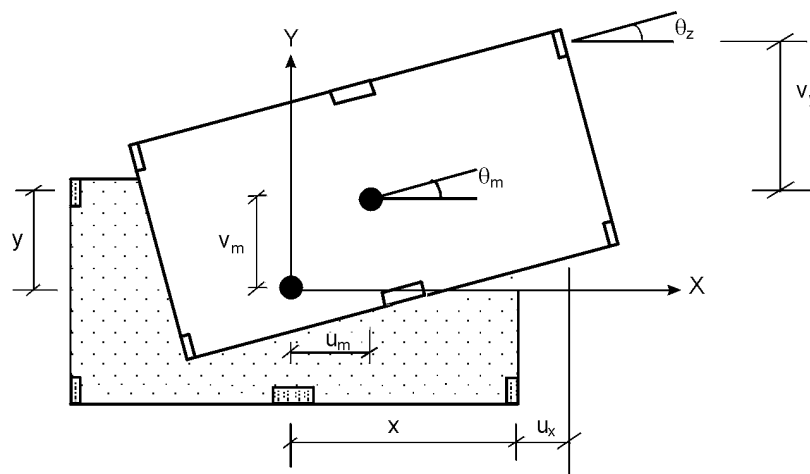


Figura 12.2 Relación entre los grados de libertad de nudos dependientes y nudos *maestros* en pórticos espaciales con losas de diafragma rígido en su plano.

12.5 SUBESTRUCTURACIÓN

Otra técnica muy empleada para reducir el tamaño del sistema de ecuaciones por resolver es la de subestructuración. Consiste en dividir la estructura total en partes que se analizan individualmente y cuyos resultados se emplean en el análisis de una estructura total que contiene sólo los elementos exteriores y los de *frontera* entre las subestructuras.

Dicha técnica fue empleada originalmente para el análisis de los grandes aviones, en que las subestructuras son obvias: fuselaje, alas, timón de cola, etc. En estructuras civiles la subestructuración puede ser sugerida por la estructura misma, como en el caso de edificios con las llamadas placas sismo-resistentes, o determinada arbitrariamente por el analista teniendo en cuenta las facilidades computacionales de que dispone.

El procedimiento matemático de la subestructuración es completamente análogo al de condensación, como se verá a continuación. En la figura 12.3 se ha representado la

estructura de un pórtico dividida en tres subestructuras M, N y O, cuyos límites se han representado con líneas más gruesas para distinguirlas mejor.

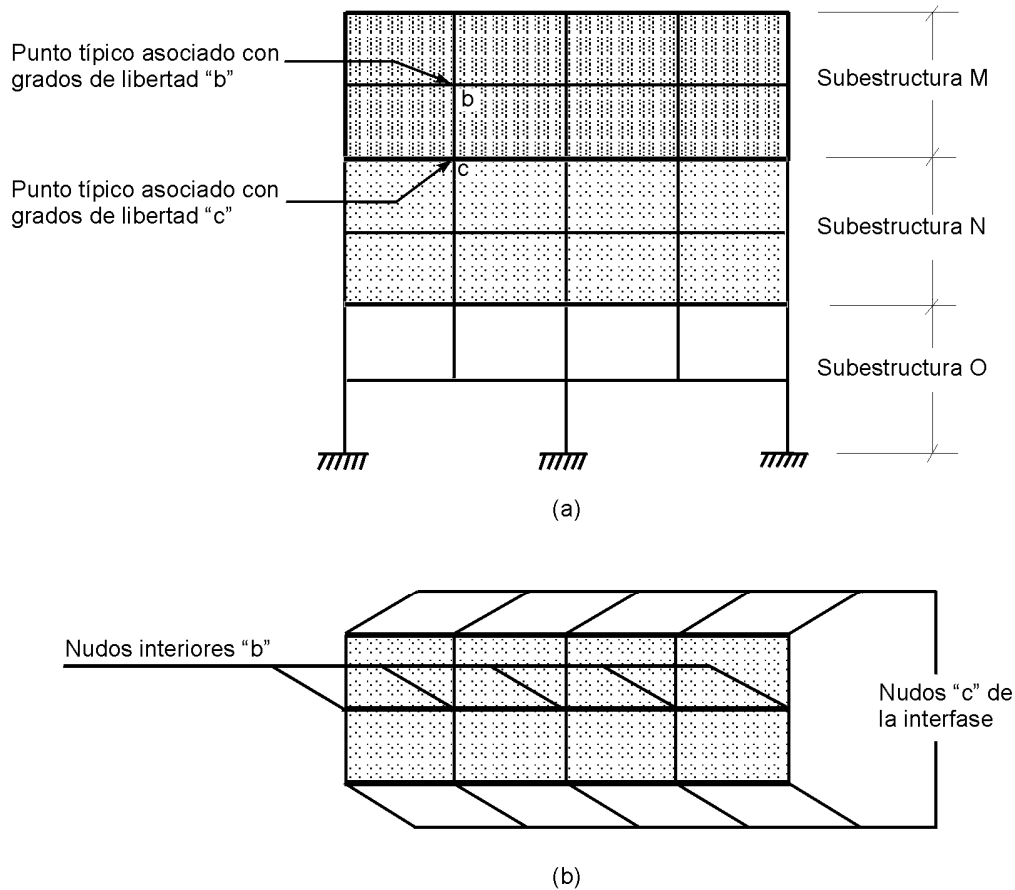


Figura 12.3 Subestructuración de un pórtico plano: a) estructura total; b) detalles de la subestructura N.

Considerando cualquiera de las subestructuras, por ejemplo la M, y acordando distinguir con el subíndice **b** los grados de libertad propios únicamente de ella y con el subíndice **c** los que le son comunes con subestructuras adyacentes, con un reordenamiento adecuado la ecuación matricial básica del método de la rigidez se puede expresar así:

$$\begin{bmatrix} F_c^M \\ F_b^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc}^M & K_{cb}^M \\ K_{bc}^M & K_{bb}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c^M \\ \delta_b^M \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

que como se ve es completamente análoga a la ecuación (12.3), si se exceptúa el super-índice \mathbf{M} y se reemplaza la \mathbf{e} por \mathbf{b} .

Se quiere expresar todo en función de los grados de libertad comunes, o sea por la ecuación (12.4):

$$[\mathbf{F}_c^{*M}] = [\mathbf{K}_{cc}^{*M}] [\delta_c^M] \quad (12.32)$$

y aplicando las ecuaciones (12.7) y (12.8):

$$[\mathbf{F}_c^{*M}] = [\mathbf{F}_c^M] - [\mathbf{K}_{cb}^M] [\mathbf{K}_{bb}^M]^{-1} [\mathbf{F}_b^M] \quad (12.33)$$

$$[\mathbf{K}_{cc}^{*M}] = [\mathbf{K}_{cc}^M] - [\mathbf{K}_{cb}^M] [\mathbf{K}_{bb}^M]^{-1} [\mathbf{K}_{bc}^M] \quad (12.34)$$

Definiendo:

$$[\mathbf{R}_c^M] = [\mathbf{K}_{cb}^M] [\mathbf{K}_{bb}^M]^{-1} [\mathbf{F}_b^M] \quad (12.35)$$

cuyo significado físico es el de fuerzas ficticias aplicadas en los nudos comunes equivalentes a las existentes en los nudos no comunes, la ecuación (12.32) se puede reescribir así:

$$[\mathbf{K}_{cc}^{*M}] [\delta_c^M] = [\mathbf{F}_c^M] - [\mathbf{R}_c^M] \quad (12.36)$$

Esta ecuación permite tratar toda la subestructura \mathbf{M} como si fuera de un solo elemento. Procediendo de igual manera con las otras subestructuras, es posible ensamblar ahora las respectivas matrices condensadas y combinar las fuerzas nodales, reales y ficticias, en las interfaces para obtener la ecuación de la estructura completa:

$$[\mathbf{K}_{cc}^*] [\delta_c] = [\mathbf{F}_c] - [\mathbf{R}_c] \quad (12.37)$$

teniendo cuidado de no duplicar cargas que actúen en nudos de las interfaces o rigideces de miembros localizados en las fronteras.

De la ecuación (12.37) se despejan los desplazamientos de los grados de libertad comunes:

$$[\delta_c] = [\mathbf{K}_{cc}^*]^{-1} [\mathbf{F}_c - \mathbf{R}_c] \quad (12.38)$$

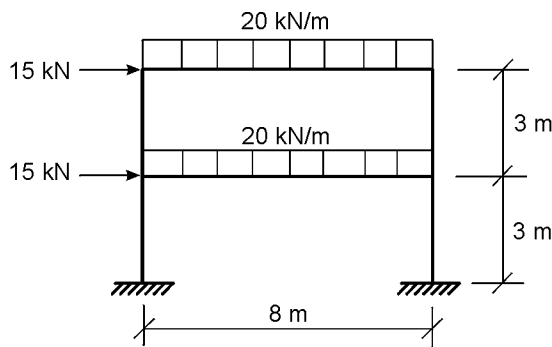
y luego, aplicando los valores pertinentes de este vector y la ecuación (12.5) a cada una de las subestructuras, se pueden calcular los grados de libertad no comunes. Por ejemplo, para los de la subestructura M:

$$[\delta_b^M] = -[K_{bb}^M]^{-1} [K_{bc}^M][\delta_c^M] + [K_{bb}^M]^{-1} [F_b^M] \quad (12.39)$$

Una vez obtenidos los desplazamientos de todos los nudos, es posible calcular las reacciones y fuerzas internas de todos los miembros por el procedimiento usual.

Ejemplo 12.5

Resuelva completamente, por el método matricial de los desplazamientos, el pórtico mostrado. Utilice subestructuración y condensación para reducir el tamaño de los sistemas de ecuaciones por resolver. Desprecie el efecto de las deformaciones axiales. $E = 18 \text{ kN/mm}^2$.

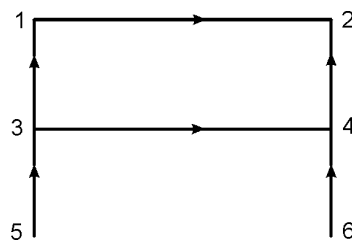


Vigas: $300 \times 400 \text{ mm}$

Columnas: $300 \times 300 \text{ mm}$

Solución

Se empieza por numerar los nudos y asignar sentido a los miembros



Luego se calculan las rigideces de los elementos:

$$EI_{\text{vigas}} = \frac{18 \times 10^6 \times 0.3 \times 0.4^3}{12} = 28800 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

$$EI_{\text{columnas}} = \frac{18 \times 10^6 \times 0.3^4}{12} = 12150 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$$

y los valores necesarios para evaluar la matriz de rigidez quedan así:

Elemento	$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$
Vigas	7200	14400	2700	675
Columnas	8100	16200	8100	5400

Las fuerzas de empotramiento resultan ser:

$$Y_{12}^F = Y_{21}^F = Y_{34}^F = Y_{43}^F = \frac{20 \times 8}{2} = 80.0 \text{ kN}$$

$$M_{12}^F = M_{34}^F = -M_{21}^F = -M_{43}^F = \frac{20 \times 64}{12} = 106.67 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Al despreciar las deformaciones axiales:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$$

$$u_2 = u_1$$

$$u_4 = u_3$$

Eliminando las filas y columnas correspondientes a los desplazamientos v en la ecuación (11.44) aplicada a las vigas:

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14400 & 7200 \\ 7200 & 14400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106.67 \\ -106.67 \end{bmatrix}$$

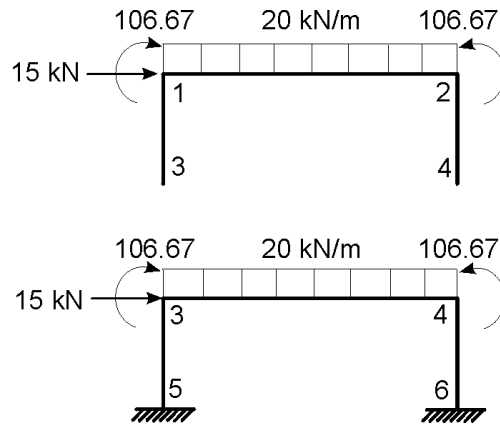
$$\begin{bmatrix} M_{34} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14400 & 7200 \\ 7200 & 14400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106.67 \\ -106.67 \end{bmatrix}$$

Para las columnas se hace la misma simplificación en la ecuación (11.55), que está referida a coordenadas generales:

$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & -8100 & -5400 & -8100 \\ -8100 & 16200 & 8100 & 8100 \\ -5400 & 8100 & 5400 & 8100 \\ -8100 & 8100 & 8100 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ u_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

y se escriben expresiones similares con los subíndices 4-2, 5-3 y 6-4.

Una posible partición en subestructuras es:



Al ensamblar la matriz de rigidez para la subestructura superior, resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ -106.7 \\ 106.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & -8100 & -8100 & -10800 & -8100 & -8100 \\ -8100 & 16200 & 0 & 8100 & 8100 & 0 \\ -8100 & 0 & 16200 & 8100 & 0 & 8100 \\ -10800 & 8100 & 8100 & 10800 & 8100 & 8100 \\ -8100 & 8100 & 0 & 8100 & 30600 & 7200 \\ -8100 & 0 & 8100 & 8100 & 7200 & 30600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ u_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

que define las matrices necesarias para resolver el problema, de acuerdo con la ecuación (12.31):

$$\begin{bmatrix} F_c^M \\ F_b^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc}^M & K_{cb}^M \\ K_{bc}^M & K_{bb}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_c^M \\ \delta_b^M \end{bmatrix}$$

Para aplicar la ecuación (12.34) es necesario evaluar un inverso y varios productos:

$$[K_{cc}^*] = [K_{cc}] - [K_{cb}] [K_{bb}]^{-1} [K_{bc}]$$

$$[K_{bb}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3645 \times 10^{-4} & -2.9240 \times 10^{-5} & -2.9240 \times 10^{-5} \\ -2.9240 \times 10^{-5} & 4.0861 \times 10^{-5} & -1.8743 \times 10^{-6} \\ -2.9240 \times 10^{-5} & -1.8743 \times 10^{-6} & 4.0861 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{bb}]^{-1} [\mathbf{K}_{bc}] = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0.86842 & 0.86842 \\ 0 & 0.09413 & -0.25202 \\ 0 & -0.25202 & 0.09413 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{cb}] [\mathbf{K}_{bb}]^{-1} [\mathbf{K}_{bc}] = \begin{bmatrix} 10800 & -8100 & -8100 \\ -8100 & 7800 & 4990 \\ -8100 & 4990 & 7800 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{cc}] - [\mathbf{K}_{cb}] [\mathbf{K}_{bb}]^{-1} [\mathbf{K}_{bc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8400 & -4990 \\ 0 & -4990 & 8400 \end{bmatrix}$$

Aplicando ahora la ecuación (12.35):

$$[\mathbf{R}_c] = [\mathbf{K}_{cb}] [\mathbf{K}_{bb}]^{-1} [\mathbf{F}_b] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0.86842 & 0.09413 & -0.25202 \\ 0.86842 & -0.25202 & 0.09413 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ -106.67 \\ 106.67 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (12.37):

$$[\mathbf{K}_{cc}^*] [\delta_c] = [\mathbf{F}_c - \mathbf{R}_c]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8400 & -4990 \\ 0 & -4990 & 8400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 15.00 \\ 0 + 23.90 \\ 0 - 49.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.00 \\ 23.90 \\ -49.95 \end{bmatrix}$$

Análisis de la subestructura inferior

Por analogía con la anterior:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ -106.67 \\ 106.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 & 8100 & 8100 \\ 8100 & 30600 & 7200 \\ 8100 & 7200 & 30600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Las otras filas y columnas sobran por valer cero.

Ensamblando ahora las subestructuras:

$$[\mathbf{K}_{cc}^*][\delta_c] = [\mathbf{F}_c] - [\mathbf{R}_c]$$

$$\begin{bmatrix} 10800 & 8100 & 8100 \\ 8100 & 39000 & 2210 \\ 8100 & 2210 & 39000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.00 \\ -82.77 \\ 56.72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -3.118 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 6.773 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}_{bc}][\delta_c] = \begin{bmatrix} -10800 & 8100 & 8100 \\ -8100 & 8100 & 0 \\ -8100 & 0 & 8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ -3.118 \times 10^{-3} \\ 6.733 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -69.61 \\ -62.61 \\ -31.90 \end{bmatrix}$$

$$[\delta_b] = [\mathbf{K}_{bb}]^{-1} [[\mathbf{F}_b] - [\mathbf{K}_{bc}][\delta_c]]$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{K}_{bb}]^{-1} \begin{bmatrix} 15 + 69.61 \\ -106.67 + 62.61 \\ 106.67 + 31.90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.782 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -4.534 \times 10^{-3} \text{ rad} \\ 3.271 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{bmatrix}$$

Conocidos los desplazamientos, se pueden calcular parcialmente las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_5 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5400 & -8100 \\ 8100 & 8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ -3.118 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 \text{ kN} \\ 12.10 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_6 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5400 & -8100 \\ 8100 & 8100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ 6.733 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30.36 \text{ kN} \\ 42.81 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Calculando ahora las fuerzas internas, para las vigas:

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14400 & 7200 \\ 7200 & 14400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.534 \times 10^{-3} \\ 3.271 \times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106.67 \\ -106.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64.93 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -92.21 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{34} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14400 & 7200 \\ 7200 & 14400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.118 \times 10^{-3} \\ 6.733 \times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 106.67 \\ -106.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.62 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -119.42 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

y para las columnas:

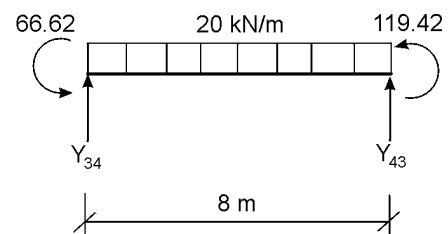
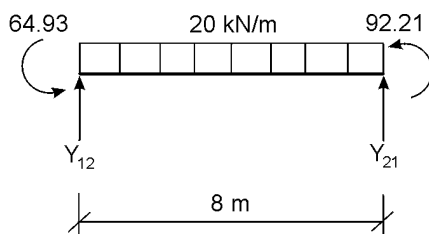
$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ M_{31} \\ X_{13} \\ M_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & -8100 & -5400 & -8100 \\ -8100 & 16200 & 8100 & 8100 \\ -5400 & 8100 & 5400 & 8100 \\ -8100 & 8100 & 8100 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ -3.118 \times 10^{-3} \\ 8.782 \times 10^{-3} \\ -4.534 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.46 \text{ kN} \\ -53.46 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -39.46 \text{ kN} \\ -64.93 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{42} \\ M_{42} \\ X_{24} \\ M_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & -8100 & -5400 & -8100 \\ -8100 & 16200 & 8100 & 8100 \\ -5400 & 8100 & 5400 & 8100 \\ -8100 & 8100 & 8100 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ 6.733 \times 10^{-4} \\ 8.782 \times 10^{-3} \\ 3.271 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54.47 \text{ kN} \\ -71.18 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 54.47 \text{ kN} \\ 92.22 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{35} \\ M_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 8100 \\ 8100 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ -3.118 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.36 \text{ kN} \\ -13.15 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{46} \\ M_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & 8100 \\ 8100 & 16200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.612 \times 10^{-3} \\ 6.733 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.36 \text{ kN} \\ 48.26 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Como se despreciaron las deformaciones axiales, los cortes en las vigas se hallan por estática:



$$Y_{12} = 20 \times 4 - \frac{92.21 - 64.93}{8} = 76.59 \text{ kN}$$

$$Y_{21} = 20 \times 8 - 76.59 = 83.41 \text{ kN}$$

$$Y_{34} = 20 \times 4 - \frac{119.42 - 66.62}{8} = 73.40 \text{ kN}$$

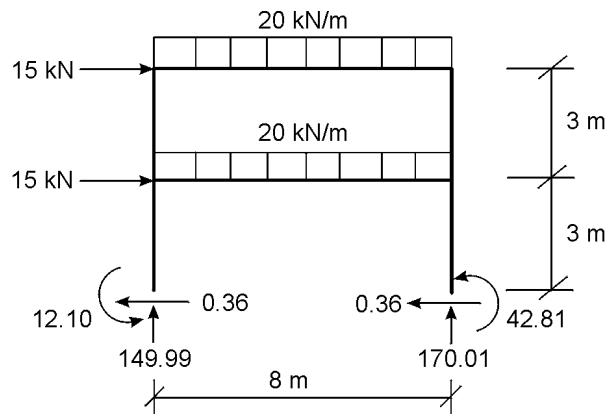
$$Y_{43} = 20 \times 8 - 73.40 = 86.60 \text{ kN}$$

Las reacciones verticales de las columnas serán la suma de las reacciones de las vigas a cada lado:

$$Y_{53} = Y_{12} + Y_{34} = 76.59 + 73.40 = 149.99 \text{ kN}$$

$$Y_{64} = Y_{21} + Y_{43} = 83.41 + 86.60 = 170.01 \text{ kN}$$

Verificación del equilibrio general:



$$\sum F_x = 15 + 15 + 0.36 - 30.36 = 0.00$$

$$\sum F_y = -20 \times 2 \times 8 + 149.99 + 170.0 = 0.00$$

$$\sum M_5 = -15 \times 6 - 15 \times 3 - 20 \times 16 \times 4 + 170.01 \times 8 + 42.81 = -0.01 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Las fuerzas axiales en las columnas se pueden hallar planteando el equilibrio de nudos y utilizando las reacciones de las vigas. Luego, si se desea, es posible averiguar los desplazamientos verticales de los nudos calculando los acortamientos axiales de las columnas con la ecuación $\delta = FL/AE$. El lector interesado podrá verificar que, siguiendo este procedimiento, se llega a estos valores:

$$v_1 = -4.196 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$v_2 = -4.693 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$v_3 = -2.778 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$v_4 = -3.148 \times 10^{-4} \text{ m}$$

12.6 APOYOS CON EJES DIFERENTES DE LOS ESTRUCTURALES

Hay muchas circunstancias prácticas en las cuales los ejes coordenados utilizados para describir el comportamiento en un nudo en las ecuaciones generales, deben ser diferentes de los ejes estructurales. Se habla entonces de ejes de nudo. Un caso tal es el de la cercha con apoyos inclinados de la figura 12.4.

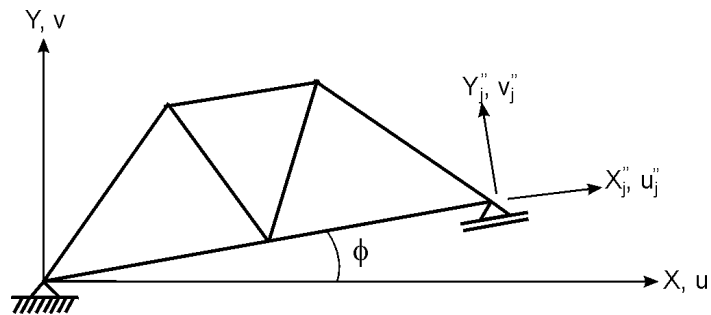


Figura 12.4 Cercha plana con un apoyo inclinado.

En este caso:

$$v_j'' = 0$$

restricción que no se puede tratar eliminando simplemente la fila y columna correspondientes a un grado de libertad de la matriz global original. Lo que sí se puede hacer es incorporar los grados de libertad referidos a ejes de nudo, u'' y v'' , en las ecuaciones globales, para luego igualar v'' a cero.

El proceso consiste entonces en pasar de un conjunto de ecuaciones referido totalmente a coordenadas globales:

$$[F] = [K][\delta] \quad (12.40)$$

a uno mixto con algunos elementos referidos a coordenadas globales y otros a coordenadas de nudo:

$$[F''] = [K''][\delta''] \quad (12.41)$$

Para hacerlo se aprovecha la ecuación de transformación de ejes vista antes, que es completamente general, como se observará más adelante:

$$[K''] = [T]^T [K][T] \quad (12.42)$$

Pero ahora la matriz de transformación es una matriz cuadrada que tiene las siguientes características: a) unos en las diagonales y ceros en el resto de todas las filas y columnas que no cambian y, b) cosenos direccionales apropiados en todos los pares de grados de libertad alterados (uno global y otro de nudo). En efecto, definiendo:

$$[\delta] = [T][\delta''] \quad (12.43)$$

se ve que las dobles comillas, que ahora representan el sistema mixto, equivalen al sistema general de la ecuación (11.23a) y que δ , K y F hacen el papel de locales en dicha ecuación.

$$[F] = [K][T][\delta''] \quad (12.44)$$

Pero también:

$$[F] = [T][F''] \quad (12.45)$$

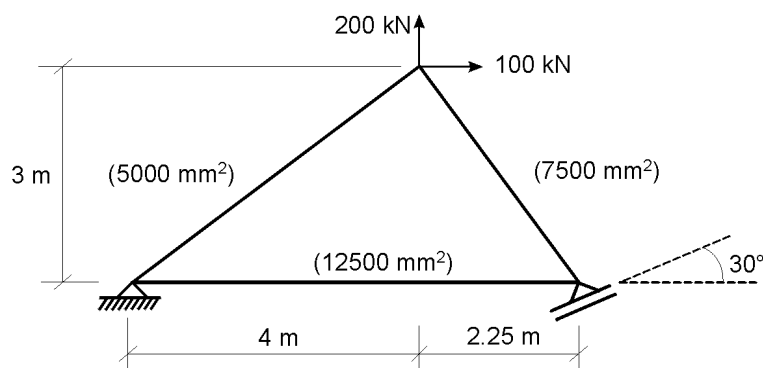
Despejando y reemplazando:

$$[F''] = [T]^T [F] = [T]^T [K][T][\delta''] \quad (12.46)$$

con lo cual queda demostrada la validez de la ecuación (12.42). Se puede ir por partes o hacer de una vez el triple producto. Después de plantear la ecuación se eliminan la fila y la columna correspondientes al grado de libertad de nudo que sea nulo y se resuelve para $[\delta'']$.

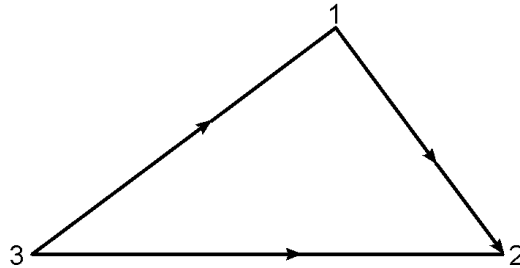
Ejemplo 12.6

Resuelva la cercha plana de la figura cuyo apoyo derecho forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. $E = 20.4 \text{ kN/mm}^2$.



Solución

Se adoptan las siguientes nomenclatura de nudos y orientación de miembros.



El cuadro de propiedades básicas queda entonces así:

Barra	θ	AE/L	$\lambda = \cos \theta$	$\mu = \sin \theta$	$AE/L \lambda^2$	$AE/L \mu^2$	$AE/L \lambda\mu$
1-2	-53.13	4080	0.6	-0.8	1468.8	2611.2	-1958.4
3-1	36.9	2040	0.8	0.6	1305.6	734.4	979.2
3-2	0	4080	1.0	0	4080.0	0	0

y con fundamento en ellas se plantea la ecuación matricial básica para los tres miembros:

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ X_{21} \\ Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1468.8 & -1958.4 & -1468.8 & 1958.4 \\ -1958.4 & 2611.2 & 1958.4 & -2611.2 \\ -1468.8 & 1958.4 & 1468.8 & -1958.4 \\ 1958.4 & -2611.2 & -1958.4 & 2611.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

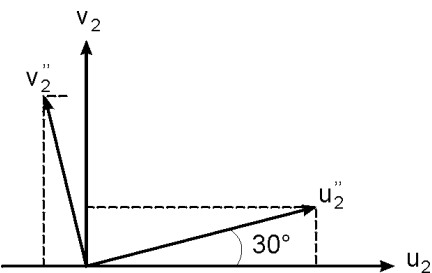
$$\begin{bmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ X_{13} \\ Y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1305.6 & -979.2 \\ -979.2 & -734.4 \\ 1305.6 & 979.2 \\ 979.2 & 734.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ X_{23} \\ Y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4080.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4080.0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Ensamblando la parte correspondiente a los nudos libres:

$$\begin{bmatrix} X_1 = 100 \\ Y_1 = 200 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2774.4 & -979.2 & -1468.8 & 1958.4 \\ -979.2 & 3345.6 & 1958.4 & -2611.2 \\ -1468.8 & 1958.4 & 5548.8 & -1958.4 \\ 1958.4 & -2611.2 & -1958.4 & 2611.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando ahora la ecuación de transformación para el nuevo sistema:

$$[\delta] = [T][\delta'']$$


$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8660 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0.8660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2'' \\ v_2'' \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (12.46):

$$[F''] = [T]^T [K][T][\delta''] =$$

$$\begin{bmatrix} X_1 = 100 \\ Y_1 = 200 \\ X_2'' = 0 \\ Y_2'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2774.4 & -979.2 & -292.8 & 2430.4 \\ -979.2 & 3345.6 & 390.4 & -3240.5 \\ -292.8 & 390.4 & 3118.2 & -2251.1 \\ 2430.4 & -3240.5 & -2251.1 & 5041.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2'' \\ v_2'' = 0 \end{bmatrix}$$

Despejando de la porción superior:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2774.4 & -979.2 & -292.8 \\ -979.2 & 3345.6 & 390.4 \\ -292.8 & 390.4 & 3118.2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.63445 \\ 0.78805 \\ -0.039086 \end{bmatrix} \text{mm}$$

y reemplazando estos valores en la parte inferior:

$$[Y_2''] = [2430.4 \quad -3240.5 \quad -2251.1] \begin{bmatrix} 0.63445 \\ 0.78805 \\ -0.039086 \end{bmatrix} = -92.4 \text{ kN}$$

Utilizando la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0.8660 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.039086 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.033848 \\ -0.019543 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Las reacciones en el apoyo 2, en la dirección de los ejes originales de la estructura, se pueden obtener con la parte inferior de la primera matriz de la página 638, o simplemente descomponiendo la fuerza Y_2'' , como se indica a continuación:

$$X_2 = -Y_2'' \sin \theta = -(-92.4) \times 0.5000 = 46.2 \text{ kN}$$

$$Y_2 = Y_2'' \cos \theta = -92.4 \times 0.8660 = -80.0 \text{ kN}$$

Tomando de nuevo de las matrices originales la parte correspondiente al apoyo 3 y ensamblándolas:

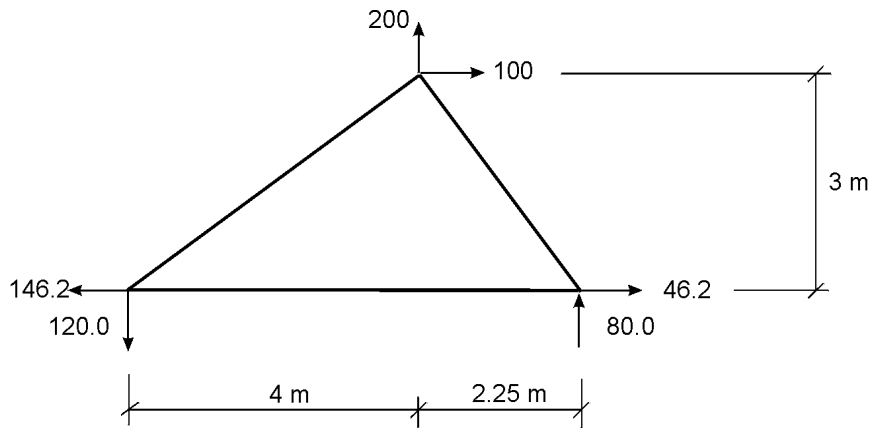
$$\begin{bmatrix} X_3 = X_{31} + X_{32} \\ Y_3 = Y_{31} + Y_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1305.6 & -979.2 & -4080.0 & 0 \\ -979.2 & -734.4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores obtenidos de desplazamientos y efectuando las operaciones pertinentes, se logran las reacciones en dicho apoyo:

$$X_3 = -146.2 \text{ kN}$$

$$Y_3 = -120.0 \text{ kN}$$

Verificando el equilibrio general:



$$\sum F_x = 100.0 + 46.2 - 146.2 = 0.0$$

$$\sum F_y = 200.0 - 80.0 - 120.0 = 0.0$$

$$\sum M_3 = 200 \times 4 - 100 \times 3 - 80.0 \times 6.25 = 0.0$$

Las fuerzas internas se hallan con la ecuación:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} \lambda & \frac{AE}{L} \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j & u_i \\ v_j & v_i \end{bmatrix}$$

que al aplicarla conduce a:

$$S_{31} = 2040 \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.63445 \\ 0.78805 \end{bmatrix} = 200.0 \text{ kN (T)}$$

$$S_{12} = 4080 \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.033848 \\ -0.019543 \end{bmatrix} = 100.0 \text{ kN (T)}$$

$$S_{32} = 4080 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0033848 \\ -0.0019543 \end{bmatrix} = -13.8 \text{ kN (C)}$$

El lector interesado podrá comprobar el equilibrio de todos los nudos, con lo cual queda terminado el problema.

12.7 REANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA

El diseño de estructuras indeterminadas involucra siempre un proceso de interacción en que el analista, de acuerdo con su experiencia o con recomendaciones empíricas, supone unas dimensiones de los miembros antes de efectuar un primer análisis. Obtenidos los resultados de éste verifica si las dimensiones escogidas resultan apropiadas o no, bien sea por defecto o por exceso, con base en los esfuerzos y desplazamientos admisibles, y si no lo son, cambia las de los miembros en que esto sucede y repite el análisis una y otra vez hasta quedar satisfecho. Mientras con técnicas manuales el proceso anterior se repetía máximo en un par de ocasiones, el advenimiento de la computadora ha hecho posible hacerlo muchas más lográndose, si se desea, una verdadera optimización.

Como el análisis de estructuras grandes es, en general, relativamente demorado, se han desarrollado técnicas para tener en cuenta pequeños cambios en el diseño, sin que haya que recurrir nuevamente a un análisis completo. El lector interesado podrá encontrar mayor información en McGuire y Gallagher (referencia 12.2) y un resumen de ella en otra obra del autor (referencia 12.4).

12.8 MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Se denomina método de la matriz de transferencia a un enfoque del análisis matricial que utiliza una forma mixta de fuerzas y desplazamientos en un mismo vector como ecuación básica y transfiere los parámetros que describen el comportamiento estructural (fuerzas y desplazamientos nodales) de un extremo de una estructura *lineal* al otro.

Su ventaja radica en que el tamaño del sistema de ecuaciones por resolver es muy pequeño si se lo compara con el producido por el método de la rigidez pero, por otra parte, requiere efectuar secuencialmente muchas operaciones con matrices pequeñas, lo cual constituye una desventaja.

Por estructura *lineal* se entiende aquella formada por miembros cuyos ejes se extienden de un extremo a otro de toda la estructura, siguiendo una línea. Los arcos, los cables y algunos pórticos especiales se clasifican como tales.

La base del método radica en caracterizar el estado de fuerzas y desplazamientos en el extremo de un miembro por el *vector de estado*:

$$\begin{bmatrix} F \\ \delta \end{bmatrix}$$

y en relacionar el vector del extremo final, correspondiente al nudo $i + 1$, con el del extremo inicial, nudo i , mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \delta_{i+1} \end{bmatrix} = [\Omega] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \quad (12.47)$$

en donde $[\Omega]$ es también una forma mixta de la relación fuerza-desplazamiento del elemento. En la referencia 12.2 se demuestra que:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ [\Phi^T]^{-1}[d] & -[\Phi^T]^{-1} \end{bmatrix} \quad (12.48)$$

en donde $[d]$ es la matriz de flexibilidad del elemento, deducida para el caso en que éste se apoya en el punto $i + 1$, y $[\Phi]$ contiene los coeficientes de las ecuaciones de equilibrio $[\mathbf{F}_{i+1}] = [\Phi] [\mathbf{F}_i]$.

Una explicación detallada del método está fuera del alcance de este texto. El lector interesado podrá hallarla en la referencia citada.

12.9 SIMPLIFICACIONES PARA PÓRTICOS Y PARRILLAS ORTOGONALES

Al escribir programas para analizar pórticos y parrillas ortogonales se pueden simplificar considerablemente tanto la entrada de datos de la estructura como la formulación matemática propiamente dicha. En efecto, es relativamente simple formular la programación automática de la numeración de nudos y miembros y la orientación del eje local X de estos últimos, que como se dijo va del nudo inicial al nudo final. Debe recordarse que para lograr máxima eficiencia y disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez, en edificios altos la numeración debe hacerse siguiendo una secuencia horizontal, mientras que en los largos y bajos la secuencia recomendable es la vertical.

En cuanto a la formulación del modelo matemático, ya no será necesario introducir matrices de transformación sino dar una instrucción que, con base en la orientación de cada miembro, calcule su matriz de rigidez teniendo en cuenta, de una vez, los ejes estructurales. Dichas matrices están definidas por las ecuaciones (11.53), (11.55), (11.70), (11.71), (11.74), (11.75) y (11.76).

12.10 VIGAS CON MIEMBROS ACARTELADOS

Todas las matrices desarrolladas en el capítulo 11 parten de la premisa de que los miembros estructurales son prismáticos, es decir, de sección transversal constante en toda su longitud. Sin embargo, vigas de sección transversal variable se utilizan frecuentemente en puentes y ocasionalmente se diseñan pórticos con vigas y columnas no prismáticas.

Por eso conviene evaluar las matrices de rigidez de dichos miembros y para ello resultan muy útiles procesos numéricos como el de Newmark (referencias 12.4 a 12.8), que se explicó en el numeral 9.4. El mismo método sirve también para calcular las fuerzas de empotramiento generadas por las cargas, pues dejan de ser válidas las fórmulas conocidas para miembros prismáticos y que, como se recordará, son indispensables para el análisis. La ventaja de programar dicho cálculo en lugar de utilizar tablas como las publicadas por la Portland Cement Association (referencia 12.9), o gráficos como los presentados por Fernández Casado (referencia 12.10) Leontovitch (referencia 12.11), y Manning (referencia 12.12), radica en la facilidad de incorporarlos como subrutinas en programas ya desarrollados de análisis matricial, para utilizar sus resultados en lugar de las matrices y fuerzas de empotramiento correspondientes a miembros prismáticos. El resto del procedimiento –ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura y solución de las hipótesis de carga– no necesitan cambio.

En el numeral 9.4.6 el autor explicó la programación del método de Newmark aplicado a elementos acartelados y en la referencia 12.4 dio el listado de un programa, escrito en BASIC, que permite hallar las rigideces absolutas, coeficientes de transmisión y momentos por desplazamiento de esta clase de miembros, necesarios en los métodos de Cross modificado, Kani y Takabeya vistos en los capítulos 6, 7 y 8. A partir de ellos se obtienen los términos de su matriz de rigidez. El programa calcula también los momentos de empotramiento para carga uniformemente distribuida y para una carga concentrada arbitrariamente colocada. En el disco adjunto se incluye una versión del mismo en QUICK BASIC. Como ya se dijo el programa, aunque sólo considera acartelamientos rectos, con muy poco esfuerzo se puede ampliar para que incluya otros tipos de variación en sección.

12.11 PROBLEMAS ESPECIALES

La teoría presentada en los capítulos anteriores es aplicable a estructuras sin problemas especiales, pues se basa en los supuestos de que son aplicables el principio de superposición y la teoría de primer orden, y que se pueden despreciar las deformaciones causadas por fuerzas cortantes, lo mismo que la interacción entre las fuerzas axiales y las que producen flexión. Tampoco se ha considerado el efecto que tiene la rigidez de los nudos en las fuerzas internas de los pórticos ni la posibilidad de que las cargas no pasen por los centros de corte de los respectivos miembros.

El calculista debe considerar cuidadosamente la importancia que tienen estos factores en la estructura que está analizando y, si es el caso, modificar las matrices de rigidez para tenerlos en cuenta. Weaver y Gere (referencia 12.1) señalan cómo hacerlo.

12.12 ALGUNOS PROGRAMAS COMERCIALES DE USO COMÚN EN AMÉRICA LATINA

12.12.1 Desarrollo histórico

Siendo el análisis estructural una de las primeras ramas de la ingeniería beneficiadas con el advenimiento de la computadora digital, pronto se desarrollaron programas comerciales que pusieron a disposición de las firmas especializadas esta nueva y poderosa herramienta. Tales programas fueron desarrollados en universidades con el patrocinio de los fabricantes de equipo –como la compañía IBM–, interesados en encontrarles mercados adicionales. De esta época es su programa STRESS (*Structural Engineering System Solver*), que marcó un hito en el empleo del computador para analizar estructuras (referencias 12.13 y 12.14). Otros programas ampliamente utilizados fueron los desarrollados por la Portland Cement Association, el programa TABS (*Tridimensional Analysis of Building Systems*), que utilizaba el efecto de diafragma para distribuir las fuerzas horizontales a los diferentes pórticos y permitía hacer análisis dinámicos (referencia 12.15). A este programa siguió una versión modificada denominada ETABS que infortunadamente sólo podía ser utilizada en computadoras de gran memoria (referencia 12.16). En ese entonces hicieron su aparición los primeros programas para analizar estructuras por el método de los elementos finitos, como SAP IV (referencia 12.17).

En cuanto al uso en Colombia de microcomputadores en ingeniería estructural, los primeros cursos fueron ofrecidos por el autor en la Universidad Nacional en 1982, con el patrocinio del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), y de la Seccional Colombiana del Instituto Americano del Concreto (ACI). Para dichos cursos se desarrolló precisamente el sistema ANALEST (Análisis de Estructuras), cuya versión para ambiente WINDOWS se entrega en el disquete adjunto.

El lector interesado podrá encontrar en la referencia 12.4 un resumen más detallado del desarrollo histórico de la computación electrónica en nuestro medio.

Con el avance vertiginoso del poder de los microcomputadores, compañías especializadas en el desarrollo de programas de soporte han mejorado extraordinariamente esos programas pioneros y desarrollado muchos nuevos. El énfasis ahora se hace en aprovechar al máximo sus capacidades gráficas tanto para la entrada y verificación de los datos como para la exhibición de los resultados.

Aunque no corresponde a un programa comercial propiamente dicho, vale la pena mencionar el programa CAL-91 (referencia 12.18), que se utiliza con fines didácticos en la enseñanza del análisis matricial y de la dinámica estructural. Un sistema más sofisticado pero con el mismo fin es el SÓCRATES (referencia 12.19), desarrollado en la Universidad de Cornell. Otros conocidos por el autor son los de la serie SOFTEDUCATIVO (referencia 12.20), del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), y el EULER, un programa didáctico de elementos finitos escrito por Linero (referencia 12.21), en la Universidad Nacional de Colombia.

Para mayor ilustración se presentan a continuación, en forma resumida, las características de algunos de los principales programas a que se ha hecho referencia en los párrafos anteriores.

12.12.2 STRESS

El programa STRESS (*Structural Engineering System Solver*), (referencias 12.13 y 12.14), fue desarrollado por el profesor Steven J. Fenves para la IBM, en MIT, entre 1962 y 1963. STRESS tiene dos partes: un lenguaje que describe el problema y un procesador que interpreta este lenguaje y produce las respuestas solicitadas. Fue escrito en FORTRAN y Assembler. Está muy bien concebido y constituyó el primer lenguaje en ingeniería estructural orientado hacia el problema, pues éste se describe en términos similares a los que se utilizarían hablando con otro calculista. En consecuencia, el usuario no necesita tener conocimientos de programación propiamente dicha.

Permite efectuar análisis lineales y elásticos de los seis tipos de estructuras reticulares: vigas continuas, cerchas planas y en el espacio, pórticos planos y espaciales y parrillas en un plano, cargadas estáticamente y compuestas por miembros prismáticos. Con él es posible analizar efectos térmicos o de errores de fabricación y estipular en cada nudo si los miembros están conectados rígidamente o mediante articulación. También permite liberar restricciones en los apoyos. La solución da las fuerzas internas en los extremos de los miembros, las reacciones y los desplazamientos tanto de los nudos como de los apoyos.

Su influencia ha sido muy grande en los casi 40 años transcurridos desde su aparición; de hecho ANALEST, como muchos otros programas, sigue fundamentalmente los mismos pasos. La eficiencia del algoritmo utilizado, basado en el método matricial de la rigidez, se puede juzgar por su capacidad: 125 nudos, 250 elementos y 6 hipótesis de carga, extraordinaria si se tiene en cuenta que estaba diseñado para una máquina con sólo 8 KB de memoria principal.

12.12.3 CAL - 91

CAL - 91 (referencia. 12.18), es la última versión de una serie de programas desarrollados por el profesor Edward L. Wilson en la Universidad de California, en Berkeley, para el aprendizaje del análisis estructural con ayuda del computador.

La idea básica al acometer el proyecto fue cerrar la brecha entre los métodos tradicionales de enseñanza del análisis estructural y el uso de programas automatizados de análisis. Los autores esperaban con ello que los ingenieros pudieran entender mejor la teoría y las aproximaciones utilizadas en los programas modernos de análisis estructural.

El primer programa, desarrollado en 1960 con la dirección del profesor Ray Clough, simplemente interpretaba las instrucciones para efectuar operaciones matriciales. Esta versión tiene cambios importantes con respecto a la anterior, CAL-78, pues fue reescrita en gran parte y se le adicionaron nuevas órdenes.

El programa se diseñó para que interpretara una secuencia de órdenes suministradas por el usuario, bien en forma interactiva mediante el teclado o a partir de la lectura de un archivo de datos almacenado en disco. Las órdenes permiten efectuar operaciones

matriciales y análisis estructurales por el método de ensamblaje directo de la matriz de rigidez, tanto estáticos como dinámicos.

Está escrito en FORTRAN 77 y puede correrse en equipos grandes o en pequeños micro-computadores. En la referencia dada están listados todos los programas para facilitarle al usuario la verificación de los métodos numéricos empleados. Por consiguiente, le queda muy fácil modificarlos o añadirles nuevas órdenes.

El autor considera a CAL-91 muy útil en el aprendizaje del análisis matricial de estructuras y lo recomienda sin vacilaciones a quienes tienen la responsabilidad de enseñarlo.

12.12.4 GT-STRU DL

El programa STRU DL (*Structural Engineering Analysis and Design Language*) fue desarrollado también para la IBM, en MIT, y estuvo disponible en 1966. Forma parte del paquete ICES (*Integrated Civil Engineering System*) desarrollado por dicha empresa para cubrir todos los campos de la ingeniería. Su propósito es asistir al ingeniero estructural en el proceso de diseño. Posteriormente fue mejorado en el Instituto de Tecnología de Georgia (referencia 12.22).

Es aplicable a un amplio espectro de tipos estructurales compuesto por cerchas, pórticos o elementos finitos. Permite utilizar cualquier combinación de estos elementos con varios procedimientos de análisis y diseño. La entrada de datos es sumamente fácil, pues cuenta con un preprocesador para hacerla más eficiente; de esta manera, con algunas instrucciones muy simples, puede disminuirse considerablemente el número de datos por entrar.

A diferencia de STRESS, GT-STRU DL permite diseñar los miembros de estructuras aporricadas. Si éstas son de hormigón reforzado, diseña vigas, losas macizas y columnas. El calculista puede controlar el diseño fijando límites en los parámetros: por ejemplo, el ancho o altura de los miembros o su cuantía. Como resultado se obtienen las dimensiones transversales de los miembros y su refuerzo longitudinal. Otra alternativa es especificar el diseño por completo, en cuyo caso el programa verifica que cumpla todas las condiciones impuestas por el código vigente sobre flexión, corte, adherencia y deflexión.

Si se trata de estructuras de acero, GT-STRU DL contiene un procedimiento de selección que utiliza una tabla con los perfiles laminados estándares y el código del Instituto Americano de Construcción en Acero (AISC). Acá también el calculista puede estipular restricciones a los perfiles usados.

Por último, GT-STRU DL ofrece la posibilidad de efectuar análisis no lineales de pórticos, placas y cascarones de poca profundidad, además de análisis de pandeo lineal, análisis dinámico y optimización de pórticos.

12.12.5 ETABS

El programa ETABS (*Three Dimensional Analysis of Building Systems - Extended Version*) (referencia 12.16), es una extensión del programa TABS (referencia 12.15), que

permite analizar pórticos tridimensionales con entera compatibilidad. Fue desarrollado para analizar linealmente edificios compuestos por pórticos y muros de cortante, sometidos tanto a cargas estáticas como sísmicas.

El edificio es idealizado mediante un sistema de pórticos y elementos de muros de corte independientes, interconectados por losas de piso que constituyen diafragmas rígidos en su propio plano. En cada columna se incluyen deformaciones axiales, por flexión y por corte. Admite vigas acarteladas y se tienen en cuenta tanto sus deformaciones por flexión como las debidas a corte. También pueden considerarse paneles de cortante. La formulación incluye anchos finitos de vigas y columnas y no está limitada a configuraciones simétricas y rectangulares de los edificios. El procedimiento de solución modifica geoméricamente la rigidez para incluir directamente el efecto P-Delta. Los pórticos y los muros de cortante se consideran como subestructuras en la formulación básica; con esto puede minimizarse la entrada de datos y reducirse el esfuerzo computacional.

Es posible indicar tres condiciones de carga verticales y dos laterales que actúan estáticamente, pero también pueden combinarse las cargas estáticas con una sísmica que se especifica como una aceleración del terreno en función del tiempo o como el espectro de aceleraciones de respuesta del sismo. En tal caso se evalúan tres modos de vibración.

Sus capacidades de análisis estático para cargas verticales incluyen las debidas a peso propio y a cargas superpuestas concentradas o distribuidas. En cuanto a análisis de cargas laterales genera automáticamente las sísmicas prescritas por el *Uniform Building Code* (UBC), o el *Applied Technology Council* (ATC), y las de viento estipuladas por el UBC. También permite que el calculista especifique sus propias cargas laterales. Como respuesta se obtienen los desplazamientos estáticos de los nudos y las fuerzas internas en los miembros. El análisis dinámico incluye la determinación de períodos y formas modales y el análisis por cargas sísmicas multidireccionales con base en el espectro de respuesta o en una historia de carga dada como función del tiempo. Así se obtienen los desplazamientos y fuerzas internas dinámicas.

12.12.6 SAP2000

SAP2000 es la última versión, para microcomputadores, del programa de análisis estructural SAP, desarrollado por el profesor Edward L. Wilson, para el análisis tridimensional, estático y dinámico de estructuras por el método de los elementos finitos. El programa original fue diseñado en forma tal que pudiera ser modificado y ampliado por el usuario. Aunque tiene capacidad para analizar estructuras muy grandes, no pierde eficiencia al resolver problemas pequeños y su configuración en subrutinas permite adaptarlo fácilmente a máquinas de poca capacidad. SAP2000 está completamente integrado al ambiente WINDOWS de Microsoft, lo cual facilita la entrada de datos y la interpretación de resultados.

La versión SAP2000 PLUS tiene adicionalmente opciones para el análisis de puentes, un mayor número de elementos finitos y de análisis en función del tiempo. Por otra parte, SAP2000 No Lineal permite hacer análisis en el campo inelástico.

Todos ellos tienen módulos que posibilitan los diseños en acero y en concreto reforzado, en conformidad con los más importantes códigos vigentes estadounidenses, canadienses y europeos.

12.12.7 COMBAT

COMBAT (*Comprehensive Building Analysis Tool*) (referencia 12.23) es un programa desarrollado principalmente para ser usado por calculistas en el análisis lineal de edificios sometidos a cargas gravitacionales, sísmicas o eólicas. Incorpora avances recientes en la técnica de los elementos finitos y a pesar de su sofisticación está muy orientado hacia el usuario.

Entre sus características más sobresalientes están la posibilidad de modelar con precisión el comportamiento tridimensional del edificio, la capacidad de modelar diversas losas de entrepiso (flexibles, perforadas y rígidas en su plano), el poder incorporar muros de corte con aperturas (mediante el empleo de subestructuras) y la modelación explícita de cimentaciones flexibles. Todas ellas representan mejoras sobre programas previamente existentes, como TABS y ETABS, cuyos supuestos básicos en ocasiones no podían acomodarse a las nuevas formas arquitectónicas y presentaban limitaciones para un número cada vez mayor de configuraciones estructurales. Además se buscaba que fuera más fácil de utilizar que los ya citados.

Se pueden aplicar cargas estáticas verticales y horizontales y generar automáticamente las cargas sísmicas de acuerdo con el UBC. También acepta cargas dinámicas, bien sea del espectro de respuesta o de historia en función del tiempo.

12.12.8 RCBE

El programa RCBE (*Analysis & Design of Reinforced Concrete Buildings for Earthquake and Wind Forces*) (referencia 12.24) es la última versión del desarrollado inicialmente por los ingenieros colombianos Abel F. Cepeda y Ricardo E. Barbosa, que puede considerarse como representativo de la tendencia mundial a simplificar los programas de uso diario en las oficinas de diseño, aprovechando técnicas de interacción en combinación con las capacidades gráficas de los microcomputadores. Opera en ambiente WINDOWS 95.

Genera automáticamente las fuerzas sísmicas de acuerdo con los principales códigos norteamericanos y algunos latinoamericanos, entre ellos *las Normas Colombianas NSR-98*, y las correspondientes combinaciones de carga prescritas por ellos. Permite, entre otras capacidades, modelar en forma precisa los efectos torsionales, distribución automática de las cargas de piso a las vigas y muros adyacentes, y análisis de cargas por incrementos en forma automática para simular la secuencia de construcción en edificios altos.

El programa muestra gráficamente las derivas de piso, permitiendo su verificación inmediata con respecto al código seleccionado. Diseña en forma automática los muros de cortante y sus elementos de borde en zonas de alta amenaza sísmica. Tiene elementos finitos diferentes para diferentes clases de muros: estructurales, portantes y divisorios, lo

cual permite modelar mejor los edificios de concreto y detalla, en forma automática, el refuerzo de sus vigas.

12.12.9 STAAD/Pro

El programa STAAD/Pro (*Structural Analysis and Design for Professionals*), referencia 12.25, permite efectuar análisis y diseños estructurales, en ambiente WINDOWS, estático o dinámico, lineal y no lineal.

La entrada de datos y la interpretación de resultados se facilitan por sus poderosas capacidades gráficas. Tiene herramientas de verificación y extensiones útiles para diseñar cimentaciones, muros de contención y edificaciones en mampostería. En el caso de estructuras de acero, no sólo permite su diseño sino además producir los planos de taller y los de montaje.

REFERENCIAS

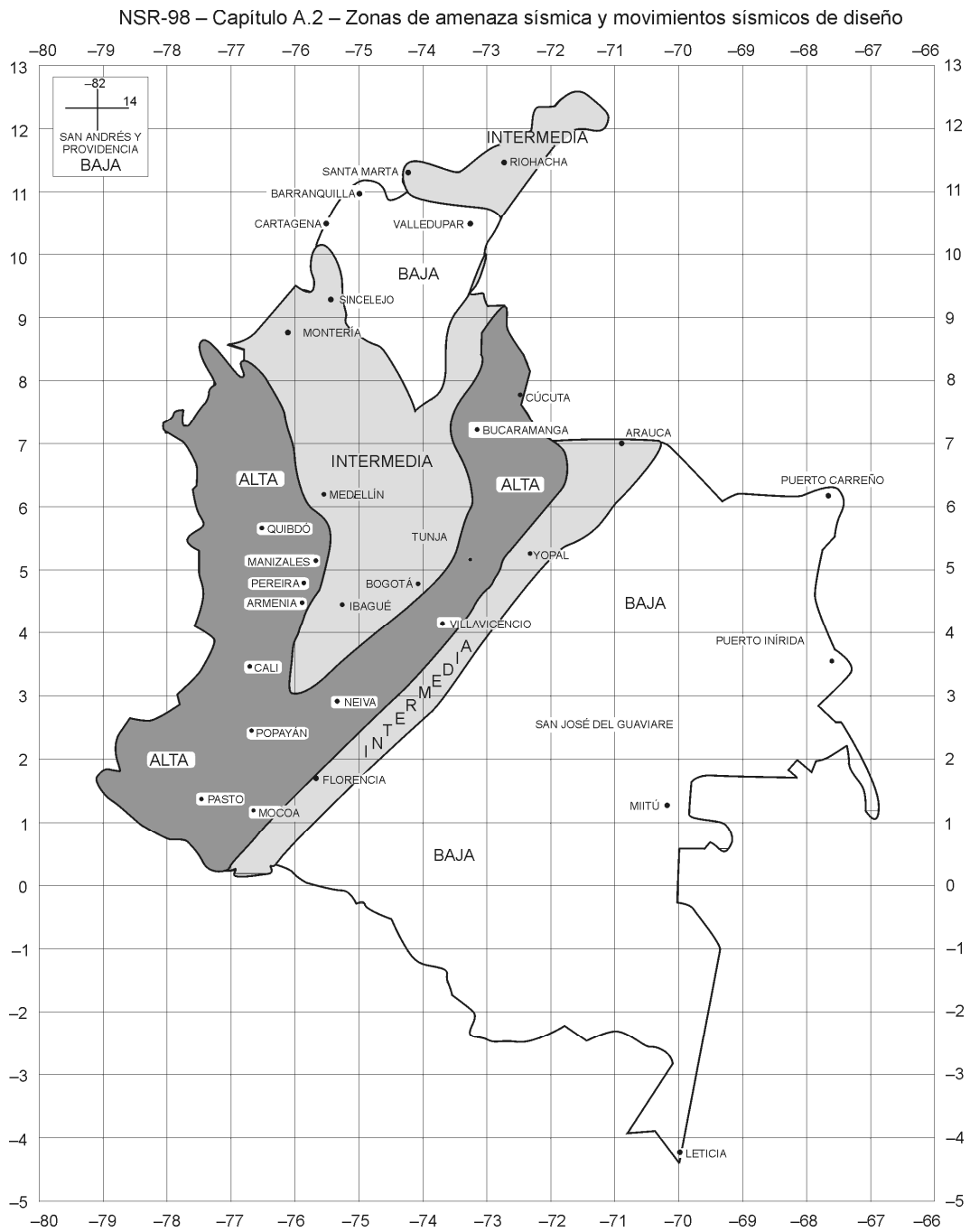
- 12.1 Weaver Jr., W. y Gere, J.M. - *Matrix Analysis of Framed Structures*, 3rd ed., D. Van Nostrand Reinhold, 1990.
- 12.2 McGuire, W. y Gallagher, R.H. - *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 1979.
- 12.3 García, L.E. - *Idealización estructural para el caso de cargas sísmicas*. Memorias de las Primeras Jornadas Estructurales, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, 1975.
- 12.4 Uribe, J. - *Microcomputadores en ingeniería estructural*, Universidad Nacional de Colombia y ECOE Ediciones, 1995.
- 12.5 Uribe, J. - *Análisis de estructuras*, Ediciones Uniandes, 1991; 3^a ed., Ediciones Uniandes y ECOE Ediciones, 1993.
- 12.6 Newmark, N.M. - *Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments, and Buckling Loads*, Transactions, American Society of Civil Engineers, Paper N° 2202, 1942.
- 12.7 Godden, W.G. - *Numerical Analysis of Beam and Column Structures*, Prentice-Hall, 1965.
- 12.8 Uribe, J. - *El método de Newmark y su aplicación al cálculo de la matriz de rigidez de miembros acartelados*, Cuartas Jornadas Estructurales de la Ingeniería Colombiana, Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá, noviembre de 1981.
- 12.9 Portland Cement Association, *Handbook of Frame Constants*, 1958.

- 12.10 Fernández Casado, C. y Fernández Casado, J.L. - *Cálculo de estructuras reticulares*, Dossat, 1967.
- 12.11 Leontovitch, V. - *Pórticos y arcos*, Compañía Editorial Continental, 1961.
- 12.12 Manning, G.P. - *The Displacement Method of Frame Analysis*, Concrete Publications Limited, 1952.
- 12.13 Fenves, S.J., Logher, R.D., Mauch, S.P. y Reinschidt, K.F. - *STRESS: A User's Manual*, Cambridge, MIT Press, 1964.
- 12.14 Uribe, J. - *Aplicación del programa STRESS al análisis de estructuras*, Memorias del Segundo Seminario Regional, Círculo Nortesantandereano de Ingeniería Civil, Cúcuta, octubre de 1979.
- 12.15 Wilson, E.L. y Dovey, H.H. - *Three Dimensional Analysis of Building Systems (TABS)*, Report EERC 72-8, Universidad de California, Berkeley, 1972.
- 12.16 Wilson, E.L., Hollings, J.P. y Dovey, H.H. - *Three dimensional Analysis of Building Systems, Extended Version (ETABS)*, Report EERC 75-13, University of California, Berkeley, 1975.
- 12.17 Bathe, K.J., Wilson, E.L. y Peterson, F.E. - *SAP-IV: A Structural Analysis Program For Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Report EERC 73-11, University of California, Berkeley, 1973.
- 12.18 Wilson, E.L.- *CAL 91: Computer Assisted Learning of Static and Dynamic Analysis of Structural Systems*, University of California, Berkeley, 1991.
- 12.19 Project SOCRATES - *SOCRATES: Study of Complementary Research and Teaching in Engineering Science, User's Manuals*, Department of Structural Engineering and Computer Aided Design Instructional Facility, College of Engineering, Cornell University, Ithaca, 1987.
- 12.20 *Softeducativo: programas educativos para análisis de vigas y pórticos por métodos matriciales*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1994.
- 12.21 Dorian, L.L. - *Euler: programa didáctico de elementos finitos*, Universidad Nacional de Colombia, 1999.
- 12.22 GTICES Systems Laboratory - *GT-STRUDL: Integrated CAE System for Structural Engineering Analysis and Design*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1987.

- 12.23 Computech Engineering Services - *COMBAT: A Comprehensive Building Analysis Tool*, Berkeley, 1983.
- 12.24 Barbosa, R.E. - *RCBE: Analysis & Design of Reinforced Concrete Buildings for Earthquake and Wind Forces*, Structural & Geotechnical Engineering, Davie, Florida, 1997.
- 12.25 *STAAD/Pro: Structural Analysis and Design for Professionals*, Research Engineers, Yerba Linda, California, 1998.

APÉNDICE A AMENAZA SÍSMICA EN COLOMBIA

Mapa A.1.1 Zonas de amenaza sísmica



Mapa A.1.2 Mapa de valores de A_a

NSR-98 – Capítulo A.2 – Zonas de amenaza sísmica y movimientos sísmicos de diseño

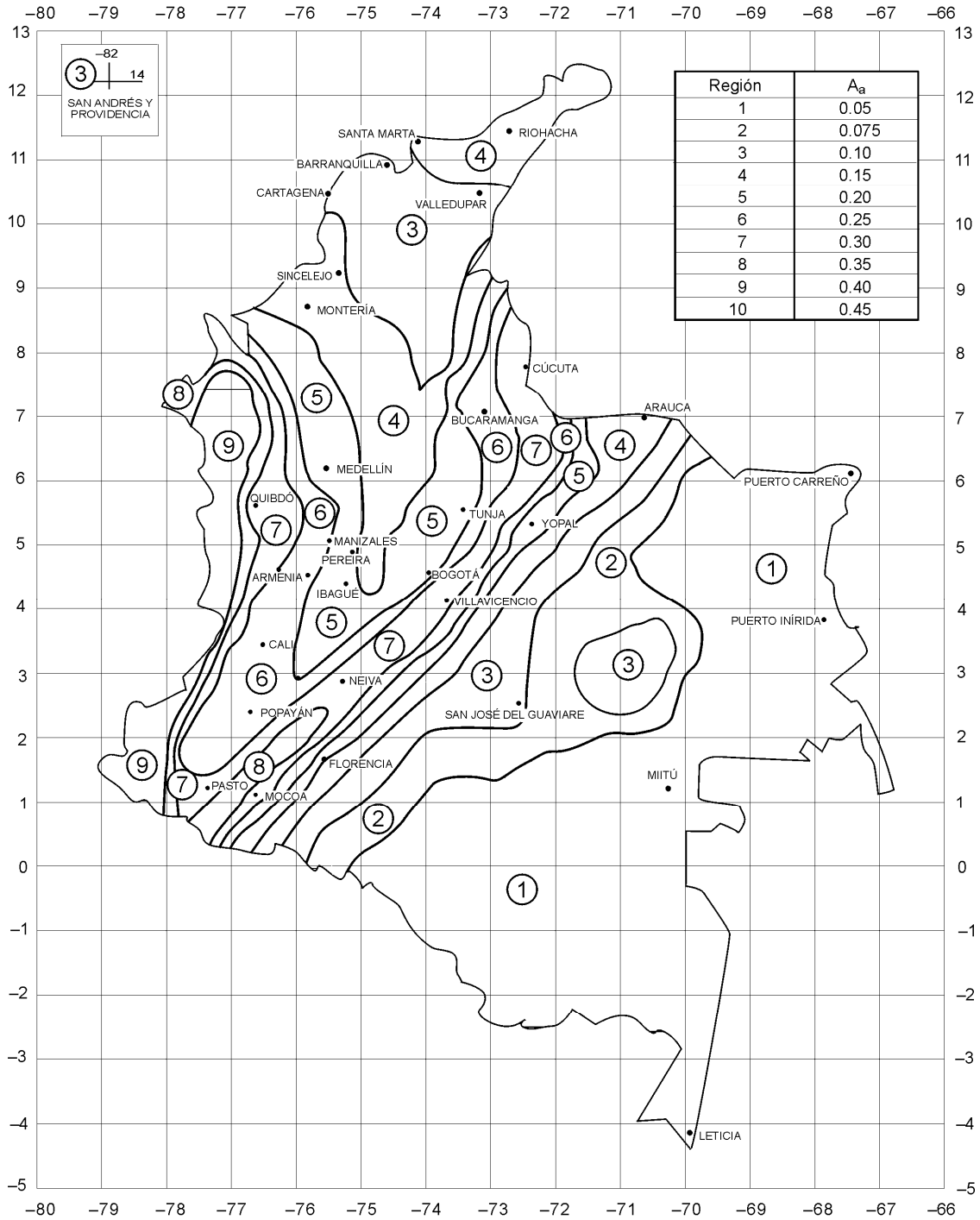


Tabla A.2-2
Valor de A_a para las ciudades capitales de departamento

Ciudad	A_a	Zona de amenaza sísmica
Arauca	0.15	Intermedia
Armenia	0.25	Alta
Barranquilla	0.10	Baja
Bogotá, D.C.	0.20	Intermedia
Bucaramanga	0.25	Alta
Cali	0.25	Alta
Cartagena	0.10	Baja
Cúcuta	0.30	Alta
Florencia	0.20	Intermedia
Ibagué	0.20	Intermedia
Leticia	0.05	Baja
Manizales	0.25	Alta
Medellín	0.20	Intermedia
Mitú	0.05	Baja
Mocoa	0.30	Alta
Montería	0.15	Intermedia
Neiva	0.30	Alta
Pasto	0.30	Alta
Pereira	0.25	Alta
Popayán	0.25	Alta
Puerto Carreño	0.05	Baja
Puerto Inírida	0.05	Baja
Quibdó	0.30	Alta
Riohacha	0.15	Intermedia
San Andrés, Isla	0.10	Baja
Santa Marta	0.15	Intermedia
San José del Guaviare	0.10	Baja
Sincelejo	0.15	Intermedia
Tunja	0.20	Intermedia
Valledupar	0.10	Baja
Villavicencio	0.30	Alta
Yopal	0.20	Intermedia

Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

APÉNDICE B
CARGAS MÍNIMAS Y AMENAZA EÓLICA EN COLOMBIA

Tabla B.1.1
Pesos unitarios para evaluar cargas permanentes de servicio (kN/m³)

Material	Peso unitario	Material	Peso unitario
Acero	78	Madera densa, seca	7.5
Agua dulce	10	Madera densidad baja, seca	4.5
Agua marina	10.3	Madera densidad media, seca	6
Aluminio	27	Mampostería de ladrillo hueco	13
Asfalto	13	Mampostería de ladrillo macizo	18
Baldosín cerámico	24	Mampostería de piedra	22
Cal hidratada compacta	7.3	Mampostería de hormigón	21.5
Cal hidratada suelta	5	Mortero de inyección, mampostería	22.5
Carbón, apilado	8	Mortero de pega, mampostería	21
Cobre	90	Plomo	114
Hormigón reforzado	24	Tierra: arcilla y grava, seca	16
Hormigón simple	23	Tierra: arcilla húmeda	17.5
Enchape de arenisca	13.5	Tierra: arcilla seca	10
Enchape de granito	15.5	Tierra: arena y grava, húmeda	19
Enchape de mármol	15	Tierra: arena y grava, seca apisonada	17.5
Escoria	15.5	Tierra: arena y grava, seca suelta	16
Hielo	9.2	Tierra: limo húmedo, apisonado	15.5
Ladrillo de arcilla, absorción baja	20	Tierra: limo húmedo, suelto	12.5
Ladrillo de arcilla, absorción media	18.5	Vidrio	25.6
Ladrillo de arcilla, absorción alta	16	Yeso suelto	11.5
Madera laminada	6	Yeso: tablero para muros	8

Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

Tabla B.1.2
Cargas en cubiertas y entrepisos por unidad de superficie (kN/m²)

Entrepisos de madera (entresuelo, listón, arriostramiento y cielo raso pañetado)	1.20
Pisos de baldosín de cemento	1.00
Placa ondulada de asbesto cemento	0.18
Canaleta 43	0.30
Canaleta 90	0.22
Teja de lámina galvanizada	0.05
Teja de aluminio	0.02
Teja de barro, incluido el mortero	0.80
Alistado en cubiertas de hormigón, por mm de espesor	0.022
Impermeabilización	0.15
Cielos rasos livianos pegados a la losa	0.05 a 0.10
Cielos rasos de yeso, suspendidos	0.25
Cielos rasos de madera	0.10 a 0.50
Cielos rasos de malla y pañete	0.80 a 1.00

Tabla B.1.3
Cargas mínimas por unidad de superficie de fachada (kN/m²)

Fachadas en ladrillo tolete a la vista y pañetado en el interior	3.00
Fachadas en ladrillo tolete a la vista, más muro adosado en bloque de perforación horizontal de arcilla de 100 mm de espesor, pañetado en el interior	4.50
Fachadas en bloque de arcilla con perforación horizontal, de 120 mm de espesor, pañetado en ambas caras	2.00
Ventanas, incluyendo el vidrio y el marco	0.45
Lámina de yeso de 16 mm protegida al exterior, con parales de acero y lámina de yeso de 10 mm al interior	1.00
Lámina de yeso de 16 mm protegida con enchape cerámico al exterior, parales de acero y lámina de yeso de 10 mm al interior	2.50
Enchapes en granito; adicional a la fachada, por cada mm de espesor del enchape	0.017/mm
Enchapes en mármol; adicional a la fachada, por cada mm de espesor del enchape	0.015/mm
Enchapes en piedra arenisca; adicional a la fachada, por cada mm de espesor del enchape	0.013/mm
Enchape cerámico; adicional a la fachada	1.50

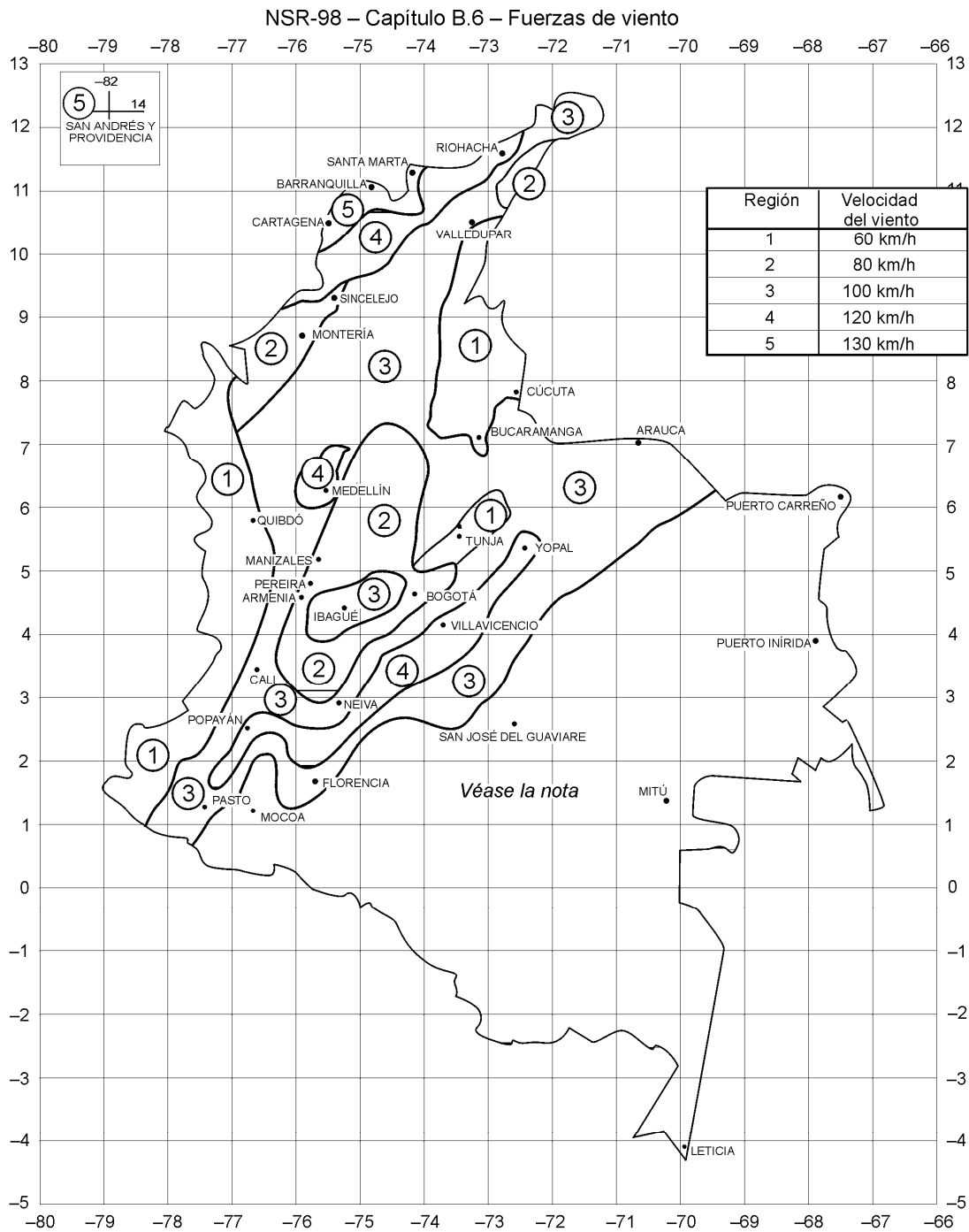
Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

Tabla B.1.4
Cargas vivas mínimas por unidad de superficie (kN/m²)

Vivienda	1.80
Oficinas	2.00
Escaleras en oficinas y viviendas	3.00
Salones de reunión:	
Con asientos anclados al piso	3.00
Sin asientos fijos	5.00
Hospitales:	
Cuartos	2.00
Salas de operaciones	4.00
Coliseos y estadios:	
Graderías	4.00
Escaleras	5.00
Garajes:	
Automóviles	2.50
Vehículos pesados	Según uso
Hoteles	2.00
Escuelas, colegios y universidades	2.00
Bibliotecas:	
Salas de lectura	2.00
Depósitos de libros	5.00
Cubiertas, azoteas y terrazas	Igual al resto
Cubiertas inclinadas de estructuras metálicas y de madera con imposibilidad física de verse sometidas a cargas superiores a las acá estipuladas	
Si la pendiente es mayor del 20%	0.35
Si la pendiente es menor del 20%	0.50
Fábricas:	
Livianas	5.00
Pesadas	10.00
Depósitos:	
Livianos	5.00
Pesados	10.00
Almacenes:	
De ventas al detal	3.50
De ventas al por mayor	5.00

Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

Figura B.6.5.1
Mapa de amenaza eólica: velocidad del viento básico



Nota: Estas zonas no han sido estudiadas y se recomienda ser conservador al evaluar las fuerzas eólicas que puedan presentarse en ellas. Mientras no existan datos confiables se calcularán con base en una velocidad mínima de 100 km/h.

Tabla B.6.4-1
Valores de q en kN/m^2 ($1 \text{ kN/m}^2 = 100 \text{ kgf/m}^2$)

Altura (m)	Velocidad (kph)*							
	60	70	80	90	100	110	120	130
0 – 10	0.20	0.27	0.35	0.45	0.55	0.67	0.79	0.93
10 – 20	0.22	0.30	0.40	0.50	0.62	0.75	0.89	1.05
20 – 40	0.27	0.37	0.48	0.61	0.75	0.91	1.08	1.27
40 – 80	0.33	0.45	0.59	0.74	0.92	1.11	1.32	1.56
80 – 150	0.40	0.54	0.71	0.90	1.11	1.34	1.59	1.88
> 150	0.50	0.68	0.88	1.12	1.38	1.67	1.99	2.33

(* Véase la figura B.6.5-1).

Tabla B.6.4-2
Valores de C_p para superficies verticales

Estructuras prismáticas con $h < 2b$	1.2
Estructuras prismáticas alargadas	1.6
Superficies cilíndricas	0.7
Superficies planas de poca profundidad tales como vallas	1.4

Para los aleros en todos los casos deberá utilizarse $C_p = -1.5$

Para pórticos a dos aguas, al considerar el viento soplando paralelamente a la cumbrera se tomará $C_p = -0.6$

Para los edificios con uno o más lados abiertos se deberá añadir -1.0 a los valores negativos de C_p que aparecen en la tabla B.6.4-3 para superficies inclinadas.

Para efectos de computar la presión del viento sobre una cubierta curva, ésta debe dividirse como mínimo en cinco segmentos iguales. La presión en cada segmento, positiva o negativa, debe determinarse usando los valores de C_p que para la pendiente respectiva aparecen en la tabla B.6.4-3.

Tabla B.6.4-3
Valores de C_p para superficies inclinadas

Inclinación de la cubierta (grados)	Barlovento	Sotavento
0 – 10.0	-0.8	-0.5
10.1 – 20.0	-0.7	-0.5
20.1 – 30.0	-0.4	-0.5
30.1 – 40.0	-0.1	-0.5
40.1 – 50.0	+0.2	-0.5
50.1 – 60.0	+0.5	-0.5
60.1 – 70.0	+0.7	-0.5
70.1 – 80.0	+0.8	-0.5
> 80		Véase la tabla B.6.4-2

Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

Tabla B.6.6
Coficiente S_4

Altitud	
(m)	S_4
0	1.00
500	0.94
1000	0.88
1500	0.83
2000	0.78
2500	0.73
3000	0.69

Fuente: Normas Colombianas de Diseño y Construcción Sismo Resistente, NSR-98.

C. ÁLGEBRA MATRICIAL

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

C.1. INTRODUCCIÓN

En la solución de problemas por el método de *ángulos de giro y deflexión* o por métodos matriciales, es preciso resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que pueden llegar a ser de gran tamaño. McGuire y Gallagher (referencia C.1) mencionan que para los mayores problemas encontrados en la práctica, entre el 20 y el 50% del tiempo de ejecución en el computador se emplea en la solución de sistemas de ecuaciones y que dicho tiempo puede llegar a ser del 80% cuando se trata de problemas no lineales, dinámicos o de optimización estructural.

Puesto que la responsabilidad principal de todo el análisis recae en el ingeniero estructural, éste debe tener un buen conocimiento de las diversas técnicas para resolver sistemas de ecuaciones que le permita juzgar, por una parte, el grado de precisión que va a obtener y, por otra, el costo probable de la solución. Dicho costo está íntimamente ligado con la eficiencia del algoritmo utilizado, de ahí que se hayan dedicado grandes esfuerzos a idear unos que sean precisos y eficientes (referencias C.2 a C.5).

En los siguientes artículos se compendian algunos conceptos y definiciones sobre determinantes, álgebra matricial y propiedades de los mismos, que se utilizan ventajosamente en la solución de sistemas de ecuaciones. Posteriormente se describen los métodos más usados para obtener tal solución.

C.2. DETERMINANTES

C.2.1. Definición

Los determinantes son arreglos cuadrados de números que se evalúan o expanden siguiendo una regla establecida. Dicha regla queda determinada por la relación que existe entre el determinante y la solución de un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes debidamente ordenados, son idénticos a los términos del determinante.

Se llama *orden* del determinante al número de filas o columnas que posee. De acuerdo con lo establecido en el párrafo anterior, un determinante de orden 2 se define así:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (\text{C-1})$$

en donde las cantidades a_{11} , a_{12} ..., etc., son los *elementos* del determinante. Cuando dichos elementos son números, la expansión del determinante produce un valor numérico único. El determinante de orden 3 tiene en cambio la siguiente definición:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} +$$

$$-a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$
(C-2)

No es necesario memorizar estas expresiones, ya que pueden obtenerse fácilmente mediante las figuras C-1, a y b, y la siguiente expresión:

$$|A| = \sum \swarrow - \sum \searrow$$
(C-3)

En la figura C-1a, simplemente se han colocado los términos del determinante del orden 2 y los productos con su signo quedan definidos por las flechas. Para el determinante de orden 3 se empieza por repetir sus dos primeras columnas a la derecha del determinante original y a continuación se forman los productos de los términos contenidos por las flechas. Los que van de izquierda a derecha se suman y los de derecha a izquierda se restan, sin olvidar considerar los propios signos de los elementos.

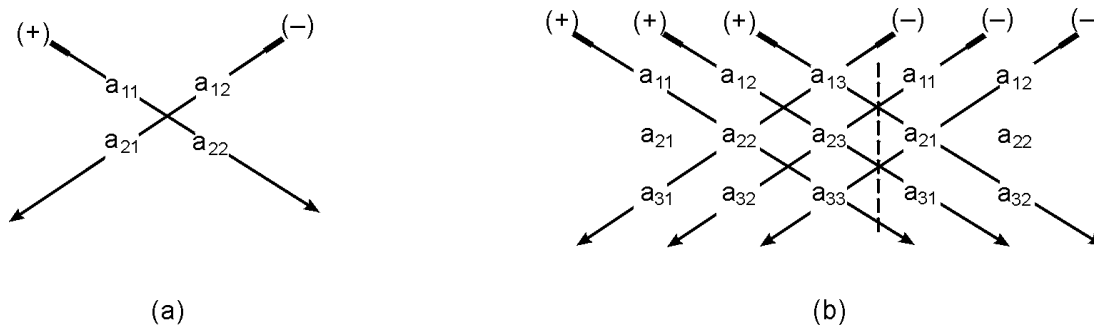


Figura C-1. Ayudas para la expansión de determinantes de órdenes 2 y 3.

Las ayudas anteriores sólo son válidas para los determinantes de órdenes 2 y 3, y no pueden extrapolarse para determinantes de orden superior. La expansión de ellos se complica cada vez más a medida que aumenta su orden y deben evaluarse por uno de los métodos que se indican más adelante.

Ejemplo C.1

Evalúe los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución

Utilizando las figuras C-1a y b:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-2) \times 5 = 14$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 4 + 3(-2)(-1) + 4 \times 6 \times 2 - 4 \times 3(-1) - 2(-2) \times 2 - 3 \times 6 \times 4 = 26$$

C.2.2. Menores y cofactores

Un *menor* de un determinante es otro determinante formado al remover un número igual de filas y columnas del determinante original. El *orden* del menor es su número de filas o columnas.

Se llama *cofactor*, a_{ij}^c , de un elemento a_{ij} de un determinante al menor que resulta de eliminar la fila i y la columna j del determinante original, afectado por el signo obtenido al elevar (-1) a la potencia $i + j$. En forma de ecuación:

$$a_{ij}^c = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{C-4}$$

en donde M_{ij} es el menor de a_{ij} . De esta fórmula se ve que el signo depende de la posición del elemento en el determinante. Si la suma de los subíndices es un número par, se le da al menor signo positivo; si la suma da impar, el signo es negativo. De la definición se deduce que el orden del menor que entra en el cofactor de un elemento es siempre uno menos que el orden del determinante original.

Los cofactores permiten evaluar cualquier determinante mediante la suma de los productos de cada elemento de cualquier fila o columna por su correspondiente cofactor. A este método se le llama *expansión por cofactores* y tiene la ventaja de que se trabaja con determinantes de orden inferior al del determinante original.

Ejemplo C.2

Evalúe mediante expansión por cofactores el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución

Se puede escoger cualquier fila o columna como base para la expansión. Sin embargo, conviene utilizar filas o columnas que contengan ceros con el objeto de disminuir el número de determinantes por evaluar. Aquí se escoge como base la última fila; se tiene entonces:

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 1(-1)^6 \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \\ &+ 0(-1)^7 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 8(-1)^8 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -2(171) - 1(109) + 8(196) = 1117 \end{aligned}$$

en donde los determinantes de orden 3 se evaluaron mediante la regla indicada anteriormente.

C.2.3. Propiedades de los determinantes

Hay varias propiedades que resultan muy útiles cuando se trabaja con determinantes; las principales se enuncian a continuación:

1. El valor de un determinante no se altera al efectuar su transposición, es decir, al intercambiar sus filas y columnas ($a_{ij} = a_{ji}$). Esto es:

$$|A|^T = |A|$$

Ejemplo C.3

Si $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$

$$|A|^T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 6 = -11$$

2. Si dos filas o columnas cualesquiera se intercambian, el valor del determinante cambia de signo.

Ejemplo C.4

Al intercambiar las filas del determinante anterior se observa que

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 5 = 11 = -|A|$$

3. Cuando todos los elementos de una fila o columna de un determinante se multiplican por un escalar λ , el valor del determinante queda multiplicado por λ .

Ejemplo C.5

Si se duplican los elementos de la segunda columna del determinante $|A|$ se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22 = 2|A|$$

4. Si todos los elementos de un determinante de orden n se multiplican por un escalar λ , el valor del determinante queda multiplicado por λ^n .

Ejemplo C.6

Triplicando todos los elementos de $|A|$ se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -45 - 54 = -99 = (3)^2 |A|$$

5. El valor de un determinante no cambia si a una de sus filas o columnas se le añade un múltiplo escalar de otra fila o columna. Esta propiedad se usará posteriormente en la evaluación de un determinante por el método de la *condensación pivotal*.

Ejemplo C.7

Si a la primera fila del determinante $|A|$ se le suma el doble de su segunda fila, el determinante queda así:

$$\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 26 = -11 = |A|$$

6. Hay varias condiciones que hacen que el valor de un determinante sea cero. Las principales son:
- Cuando todos los elementos de una fila o columna son cero.
 - Cuando dos filas o columnas son idénticas.
 - Cuando sus filas o columnas son linealmente dependientes, es decir, cuando una fila o columna puede expresarse como una combinación lineal de las otras filas o columnas.

C.2.4. Evaluación por condensación pivotal

Se denomina así el método que utiliza la quinta propiedad de los determinantes vista en el artículo anterior, para reducir a cero todos los elementos, excepto uno, de cualquier fila o columna. Una vez hecho esto, se puede evaluar el determinante con base en dicho elemento y su cofactor. El cofactor contendrá a su vez un determinante de orden inferior y el proceso se repite sucesivamente hasta llegar a un determinante reducido de orden 3 ó 2, que se puede evaluar sin dificultad. Puede observarse el uso de un elemento como *pivote* para efectuar la condensación, de ahí el origen del nombre.

Cuando se quiere convertir en ceros los términos de una columna, la condensación se hace mediante suma o resta de filas. En tal caso la transformación necesaria se puede expresar en forma general así:

$$F'_i = F_i - \frac{a_{ip}}{a_{op}} F_p \quad (C-5)$$

en donde F'_i es la nueva fila cuyo término a_{ip} de la columna del pivote se desea volver cero, F_i es la fila original, a_{op} es el pivote y F_p la fila que lo contiene.

Si son los términos de una fila los que se quiere anular, se operan las columnas en forma análoga. Se tiene entonces como ecuación general:

$$C'_j = C_j - \frac{a_{pj}}{a_{po}} C_p \quad (C-6)$$

Para simplificar operaciones conviene que el pivote valga uno. Esto se logra fácilmente mediante una factorización adecuada de la fila o columna que lo contiene. Hay que tener, entonces, el cuidado de no olvidar dicho factor al hacer la evaluación final.

A continuación se presentan tres ejemplos para ilustrar el método.

Ejemplo C.8

Evalúe por condensación pivotal el determinante siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

Para agilizar el proceso se puede utilizar como pivote el elemento a_{12} ya que además de ser unitario, pertenece a una fila o columna que ya tiene un término nulo. La ecuación (C-5), al aplicarla a las filas 2 y 4, queda entonces así:

$$F_2' = F_2 - a_{22}F_1 = F_2 + 2 F_1 \quad (a)$$

$$F_4' = F_4 - a_{42}F_1 = F_2 - 2 F_1 \quad (b)$$

O sea que se debe sumar a la segunda fila dos veces la primera, para eliminar el elemento a_{22} y restar dos veces la fila pivotal a la cuarta, para anular el elemento a_{42} . Resulta entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Expandiendo ahora por cofactores la segunda columna, se obtiene:

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -(35 - 96 - 6 - 60 - 84) = 220$$

Ejemplo C.9

Evalúe el mismo determinante anterior, pero usando como pivote el elemento a_{33} .

Solución

En este caso es necesario anular los otros coeficientes de la tercera fila, y para lograrlo se utiliza la ecuación (C-6) así:

$$C_1' = C_1 - a_{31} C_3 = C_1 - 3 C_3$$

$$C_4' = C_4 - a_{34} C_3 = C_4 - 4 C_3$$

o sea, restarles a las columnas 1 y 4, tres y cuatro veces la columna C3, respectivamente. El determinante $|A|$ queda así:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -11 & -2 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 2 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

y expandiendo por cofactores la tercera fila:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -11 & -2 & -11 \\ -11 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 44 + 121 + 66 + 66 - 121 + 44 = 220$$

que coincide con lo obtenido anteriormente.

Ejemplo C.10

Evalúe por condensación pivotal el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución

Arbitrariamente se escoge como pivote el elemento a_{11} y para volverlo unitario se factoriza por dos la primera columna. Se obtiene entonces:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Para anular los términos de la primera fila se le suman y restan a la segunda y tercera columna respectivamente, tres veces la primera. Esto coincide con lo estipulado por la ecuación (C-6).

$$\begin{aligned} C_2' &= C_2 - a_{12} C_1 = C_2 + 3 C_1 \\ C_3' &= C_3 - a_{13} C_1 = C_3 - 3 C_1 \end{aligned}$$

Al efectuar las operaciones respectivas, resulta:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & -8 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & -8 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 2(-55 + 56) = 2$$

que es igual al valor obtenido cuando se aplica directamente la definición del determinante de orden tres:

$$|A| = 40 + 36 - 24 - 90 - 8 + 48 = 2$$

Puede observarse que si no se hubiese factorizado el determinante por el valor del

elemento pivotal, habría sido necesario trabajar con números fraccionarios, ya que al aplicar la ecuación (C-6) resultarían las siguientes expresiones:

$$C'_2 = C_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} C_1 = C_2 + \frac{3}{2} C_1$$

$$C'_3 = C_3 - \frac{a_{13}}{a_{11}} C_1 = C_3 - \frac{3}{2} C_1$$

y al aplicarlas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -8 \\ 6 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 11 & -8 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 2 \text{ como antes.}$$

Gere y Weaver (Ref. C-6) indican que aunque en teoría se puede seleccionar cualquier elemento como pivote, es deseable utilizar siempre los mayores elementos posibles para minimizar la pérdida de precisión originada en errores de truncación. Esto se logra seleccionando el elemento numéricamente mayor como primer pivote y reduciendo el determinante a uno de orden inferior. El proceso se repite utilizando como segundo pivote el mayor elemento del nuevo determinante, y así sucesivamente.

Un método comúnmente usado consiste en intercambiar filas y columnas en el determinante, de tal manera que el elemento mayor quede como *líder* en la esquina superior izquierda del determinante. Luego se usa este elemento como pivote en el proceso de condensación y el orden del determinante se reduce en uno. Se repite todo el proceso para el nuevo determinante, intercambiando filas y columnas hasta que el elemento mayor de éste pase a ocupar la posición de liderazgo, y se continúa el proceso una y otra vez hasta quedar con un determinante de orden 3 ó 2. Hay que tener en cuenta el número de intercambios que se haya realizado puesto que cada uno de ellos implica un cambio de signo en el determinante, como se estipuló en el artículo C.2.3.

El procedimiento se explicará con el mismo determinante del ejemplo C.8.

Ejemplo C.11

Evaluar, por el método indicado en el párrafo anterior, el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

El término de mayor valor es el a_{24} . Intercambiando las filas 1 y 2:

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Es preciso intercambiar ahora las columnas 1 y 4. Se obtiene entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Añadiendo múltiplos de la primera fila a las otras, para eliminar los siguientes elementos de la primera columna Ec (C.5), resulta en:

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 1 & -2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & 12/5 & 13/5 \\ 0 & 8/5 & -11/5 & 11/5 \\ 0 & 12/5 & 11/5 & -11/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 12 & 13 \\ 0 & 8 & -11 & 11 \\ 0 & 12 & 11 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \begin{vmatrix} -1 & 12 & 13 \\ 8 & -11 & 11 \\ 12 & 11 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} -1 & 12 & 13 \\ 8 & -11 & 11 \\ 12 & 11 & -11 \end{vmatrix}$$

Ahora el máximo elemento es 13, que puede colocarse en la primera posición intercambiando las columnas 1 y 3. Como sólo es necesario un intercambio, habrá cambio de signo.

$$|A| = -\frac{1}{25} \begin{vmatrix} 13 & 12 & 1 \\ 11 & -11 & 8 \\ -11 & 11 & 12 \end{vmatrix} = -\frac{13}{25} \begin{vmatrix} 1 & 12/13 & -1/13 \\ 11 & -11 & 8 \\ -11 & 11 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{13}{25} \begin{vmatrix} 1 & 23/13 & 1/13 \\ 0 & -275/13 & 115/13 \\ 0 & 275/13 & 145/13 \end{vmatrix} = -\frac{1}{325} \begin{vmatrix} -275 & 115 \\ 275 & 145 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{275}{325} \begin{vmatrix} -1 & 115 \\ 1 & 145 \end{vmatrix} = -\frac{275}{325} (-145 - 115) = 220$$

C.3. MATRICES

C.3.1. Definiciones

En su forma más común, una matriz es un arreglo rectangular de números que puede representarse como sigue:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C-7})$$

Los números a_{11} , a_{12} , ... a_{mn} , que constituyen el arreglo, se denominan *elementos* de la matriz y son análogos a los que constituyen los determinantes vistos atrás.

Los elementos de la matriz en el caso más general no tienen que ser necesariamente números. Pueden ser prácticamente cualquier expresión matemática e incluso otras matrices.

El *orden* o *tamaño* de una matriz está dado por el número de filas y de columnas que posee. La matriz $[A]$ anterior es de orden $m \times n$.

Se llama *matriz cuadrada* la que tiene un número igual de filas y de columnas. En tal caso $m = n$ y se dice que la matriz es de orden n . Los elementos de una matriz cuadrada que van de la esquina superior izquierda a la inferior derecha (a_{11} , a_{22} , a_{33} ... a_{nn}) constituyen la *diagonal principal* de la matriz. A su vez, los que van de la esquina inferior izquierda (a_{n1} , $a_{(n-1)2}$, ... a_{1n}) constituyen la *diagonal secundaria*.

La *dimensión* de una matriz está dada por el número de subíndices necesarios para localizar unívocamente un elemento de la matriz. De acuerdo con esta definición, la matriz dada por la ecuación (C-7) tiene dimensión 2. Un *vector* puede considerarse un caso especial de una matriz rectangular que sólo tiene una fila o una columna. En el primer caso se suele llamar también *matriz fila* ($1 \times n$) y en el segundo *matriz columna* ($n \times 1$). Es evidente que en cualquiera de ellas basta un subíndice para localizar unívocamente uno de sus elementos y desde ese punto de vista puede considerarse que los vectores son matrices de dimensión 1. Una *matriz tridimensional* de orden $m \times n \times p$ está formada por p arreglos bidimensionales de orden $m \times n$. El proceso puede ampliarse indefinidamente hasta incluir matrices de cualquier dimensión, pero en ingeniería estructural sólo tienen importancia las de dimensiones 1 y 2.

C.3.2. Operaciones con matrices

Las reglas para efectuar operaciones matemáticas con matrices son en cierta forma intuitivas y se han establecido con el fin de hacerlas útiles para resolver problemas prácticos.

Adición

La adición de matrices es posible si y sólo si las matrices involucradas tienen idéntico orden. Se dice, entonces, que las matrices son *compatibles* para la adición. La suma se

obtiene añadiendo los elementos correspondientes, es decir, los que tienen posiciones idénticas, de las matrices originales. Si se llama [C] a la suma de [A] más [B], cada elemento de la nueva matriz queda definido así:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{C-8})$$

Ejemplo C.12

Sumar las siguientes matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

En primer lugar se observa si las matrices dadas son compatibles. La respuesta es afirmativa, pues ambas son de orden 2 x 3. Aplicando ahora la ecuación (C-8) a cada término de [C] se obtiene:

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+4 & 3+0 \\ 5-6 & 0+1 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Por la manera de efectuar la adición se puede ver fácilmente que el proceso es conmutativo y asociativo; es decir, que:

$$[A] + [B] = [B] + [A] \quad \text{y} \quad (\text{C-9})$$

$$[A] + \{[B] + [C]\} = \{[A] + [B]\} + [C] \quad (\text{C-10})$$

Esto implica que al efectuar adiciones con matrices, éstas pueden colocarse en cualquier orden y agruparse como más convenga.

Sustracción

La sustracción de matrices se efectúa de manera similar a la adición y tiene los mismos requisitos de compatibilidad.

En este caso, si $[C] = [A] - [B]$ entonces:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (\text{C-11})$$

Ejemplo C.13

Si se sustraen las dos matrices [A] y [B] del ejemplo anterior, se obtiene:

$$[C] = [A] - [B] = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-4 & 3-0 \\ 5+6 & 0-1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 11 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un escalar

De la regla para sumar matrices se deduce que para multiplicar una matriz por un escalar se debe multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar. Si $[B] = \lambda [A]$, en donde λ es el escalar, el elemento típico de la matriz $[B]$ está dado por:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (\text{C-12})$$

Ejemplo C.14

Calcule la matriz $[B] = 3[A]$, empleando la misma matriz $[A]$ del ejemplo C.12.

$$[B] = 3[A] = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \\ 3 \times 5 & 3 \times 0 & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Es evidente que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2)[A] &= \lambda_1[A] + \lambda_2[A] \\ \lambda\{[A] + [B]\} &= \lambda[A] + \lambda[B] \\ \lambda_1\{\lambda_2[A]\} &= (\lambda_1\lambda_2)[A] \end{aligned} \quad (\text{C-13})$$

que son consecuencia de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición e indican que la multiplicación escalar goza de las mismas propiedades.

Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices se ha definido de manera tal que facilite la solución de ecuaciones lineales simultáneas y la sustitución de nuevas variables mediante transformaciones lineales.

Este producto puede efectuarse únicamente si sus *dimensiones contiguas* son iguales, es decir, si el número de columnas en la matriz izquierda del producto es igual al número de filas en la matriz derecha. En dicho caso, si la matriz $[A]$ es de orden $m \times n$ y la matriz $[B]$ es de orden $n \times q$, los elementos de la matriz producto $[C] = [A][B]$ se definen como sigue:

$$[C]_{m \times q} = [A]_{m \times n} [B]_{n \times q} \quad (\text{C-14})$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (\text{C-15})$$

en donde c_{ij} representa un elemento típico de la matriz producto $[C]$. Puede observarse que ésta resulta de orden $m \times q$. Al referirse al producto anterior, la matriz $[A]$ es llamada *premultiplicador* y la $[B]$ *posmultiplicador*. También se puede decir que la matriz $[A]$ premultiplica a la matriz $[B]$, y que ésta posmultiplica a la $[A]$.

Ejemplo C.15

Dadas:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{y} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

encuentre el producto $[C] = [A][B]$

Solución

El primer paso es verificar si las matrices $[A]$ y $[B]$ son compatibles para efectuar la multiplicación en el orden dado. Se encuentra que en efecto lo son, pues el número de columnas de $[A]$ es igual al número de filas de $[B]$. Aplicando ahora la ecuación (C-15) se obtiene:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 1(-1) - 3(4) \\ 0 \times 3 + 1(-1) + 1(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Es importante anotar que aunque las leyes asociativa y distributiva se cumplen en las multiplicaciones matriciales, como indican las igualdades siguientes:

$$\{[A][B]\}[C] = [A]\{[B][C]\} \quad (\text{C-16})$$

$$[A]\{[B][C]\} = [A][B] + [A][C] \quad (\text{C-17})$$

$$\{[A] + [B]\}[C] = [A][C] + [B][C] \quad (\text{C-18})$$

la multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa en la mayor parte de los casos. Es decir que, en general,

$$[A][B] \neq [B][A] \quad (\text{C-19})$$

Se puede ver fácilmente que una condición necesaria pero insuficiente para que la ecuación (C-19) se convierta en igualdad es que ambas sean matrices cuadradas del mismo orden.

Si las matrices $[A]$ y $[B]$ son rectangulares, los dos productos se pueden efectuar sólo si $[A]$ es de orden $m \times n$ y $[B]$ de orden $n \times m$, pero en tal caso $[A][B]$ resulta en una matriz de orden $m \times m$, mientras que al efectuar $[B][A]$ la matriz que se obtiene es de orden $n \times n$ y, por consiguiente, es imposible que los dos productos sean iguales.

Además de no ser conmutable, existen otros aspectos en que la multiplicación matricial no sigue las leyes del álgebra escalar. Por ejemplo, si $[A][B] = [A][C]$ no necesariamente $[B] = [C]$, como se probará mediante un ejemplo posterior, tomado de la referencia C.6.

Ejemplo C.16

Calcule los productos $[A][B]$ y $[B][A]$ de las siguientes matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Efectuando primero el producto $[A][B]$ se obtiene:

$$\begin{aligned} [A][B] &= \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0(-2) + 2 \times 4 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 5 \\ -1 \times 2 + 1(-2) + 3 \times 4 & -1 \times 1 + 1 \times 0 + 3 \times 5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 8 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Procediendo ahora con $[B][A]$:

$$\begin{aligned} [B][A] &= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1(-1) & 2 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times 2 + 1 \times 3 \\ -2 \times 1 + 0(-1) & -2 \times 0 + 0 \times 1 & -2 \times 2 + 0 \times 3 \\ 4 \times 1 + 5(-1) & 4 \times 0 + 5 \times 1 & 4 \times 2 + 5 \times 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 23 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo C.17

Calcule los productos $[A][B]$ y $[B][A]$ de las siguientes matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Efectuando primero $[A][B]$:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2(-1) & 1 \times 4 + 2 \times 2 \\ 5 \times 3 + 6(-1) & 5 \times 4 + 6 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 32 \end{bmatrix}$$

Por otra parte:

$$[B][A] = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 4 \times 5 & 3 \times 2 + 4 \times 6 \\ -1 \times 1 + 2 \times 5 & -1 \times 2 + 2 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 30 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Se observa que aunque ambos productos son del mismo orden, sus términos son en general diferentes.

Ejemplo C.18

Calcule los productos $[A][B]$ y $[A][C]$ de las siguientes matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Efectuando $[A][B]$:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1(-2) + 1 \times 1 + 1 \times 4 & 1 \times 3 + 1(-5) + 1 \times 1 \\ 3(-2) + 2 \times 1 + 3 \times 4 & 3 \times 3 + 3(-5) + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

De igual manera:

$$[A][C] = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 1(-4) + 1 \times 3 & 1 \times 1 + 1(-3) + 1 \times 1 \\ 3 \times 4 + 3(-4) + 3 \times 3 & 3 \times 1 + 3(-3) + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

Este ejemplo demuestra que la ecuación $[A][B] = [A][C]$ no implica que $[B]$ sea igual a $[C]$.

C.3.3. Tipos especiales de matrices

En las aplicaciones que nos ocupan es frecuente encontrar ciertos tipos especiales de matrices que poseen propiedades particulares y que conviene definir.

La *transpuesta* de una matriz, por ejemplo, es una nueva matriz obtenida al intercambiar las filas y las columnas correspondientes de la matriz original. Si a_{ij} representa el término que ocupa la posición ij de la matriz transpuesta, su relación con el término equivalente de la matriz original queda definida mediante la ecuación:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (C-20)$$

Por la definición anterior resulta evidente que si la matriz $[A]$ es de orden $m \times n$, su transpuesta $[A]^T$ tiene orden $n \times m$. También se puede concluir que al transponer la transpuesta, se vuelve a la matriz original; esto es:

$$\{[A]^T\}^T = [A] \quad (C-21)$$

Se puede demostrar que la transpuesta de la suma de cualquier número de matrices es igual a la suma de las transpuestas respectivas, o sea en forma de ecuación, que

$$\{[A_1] + [A_2] + \dots + [A_n]\}^T = [A_1]^T + [A_2]^T + \dots + [A_n]^T \quad (\text{C-22})$$

Por otra parte, la transpuesta del producto de cualquier número de matrices es igual al producto de sus transpuestas, pero en orden invertido. Es decir, que:

$$\{[A_1][A_2]\dots[A_n]\}^T = [A_n]^T \dots [A_2]^T [A_1]^T \quad (\text{C-23})$$

Cuando una matriz cuadrada cumple la condición $[A]^T = [A]$ se dice que es una *matriz simétrica* y cuando $[A]^T = -[A]$ se le llama *matriz antisimétrica*. Con referencia a los elementos, la condición equivalente en el primer caso es que $a_{ij} = a_{ji}$, y en el segundo, que $a_{ij} = -a_{ji}$ para $i \neq j$ y $a_{ii} = 0$ para todo i .

La *matriz cofactor* se construye reemplazando cada elemento de una matriz cuadrada por su cofactor y es útil en el desarrollo de un método formal para obtener el *inverso* de una matriz, que se definirá posteriormente. Por ejemplo si:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$a_{11}^c = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = 14 \quad a_{12}^c = -\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -2$$

$$a_{13}^c = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = -4 \quad a_{21}^c = -\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = -4$$

y así sucesivamente. Por consiguiente:

$$[A]^c = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -4 \\ -4 & 7 & 5 \\ -10 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de la matriz cofactor se denomina *matriz adjunta* y se representa como $[A]^a$.

O sea que:

$$[A]^a = \{[A]^c\}^T \quad (\text{C-24})$$

Para el caso anterior, se obtiene:

$$[A]^a = \begin{bmatrix} 14 & -4 & -10 \\ -2 & 7 & 4 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Una *matriz nula* o *matriz cero* es la que tiene todos sus elementos iguales a cero. Puede ser rectangular o cuadrada y cumple en álgebra matricial un propósito similar al del cero en álgebra escalar o al de un vector nulo en álgebra vectorial. Generalmente se la representa así: [0].

Por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar matricialmente como sigue:

$$[A][X] = [0] \quad (C-25)$$

Vale la pena anotar que el producto de dos matrices puede resultar en una matriz nula aunque ninguna de ellas lo sea, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo C.19

Calcule el producto [A] [B], si:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} ; [B] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Siguiendo las reglas establecidas:

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2(-1) & 1(-4) + 2 \times 2 \\ 3 \times 2 + 6(-1) & 3(-4) + 6 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se denomina *matriz diagonal* a una matriz cuadrada cuyos elementos son iguales a cero, excepto los de la diagonal principal. En forma general se puede indicar así:

$$[D]_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (C-26)$$

Las matrices de este tipo son muy útiles en ciertas operaciones matriciales. Si se tienen dos matrices diagonales del mismo orden, su producto es conmutativo y resulta en otra matriz diagonal.

Un tipo especial de matriz diagonal es la *matriz escalar*, en la cual todos los elementos de la diagonal principal tienen un mismo valor λ .

$$[E]_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (C-27)$$

Esta matriz debe su nombre a su equivalencia con el multiplicador escalar de una matriz, ya que se convierte una matriz en otra cuyos términos son idénticos a los de la matriz original multiplicados por λ . Si la matriz original es cuadrada de orden n , el mismo efecto se obtiene utilizando la matriz $[E]_n$ como pre o posmultiplicador. Se obtiene entonces:

$$[E]_n [A]_n = [A]_n [E]_n = \lambda [A]_n \quad (C-28)$$

Si se trata en cambio de una matriz $[B]$ de orden $m \times n$, se debe tener cuidado en utilizar una matriz $[E]$ compatible, y en consecuencia serán diferentes, dependiendo de si van a pre o a posmultiplicar.

$$[E]_{m \times m} [B]_{m \times n} = [B]_{m \times n} [E]_{n \times n} = \lambda [B]_{m \times n} \quad (C-29)$$

Un tipo muy importante de matriz escalar es la matriz unitaria, llamada también *matriz identidad*, en la que $\lambda = 1$. Esto es:

$$[I]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (C-30)$$

A esta matriz se le ha dado el nombre de matriz identidad porque una matriz multiplicada por ella no resulta afectada y queda idéntica a la original. O sea que si $[A]$ es una matriz cuadrada de orden n :

$$[I]_n [A]_n = [A]_n [I]_n = [A]_n \quad (C-31)$$

Por otra parte, si $[B]$ es una matriz rectangular de orden $m \times n$:

$$[I]_{m \times m} [B]_{m \times n} = [B]_{m \times n} [I]_{n \times n} = [B]_{m \times n} \quad (C-32)$$

Se denomina *matriz triangular superior* aquella cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son cero, o sea que:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{cuando } i > j \quad (C-33)$$

A su vez, una *matriz triangular inferior* tiene todos los elementos por encima de la diagonal principal iguales a cero. En tal caso la condición se puede expresar así:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{cuando } i < j \quad (C-34)$$

Estas definiciones se ilustran con los ejemplos dados a continuación.

Ejemplo C.20

Determine a qué tipo pertenecen las matrices siguientes:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} ; [B] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución

La matriz $[A]$ es una matriz triangular inferior de orden 3, mientras que $[B]$ es una matriz triangular superior de orden 4.

A las matrices triangulares se les da el calificativo de *unitarias* cuando todos los elementos de la diagonal valen 1. Dichas matrices son útiles en problemas de *descomposición* de matrices, como se verá más adelante.

En la solución de problemas de ingeniería estructural es frecuente encontrar matrices cuadradas cuyos únicos elementos diferentes de cero están ubicados a lo largo de una banda o faja que sigue la diagonal principal de la matriz y que generalmente tienen a aquélla como centro. A una matriz tal se la denomina *matriz de banda* y ofrece múltiples ventajas para su manejo mediante computador. La matriz siguiente es un ejemplo de matriz de banda de *ancho* tres.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \quad (C-35)$$

Como la banda está centrada con respecto a la diagonal, se la puede clasificar como una matriz *tridiagonal*.

Matrices ortogonales

Se dice que dos matrices $[A]_{m \times n}$ y $[B]_{m \times n}$ son *ortogonales entre sí* cuando cumplen la condición:

$$[A]^T [B] = [B]^T [A] = [I] \quad (C-36)$$

Por otra parte se denomina *matriz ortogonal* a la matriz cuadrada $[C]$ que multiplicada por su transpuesta resulta en la matriz identidad. Es decir, que

$$[C]^T [C] = [C][C]^T = [I] \quad (C-37)$$

Ejemplo C.21

Averigüe si las matrices $[A]$ y $[B]$, dadas a continuación, son ortogonales entre sí.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; [B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Efectuando primero $[A]^T [B]$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 \times 2 - 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1(-1) - 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 1 \times 2 - 2 \times 1 + 2 \times 0 & 1(-1) - 2 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned}$$

Verificando ahora $[B]^T [A]$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1(-1) + 0 \times 1 & 2 \times 1 + 1(-2) + 0 \times 2 \\ -1 \times 1 + 1(-1) + 2 \times 1 & -1 \times 1 + 1(-2) + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned}$$

Como en ambos casos se obtuvo la matriz identidad, se concluye que $[A]$ y $[B]$ son ortogonales entre sí.

Ejemplo C.22

Verifique que la matriz $[C]$ dada a continuación es ortogonal.

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Solución

Verificando la primera condición:

$$\begin{aligned}
[C]^T [C] &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} & \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} & \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} & \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]
\end{aligned}$$

Invirtiendo ahora el orden se encuentra que $[C] [C]^T$ da exactamente el mismo resultado; por consiguiente, la ecuación (C-36) se cumple y la matriz $[C]$ es ortogonal.

C.3.4. Transformaciones elementales de matrices

Hay tres maneras elementales de transformar una matriz. Se refieren a *escalar*, *intercambiar* y *combinar*.

Por *escalar* se entiende la multiplicación de todos los elementos de cualquier fila (o columna) de la matriz por un escalar. En el primer caso se premultiplica por una matriz diagonal apropiada y en el segundo se posmultiplica. La *matriz elemental de transformación* $[T_E]$ se obtiene modificando una matriz identidad de orden apropiado de la misma manera que se desea modificar la matriz $[A]$ sobre la cual debe operar.

Por ejemplo, si se desea escalar por λ la segunda fila de la matriz siguiente:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

bastará premultiplicarla por una matriz

$$[T_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en que todos los términos de la segunda fila de una matriz $[I]$ de orden 3 se han multiplicado por λ . Se tendrá entonces:

$$[T]_{3 \times 3} [A]_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Si lo que se desea es escalar la segunda columna de $[A]$ se deberá partir de una matriz identidad de orden 2 para que haya compatibilidad en la posmultiplicación. Resultará ahora:

$$\begin{aligned} [A]_{3 \times 2} [T]_{2 \times 2} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \\ a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como se deseaba.

El *intercambio* consiste en intercambiar dos filas (o columnas) cualesquiera de una matriz. Esta operación se realiza premultiplicando o posmultiplicando, según que el intercambio se haga con unas u otras, por una matriz elemental que se forma haciendo el intercambio deseado en la matriz identidad de orden apropiado. Por ejemplo, si $[A]$ es la misma matriz anterior:

$$[T_{E_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

causará un intercambio de la primera y la tercera filas de $[A]$, como se demuestra a continuación:

$$[T_{E_1}] [A] = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

En cambio

$$[T_{E_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ocasionará un intercambio de las dos columnas:

$$[A] [T_{E_2}] = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$$

La *combinación* consiste en añadir un múltiplo escalar de una fila (o columna) de la matriz a una segunda fila (o columna). En este proceso la fila o columna primitiva permanece sin cambiar, mientras que la última toma los nuevos valores. Otra vez la matriz elemental de transformación se obtiene efectuando sobre una matriz identidad de orden apropiado la operación deseada. Así, por ejemplo, si se desea añadir dos veces la segunda fila de la matriz $[A]$ vista antes a la tercera, se efectúa primero esta operación en una matriz identidad de orden 3 y se premultiplica por ella:

$$[T_E][A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 2a_{21} + a_{31} & 2a_{22} + a_{32} \end{bmatrix}$$

Es importante anotar que varias transformaciones elementales se pueden llevar a cabo simultáneamente mediante matrices de *transformación compuestas* obtenidas mediante la aplicación sucesiva de las operaciones deseadas a las matrices identidad apropiadas. Al mismo resultado se llegaría formando los productos de las matrices de transformación elementales correspondientes.

Como se verá más adelante, las matrices de transformación son útiles en algunos métodos para calcular el *inverso* de una matriz, que se definirá en el artículo C.3.6.

Ejemplo C.23

Transformar la matriz:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

de modo que: 1) la primera fila quede multiplicada por cuatro; 2) la segunda fila sea añadida a la primera; 3) las filas primera y tercera sean intercambiadas; 4) la segunda columna se multiplique por dos, y 5) la segunda columna se intercambie con la primera.

Solución

Las operaciones sobre las filas se llevan a cabo mediante un premultiplicador $[T_1]$ obtenido al efectuar los pasos (1), (2) y (3) sobre la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [T_1]$$

Igualmente, el posmultiplicador $[T_2]$ se encuentra efectuando los pasos (4) y (5) en la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T_2]$$

Efectuando ahora:

$$[T_1][B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 4b_{11} + b_{21} & 4b_{12} + b_{22} & 4b_{13} + b_{23} \end{bmatrix}$$

y multiplicando este producto por $[T_2]$:

$$\begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 4b_{11} + b_{21} & 4b_{12} + b_{22} & 4b_{13} + b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{32} & b_{31} & b_{33} \\ 2b_{22} & b_{21} & b_{23} \\ 8b_{12} + 2b_{22} & 4b_{11} + b_{21} & 4b_{13} + b_{23} \end{bmatrix}$$

que es el resultado buscado. Se habría llegado a lo mismo premultiplicando la matriz $[B]$ por el triple producto:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T_1]$$

que involucra las matrices elementales de transformación de filas y posmultiplicando por el doble producto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T_2]$$

que corresponde a las transformaciones elementales respectivas de las columnas.

C.3.5. Partición de matrices

Al trabajar con matrices resulta con frecuencia conveniente o necesario *partir* la matriz en varios grupos de elementos, o submatrices. Esto ocurre primordialmente cuando parte de la matriz tiene un significado físico diferente del resto, que conviene identificar, o cuando el tamaño de la matriz es demasiado grande, dificultando su manejo.

La partición se suele indicar con líneas suaves o punteadas y cada submatriz se puede representar mediante letras mayúsculas y subíndices apropiados, como se ilustra a continuación:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

en donde

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ; [A_{12}] = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

$$[A_{21}] = [a_{41} \quad a_{42} \quad a_{43}]; [A_{22}] = [a_{44}]$$

Pueden efectuarse operaciones de suma, resta y multiplicación con matrices partidas, siempre y cuando la partición se haya hecho de tal manera que las submatrices resultantes satisfagan los requisitos de compatibilidad para la operación respectiva. Esto implica que para adición y sustracción las matrices involucradas deben partirse idénticamente. Para multiplicación, en cambio, el requisito se limita a que las columnas del premultiplicador $[A]$ se partan de la misma manera que las filas del posmultiplicador $[B]$, sin que importe cómo se partan las filas de $[A]$ y las columnas de $[B]$.

Ejemplo C.24

Dados

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & -1 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} ; [B] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

efectúe, $[C] = [A][B]$ utilizando partición.

Solución

Se empieza por partir arbitrariamente la matriz $[A]$:

$$[A] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & -1 & 8 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Como $[A]$ se partió en grupos que tienen dos columnas, la matriz $[B]$ debe partirse en grupos con dos filas, por ejemplo en la forma que sigue:

$$[B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz [C] estará dada por:

$$[C] = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} [C_{11}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -18 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41 & 45 \\ 38 & 47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & 43 \\ 20 & 49 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_{12}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_{21}] &= [4 \ 5] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + [6 \ 2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= [31 \ -5] + [22 \ 18] = [53 \ 13] \end{aligned}$$

$$[C_{22}] = [4 \ 5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [6 \ 2] \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = [4] + [38] = [42]$$

Finalmente, ensamblando los resultados anteriores se obtiene la respuesta buscada:

$$[C] = \left[\begin{array}{cc|c} 51 & 43 & 8 \\ 20 & 49 & -26 \\ \hline 53 & 13 & 42 \end{array} \right]$$

Fácilmente se puede verificar que se habría obtenido idéntico resultado mediante la aplicación directa de la ecuación (C-15).

C.3.6. Inverso de una matriz

El inverso de una matriz cuadrada $[A]$ se escribe $[A]^{-1}$ y se define como la matriz que al ser multiplicada por la matriz original $[A]$, resulta en la matriz identidad. Es decir, que la relación entre la matriz y su inverso está dada por la ecuación:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I] \quad (C-38)$$

El inverso de una matriz, en caso de existir, es único; es siempre una matriz cuadrada del mismo orden de la matriz original y sólo las matrices cuadradas tienen inverso. Un requisito indispensable para que exista el inverso de una matriz es que el determinante de ésta sea diferente de cero. Si $|A| = 0$, la matriz es clasificada como *singular* y no existe su inverso. Como se verá más adelante, el inverso de una matriz es muy útil en la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas del tipo que se presenta frecuentemente en análisis estructural, en especial cuando se estudian varias hipótesis de carga.

C.3.7. Propiedades del inverso

Hay muchas propiedades y reglas útiles concernientes al inverso de una matriz; algunas de las más importantes se enuncian a continuación.

En primer lugar, siempre y cuando $[A]$ no sea singular, resulta obvio que al invertir un inverso se vuelve a la matriz original; o sea que

$$[[A]^{-1}]^{-1} = [A] \quad (C-39)$$

Por otra parte, hay muchos tipos de matrices que no cambian al efectuarles la inversión. Entre ellos figuran la matriz identidad y las matrices ortogonales simétricas. A este respecto cabe anotar que en virtud de las definiciones respectivas, dadas por las ecuaciones (C-37) y (C-38), el inverso de una matriz ortogonal es igual a su transpuesta. Esto es:

$$[C]^{-1} = [C]^T \quad (C-40)$$

lo cual simplifica considerablemente la solución de ciertos tipos de problemas que se presentan con frecuencia en el análisis de estructuras por métodos matriciales. La ecuación (C-40) es utilizada por algunos autores para definir a las matrices ortogonales.

Otro inverso muy fácil de evaluar es el de una matriz diagonal, ya que consiste en otra matriz del mismo tipo cuyos términos de la diagonal son simplemente los recíprocos de los términos correspondientes de la matriz original. Por tanto, si la matriz original se escribe en la forma de la ecuación (C-26):

$$[D]_n = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$[D]_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_{nn} \end{bmatrix} \quad (C-41)$$

como se puede verificar rápidamente mediante la multiplicación respectiva.

También se puede demostrar que el inverso del producto de un escalar λ por una matriz cuadrada $[A]$ es igual al inverso del escalar por el inverso de la matriz, o sea que

$$[\lambda [A]]^{-1} = \frac{1}{\lambda} [A]^{-1} \quad (C-42)$$

El inverso de una matriz simétrica es otra matriz simétrica y el de una matriz triangular, inferior o superior, es otra matriz del mismo tipo. En cambio, el inverso de una matriz de banda no es usualmente otra matriz de banda.

El inverso de la transpuesta de una matriz es igual a la transpuesta del inverso de dicha matriz; expresado en forma de ecuación:

$$[[A]^T]^{-1} = [[A]^{-1}]^T \quad (C-43)$$

Intercambiar dos filas de una matriz causa el intercambio de las dos columnas correspondientes del inverso; recíprocamente, el intercambio de dos columnas en la matriz original resulta en el intercambio de las dos filas correspondientes del inverso.

El inverso del producto de dos matrices cuadradas $[A]$ y $[B]$ es el producto de sus inversos pero en orden contrario, esto es:

$$[[A][B]]^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$$

La regla anterior se puede extender al caso del producto de varias matrices, obteniéndose entonces:

$$[[A_1][A_2] \dots [A_n]]^{-1} = [A_n]^{-1}[A_{n-1}]^{-1} \dots [A_1]^{-1} \quad (C-45)$$

Que, como se ve, es similar a la ecuación (C-23) dada antes, aplicable a la transpuesta del producto de varias matrices.

Al calcular inversos puede ser útil recordar que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes respectivos; es decir, que si

$$[C] = [A][B]$$

Entonces $|C| = |A||B|$ (C-46)

Aplicando esta ecuación al caso particular de una matriz $[A]$ y su inverso se obtiene:

$$|A||A^{-1}| = 1 \quad (C-47)$$

que puede usarse para verificar si el inverso tiene algún error. Sin embargo, el cumplimiento de la misma no garantiza que todos los términos del inverso estén bien.

C.3.8. Evaluación del inverso de una matriz mediante la matriz adjunta

Se puede demostrar que el inverso de una matriz está dado por:

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^a}{|A|} \quad (C-48)$$

siempre y cuando el determinante de la matriz sea diferente de cero. En caso contrario, como ya se ha dicho, la matriz $[A]$ es singular y su inverso no existe.

De la discusión anterior sobre las propiedades de los determinantes se ve que hay varias condiciones que causan que una matriz sea singular; por ejemplo, si todos los elementos de una fila o columna son cero, o si dos filas o columnas son iguales, o si cualquiera de ellas es combinación lineal de otras. En la mayor parte de los casos no es posible identificar una matriz singular por simple inspección, de ahí que la prueba usual de singularidad sea evaluar el determinante de la matriz con el fin de establecer si es igual a cero.

Ejemplo C.25

Dado

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

encuentre su inverso y verifique el resultado.

Solución

Se empieza por evaluar el determinante de $[A]$:

$$|A| = 2(-4) - 3(-1) = -5$$

Como el determinante resultó diferente de cero, el inverso existe y se procede a evaluar la matriz cofactor y la matriz adjunta de $[A]$:

$$[A]^c = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad [A]^a = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

y finalmente, aplicando la ecuación (C-48) se obtiene el inverso pedido:

$$[A]^{-1} = \frac{[A]^a}{|A|} = \begin{bmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

Para verificar el resultado se utiliza la definición, ecuación (C-38):

$$\begin{aligned} [A][A]^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \end{aligned}$$

Procediendo a la inversa, al efectuar el producto $[A]^{-1} [A]$ se obtiene exactamente el mismo resultado y de ahí se concluye que la respuesta dada es correcta.

Ejemplo C.26

Encuentre el inverso de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución

Siguiendo exactamente los mismos pasos del ejemplo anterior, se evalúa el determinante:

$$|A| = 3(-2)(-3) + 2(4)(2) + (-1)(-1)(0) - 2(-2)(0) - 2(-1)(-3) - 3(-1)(4) = 40$$

Ahora se evalúan las matrices cofactor y adjunta:

$$a_{11}^c = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

$$a_{12}^c = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(3 - 8) = 5$$

$$a_{13}^c = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$$

$$a_{21}^c = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6; \quad a_{22}^c = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9$$

$$a_{23}^c = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 4) = 7$$

$$a_{31}^c = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad a_{32}^c = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$a_{33}^c = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4$$

Por consiguiente:

$$[A]^c = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 6 & -9 & 7 \\ 8 & -12 & -4 \end{bmatrix}; \quad [A]^a = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & -9 & -12 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

y por la ecuación (C-39):

$$[A]^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 10 & 6 & 8 \\ 5 & -9 & -12 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} & -\frac{9}{40} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

que de nuevo se puede comprobar efectuando las multiplicaciones indicadas en la ecuación (C-38).

El método de invertir una matriz utilizando la matriz adjunta no es práctico para matrices grandes, por la necesidad de evaluar un gran número de determinantes de orden elevado; en consecuencia se han ideado otros procedimientos sistemáticos que permiten aprovechar con más eficiencia la computadora digital, uno de los cuales se explica en el siguiente artículo.

C.3.9. Inversión de una matriz mediante transformaciones sucesivas

Este método se basa en efectuar sobre una matriz cuadrada no singular $[A]$ de orden n transformaciones elementales apropiadas de filas o columnas, hasta convertirla en la matriz identidad del mismo orden. Por la definición de inverso –ecuación (C-38)–, y dado que $[A]^{-1}$ tiene valor único, es evidente que dicho inverso constituye la matriz de transformación $[T]$ que convierte a $[A]$ en $[I]$. Ahora bien, si a la matriz identidad $[I]$ del mismo orden n de la matriz original $[A]$ se le hacen las mismas transformaciones, se obtiene como resultado:

$$[T][I] = [A]^{-1}[I] = [A]^{-1} \quad (C-49)$$

que constituye el inverso deseado. Es decir, que el conjunto único de transformaciones lineales que convierte a $[A]$ en $[I]$, transforma a su vez $[I]$ en $[A]^{-1}$.

En otras palabras, si la matriz dada es $[A]$ y $[T_1]$, $[T_2]$, ... $[T_n]$ son matrices de transformación tales que cuando $[A]$ es premultiplicada por ellas, en el orden mostrado a continuación, resulta la matriz identidad, esto es:

$$[T]_n \cdots [T_2][T_1][A] = [I] \quad (C-50)$$

Entonces, de lo anteriormente dicho se desprende que el inverso de $[A]$ es el producto:

$$[A]^{-1} = [T_n] \cdots [T_2][T_1] \tag{C-51}$$

Las operaciones elementales que se requieren en el proceso son escalar y combinar. Esencialmente, las matrices de transformación convierten en cada ciclo una columna de la matriz resultante del ciclo anterior en la columna correspondiente de la matriz identidad. En consecuencia, para el primer ciclo la matriz de transformación respectiva $[T_1]$ será:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{C-52}$$

que se obtiene efectuando sobre la matriz identidad las transformaciones deseadas. El primer elemento se divide por a_{11} para reducir este término, que constituye el *pivote*, a uno. A continuación se añaden al resto de elementos de la primera columna, múltiplos apropiados del elemento pivotal que los conviertan en ceros. Así, por ejemplo, para eliminar el primer elemento de la segunda fila deberá añadirse el elemento pivotal (que ahora vale uno) multiplicado por $-a_{21}$. Similarmente se procederá con los términos de la segunda columna. Se puede verificar entonces que al efectuar el producto $[T_1][A]$, resulta:

$$[T_1][A] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix} \tag{C-53}$$

o, utilizando nuevos símbolos para la matriz transformada:

$$[B] = [T_1][A] = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{C-54}$$

Para convertir la segunda columna de la matriz $[B]$ en la columna correspondiente de la matriz identidad, se emplea el elemento b_{22} como pivote y la siguiente matriz de transformación $[T_2]$:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{22}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{b_{n2}}{b_{22}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (C-55)$$

construida en forma similar a la indicada para $[T_1]$.

La premultiplicación de $[B]$ por $[T_2]$ resulta en una nueva matriz $[C]$, en la cual los términos de las dos primeras columnas son idénticos a los de la matriz identidad:

$$[C] = [T_2][B] = [T_2][T_1][A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (C-56)$$

El proceso se repite n veces, convirtiendo cada vez una columna, hasta que el producto final sea la matriz identidad, como indica la ecuación (C-50). El inverso será entonces el producto de las matrices de transformación expresado por la ecuación (C-51). Aunque la explicación del método se ha hecho operando sobre filas, es claro que puede desarrollarse un procedimiento completamente análogo operando sobre las columnas. En tal caso las matrices de transformación deberán posmultiplicar a la matriz original.

El procedimiento anterior se puede desarrollar detalladamente en la forma descrita hasta obtener el inverso mediante la ecuación (C-51). El lector interesado podrá encontrar ejemplos de este tipo en la referencia C.6. Sin embargo, resulta más conveniente organizar los cálculos en la forma equivalente más sistemática que se describe en seguida.

Cuando las operaciones se van a efectuar sobre las filas, se empieza por colocar la matriz identidad a la derecha de la matriz que se va a invertir y luego se efectúan secuencialmente sobre las filas del conjunto las operaciones indicadas por las siguientes ecuaciones:

$$F_c^c = \frac{F_c^{c-1}}{a_{cc}^{c-1}} \quad (C-57)$$

En donde la F se refiere a fila y la c del subíndice y exponente corresponde al número del ciclo. Para las filas F_i con i diferente de c se tiene en cambio:

$$F_i^c = F_i^{c-1} - a_{ic}^{c-1} F_c^c \quad (C-58)$$

El proceso se ilustrará con las mismas matrices de los ejemplos C.25 y C.26.

Ejemplo C.27

Encuentre el inverso de la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Mediante el método de transformaciones sucesivas.

Solución

Se empieza por colocar al lado de la matriz $[A]$ una matriz $[I]$ del mismo orden. El conjunto queda así:

$$\begin{array}{l} \text{Identificación} \quad [A] \quad [I] \\ F_1^0 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 1 \quad 0 \\ F_2^0 \quad 3 \quad -4 \quad | \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

En donde el exponente cero indica el estado original.

Primer ciclo

Aplicando ahora la ecuación (C-57) a la primera fila se obtiene:

$$F_1' = \frac{F_1^0}{2} = 1 \quad -\frac{1}{2} \quad | \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

Según la ecuación (C-58), la segunda fila del primer ciclo se obtiene efectuando:

$$F_2' = F_2^0 - a_{21}^0 F_1' = F_2^0 - 3F_1'$$

Y al hacerlo elemento por elemento se llega a

$$F_2' = 0 \quad -\frac{5}{2} \quad | \quad -\frac{3}{2} \quad 1$$

Agrupando las dos filas se tiene hasta ahora:

$$\begin{array}{l} F_1' \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad | \quad \frac{1}{2} \quad 0 \\ F_2' \quad 0 \quad -\frac{5}{2} \quad | \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \end{array}$$

o sea exactamente lo que pretendía, esto es, convertir la primera columna de la matriz $[A]$ en la columna correspondiente de la matriz identidad.

Segundo ciclo

La ecuación (C-58) convierte el segundo elemento de la diagonal en uno:

$$F_2'' = F_2' / (-\frac{5}{2}) = (-\frac{2}{5}) F_2'$$

Por consiguiente, la segunda fila del primer ciclo se transforma en:

$$F_2'' = 0 \quad 1 \quad | \quad \frac{3}{5} \quad -\frac{2}{5}$$

y usando esta fila y la ecuación (C-58) para convertir el segundo elemento de la primera fila del ciclo uno:

$$F_1'' = F_1' - a_{12}' F_2'' = F_1' + (\frac{1}{2}) F_2''$$

que aplicada elemento por elemento, conduce a:

$$F_1'' = 1 \quad 0 \quad | \quad \frac{4}{5} \quad -\frac{1}{5}$$

de tal manera que el conjunto ha quedado así:

$$\begin{array}{cc|cc} \text{Identificación} & [I] & & [A]^{-1} \\ F_1'' & 1 & 0 & \frac{4}{5} \quad -\frac{1}{5} \\ F_2'' & 0 & 1 & \frac{3}{5} \quad -\frac{2}{5} \end{array}$$

en donde las dos últimas columnas corresponden al inverso.

Al seguir manualmente este procedimiento, conviene organizar los cálculos en un cuadro como el que se indica a continuación:

Ciclo	Matrices		Orden		Id.	Equivalencia	
0	2	-1	1	0			
	3	-4	0	1			
,	1	1/2	1/2	0	1	$F_1^0/2$	F_1^0/a_{11}^0
	0	-5/2	-3/2	1	2	$F_2^0 - 3 F_1^0$	$F_2^0 - a_{21}^0 F_1^0$
''	1	0	4/5	-1/5	3	$F_1'' + (1/2) F_2''$	$F_1' - a_{12}' F_2''$
	0	1	3/5	-2/5	4	$F_2' / (-5/2)$	F_2' / a_{22}'

Obsérvese que en la tercera columna se ha colocado el orden de las operaciones efectuadas y que en la columna de equivalencia figura en cada caso el resultado de aplicar las ecuaciones (C-57) y (C-58) según corresponda.

Ejemplo C.28

Utilice el método de transformaciones sucesivas para encontrar el inverso de la siguiente matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución

Utilizando el cuadro simplificado que se explicó en el ejemplo anterior, se obtiene:

Ciclo	Matrices			Orden			Id.	Equivalencia		
0	-2	3	1	1	0	0	F_1^0			
	-5	4	2	0	1	0	F_2^0			
	3	0	-1	0	0	1	F_3^0			
'	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	F_1'	$F_1^0 / (-2)$	F_1^0 / a_{11}^0
	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	0	2	F_2'	$F_2^0 + 5 F_1'$	$F_2^0 - a_{21}^0 F_1'$
	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	3	F_3'	$F_3^0 - 3 F_1'$	$F_3^0 - a_{31}^0 F_1'$
"	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	5	F_1''	$F_1' + (\frac{3}{2}) F_2''$	$F_1' - a_{12}' F_2''$
	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	4	F_2''	$F_2' / (-\frac{7}{2})$	F_2' / a_{22}'
	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{9}{7}$	1	6	F_3''	$F_3' - (\frac{9}{2}) F_2''$	$F_3' - a_{32}' F_2''$
'''	1	0	0	4	-3	-2	8	F_1'''	$F_1'' + (\frac{2}{7}) F_3'''$	$F_1'' - a_{13}'' F_3'''$
	0	1	0	-1	1	1	9	F_2'''	$F_2'' + (\frac{1}{7}) F_3'''$	$F_2'' - a_{23}'' F_3'''$
	0	0	1	12	-9	-7	7	F_3'''	$F_3'' / (-\frac{1}{7})$	F_3'' / a_{33}''

En consecuencia, el inverso pedido está dado por:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 12 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Que coincide con el obtenido en el ejemplo C.26.

Como ya se dijo, los mismos resultados podrían haberse obtenido operando sobre las columnas en lugar de sobre las filas. En tal caso la matriz identidad deberá colocarse debajo de la matriz por invertir y se procederá de izquierda a derecha.

En los ejemplos C.27 y C.28 se escogió como primer pivote al elemento a_{11} y en los ciclos siguientes se fueron tomando secuencialmente como pivotes los términos de la diagonal principal. Esta secuencia es arbitraria y los pivotes podrían haberse seleccionado en cualquier otro orden.

En el caso general, al sistematizar el proceso puede ocurrir que el término al que corresponda servir como pivote valga cero. En tal caso es necesario intercambiar dos filas o dos columnas de la matriz con el fin de obtener en la posición estipulada un pivote diferente de cero. Ahora bien, como se indicó en el artículo C.3.7, el intercambio de dos filas de una matriz ocasiona el intercambio de las dos columnas correspondientes de su inverso. Por consiguiente, una vez efectuada la inversión es necesario hacer intercambios apropiados en el inverso calculado con el fin de obtener el inverso de la matriz original. Por ejemplo, si en una matriz $[A]$ con anterioridad a la inversión se intercambian la segunda y la cuarta filas, después de invertir la matriz alterada se deben intercambiar la segunda y la cuarta columnas del inverso calculado para obtener el verdadero inverso de $[A]$.

En cuanto a precisión, aquí también se cumple que para minimizar los errores de truncación deberán utilizarse como pivotes los elementos numéricamente mayores de la matriz.

Esto requiere, en general, el intercambio de filas y columnas de la matriz antes de cada transformación hasta que el elemento mayor queda en la posición pivotal; en consecuencia, es indispensable llevar un registro cuidadoso de los intercambios efectuados durante el proceso de inversión para poder reorganizar el inverso calculado y obtener el inverso verdadero. En los problemas de análisis estructural, sin embargo, normalmente se cumple la condición de que los elementos mayores estén en la diagonal, haciéndose innecesario el reorganizar de la matriz por invertir.

Si no se comprueba la no singularidad de la matriz antes de iniciar el proceso, la existencia de esta condición se hará evidente durante el mismo al no ser posible continuar los cálculos por la aparición de alguna dificultad, como, por ejemplo, una división por cero.

La sistematización indicada anteriormente es muy apropiada para matrices pequeñas que se han de invertir a mano. En problemas de estructuras cuando se dispone de una calculadora programable o de un computador, pueden aplicarse los diagramas de flujo de las figuras C.3 y C-4. Este último tiene la ventaja de utilizar sólo un espacio de $n \times n$ para el almacenamiento.

C.3.10. Aplicación de la partición a la inversión de matrices

La partición de matrices en submatrices puede utilizarse ventajosamente para simplificar el trabajo de inversión, en especial cuando se trata de resolver sistemas muy grandes de ecuaciones. Este método permite invertir, en un computador dado, matrices mayores que las que normalmente se podrían trabajar con otros esquemas que utilizan directamente la matriz original, e incluso con ahorro en tiempo de computación. Debido al número y diversidad de las operaciones involucradas es preciso asegurarse, sin embargo, de que los errores de truncación acumulados permanezcan dentro de límites admisibles.

Beaufait *et al.* (referencia C.7) presentan fórmulas simplificadas para el caso de matrices de banda que, como ya se dijo, ocurren frecuentemente en problemas de análisis estructural.

A continuación se deducen las ecuaciones correspondientes al caso general, que no dependen de la existencia de términos nulos en la matriz por invertir.

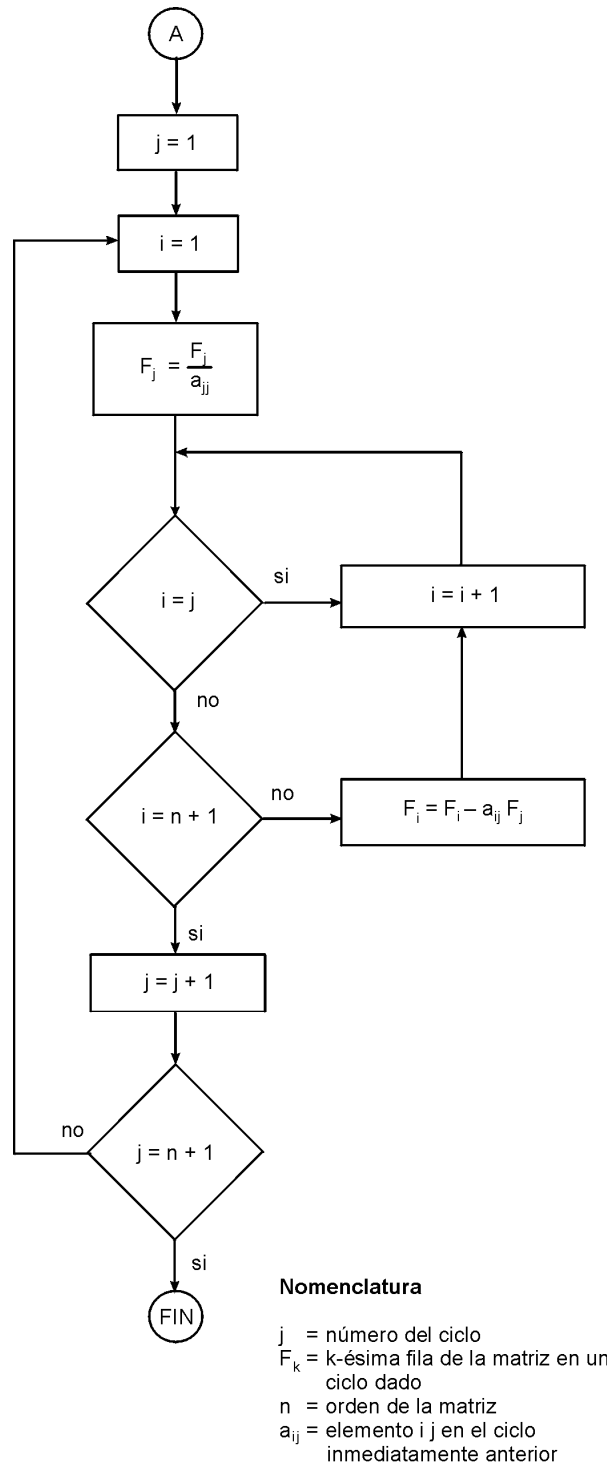


Figura C-2. Diagrama de flujo para la inversión de matrices por el método de Gauss-Jordan. Solución manual.

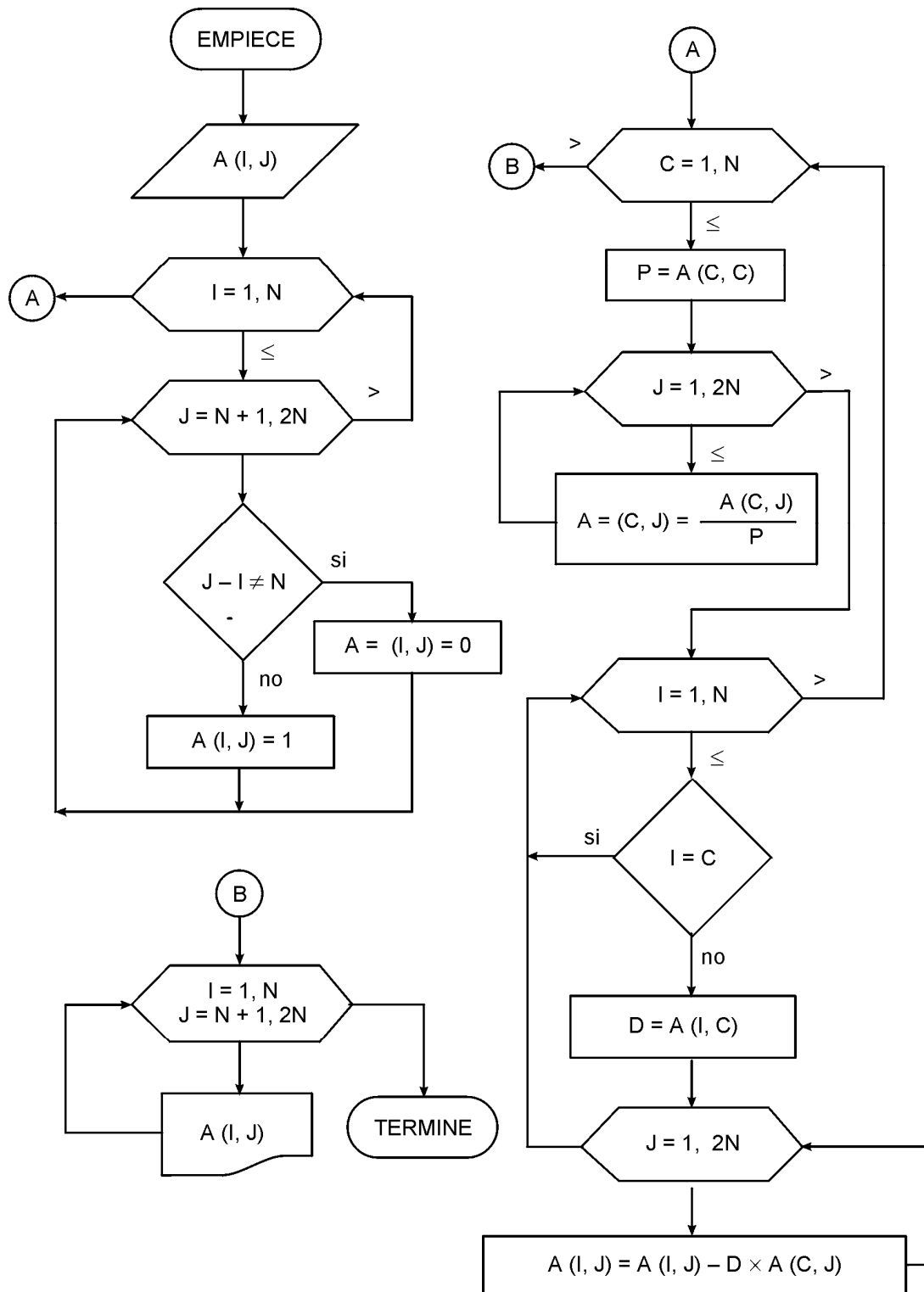


Figura C.3. Diagrama de flujo para la inversión de matrices por el método de Gauss-Jordan. Solución por computadora.

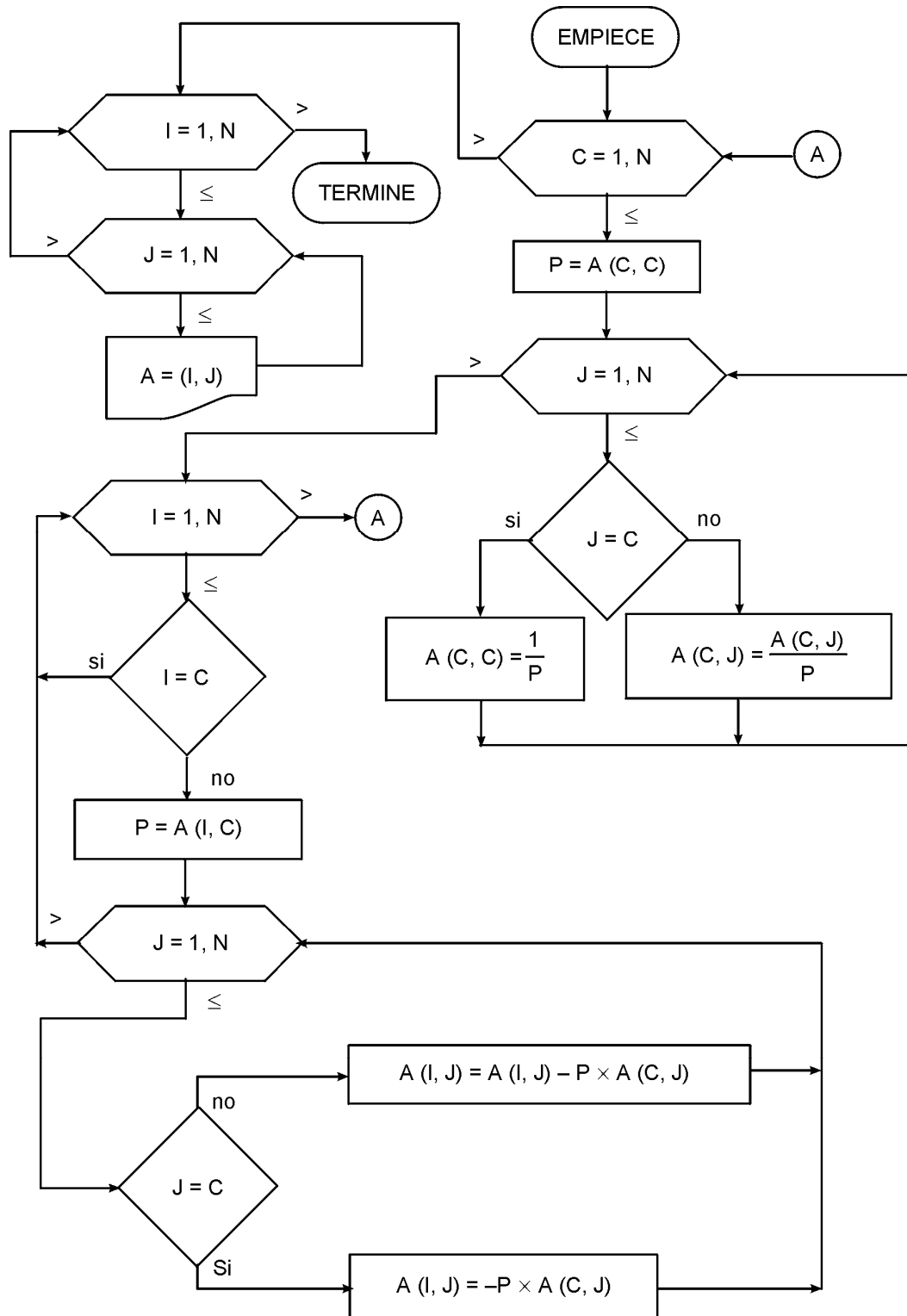


Figura C.4. Diagrama de flujo para la inversión de matrices por el método de Gauss-Jordan, utilizando tan sólo una matriz de N x N.

Para empezar, si se parte de la matriz original $[A]$, de orden $n \times n$ en la forma siguiente:

$$\left[\begin{array}{c|c} [A_{11}]_{p \times p} & [A_{12}]_{p \times q} \\ \hline [A_{21}]_{q \times p} & [A_{22}]_{q \times q} \end{array} \right] \quad (C-59)$$

en donde $p + q = n$ y se denomina $[B]$ a su inverso, la ecuación básica $[A] [A]^{-1} = [I]$ se convierte en $[A] [B] = [I]$. Las dos últimas matrices de esta ecuación deben partirse en forma compatible con la partición de $[A]$, esto es:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} [A_{11}]_{p \times p} & [A_{12}]_{p \times q} \\ \hline [A_{21}]_{q \times p} & [A_{22}]_{q \times q} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} [B_{11}]_{p \times p} & [B_{21}]_{p \times q} \\ \hline [B_{21}]_{q \times p} & [B_{22}]_{q \times q} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} [I_1]_{p \times p} & [0]_{p \times q} \\ \hline [0]_{q \times p} & [I_2]_{q \times q} \end{array} \right] \quad (C-60) \end{aligned}$$

Efectuando ahora las multiplicaciones pertinentes de submatrices, la ecuación anterior puede descomponerse así:

$$[A_{11}] [B_{11}] + [A_{12}] [B_{21}] = [I_1] \quad (C-60a)$$

$$[A_{11}] [B_{12}] + [A_{12}] [B_{22}] = [0] \quad (C-60b)$$

$$[A_{21}] [B_{11}] + [A_{22}] [B_{21}] = [0] \quad (C-60c)$$

$$[A_{21}] [B_{12}] + [A_{22}] [B_{22}] = [I_2] \quad (C-60d)$$

Suponiendo que $[A]^{-1}$, $[A_{11}]^{-1}$ y $[A_{22}]^{-1}$ existen, se empieza por despejar $[B_{21}]$ de la ecuación (C-60c):

$$[B_{21}] = -[A_{22}]^{-1} [A_{21}] [B_{11}] \quad (C-61)$$

Reemplazando este valor en la ecuación (C-60a) y factorizando:

$$\left[[A_{11}] - [A_{12}] [A_{22}]^{-1} [A_{21}] \right] [B_{11}] = [I_1]$$

De la cual se puede despejar la primera submatriz del inverso:

$$[B_{11}] = \left[[A_{11}] - [A_{12}] [A_{22}]^{-1} [A_{21}] \right]^{-1} \quad (C-62)$$

y encontrar a partir de ella $[B_{21}]$ mediante la ecuación (C-61).

Siguiendo el mismo procedimiento con las ecuaciones (C-60b) y (C-60d), se obtiene:

$$[B_{22}] = \left[[A_{22}] - [A_{21}] [A_{11}]^{-1} [A_{12}] \right]^{-1} \quad (C-63)$$

y finalmente:

$$[B_{12}] = -[A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{22}] \quad (C-64)$$

En soluciones manuales no es necesario memorizar las ecuaciones anteriores ya que su deducción es muy sencilla. El método se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo C.29

Encuentre el inverso de la matriz $[A]$, dada a continuación, utilizando partición.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Se empieza por suponer una partición apropiada, atendiendo requisitos de compatibilidad. Por ejemplo:

$$[A] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{array} \right]$$

Las submatrices quedan entonces definidas así:

$$[A_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad [A_{12}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{21}] = [3 \quad -7]; \quad [A_{22}] = [1]$$

Efectuando ahora el triple producto:

$$[A_{12}][A_{22}]^{-1}[A_{21}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1][3 \quad -7] = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$$

Sustrayendo este valor de $[A_{11}]$ e invirtiendo el resultado, como indica la ecuación (C-62):

$$[B_{11}] = \left[\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -14 \end{bmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 18 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

Empleando ahora la ecuación (C-61):

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_{21}] &= -[\mathbf{1}] \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{2} - 14 & -3 + \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

Para utilizar la ecuación (C-63) es necesario invertir primero $[\mathbf{A}_{11}]$.

$$[\mathbf{A}_{11}]^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

De manera que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{21}] [\mathbf{A}_{11}]^{-1} [\mathbf{A}_{12}] &= \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{B}_{22}] &= \{ [\mathbf{1}] - [\mathbf{A}_{21}] [\mathbf{A}_{11}]^{-1} [\mathbf{A}_{12}] \}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{c}) \end{aligned}$$

y según la ecuación (C-64):

$$\mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{d})$$

Para terminar se ensamblan las submatrices a , b , c y d :

$$[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

que es la respuesta pedida. En efecto, se puede verificar que:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que siguiendo este procedimiento, en lugar de invertir la matriz original de orden 3×3, se invirtieron dos matrices de orden 2×2 y dos de orden 1×1. Las otras operaciones involucradas fueron sustracción y multiplicación de matrices, que el computador puede efectuar muy rápidamente.

C.4. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Como ya se dijo, hay muchos métodos para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, y el ingeniero estructural debe tener un buen conocimiento de ellos. En álgebra elemental se suelen ver los de solución simultánea por sustitución o por eliminación mediante suma o resta, que pueden emplearse sin dificultad con sistemas de dos o tres ecuaciones. Incluso en los primeros la solución puede encontrarse fácilmente por el método gráfico. Para sistemas mayores conviene utilizar en cambio procedimientos sistemáticos, especialmente si se va a emplear computador. Los principales se explican en los artículos siguientes:

C.4.1. Solución de un sistema de ecuaciones por inversión

Un conjunto de *n* ecuaciones lineales que relacionan *n* incógnitas (*X*₁, *X*₂, ... *X*_{*n*}) puede expresarse así:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n &= b_n \end{aligned} \tag{C-65}$$

Dicho sistema puede indicarse matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{C-66}$$

o en forma simplificada

$$[A][X] = [B] \tag{C-67}$$

en donde [A] es la matriz de coeficientes y [X] y [B] son los vectores de incógnitas y de términos independientes, respectivamente.

La solución de la ecuación (C-67) ofrece varias posibilidades, dependiendo de si la matriz $[A]$ es singular o no. En el primer caso el determinante de $[A]$ vale cero y se requiere una investigación más profunda. Para ello se forma una *matriz aumentada* $[A_g]$, utilizando las matrices $[A]$ y $[B]$ como submatrices, de esta manera:

$$[A_g] = [A \mid B] \quad (C-68)$$

y luego se averiguan los *rangos* de $[A]$ y de $[A_g]$, entendiéndose por rango de una matriz la dimensión del determinante mayor diferente de cero que pueda formarse con esa matriz, eliminando filas y columnas de la misma, si es necesario.

Pueden presentarse dos situaciones:

- a) $[A]$ tiene rango r mientras que $[A_g]$ tiene rango $r_g > r$. Entonces, el sistema es inconsistente y no existe solución.
- b) Tanto $[A]$ como $[A_g]$ tienen el mismo rango r . En tal caso hay r ecuaciones linealmente independientes y $n - r$ linealmente dependientes; el sistema no tiene solución única y específicamente se pueden encontrar r incógnitas en función de las $n - r$ restantes.

Por otra parte, cuando la matriz $[A]$ no es singular, su determinante es diferente de cero ($|A| \neq 0$) y el sistema tiene una solución única.

Suponiendo acá que el sistema de las ecuaciones (C-65) tiene una solución única y que el vector $[B]$ no es un vector nulo, se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación (C-67) por el inverso de $[A]$, obteniéndose

$$[A]^{-1}[A][X] = [A]^{-1}[B]$$

y, por consiguiente, el vector de incógnitas resulta igual a $[B]$ premultiplicado por $[A]^{-1}$, esto es:

$$[X] = [A]^{-1}[B] \quad (C-69)$$

De aquí se ve que, evidentemente, para que exista la solución única del sistema de ecuaciones es necesario que exista el inverso de la matriz de coeficientes, lo cual implica que $[A]$ no sea singular, como se indicó con anterioridad.

Este método es particularmente ventajoso cuando el sistema de ecuaciones se debe resolver varias veces, cada una con un vector de términos independientes diferente. Tal es el caso en muchos problemas de análisis estructural en que la misma estructura se debe estudiar para varias hipótesis de carga. Se tiene entonces que la matriz de coeficientes permanece idéntica ya que depende de las propiedades de la estructura, mientras que el vector de términos independientes varía para cada hipótesis, por ser función de las respectivas cargas. La parte demorada de la solución, que es la inversión de $[A]$, se ejecuta una sola vez y habiendo obtenido $[A]^{-1}$ resulta relativamente simple y rápido calcular los varios vectores de incógnitas que correspondan a los diversos vectores $[B]$.

La inversión directa de la matriz de coeficientes se necesita también en problemas dinámicos o de estabilidad. Por otra parte, cuando sólo existe un vector $[B]$ de términos independientes resulta más eficiente resolver el sistema despejando de manera directa las incógnitas, en lugar de evaluar explícitamente $[A]^{-1}$. Hay muchas técnicas para ello y las

principales se explican más adelante.

Ejemplo C.30

Resuelva por inversión directa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$X_1 - 3X_2 + X_3 = 10$$

$$-2X_1 + 4X_2 + 2X_3 = -6$$

$$-3X_1 - 7X_2 + X_3 = 4$$

Solución

Para este sistema de ecuaciones las matrices $[A]$ y $[B]$ son, respectivamente:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Observando que la matriz $[A]$ es idéntica a la del ejemplo (C.29), se puede utilizar su resultado. Aplicando entonces la ecuación (C-68):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 \\ -19 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es decir que: $X_1 = -41$, $X_2 = -19$ y $X_3 = -6$.

C.4.2. Regla de Cramer

La regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones era ya conocida por los chinos en el siglo XIII y se puede deducir utilizando las propiedades de los determinantes.

Partiendo de la ecuación (C-69) y de la expresión para el inverso dada por la ecuación (C-48), se obtiene que el vector de incógnitas se puede expresar así:

$$[X] = [A]^{-1} [B] = \frac{[A]^a}{|A|} [B] \quad (C-70)$$

Suponiendo de nuevo que hay n ecuaciones simultáneas y recordando la definición de matriz adjunta, la expresión anterior se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{11}^c & a_{21}^c & \dots & a_{n1}^c \\ a_{12}^c & a_{22}^c & \dots & a_{n2}^c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^c & a_{2n}^c & \dots & a_{nn}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{C-71})$$

Y efectuando el producto de la derecha:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_1 a_{11}^c + b_2 a_{21}^c + \dots + b_n a_{n1}^c \\ b_1 a_{12}^c + b_2 a_{22}^c + \dots + b_n a_{n2}^c \\ \dots \\ b_1 a_{1n}^c + b_2 a_{2n}^c + \dots + b_n a_{nn}^c \end{bmatrix} \quad (\text{C-72})$$

Igualando términos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{b_1 a_{11}^c + b_2 a_{21}^c + \dots + b_n a_{n1}^c}{|A|} \\ X_2 &= \frac{b_1 a_{12}^c + b_2 a_{22}^c + \dots + b_n a_{n2}^c}{|A|} \\ &\dots \\ X_n &= \frac{b_1 a_{1n}^c + b_2 a_{2n}^c + \dots + b_n a_{nn}^c}{|A|} \end{aligned} \quad (\text{C-73})$$

Analizando el numerador de cada una de estas ecuaciones se ve que corresponde a la expansión de un determinante por cofactores y, en consecuencia, una forma equivalente de escribirlas es:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n1} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|} \\ X_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta obtener:

$$X_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

En palabras, la regla de Cramer se puede enunciar como sigue (referencia C.6): “La solución para cualquier incógnita X_i de un sistema de ecuaciones simultáneas es igual al cociente de dos determinantes; el denominador es el determinante de los coeficientes, mientras que el numerador es el mismo determinante pero con la i -ésima columna remplazada por el vector de términos independientes (elementos del lado derecho) del sistema de ecuaciones”.

La regla de Cramer sólo resulta útil en cálculos a mano cuando los determinantes pueden evaluarse fácilmente. En sistemas grandes y cuando se emplea computador, generalmente es más eficiente seguir otros procedimientos.

Ejemplo C.31

Resuelva mediante la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 = -11$$

$$-X_1 + 3X_2 - 2X_3 = -16$$

$$2X_1 - 3X_2 + 5X_3 = 21$$

Solución

Para este sistema se tiene:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -11 \\ -16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

y aplicando las ecuaciones (C-73):

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -16 & 3 & -2 \\ 21 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{38}{19} = 2; \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -11 & 1 \\ -1 & -16 & -2 \\ 2 & 21 & 5 \end{vmatrix}}{19} = \frac{-76}{19} = -4$$

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -11 \\ -1 & 3 & -16 \\ 2 & -3 & 21 \end{vmatrix}}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

$$\begin{aligned}
 X_1' &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
 X_2' &= \frac{b_2}{a_{22}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_n' &= \frac{b_n}{a_{nn}}
 \end{aligned}
 \tag{C-77}$$

en donde el exponente indica que se trata de la primera aproximación. Utilizando estos valores en las ecuaciones (C-76) se logra una segunda aproximación:

$$\begin{aligned}
 X_1'' &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}X_2' - \dots - a_{1n}X_n') \\
 X_2'' &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}X_1' - \dots - a_{2n}X_n') \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_n'' &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}X_1' - \dots - a_{nn-1}X_{n-1}')
 \end{aligned}
 \tag{C-78}$$

y si éstos se emplean de nuevo:

$$X_1''' = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}X_2'' - \dots - a_{1n}X_n'')$$

etcétera.

El proceso se sigue hasta cumplir con el criterio de convergencia, es decir hasta que para todas las incógnitas:

$$|X_i^c - X_i^{c-1}| < \epsilon
 \tag{C-79}$$

en donde c se refiere al ciclo y ϵ representa la precisión deseada; por ejemplo, para una respuesta con dos cifras decimales, $\epsilon = 0.005$.

Este método se conoce como de Gauss, aunque algunos autores (referencia C.8) lo atribuyen a Jacobi.

Ejemplo C.32

Resuelva por el método iterativo el siguiente sistema de ecuaciones (referencia C.7):

$$\begin{aligned}
 8X_1 - 3X_2 + 2X_3 &= 20 \\
 4X_1 + 11X_2 - X_3 &= 33 \\
 6X_1 + 3X_2 + 12X_3 &= 36
 \end{aligned}$$

Solución

Empleando las ecuaciones (C-77)

$$X_1' = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$X_2' = \frac{33}{11} = 3$$

$$X_3' = \frac{36}{12} = 3$$

y reemplazando estos valores en el lado derecho de las ecuaciones (C-78):

$$X_1'' = \frac{1}{8}(20 + 3(3) - 2(3)) = 2.875$$

$$X_2'' = \frac{1}{11}(33 - 4(2.5) + 1(3)) = 2.364$$

$$X_3'' = \frac{1}{12}(36 - 6(2.5) - 3(3)) = 1.000$$

Repetiendo el proceso:

$$X_1''' = \frac{1}{8}(20 + 3(2.364) - 2(1.000)) = 3.137$$

$$X_2''' = \frac{1}{11}(33 - 4(2.875) + 1(1.000)) = 2.045$$

$$X_3''' = \frac{1}{12}(36 - 6(2.875) - 3(2.364)) = 0.972$$

y así sucesivamente. En el cuadro siguiente se representan los resultados de siete ciclos:

Ciclo	X_1	X_2	X_3	$ \epsilon_1 $	$ \epsilon_2 $	$ \epsilon_3 $
1	2.5	3.0	3.0			
2	2.875	2.364	1.000	0.375	0.636	2.000
3	3.137	2.045	0.972	0.262	0.319	0.028
4	3.024	1.948	0.920	0.117	0.097	0.052
5	3.000	1.984	1.001	0.024	0.036	0.081
6	2.994	2.000	1.004	0.006	0.016	0.003
7	2.999	2.003	1.003	0.005	0.003	0.001

La solución exacta es $X_1 = 3$, $X_2 = 2$ y $X_3 = 1$; en consecuencia, se necesitan siete ciclos para poder garantizar las respuestas a dos decimales.

Una alternativa del método sugerida por Seidel es tratar de acelerar la convergencia empleando en el lado derecho de las ecuaciones (C-76) no los valores del ciclo anterior sino los últimos hallados. En tal caso, se pueden usar las siguientes ecuaciones:

Para el primer ciclo:

$$\begin{aligned}
 X_1' &= \frac{b_1}{a_{11}} \\
 X_2' &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21} X_1') \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_n' &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1} X_1' - \dots - a_{n,n-1} X_{n-1}')
 \end{aligned}
 \tag{C-80}$$

y en general:

$$\begin{aligned}
 X_1^c &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12} X_2^{c-1} - \dots - a_{1n} X_n^{c-1}) \\
 X_2^c &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21} X_1^c - a_{23} X_3^{c-1} - \dots - a_{2n} X_n^{c-1}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_n^c &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1} X_1^c - a_{n2} X_2^c - \dots - a_{n,n-1} X_{n-1}^c)
 \end{aligned}
 \tag{C-81}$$

en donde c indica el ciclo actual y $c-1$ el ciclo anterior.

Si se aplican estas ecuaciones al ejemplo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 X_1' &= \frac{20}{18} = 2.5 \\
 X_2' &= \frac{1}{11}(33 - 4(2.5)) = 2.091 \\
 X_3' &= \frac{1}{12}(36 - 6(2.5) - 3(2.091)) = 1.227
 \end{aligned}$$

Y para el segundo ciclo:

$$X_1'' = \frac{1}{18}(20 + 3(2.091) - 2(1.227)) = 2.977$$

$$X_2'' = \frac{1}{11}(33 - 4(2.977) + 1(1.227)) = 2.029$$

$$X_3'' = \frac{1}{12}(36 - 6(2.977) - 3(2.029)) = 1.004$$

Resumiendo en un cuadro:

Ciclo	X_1	X_2	X_3
1	2.5	2.091	1.227
2	2.977	2.029	1.004
3	3.010	1.997	0.996
4	3.000	2.000	1.000

de donde se ve que ahora bastaron cuatro ciclos para obtener las respuestas exactas a tres decimales.

Al proceso efectuado en esta forma se le llama de *Gauss-Seidel*.

C.4.4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales por eliminación

Como se dijo anteriormente, en muchos problemas sólo existe un vector [B] de términos independientes y en lugar de invertir la matriz de coeficientes resulta más eficiente utilizar un esquema de eliminación como el propuesto por Gauss a principios del siglo XIX. Existen otros más recientes que buscan mejorar su precisión o su eficiencia, o ambas. Los métodos de eliminación, en general, aprovechan la posibilidad de descomponer una matriz cuadrada [A] en un producto de matrices triangulares en virtud del *teorema de descomposición* (referencia C.1):

$$[A] = [L^0][D][U^0] \quad (C-82)$$

en donde $[L^0]$ y $[U^0]$ son matrices triangulares unitarias inferior y superior, respectivamente, y [D] es una matriz diagonal. $[L^0]$, [D] y $[U^0]$ tienen valores únicos para una matriz dada [A].

Se pueden obtener muchas variaciones de la ecuación básica de descomposición asociando a [D] con $[L^0]$ o $[U^0]$ e inclusive considerando a [D] como el producto de dos matrices diagonales y asociando una de ellas con $[L^0]$ y la otra con $[U^0]$. En tales casos la matriz [A] queda descompuesta así:

$$[A] = [L][U] \quad (C-83)$$

en donde [L] y [U] siguen siendo matrices triangulares pero ya no necesariamente unitarias y además no tienen valores únicos, pues dependen de la factorización de [D] y su posterior asociación con una u otra.

Recordando ahora la forma matricial general de un sistema de ecuaciones:

$$[A][X] = [B] \quad (C-67)$$

y suponiendo que $[A]$ no es singular y que por un procedimiento adecuado se han encontrado las matrices $[L]$ y $[U]$, la ecuación anterior se convierte en:

$$[L][U][X] = [B] \quad (C-84)$$

Si se define un vector auxiliar $[Y]$, tal que:

$$[U][X] = [Y] \quad (C-85)$$

la ecuación (C-84) se puede escribir:

$$[L][Y] = [B] \quad (C-86)$$

Como $[L]$ es una matriz triangular inferior, se puede determinar $[Y]$ elemento por elemento, a partir de la primera fila, en un proceso simple de eliminación *hacia adelante*. Por consiguiente, no es necesario invertir en forma explícita la matriz $[L]$, aunque simbólicamente el proceso es equivalente a despejar $[Y]$:

$$[Y] = [L]^{-1} [B] \quad (C-87)$$

Una vez encontrado el vector auxiliar se utiliza la ecuación (C-85) para encontrar los términos de $[X]$, a partir de la última fila, mediante sustitución regresiva. De nuevo esto equivale a despejar $[X]$ en la ecuación citada:

$$[X] = [U]^{-1} [Y] = [U]^{-1} [L]^{-1} [B] \quad (C-88)$$

que se podría haber obtenido directamente de la ecuación (C-84).

Hay que recalcar que utilizando este procedimiento se obtiene el vector $[X]$ sin efectuar explícitamente ninguna inversión. Se ha demostrado (referencias C.2 y C.3) que los programas que utilizan estos esquemas superan a los que se basan en inversión para resolver los sistemas de interés práctico. En los artículos siguientes se explican dos de los métodos más usados: los debidos a Gauss y a Cholesky.

C.4.4.1. Eliminación de Gauss

En el procedimiento propuesto por Gauss, la matriz de coeficientes del sistema es reducida a una matriz triangular superior mediante transformaciones apropiadas de las filas; una vez logrado esto, se encuentra la solución del sistema mediante sustitución regresiva. El método se fundamenta en el principio de que al efectuar operaciones elementales sobre las filas de un sistema de ecuaciones lineales se produce un nuevo conjunto de ecuaciones, equivalente al primer sistema y que, por consiguiente, tiene la misma solución. La forma más sencilla del método se explicará mediante un sistema de tres ecuaciones (referencia C.1):

$$\begin{aligned}
 a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 &= b_1 \\
 a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 &= b_2 \\
 a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 &= b_3
 \end{aligned}
 \tag{C-89}$$

La primera incógnita se puede eliminar multiplicando la primera ecuación por a_{21}/a_{11} y sustrayéndola de la segunda, y multiplicando luego la primera ecuación original por a_{31}/a_{11} y sustrayéndola de la tercera. Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned}
 \left[a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right] X_2 + \left[a_{23} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} \right] X_3 &= \left[b_2 - \frac{a_{21} b_1}{a_{11}} \right] \\
 \left[a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} \right] X_2 + \left[a_{33} - \frac{a_{31} a_{13}}{a_{11}} \right] X_3 &= \left[b_3 - \frac{a_{31} b_1}{a_{11}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{C-90}$$

Operando de manera similar sobre estas dos ecuaciones se puede eliminar X_2 , quedando una sola ecuación en X_3 . Si se toman las primeras ecuaciones del sistema original y de las que resultan en cada ciclo de eliminación (o reducción), se obtiene el conjunto:

$$\begin{aligned}
 u_{11} X_1 + u_{12} X_2 + u_{13} X_3 &= Y_1 \\
 u_{22} X_2 + u_{23} X_3 &= Y_2 \\
 u_{33} X_3 &= Y_3
 \end{aligned}
 \tag{C-91}$$

en donde $u_{11} = a_{11}$, $u_{22} = (a_{22} - a_{21}a_{12}/a_{11})$, $Y_1 = b_1$, $Y_2 = (b_2 - a_{21}b_1/a_{11})$, etc. Las incógnitas X_3 , X_2 y X_1 pueden obtenerse entonces, en ese orden, por sustitución regresiva en las ecuaciones (C-91). El método es aplicable a sistemas de cualquier tamaño, siempre y cuando el elemento pivotal en cualquier etapa de eliminación sea diferente de cero. En caso contrario es necesario reordenar las ecuaciones, ya sea parcialmente (sólo filas) o en su totalidad (filas y columnas).

Ejemplo C.33

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante eliminación de Gauss:

$$\begin{aligned}
 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 2X_4 &= 10 \\
 X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 &= 17 \\
 3X_1 + X_2 + 3X_3 + X_4 &= 18 \\
 X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 &= 27
 \end{aligned}$$

Solución

Para aplicar el método en forma sistemática conviene armar la matriz aumentada $[A_g] = [A | B]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 27 \end{array} \right]$$

El primer caso es convertir los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal en ceros. Para ello bastará efectuar las siguientes operaciones:

1. $F_2' = F_2^0 - (1/2) F_1^0 = F_2^0 - (a_{21}^0/a_{11}^0) F_1^0$
2. $F_3' = F_3^0 - (3/2) F_1^0 = F_3^0 - (a_{31}^0/a_{11}^0) F_1^0$
3. $F_4' = F_4^0 - (1/2) F_1^0 = F_4^0 - (a_{41}^0/a_{11}^0) F_1^0$

en donde el 0 se refiere a la matriz original aumentada. Se obtiene entonces:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 22 \end{array} \right]$$

En el segundo ciclo se eliminan los términos de la segunda columna ubicados debajo de la diagonal principal mediante las siguientes operaciones:

4. $F_3'' = F_3' + F_2' = F_3' - (a_{32}'/a_{22}') F_2'$
5. $F_4'' = F_4' - F_2' = F_4' - (a_{42}'/a_{22}') F_2'$

con lo cual se llega a:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

En el tercer ciclo es necesario eliminar a_{43}'' . Esto se logra haciendo:

$$6. \quad F_4''' = F_4'' + \left(\frac{2}{3}\right) F_3'' = F_4'' - (a_{43}''/a_{33}'') F_3''$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{array} \right]$$

Esta matriz aumentada corresponde al siguiente sistema de ecuaciones, equivalente al original, como ya se dijo, por haberse obtenido mediante simples transformaciones lineales de las filas:

$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 2X_4 = 10$$

$$2X_2 + 0X_3 + 2X_4 = 12$$

$$-X_3 + 6X_4 = 15$$

$$5X_4 = 20$$

Con esto termina la primera parte del método y se procede a encontrar la solución, que será común a ambos sistemas, mediante sustitución regresiva. Empezando por la última ecuación:

$$5X_4 = 20 \rightarrow X_4 = 20/5 = 4$$

y reemplazando este valor en la tercera:

$$X_3 = (-1/3)(15 - 6 \times 4) = 3$$

y ambos en la segunda

$$X_2 = (1/2)(12 - 0 \times 3 - 2 \times 4) = 2$$

Finalmente, de la primera:

$$X_1 = (1/2)(10 - 2 \times 2 - 4 \times 3 + 2 \times 4) = 1$$

con lo cual queda resuelto el problema.

El desarrollo de la primera parte se puede hacer en forma compacta en un cuadro como el siguiente:

Ciclo	Ag					Ord.	Id.	Equivalencia
0	2	2	4	-2	10		F_1^0	
	1	3	2	1	17		F_2^0	
	3	1	3	1	18		F_3^0	
	1	3	4	2	27		F_4^0	
'	0	2	0	2	12	1	F_2'	$F_2^0 - (a_{21}^0/a_{11}^0)F_1^0$
	0	-2	-3	4	3	2	F_3'	$F_3^0 - (a_{31}^0/a_{11}^0)F_1^0$
	0	2	2	3	22	3	F_4'	$F_4^0 - (a_{41}^0/a_{11}^0)F_1^0$
"	0	0	-3	6	15	4	F_3''	$F_3' - (a_{32}'/a_{22}')F_2'$
	0	0	2	1	10	5	F_4''	$F_4' - (a_{42}'/a_{22}')F_2'$
'''	0	0	0	5	20	6	F_4'''	$F_4'' - (a_{43}''/a_{33}'')F_3''$

Comparando este cuadro con los similares de los ejemplos C.27 y C.28, es evidente que para un sistema del mismo orden, la eliminación por Gauss involucra muchas menos operaciones aritméticas que la inversión completa de la matriz de coeficientes. En el método de Gauss no sólo existen menos términos por fila sino además en cada ciclo basta con transformar las filas de número superior al del ciclo respectivo. Por otra parte puede considerarse que el ciclo enésimo de Gauss está constituido por la sustitución regresiva. Volviendo a las ecuaciones (C-91), se ve que son el desarrollo de la ecuación matricial (C.85). En consecuencia, el método de Gauss conlleva la descomposición de la matriz de coeficientes en matrices triangulares superior e inferior y la inversión de esta última junto con la posmultiplicación del resultado $[L]^{-1}$ por el vector de términos independientes $[B]$, según la ecuación (C-87). Si se desea encontrar explícitamente las matrices $[L]$ y $[U]$, se puede utilizar un algoritmo basado en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir} u_{rj} & i \leq j \\
 l_{ii} &= 1 \\
 l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir} u_{rj}}{u_{jj}} & i > j
 \end{aligned}
 \tag{C-92}$$

A su vez para encontrar las incógnitas se pueden usar las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{u_{n,n+1}}{u_{nn}} \\
 X_i &= \frac{1}{u_{ii}} \left[u_{i,n+1} - \sum_{r=i+1}^n u_{ir} X_r \right]
 \end{aligned}
 \tag{C-93}$$

en donde $u_{i, n+1} = Y_i$ representa la última columna de la matriz triangular aumentada $[U_g]$.

Todas las ecuaciones anteriores se aplican por filas, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo C.34

Descomponga la matriz $[A]$ del ejemplo C.33 en dos matrices triangulares $[L]$ y $[U]$, tales que $[L][U] = [A]$. Una vez verificada la descomposición, resuelva el sistema de ecuaciones de dicho ejemplo.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Aplicando sucesivamente las ecuaciones (C-92) según corresponda, se obtiene:

Primera fila:

$$\begin{aligned} i &= 1 & l_{11} &= 1 \\ u_{11} &= a_{11} = 2 & u_{12} &= a_{12} = 2 \\ u_{13} &= a_{13} = 4 & u_{14} &= a_{14} = -2 \end{aligned}$$

Segunda fila:

$$\begin{aligned} i &= 2 & l_{22} &= 1 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ u_{22} &= a_{22} - (l_{21} \times u_{12}) = 3 - (0.5 \times 2) = 2 \\ u_{23} &= a_{23} - (l_{21} \times u_{13}) = 2 - (0.5 \times 4) = 0 \\ u_{24} &= a_{24} - (l_{21} \times u_{14}) = 1 - 0.5(-2) = 2 \end{aligned}$$

Tercera fila:

$$\begin{aligned} i &= 3 & l_{33} &= 1 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ l_{32} &= (a_{32} - l_{31} \times u_{12}) / u_{22} = \\ &= (1 - 1.5 \times 2) / 2 = -1 \\ u_{33} &= a_{33} - l_{31} \times u_{13} - l_{32} \times u_{23} = \\ &= 3 - 1.5 \times 4 - (-1) \times 0 = -3 \\ u_{34} &= a_{34} - l_{31} \times u_{14} - l_{32} \times u_{24} = \\ &= 1 - 1.5(-2) - (-1)(2) = 6 \end{aligned}$$

Cuarta fila:

$$\begin{aligned}
 i &= 4 & l_{44} &= 1 \\
 l_{41} &= \frac{a_{41}}{u_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5 \\
 l_{42} &= (a_{42} - l_{41} \times u_{12}) / u_{22} = \\
 &= (3 - 0.5 \times 2) / 2 = 1 \\
 l_{43} &= (a_{43} - l_{41} \times u_{13} - l_{42} \times u_{23}) / u_{33} = \\
 &= (4 - 0.5 \times 4 - 1 \times 0) / (-3) = -\frac{2}{3} \\
 u_{44} &= a_{44} - l_{41} \times u_{14} - l_{42} \times u_{24} - l_{43} \times u_{34} = \\
 &= 2 - 0.5(-2) - 1 \times 2 - (-\frac{2}{3})(6) = 5
 \end{aligned}$$

Ensamblando y verificando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

q.e.d.

Ahora se pueden encontrar los vectores [Y] y [X] mediante las ecuaciones (C-86) y (C-85):

$$[L][Y] = [B]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix}$$

que por substitución progresiva da:

$$Y_1 = 10$$

$$Y_2 = 17 - 0.5 \times 10 = 12$$

$$Y_3 = 18 - 1.5 \times 10 + 1 \times 12 = 15$$

$$Y_4 = 27 - 0.5 \times 10 - 1 \times 12 + (2/3) \times 15 = 20$$

Por la ecuación (C-85):

$$[U][X] = [Y]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

que se puede resolver substituyendo regresivamente:

$$X_4 = 20/5 = 4$$

$$X_3 = (15 - 6 \times 4)/(-3) = 3$$

$$X_2 = (12 - 0 \times 3 - 2 \times 4)/2 = 2$$

$$X_1 = (10 - 2 \times 2 - 4 \times 3 + 2 \times 4)/2 = 1$$

que coincide con la respuesta obtenida en el ejemplo anterior.

Otra alternativa sería haber encontrado la quinta columna de la matriz aumentada $[U_g]$ y calcular las incógnitas $[X]$ directamente mediante las ecuaciones (C-93). Aplicando la primera de las ecuaciones (C-92):

$$u_{15} = a_{15} = b_1 = 10$$

$$u_{25} = a_{25} - l_{21} u_{15} = 17 - 0.5 \times 10 = 12$$

$$\begin{aligned} u_{35} &= a_{35} - l_{31} u_{15} - l_{32} u_{25} = \\ &= 18 - 1.5 \times 10 - (-1) \times 12 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{45} &= a_{45} - l_{41} u_{15} - l_{42} u_{25} - l_{43} u_{35} = \\ &= 27 - 0.5 \times 10 - 1 \times 12 - (-2/3) \times 15 = 20 \end{aligned}$$

Y usando ahora las ecuaciones (C-93):

$$X_4 = \frac{u_{45}}{u_{44}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$X_3 = \frac{1}{u_{33}} (u_{35} - u_{34} X_4) = \frac{1}{(-3)} (15 - 6 \times 4) = 3$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{u_{22}}(u_{25} - u_{23} X_3 - u_{24} X_4) = \\ &= \frac{1}{2}(12 - 0 \times 3 - 2 \times 4) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{u_{11}}(u_{15} - u_{12} X_2 - u_{13} X_3 - u_{14} X_4) = \\ &= \frac{1}{2}(10 - 2 \times 2 - 4 \times 3 - (-2) \times 4) = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo C.35

Use los resultados del ejemplo anterior para encontrar la descomposición básica de la matriz $[A]$ definida por la ecuación (C-82).

$$[A] = [L^0][D][U^0]$$

Solución

Por inspección se ve que

$$[L^0] = [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, para encontrar la matriz $[U^0]$ basta con dividir cada fila de la matriz $[U]$ por el elemento correspondiente de $[D]$. Al hacerlo se obtiene:

$$[U^0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo cual queda resuelto el problema.

En los problemas de análisis estructural las matrices que se deben invertir (de rigidez o de

flexibilidad) son simétricas. Para matrices de este tipo las ecuaciones (C-92) se reducen a una forma más simple:

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir} u_{rj} & i \leq j \\
 l_{ii} &= 1 & \\
 l_{ij} &= \frac{u_{ji}}{u_{jj}} & i > j
 \end{aligned}
 \tag{C-94}$$

El uso de estas ecuaciones se explica en el siguiente ejemplo, tomado de la misma referencia.

Ejemplo C.36

Descomponga la matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

usando las ecuaciones (C-94) y verifique el resultado.

Solución

Primera fila:

$$\begin{aligned}
 i_{11} &= 1 & l_{11} &= 1 \\
 u_{11} &= a_{11} = 4 & u_{12} &= a_{12} = 6 \\
 u_{13} &= a_{13} = 10 & u_{14} &= a_{14} = 4
 \end{aligned}$$

Segunda fila

$$\begin{aligned}
 i &= 2 & l_{22} &= 1 \\
 l_{21} &= \frac{u_{12}}{u_{11}} = \frac{6}{4} = 1.5
 \end{aligned}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \times u_{12} = 13 - 1.5 \times 6 = 4$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \times u_{13} = 13 - 1.5 \times 10 = -2$$

$$u_{24} = a_{24} - l_{21} \times u_{14} = 6 - 1.5 \times 4 = 0$$

Tercera fila:

$$i = 3 \qquad l_{33} = 1$$

$$l_{31} = \frac{u_{13}}{u_{11}} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$l_{32} = \frac{u_{23}}{u_{22}} = \frac{-2}{4} = -0.5$$

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - l_{31} \times u_{13} - l_{32} \times u_{23} = \\ &= 27 - 2.5 \times 10 - (-0.5)(-2) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{34} &= a_{34} - l_{31} \times u_{14} - l_{32} \times u_{24} = \\ &= 2 - 2.5 \times 4 - (-0.5)(0) = -8 \end{aligned}$$

Cuarta fila:

$$i = 4 \qquad l_{44} = 1$$

$$l_{41} = \frac{u_{14}}{u_{11}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$l_{42} = \frac{u_{24}}{u_{22}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$l_{43} = \frac{u_{34}}{u_{33}} = \frac{-8}{1} = -8$$

$$\begin{aligned} u_{44} &= a_{44} - l_{41} \times u_{14} - l_{42} \times u_{24} - l_{43} \times u_{34} = \\ &= 72 - 1 \times 4 - 0 \times 0 - (-8)(-8) = 4 \end{aligned}$$

Ensamblando y verificando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 4 \\ 6 & 13 & 13 & 6 \\ 10 & 13 & 27 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 72 \end{bmatrix}$$

C.4.4.2. Variantes del método de Gauss

Se han propuesto varias modificaciones al método de Gauss. En una de las más simples se busca que la matriz triangular [U] resulte unitaria, para facilitar tanto el proceso de eliminación como el de sustitución regresiva. Aunque con ello se aumenta el número de pasos, éstos se hacen más sencillos, como se verá al aplicarla al mismo sistema del ejemplo C.33; lo mismo pasa con las ecuaciones para evaluar las incógnitas [X]:

$$\begin{aligned} X_n &= u_{n,n+1}^0 \\ X_i &= u_{i,n+1}^0 - \sum_{r=i+1}^n u_{ir}^0 X_r \end{aligned} \quad (C-95)$$

Otra variante utiliza un proceso similar al de Gauss-Jordan para invertir matrices, en el cual se transforman en cada ciclo no sólo las filas por debajo de la pivotal sino también las que quedan por encima, buscando siempre transformar la matriz de coeficientes en una matriz identidad. En este caso la matriz aumentada se forma con el vector de términos independientes, de tal manera que al finalizar el proceso de transformación, en tantos ciclos como sea el tamaño del sistema, dicho vector resulta convertido en el vector solución.

Cuando se tienen varios vectores de términos independientes, la matriz aumentada se forma colocándolos por columnas, uno al lado del otro. Una vez terminada la eliminación, dichas columnas transformadas constituyen la base para encontrar las soluciones, si se utiliza la primera variante, o son directamente las respuestas, si se ha empleado la de Gauss-Jordan.

En las figuras C.5, C.6, C.7 y C.8 se presentan diagramas de flujo para resolver sistemas de ecuaciones, siguiendo estas modificaciones del método de eliminación de Gauss. La solución manual se ilustra con los ejemplos de las páginas siguientes.

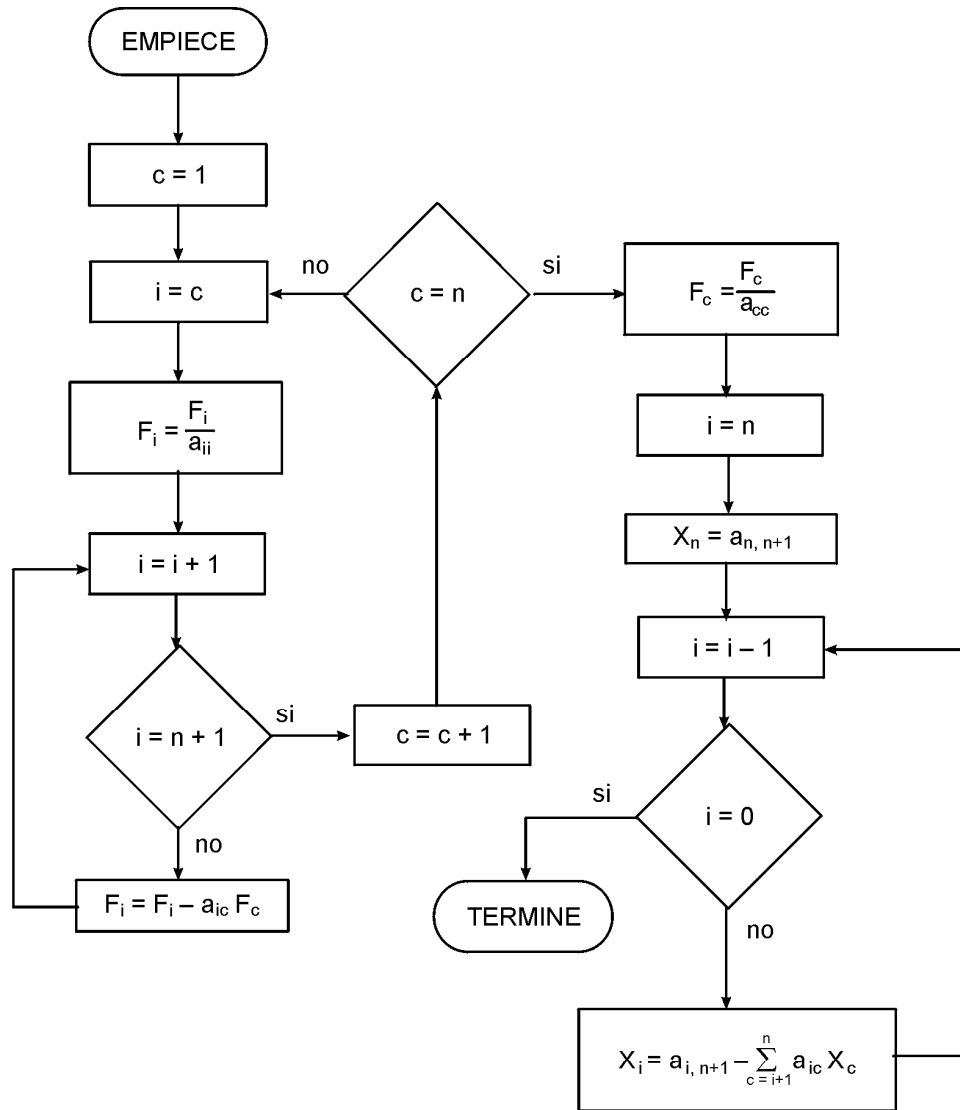
Ejemplo C.37

Resuelva el sistema de ecuaciones del ejemplo C.33 mediante la variante del método de Gauss que utiliza una matriz triangular superior unitaria.

Solución

Se empieza, como antes, armando la matriz aumentada [A_g]:

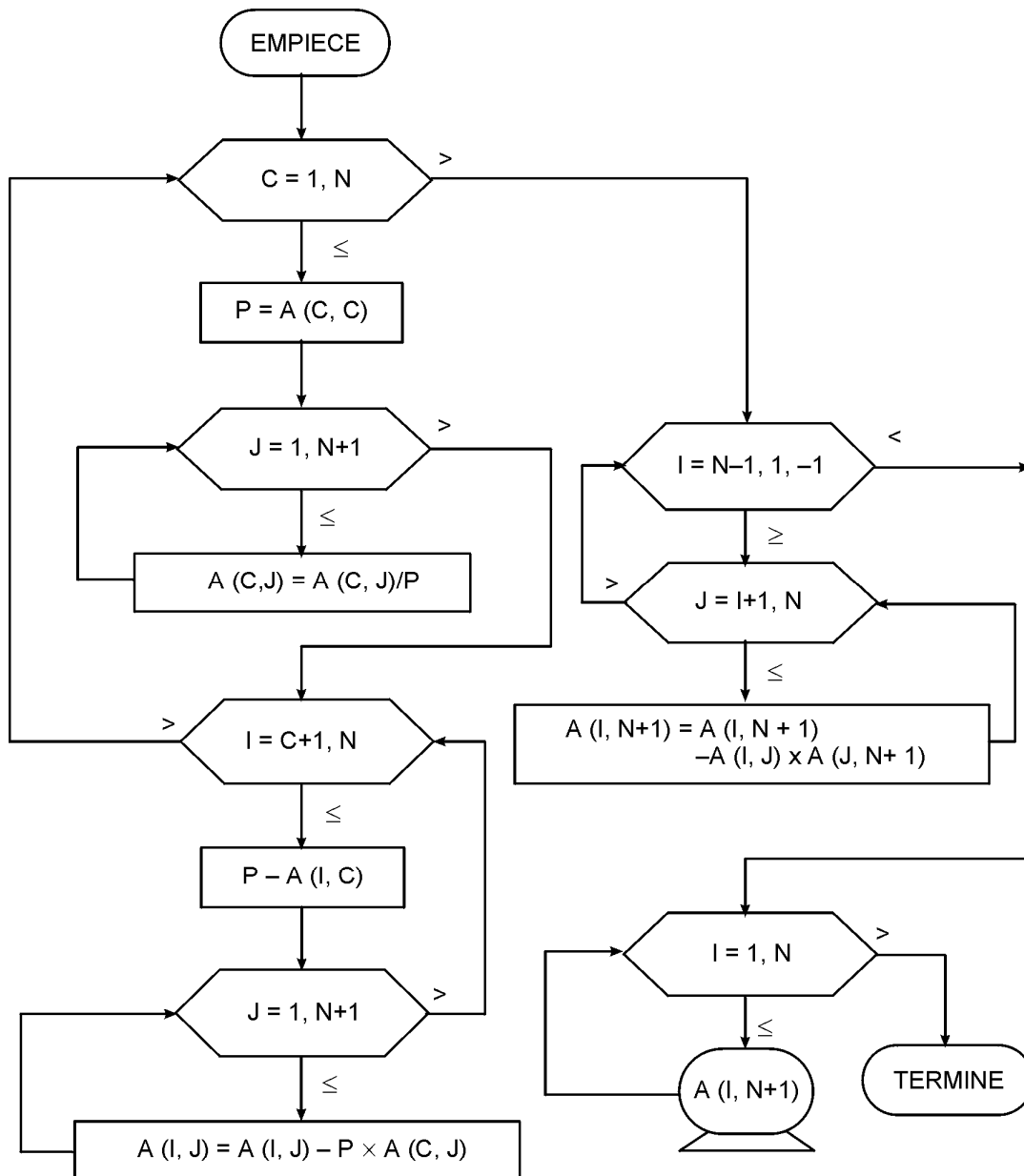
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 27 \end{array} \right]$$



Nomenclatura

- F_i = Fila i , de la matriz $[A_g]$
- a_{ij} = Elemento de la fila i , columna j de $[A_g]$
- c = Número del ciclo
- n = Tamaño del sistema

Figura C.5. Diagrama de flujo del método de eliminación de Gauss, modificado. Solución manual.



Nomenclatura

- $A(I, J)$ = Elemento de la fila I , columna J de $[A_g]$
 C = Número del ciclo
 N = Tamaño del sistema
 P = Pivote

Figura C.6. Solución con computador de un sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss, modificado.

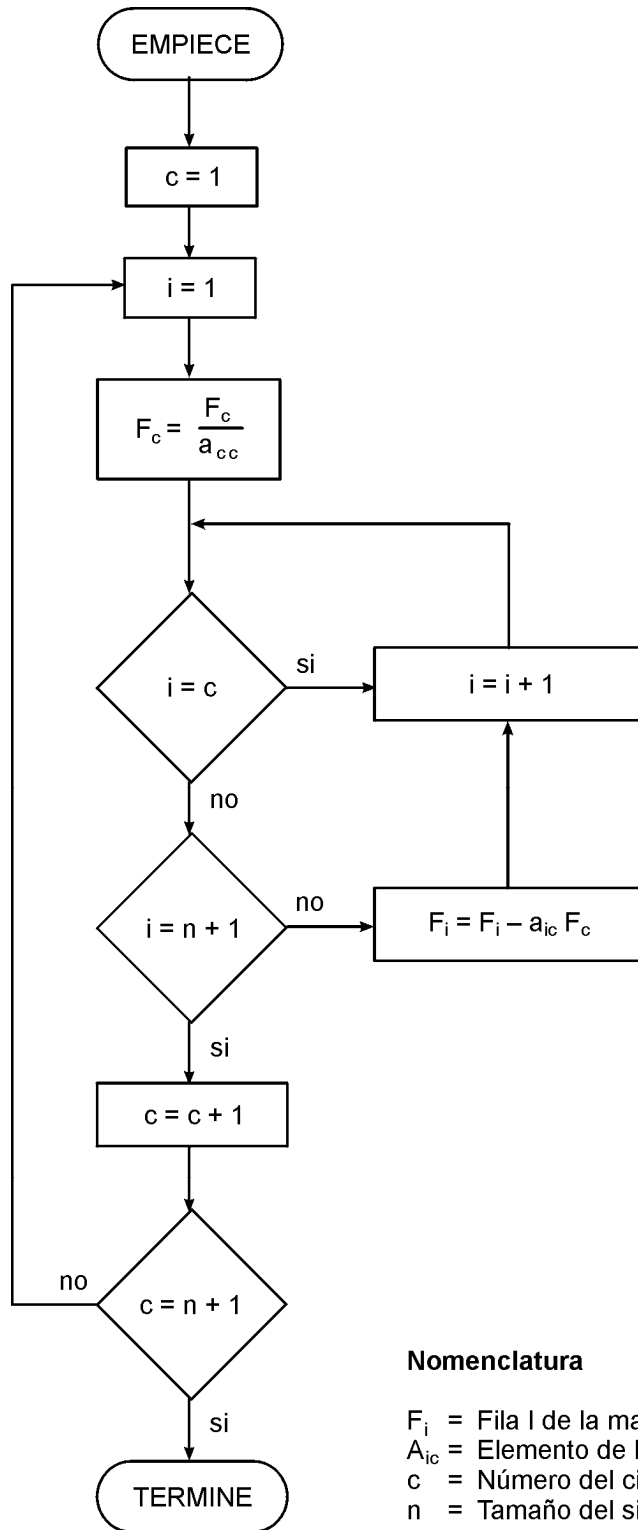
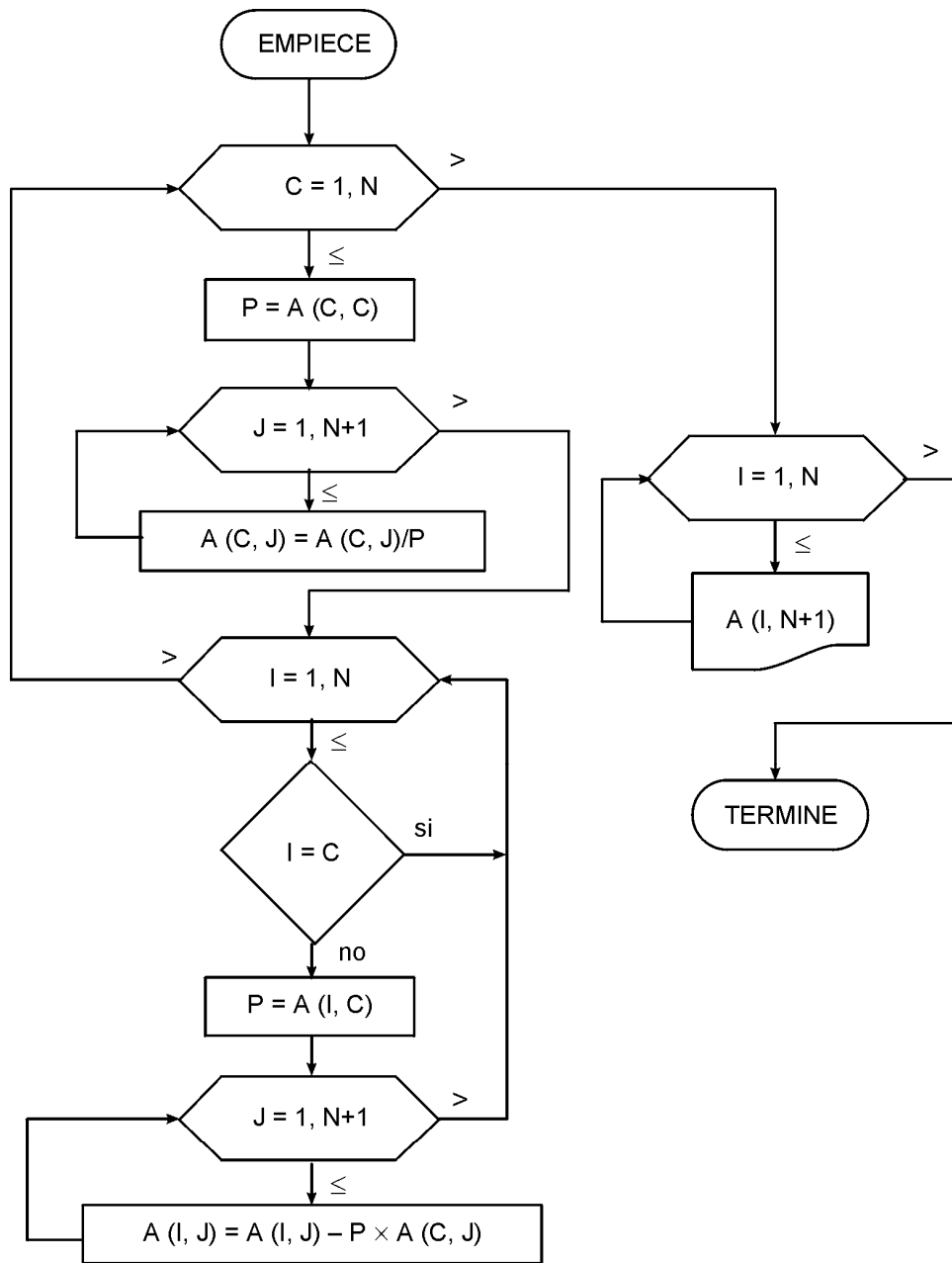


Figura C.7. Diagrama de flujo para resolver manualmente un sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.



Nomenclatura

- $A(I, J)$ = Elemento de la fila I , columna j de $[A_g]$
- C = Número del ciclo
- N = Tamaño del sistema
- P = Pivote

Figura C.8. Diagrama de flujo para resolver un sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

A continuación se divide la primera fila por dos para reducir a_{11} a la unidad.

$$1. \quad F'_1 = F_1^0 / 2 = F_1^0 / a_{11}^0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 17 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 18 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 27 \end{array} \right]$$

Ahora para convertir los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal en ceros, bastará efectuar las siguientes operaciones:

$$2. \quad F'_2 = F_2^0 - F'_1 = F_2^0 - a_{21}^0 F'_1$$

$$3. \quad F'_3 = F_3^0 - 3F'_1 = F_3^0 - a_{31}^0 F'_1$$

$$4. \quad F'_4 = F_4^0 - F'_1 = F_4^0 - a_{41}^0 F'_1$$

Obteniéndose entonces:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 22 \end{array} \right]$$

Con lo cual queda terminado el primer ciclo. El segundo se inicia reduciendo a_{22} a la unidad; para ello:

$$5. \quad F''_2 = F'_2 / 2 = F'_2 / a'_{22}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 22 \end{array} \right]$$

Los elementos de la segunda columna por debajo de la diagonal principal se convierten en ceros mediante las siguientes operaciones:

$$6. \quad F''_3 = F'_3 + 2F''_2 = F'_3 - a'_{32} F''_2$$

$$7. \quad F''_4 = F'_4 - 2F''_2 = F'_4 - a'_{42} F''_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

Para el tercer ciclo, se empieza por reducir a_{32}'' a 1. Esto se logra haciendo:

$$8. \quad F_3''' = F_3'' / (-3) = F_3'' - a_{33}''$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

Y para convertir en cero el término a_{43}'' único de la tercera columna por debajo de la diagonal principal:

$$9. \quad F_4''' = F_4'' - 2F_3''' = F_4'' - a_{43}'' F_3'''$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{array} \right]$$

Finalmente se puede reducir a_{44}''' a 1, haciendo:

$$10. \quad F_4^{iv} = F_4''' / 5 = F_4''' - a_{44}'''$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Quedando ahora muy fácil la sustitución regresiva:

$$X_4 = 4$$

$$X_3 = -5 + 2(4) = 3$$

$$X_2 = 6 - 0 \times 3 - 1 \times 4 = 2$$

$$X_1 = 5 - 1 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 4 = 1$$

A continuación se presenta el desarrollo de la primera parte en un cuadro compacto.

C	Ag					Ord.	Id.	Equivalencia
0	2	2	4	-2	10		F_1^0	
	1	3	2	1	17		F_2^0	
	3	1	3	1	18		F_3^0	
	1	3	4	2	27		F_4^0	
I	1	1	2	-1	5	1	F_1'	F_1^0/a_{11}^0
	0	2	0	2	12	2	F_2'	$F_2^0 - a_{21}^0 F_1'$
	0	-2	-3	3	3	3	F_3'	$F_3^0 - a_{31}^0 F_1'$
	0	3	2	4	22	4	F_4'	$F_4^0 - a_{41}^0 F_1'$
II	0	1	0	1	6	5	F_2''	$F_2' - a_{22}' F_1'$
	0	0	-3	6	15	6	F_3''	$F_3' - a_{32}' F_2'$
	0	0	2	1	10	7	F_4''	$F_4' - a_{42}' F_2'$
III	0	0	1	-2	-5	8	F_3'''	F_3''/a_{33}''
	0	0	0	5	20	9	F_4'''	$F_4'' - a_{43}'' F_3''$
IV	0	0	0	1	4	10	F_4^{iv}	$F_4'''/a_{44}''' = X_4$
V			1	-2	-5	11	$X_3 = -5 + 2 \times 4 = 3$	
		1	0	1	6	12	$X_2 = 6 - 0 \times 3 - 1 \times 4 = 2$	
	1	1	2	-1	5	13	$X_1 = 5 - 1 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 4 = 1$	

Ejemplo C.38

Emplee el mismo método para resolver el siguiente sistema de ecuaciones que tiene dos vectores de términos independientes:

$$5X_1 - 4X_2 + 3X_3 = -18.5 \tag{11}$$

$$-4X_1 + 7X_2 + 2X_3 - 5X_4 = 4.5 \tag{-24}$$

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 + X_5 = -11 \tag{-8}$$

$$-5X_2 - X_3 + 8X_4 + 2X_5 = 9.5 \tag{13}$$

$$X_3 + 2X_4 + 6X_5 = 4.5 \tag{(8)}$$

en donde los términos entre paréntesis corresponden al segundo vector.

Solución

Se empieza por formar la matriz aumentada, colocando los dos vectores de términos independientes uno al lado del otro.

Se ve en seguida que la matriz de coeficientes es una matriz de banda, por lo cual se necesitan menos operaciones.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 5 & -4 & 3 & 0 & 0 & -18.5 & 11 \\ -4 & 7 & 2 & -5 & 0 & 4.5 & -24 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 1 & -11 & -8 \\ 0 & -5 & -1 & 8 & 2 & 9.5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 4.5 & 8 \end{array} \right]$$

Primer ciclo. Se divide la primera fila por cinco para reducir a_{11}^0 a la unidad.

$$1. \quad F_1' = F_1^0 / 5 = F_1^0 / a_{11}^0$$

Luego, para convertir en ceros los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal, bastará efectuar las siguientes operaciones:

$$2. \quad F_2' = F_2^0 + 4F_1' = F_2^0 - a_{21}^0 F_1'$$

$$3. \quad F_3' = F_3^0 - 3F_1' = F_3^0 - a_{31}^0 F_1'$$

Las filas 4 y 5 se dejan como estaban, pues ya cumplen con esta condición; es decir,

$$4. \quad F_4' = F_4^0$$

$$5. \quad F_5' = F_5^0$$

Obteniéndose entonces:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & -3.7 & 2.2 \\ 0 & 3.8 & 4.4 & -5 & 0 & -10.3 & -15.2 \\ 0 & 4.4 & 2.2 & -1 & 1 & 0.1 & -14.6 \\ 0 & -5 & -1 & 8 & 2 & 9.5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 4.5 & 8 \end{array} \right]$$

Segundo ciclo. Se divide la segunda fila por 3.8 para reducir a_{22} a la unidad.

$$6. \quad F_2'' = F_2' / a_{22}'$$

Ahora, se convierten en cero los elementos de la segunda columna, por debajo de la diagonal principal, mediante las siguientes operaciones:

$$7. \quad F_3'' = F_3' - 4.4F_2'' = F_3' - a_{32}'F_2''$$

$$8. \quad F_4'' = F_4' + 5F_2'' = F_4' - a_{42}'F_2''$$

De nuevo se ve que no hay necesidad de modificar la quinta fila; o sea que:

$$9. \quad F_5'' = F_5'$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & -3.7 & 2.2 \\ 0 & 1 & 1.1579 & -1.3158 & 0 & -2.7105 & -4 \\ 0 & 0 & -2.8948 & 4.7895 & 1 & 12.0262 & 3 \\ 0 & 0 & 4.7895 & 1.4210 & 2 & -4.0525 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 4.5 & 8 \end{array} \right]$$

Obsérvese que para garantizar tres decimales en las respuestas, las operaciones se han hecho con cuatro.

Tercer ciclo. Para reducir a_{33}'' a 1, se hace:

$$10. \quad F_3''' = F_3'' / (-2.8948) = F_3'' / a_{33}''$$

y los términos de la tercera columna, por debajo de la diagonal, se convierten en cero por medio de las siguientes operaciones:

$$11. \quad F_4''' = F_4'' - 4.7895 F_3''' = F_4'' - a_{43}''F_3'''$$

$$12. \quad F_5''' = F_5'' - F_3''' = F_5'' - a_{53}''F_3'''$$

De tal manera que, al finalizar el ciclo, el sistema se ha convertido en:

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & -3.7 & 2.2 \\ 0 & 1 & 1.1579 & -1.3158 & 0 & -2.7105 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1.6545 & -0.3454 & -4.1544 & -1.0363 \\ 0 & 0 & 0 & 9.3452 & 3.6543 & 15.8450 & -2.0366 \\ 0 & 0 & 0 & 3.6545 & 6.3454 & 8.6544 & 9.0363 \end{array} \right]$$

Cuarto ciclo. Las operaciones involucradas son:

$$13. \quad F_4^{iv} = F_4''' / 9.3452 = F_4''' / a_{44}'''$$

$$14. F_5^{iv} = F_5''' - 3.6545 F_4^{iv} = F_5''' - a_{54}''' F_4^{iv}$$

que producen el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & -3.7 & 2.2 \\ 0 & 1 & 1.1579 & -1.3158 & 0 & -2.7105 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1.6545 & -0.3454 & -4.1544 & -1.0363 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3910 & 1.6955 & -0.2179 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9165 & 2.4582 & 9.8326 \end{bmatrix}$$

Quinto ciclo. El quinto ciclo sólo requiere la transformación de la última fila:

$$15. F_5^v = F_5^{iv} / 4.9165 = F_5^{iv} / a_{55}^{iv}$$

llegándose finalmente al sistema equivalente buscado:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & -3.7 & 2.2 \\ 0 & 1 & 1.1579 & -1.3158 & 0 & -2.7105 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1.6545 & -0.3454 & -4.1544 & -1.0363 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3910 & 1.6955 & -0.2179 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.500 & 9.8326 \end{bmatrix}$$

o escrito en álgebra ordinaria:

$$\begin{aligned} X_1 - 0.8X_2 + 0.6X_3 &= -3.7 & (2.2) \\ X_2 + 1.1579X_3 - 1.3158X_4 &= -2.7105 & (-4) \\ X_3 - 1.6545X_4 - 0.3454X_5 &= -4.1544 & (-1.0363) \\ X_4 - 0.3910X_5 &= 1.6955 & (-0.2179) \\ X_5 &= 0.500 & (9.8326) \end{aligned}$$

en donde los valores entre paréntesis corresponden al segundo vector de términos independientes.

Se procede ahora con la substitución regresiva para el primer vector:

$$X_4 = 1.6955 - 0.3910(0.5) = 1.500$$

$$X_3 = -4.1544 + 1.6545(1.5) + 0.3454(0.5) = -1.500$$

$$X_2 = -2.7105 - 1.1579(-1.5) + 1.3158(1.5) = 1.000$$

$$X_1 = -3.7 + 0.8(1) - 0.6(-1.5) = -2$$

La segunda solución se obtiene reemplazando en forma similar los términos del segundo vector, partiendo de $X_5 = 2$:

$$X_4 = -1, \quad X_3 = -2, \quad X_2 = -3, \quad X_1 = 1$$

Todo el proceso se puede llevar a cabo en el siguiente cuadro, avanzando por filas.

C	Ag						Id.		Equiv.			
0	5	-4	3	0	0	-18.5	11	F_1^0				
	-4	7	2	-5	0	4.5	-24	F_2^0				
	3	2	4	-1	1	-11	-8	F_3^0				
	0	-5	-1	8	2	9.5	13	F_4^0				
	0	0	1	2	6	4.5	8	F_5^0				
I	1	-0.8	0.6	0	0	-3.7	2.2	F_1^i	$F_1^0/5$			
	0	3.8	4.4	-5	0	-10.3	-15.2	F_2^i	$F_2^0 + 4F_1^i$			
	0	4.4	2.2	-1	1	0.1	-14.6	F_3^i	$F_3^0 - 3F_1^i$			
	0	-5	-1	8	2	9.5	13	F_4^i	F_4^0			
	0	0	1	2	6	4.5	8	F_5^i	F_5^0			
II	0	1	1.1579	-1.3158	0	-2.7105	-4	F_2^i	$F_2^i/3.8$			
	0	0	-2.8948	4.7895	1	12.0262	3	F_3^i	$F_3^i - 4.4F_2^i$			
	0	0	4.7895	1.4210	2	-4.0525	-7	F_4^i	$F_4^i + 5F_2^i$			
	0	0	1	2	6	4.5	8	F_5^i	F_5^i			
III	0	0	1	-1.6545	-0.3454	-4.1544	-1.0363	F_3^i	$F_3^i/(-2.8948)$			
	0	0	0	9.3452	3.6543	15.8450	-2.0366	F_4^i	$F_4^i - 4.7895F_3^i$			
	0	0	0	3.6545	6.3454	8.6544	9.0363	F_5^i	$F_5^i - F_3^i$			
IV	0	0	0	1	0.3910	1.6955	-0.2179	F_4^i	$F_4^i/9.3452$			
	0	0	0	0	4.9165	2.4582	9.8326	F_5^i	$F_5^i - 3.6545F_4^i$			
V	0	0	0	0	1	0.500	2.000	F_5^i	$F_5^i/4.9165 = X_5$			
				1	0.3910	1.6955	-0.2179	F_4^i	$X_4 = 1.5 \quad (-1)$			
				1	-1.6545	-0.3454	-4.1544	-1.0363	F_3^i	$X_3 = -1.5 \quad (-2)$		
				1	1.1579	-1.3158	0	-2.7105	-4	F_2^i	$X_2 = 1 \quad (-3)$	
				1	-0.8	0.6	0	0	-3.7	2.2	F_1^i	$X_1 = -2 \quad (1)$

Ejemplo C.39

Emplee el método de Gauss-Jordan para hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$2X_1 = -4X_2 + 2X_3 = -8$$

$$-2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 10$$

$$3X_1 - 5X_2 - 2X_3 = -15$$

Solución

Para empezar, se forma la matriz aumentada $[A_g]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -8 \\ -2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & -5 & -2 & -15 \end{array} \right]$$

A continuación se divide la primera fila por dos para convertir a_{11} en 1.

$$1. \quad F_1' = F_1^0 / 2 = F_1^0 / a_{11}^0$$

Quedando el sistema convertido en:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & -5 & -2 & -15 \end{array} \right]$$

Los términos de la primera columna, por debajo de la diagonal, se convierten en cero aplicando las siguientes operaciones:

$$2. \quad F_2' = F_2^0 + 2F_1' = F_2^0 - a_{21}^0 F_1'$$

$$3. \quad F_3' = F_3^0 - 3F_1' = F_3^0 - a_{31}^0 F_1'$$

Obteniéndose entonces:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right]$$

con lo cual queda terminado el primer ciclo.

En el segundo ciclo se empieza dividiendo la segunda fila por -1 , para convertir en 1 el término de la diagonal.

$$4. \quad F_2'' = F_1' / (-1) = F_1' / (a_{22}')$$

Queda entonces:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right]$$

y luego se eliminan los otros términos de la segunda columna, efectuando:

$$5. \quad F_1'' = F_1' + 2F_2'' = F_1' - a_{12}' F_2''$$

$$6. \quad F_3'' = F_3' - F_2'' = F_3' - a_{32}' F_2''$$

como se ve a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

En el tercero y último ciclo el primer paso es dividir la tercera fila por -1 para que el término de la diagonal quede unitario:

$$7. \quad F_3''' = F_3'' / (-1) = F_3'' / a_{33}''$$

quedando el sistema así:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Finalmente, se eliminan los otros términos de la tercera columna por medio de las siguientes transformaciones:

$$8. \quad F_1''' = F_1'' + 7F_3''' = F_1'' - a_{13}'' F_3'''$$

$$9. \quad F_2''' = F_2'' + 4F_3''' = F_2'' - a_{23}'' F_3'''$$

llegándose a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

que equivale en álgebra ordinaria a:

$$\begin{aligned} X_1 &= -1 \\ X_2 &= 2 \\ X_3 &= 1 \end{aligned}$$

que es la solución buscada. Por consiguiente, ya no es necesario el proceso de sustitución regresiva.

Todos los pasos se pueden llevar a cabo en el siguiente cuadro

Ciclo	Ag				Ord.	Id.	Equivalencia	
0	2	-4	2	-8		F_1^0		
	-2	3	2	10		F_2^0		
	3	-5	2	-15		F_3^0		
'	1	-2	1	-4	1	F_1'	$F_1^0/2$	F_1^0/a_{11}^0
	0	-1	4	2	2	F_2'	$F_2^0 + 2F_1'$	$F_2^0 - a_{21}^0 F_1'$
	0	1	-5	-3	3	F_3'	$F_3^0 - 3F_1'$	$F_3^0 - a_{31}^0 F_1'$
"	1	0	-7	-8	5	F_1''	$F_1' + 2F_2''$	$F_1' - a_{12}' F_2''$
	0	1	-4	-2	4	F_2''	$F_2' / (-1)$	F_2' / a_{22}'
	0	0	-1	-1	6	F_3''	$F_3' - F_2''$	$F_3' - a_{32}' F_2''$
'''	1	0	0	-1	8	F_1'''	$F_1'' + 7F_3'''$	$F_1'' - a_{13}'' F_3'''$
	0	1	0	2	9	F_2'''	$F_2'' + 4F_3'''$	$F_2'' - a_{23}'' F_3'''$
	0	0	1	1	7	F_3'''	$F_3'' / (-1)$	F_3'' / a_{33}''

Ejemplo C.40

Utilice el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones del ejemplo C.30:

$$\begin{aligned} X_1 - 3X_2 + X_3 &= 10 \\ -2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$3X_1 - 7X_2 + X_3 = 4$$

Solución

Siguiendo el cuadro simplificado que aparece a continuación se obtiene como antes:

$$X_1 = -41 \quad X_2 = -19 \quad X_3 = -6.$$

C.4.4.3. Método de Cholesky

La primera variante del método de Gauss, descrita en el artículo anterior, es equivalente al método utilizado por A.L. Cholesky a principios de este siglo, principalmente en conexión con sistemas de ecuaciones simétricos. Su formulación fue planteada por Th. Banachiewicz en Polonia, en 1938 (Ref. C.8), y consiste, esencialmente, en determinar una matriz triangular inferior [L] capaz de reducir el sistema original [A] [X] = [B] a la forma [U⁰] [X] = [Y], en donde [U⁰] es una matriz triangular superior unitaria, o sea que difiere de la descomposición original de Gauss vista atrás, en la que la matriz triangular unitaria es la inferior.

Ciclo	Ag				Ord.	Id.	Equivalencia	
0	1	-3	1	10		F ₁ ⁰		
	-2	4	2	-6		F ₂ ⁰		
	3	-7	1	4		F ₃ ⁰		
,	1	-3	1	10	1	F ₁ [']	F ₁ ⁰ /1	F ₁ ⁰ /a ₁₁ ⁰
	0	-2	4	14	2	F ₂ [']	F ₂ ⁰ + 2F ₁ [']	F ₂ ⁰ - a ₂₁ ⁰ F ₁ [']
	0	2	-2	-26	3	F ₃ [']	F ₃ ⁰ - 3F ₁ [']	F ₃ ⁰ - a ₃₁ ⁰ F ₁ [']
"	1	0	-5	-11	5	F ₁ ^{''}	F ₁ ['] + 3F ₂ ^{''}	F ₁ ['] - a ₁₂ ['] F ₂ ^{''}
	0	1	-2	-7	4	F ₂ ^{''}	F ₂ ['] /(-2)	F ₂ ['] /a ₂₂ [']
	0	0	2	-12	6	F ₃ ^{''}	F ₃ ['] - 2F ₂ ^{''}	F ₃ ['] - a ₃₂ ['] F ₂ ^{''}
'''	1	0	0	-41	8	F ₁ ^{'''}	F ₁ ^{''} + 5F ₃ ^{'''}	F ₁ ^{''} - a ₁₃ ^{''} F ₃ ^{'''}
	0	1	0	-19	9	F ₂ ^{'''}	F ₂ ^{''} + 2F ₃ ^{'''}	F ₂ ^{''} - a ₂₃ ^{''} F ₃ ^{'''}
	0	0	1	-6	7	F ₃ ^{'''}	F ₃ ^{''} /2	F ₃ ^{''} /a ₃₃ ^{''}

Para deducir las ecuaciones pertinentes se puede suponer que el sistema por resolver ha sido expresado como

$$[U^0][X] - [Y] = 0 \tag{C-96}$$

y que al premultiplicar esta ecuación por la matriz [L] buscada se vuelve a la forma original:

$$\begin{aligned} [L] \{ [U^0][X] - [Y] \} &= [L][U^0][X] - [L][Y] = \\ &= [A][X] - [B] = [0] \end{aligned} \quad (C-97)$$

lo cual implica que deben cumplirse las ecuaciones siguientes:

$$[L][U^0] = [A] \quad (C-83a)$$

$$[L][Y] = [B] \quad (C-86)$$

en donde la ecuación (C-83a) es una forma particular de la ecuación C-83 vista antes. Recordando la regla de multiplicación matricial, las dos ecuaciones anteriores equivalen a:

$$[A | B] = [L][U^0 | Y] \quad (C-98)$$

Escribiendo explícitamente estas matrices, efectuando los productos indicados e igualando los términos correspondientes, se obtienen sucesivamente los elementos de $[L]$, $[U^0]$ y $[Y]$ en función de los encontrados previamente, procediendo por filas a partir de l_{11} . Las fórmulas generales que hay que utilizar son:

$$\begin{aligned} l_{i1} &= a_{i1} \\ l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} l_{ir} u_{rj}^0, \quad i \geq j \\ u_{1j}^0 &= \frac{a_{1j}}{a_{11}} \\ u_{ij}^0 &= \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir} u_{rj}^0 \right), \quad i \leq j \end{aligned} \quad (C-99)$$

Los valores de $[Y]$ se obtienen calculando:

$$Y_i = u_{i,n+1}^0 \quad (C-100)$$

para lo cual debe tenerse en cuenta que $a_{i,n+1} = b_i$. Una vez obtenido el vector $[Y]$ los valores de $[X]$ se encuentran por sustitución regresiva en la ecuación $[U^0][X] = [Y]$, o directamente mediante las fórmulas (C-95) vistas antes:

$$\begin{aligned} X_n &= u_{n,n+1}^0 \\ X_i &= u_{n,n+1}^0 - \sum_{r=i+1}^n u_{ir}^0 X_r \end{aligned} \quad (C-95)$$

Ejemplo C.41

Resuelva el sistema del ejemplo C.33 por el método de Cholesky.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Solución

Aplicando las ecuaciones (C-99) y (C.100):

Primera fila:

$$i = 1 \qquad u_{11}^0 = 1$$

$$l_{11} = a_{11} = 2$$

$$u_{12}^0 = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \qquad u_{13}^0 = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_{14}^0 = \frac{a_{14}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad Y_1 = u_{15}^0 = \frac{a_{15}}{a_{11}} = \frac{10}{2} = 5$$

Segunda fila:

$$i = 2 \qquad u_{22}^0 = 1$$

$$l_{21} = a_{21} = 1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12}^0 = 3 - 1 \times 1 = 2$$

$$u_{23}^0 = \frac{1}{l_{22}} (a_{23} - l_{21} u_{13}^0) = \frac{1}{2} (2 - 1 \times 2) = 0$$

$$u_{24}^0 = \frac{1}{l_{22}} (a_{24} - l_{21} u_{14}^0) = \frac{1}{2} [1 - 1 \times (-1)] = 1$$

$$Y_2 = u_{25}^0 = \frac{1}{l_{22}} (a_{25} - l_{21} u_{15}^0) = \frac{1}{2} (17 - 1 \times 5) = 6$$

Tercera fila:

$$i = 3 \qquad u_{33}^0 = 1$$

$$l_{31} = a_{31} = 3$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12}^0 = 1 - 3 \times 1 = -2$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13}^0 - l_{32} u_{23}^0 = 3 - 3 \times 2 - (-2)(0) = -3$$

$$\begin{aligned} u_{34}^0 &= \frac{1}{l_{33}} (a_{34} - l_{31} u_{14}^0 - l_{32} u_{24}^0) = \\ &= \frac{1}{-3} [1 - 3 \times (-1) - (-2) \times 1] = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_3 = u_{35}^0 &= \frac{1}{l_{33}} (a_{35} - l_{31} u_{15}^0 - l_{32} u_{25}^0) = \\ &= \frac{1}{-3} [18 - 3 \times 5 - (-2) \times 6] = -5 \end{aligned}$$

Cuarta fila:

$$i = 4 \qquad u_{44}^0 = 1$$

$$l_{41} = a_{41} = 1$$

$$l_{42} = a_{42} - l_{41} u_{12}^0 = 3 - 1 \times 1 = 2$$

$$\begin{aligned} l_{43} &= a_{43} - l_{41} u_{13}^0 - l_{42} u_{23}^0 = \\ &= 4 - 1 \times 2 - 2 \times 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{44} &= a_{44} - l_{41} u_{14}^0 - l_{42} u_{24}^0 - l_{43} u_{34}^0 = \\ &= 2 - 1 \times (-1) - 2 \times 1 - 2 \times (-2) = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_4 = u_{45}^0 &= \frac{1}{l_{44}} (a_{45} - l_{41} u_{15}^0 - l_{42} u_{25}^0 - l_{43} u_{35}^0) = \\ &= \frac{1}{5} [27 - 1 \times 5 - 2 \times 6 - 2 \times (-5)] = 4 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para encontrar $[X]$ basta resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

lo cual se logra fácilmente por sustitución regresiva como se hizo anteriormente, o aplicando las ecuaciones (C-95):

$$X_4 = 4$$

$$X_3 = -5 + 2 \times 4 = 3$$

$$X_2 = 6 - 0 \times 3 - 1 \times 4 = 2$$

$$X_1 = 5 - 1 \times 2 - 2 \times 3 - (-1) \times 4 = 1$$

C.4.4. Aplicación del método de Cholesky a matrices simétricas

Cuando la matriz $[A]$ es simétrica, se cumple que $[A] = [A]^T$. Por consiguiente, para cualquier descomposición:

$$[A] = [L][U] = [A^T] = [U]^T [L]^T$$

De donde se deduce que

$$[U] = [L]^T \quad \text{y}$$

$$[U]^T = [L] \tag{C-101}$$

Si a la matriz $[L]$ así encontrada la llamamos $[G]$, la descomposición de $[A]$ podría expresarse como

$$[A] = [G][G]^T \tag{C-102}$$

Recordando ahora la descomposición básica:

$$[A] = [L^0][D][U^0] \tag{C-82}$$

resulta entonces que para matrices simétricas:

$$[A]^T = [U^0]^T [D] [L^0]^T = [L^0][D][U^0] \tag{C-103}$$

Por consiguiente $[U^0] = [L^0]^T$ y la ecuación (C-82) se puede escribir así:

$$[A] = [L^0][D][L^0]^T \tag{C-104}$$

y comparando esta ecuación con la (C-102), se observa que:

$$[G] = [L^0][D]^{1/2} \tag{C-105}$$

ya que la matriz diagonal $[D]$ se puede considerar el producto de dos matrices diagonales $[D]^{1/2}$, en las que cada elemento es la raíz cuadrada del correspondiente elemento de $[D]$.

Es evidente que las matrices $[G]$ y $[G]^T$ ya no serán unitarias. La descomposición se puede efectuar fácilmente mediante las siguientes fórmulas:

$$g_{ii} = \left[a_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} g_{ir}^2 \right]^{1/2} \quad (C-106)$$

$$g_{ij} = \frac{1}{g_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} g_{ir} g_{jr} \right] \quad (i > j)$$

que se aplican por columnas.

Si se trata de un sistema de ecuaciones, una vez obtenida $[G]$ se averiguan los valores de $[Y]$ mediante sustitución progresiva en la ecuación $[G][Y] = [B]$, y luego se obtienen las incógnitas $[X]$ mediante sustitución regresiva en la ecuación $[G]^T[X] = [Y]$.

Esto equivale a extender el cálculo de los g_{ij} hasta $g_{n+1,j}$, para lo cual se toma $a_{n+1,j} = b_j$, y a aplicar a continuación la ecuación:

$$X_i = \frac{1}{g_{ii}} g_{n+1,i} - \sum_{r=i+1}^n g_{ri} X_r \quad (C-107)$$

en forma regresiva, comenzando con $i=n$.

En la figura C.9 se reproduce un diagrama de flujo tomado del libro de Beaufait, para calcular los elementos de $[G]$ por el método de Cholesky. Extendiendo dicho diagrama para que calcule los valores $g_{n+1,j}$, bastaría complementarlo con un diagrama similar al de la segunda parte de la figura C.3, pero que utilice la ecuación (C-107) para tener un algoritmo que resuelva sistemas de ecuaciones.

El método de Cholesky para matrices simétricas, tal como se ha planteado, implica la extracción de n raíces cuadradas para obtener los términos g_{ii} ; como este tipo de operación es relativamente demorado, se ha ideado una modificación para eliminarlo. Se definen:

$$g_{ii} = \sqrt{s_{ii}} \quad g_{ji} = s_{ij} \sqrt{s_{ii}} \quad (C-108)$$

y reemplazándolas en las ecuaciones (C-106), se obtiene (Ref. C.9):

$$s_{ii} = a_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} s_{ri}^2 s_{rr} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (C-109)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{r=1}^{i-1} s_{ri} s_{rj} s_{rr} \right) \quad (j = i+1, \dots, n+1)$$

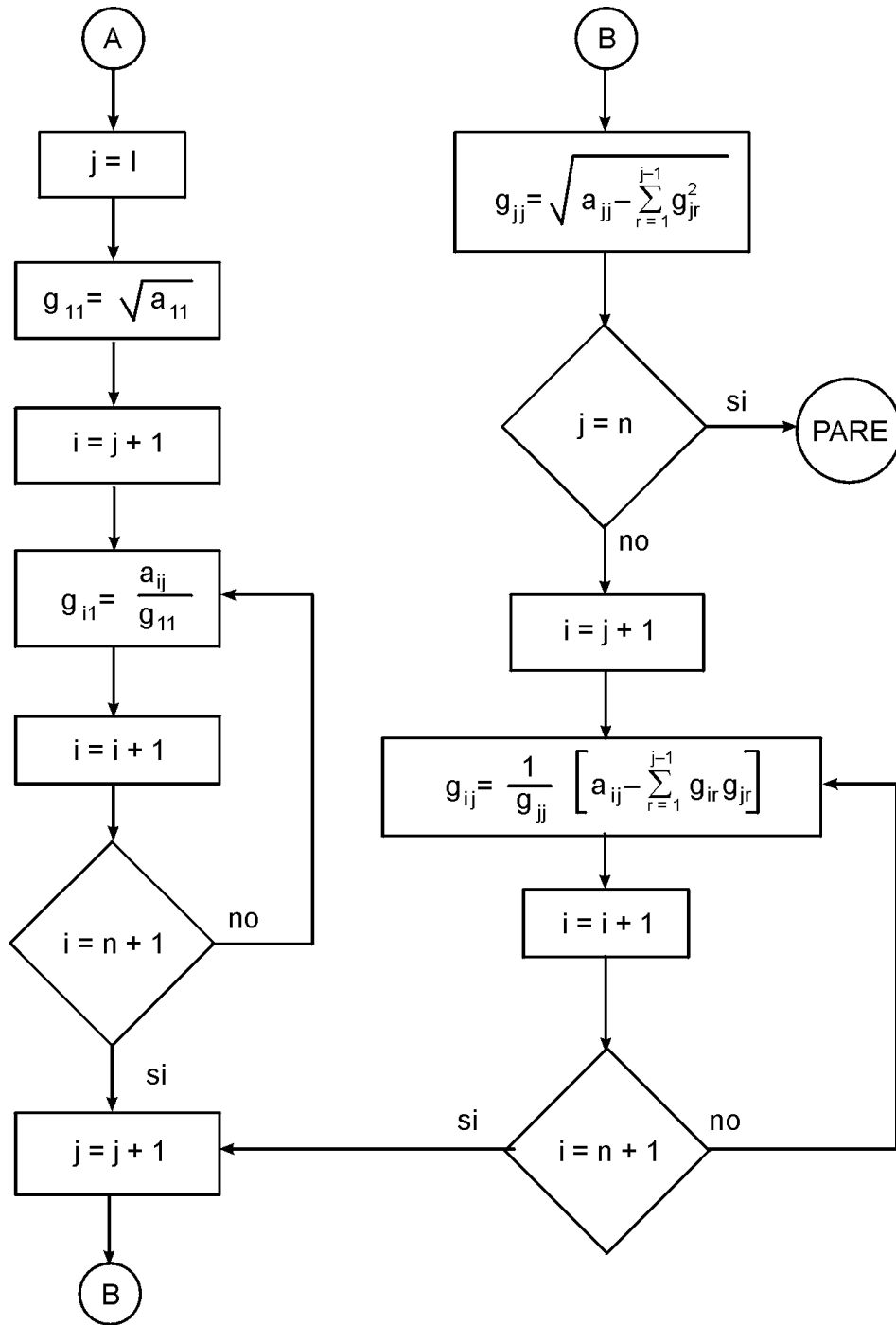


Figura C.9. Diagrama de flujo para calcular los elementos [G] por el método de Cholesky (tomado de la referencia C.7)

Las incógnitas se obtienen con la fórmula:

$$X_i = (s_{i,n+1} - \sum_{r=i+1}^n s_{ir} X_r) \quad (C-110)$$

en donde $s_{i,n+1}$ corresponde al Y_i modificado.

Cuando se tienen varios vectores de términos independientes, como en el caso de una estructura con varias hipótesis de carga, [B] se convierte en una matriz en que cada columna corresponde a una hipótesis. En el proceso resultan entonces las matrices correspondientes [Y] y [X] cuyos términos se pueden evaluar con las siguientes ecuaciones:

$$Y_{im} = \frac{1}{s_{ii}} (b_{im} - \sum_{r=1}^{i-1} s_{ri} s_{rr} Y_{rm}) \quad m = 1, 2, \dots \quad (C-111)$$

$$X_{im} = Y_{im} - \sum_{r=i+1}^n s_{ir} X_{rm} \quad (C-112)$$

en donde m representa el número de la hipótesis, o sea el de la columna correspondiente en la matriz [B] formada con los varios vectores de términos independientes.

Ejemplo C.42

Utilice el método original de Cholesky para hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 10.5 \\ 11.5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Solución

Como la matriz de coeficientes es simétrica, se utilizan las ecuaciones (C-106).

Primera columna:

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 \quad g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = -1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} = -2 \quad g_{41} = \frac{a_{41}}{g_{11}} = 2$$

Segunda columna:

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$g_{32} = \frac{1}{g_{22}} = (a_{32} - g_{31}g_{21}) = \frac{1}{2}[-2 - (-2)(-1)] = -2$$

$$g_{42} = \frac{1}{g_{22}} = (a_{42} - g_{41}g_{21}) = \frac{1}{2}[3 - 2(-1)] = 2.5$$

Tercera columna:

$$g_{33} = \sqrt{a_{33} - (g_{31}^2 + g_{32}^2)} = \sqrt{9 - (4 + 4)} = 1$$

$$g_{43} = \frac{1}{g_{33}} = (a_{43} - g_{41}g_{31} - g_{42}g_{32}) = 4 - 2x(-2) - 2.5x(-2) = 13$$

Cuarta columna:

$$\begin{aligned} g_{44} &= \sqrt{a_{44} - (g_{41}^2 + g_{42}^2 + g_{43}^2)} = \sqrt{6 - (4 + 6.25 + 169)} = \\ &= \sqrt{-173.25} = 13.162i \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2.5 & 13 & 13.162i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 10.5 \\ 11.5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

y substituyendo progresivamente:

$$Y_1 = 1.5$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}(10.5 + 1 \times 1.5) = 6$$

$$Y_3 = \frac{1}{1}(11.5 + 2 \times 1.5 + 2 \times 6) = 26.5$$

$$Y_4 = \frac{1}{13.126i}(16 - 2 \times 1.5 - 2.5 \times 6 - 13 \times 26.5) = 26.325i$$

Escribiendo ahora $[G]^T$, se resuelve regresivamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 13.162 \text{ i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 6 \\ 26.5 \\ 26.325 \text{ i} \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \frac{26.325}{13.162} = 2$$

$$X_3 = 26.5 - 13 \times 2 = 0.5$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(6 + 2 \times 0.5 - 2.5 \times 2) = 1$$

$$X_1 = 1.5 + 1 \times 1 + 2 \times 0.5 - 2 \times 2 = -0.5$$

Alternamente se podría haber utilizado la ecuación (C-107) para encontrar las incógnitas. Para ello se requiere generar una quinta columna de la matriz [G]:

$$g_{51} = \frac{a_{51}}{g_{11}} = \frac{b_1}{g_{11}} = 1.5$$

$$g_{52} = \frac{1}{g_{22}}(a_{52} - g_{51}g_{21}) = \frac{1}{2} = [10.5 - 1.5(-1)] = 6$$

$$\begin{aligned} g_{53} &= \frac{1}{g_{33}}(a_{53} - g_{51}g_{31} - g_{52}g_{32}) = \\ &= 11.5 - 1.5 \times (-2) - 6 \times (-2) = 26.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{54} &= \frac{1}{g_{44}}(a_{54} - a_{51}g_{41} - g_{52}g_{42} - g_{53}g_{43}) = \\ &= \frac{1}{13.162 \text{ i}} = (16 - 1.5 \times 2 - 6 \times 2.5 - 26.5 \times 13) = 26.325 \text{ i} \end{aligned}$$

que, como se ve, no es otra cosa que los valores de [Y]. Reemplazándolos en la ecuación (C-107):

$$X_4 = \frac{1}{g_{44}}(g_{54}) = \frac{26.325 \text{ i}}{13.162 \text{ i}} = 2$$

$$X_3 = \frac{1}{g_{33}}(g_{53} - g_{43} X_4) = 26.5 - 13 \times 2 = 0.5$$

$$X_2 = \frac{1}{g_{22}}(g_{52} - g_{32} X_3 - g_{42} X_4) = \frac{1}{2}[6 - (-2)(0.5) - 2.5 \times 2] = 1$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{g_{11}}(g_{51} - g_{21} X_2 - g_{31} X_3 - g_{41} X_4) = \\ &= 1.5 - (-1) \times 1 - (2)(0.5) - 2 \times 2 = -0.5 \end{aligned}$$

Ejemplo C.43

Resuelva el sistema métrico del ejemplo C.42 por el método modificado de Cholesky.

Solución

La matriz aumentada $[A_g]$ es:

$$[A_g] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 1.5 \\ -1 & 5 & -2 & 3 & 10.5 \\ -2 & -2 & 9 & 4 & 11.5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 16 \end{array} \right]$$

Según la ecuación (C-109):

$$s_{11} = a_{11} = 1 \qquad s_{12} = \frac{1}{s_{11}}(a_{12}) = -1$$

$$s_{13} = \frac{1}{s_{11}}(a_{13}) = -2 \qquad s_{14} = \frac{1}{s_{11}}(a_{14}) = 2$$

$$s_{15} = \frac{1}{s_{11}}(a_{15}) = 1.5$$

$$s_{22} = a_{22} - s_{12}^2 s_{11} = 5 - (1 \times 1) = 4$$

$$s_{23} = \frac{1}{s_{22}}(a_{23} - s_{12} s_{13} s_{11}) = \frac{1}{4}[-2 - (-1)(-2) \times 1] = -1$$

$$s_{24} = \frac{1}{s_{22}}(a_{24} - s_{12} s_{14} s_{11}) = \frac{1}{4}[3 - (-1) \times 2 \times 1] = 1.25$$

$$s_{25} = \frac{1}{s_{22}}(a_{25} - s_{12} s_{15} s_{11}) = \frac{1}{4}[10.5 - (-1) \times 1.5 \times 1] = 3$$

$$s_{33} = a_{33} - (s_{13}^2 s_{11} + s_{23}^2 s_{22}) = 9 - (4 \times 1 + 1 \times 4) = 1$$

$$s_{34} = \frac{1}{s_{33}} [a_{34} - (s_{13} s_{14} s_{11} + s_{23} s_{24} s_{22})] =$$

$$= 4 - [(-2) \times 2 \times 1 + (-1) \times 1.25 \times 4] = 13$$

$$s_{35} = \frac{1}{s_{33}} [a_{35} - (s_{13} s_{15} s_{11} + s_{23} s_{25} s_{22})] =$$

$$= 11.5 - [(-2) \times 1.5 \times 1 + (-1) \times 3 \times 4] = 26.5$$

$$s_{44} = a_{44} - (s_{14}^2 s_{11} + s_{24}^2 s_{22} + s_{34}^2 s_{33}) =$$

$$= 6 - (4 \times 1 + 1.5625 \times 4 + 169 \times 1) = -173.25$$

$$s_{45} = \frac{1}{s_{44}} [a_{45} - (s_{14} s_{15} s_{11} + s_{24} s_{25} s_{22} + s_{34} s_{35} s_{33})] =$$

$$= -\frac{1}{173.25} [16 - (2 \times 1.5 \times 1 + 1.25 \times 3 \times 4 + 13 \times 26.5 \times 1)] = 2$$

y aplicando ahora la ecuación (C-110):

$$X_4 = s_{45} = 2$$

$$X_3 = s_{35} - s_{34} X_4 = 26.5 - 13 \times 2 = 0.5$$

$$X_2 = s_{25} - (s_{23} X_3 + s_{24} X_4) = 3 - [(-1) \times 0.5 + 1.25 \times 2] = 1$$

$$X_1 = s_{15} - (s_{12} X_2 + s_{13} X_3 + s_{14} X_4) =$$

$$= 1.5 - [(-1) \times 1 + (-2) \times 0.5 + 2 \times 2] = -0.5$$

con lo cual queda resuelto el problema.

C.4.4.5. Aplicación del método de Cholesky a la solución de ecuaciones con matrices de banda

En la mayoría de los problemas de análisis estructural las matrices de rigidez o de flexibilidad están escasamente pobladas, y si los nudos se han numerado de manera adecuada, dichas matrices resultan ser de banda.

Debido a su importancia, se han desarrollado numerosos procedimientos que permiten tratarlas en forma muy eficiente (referencia C.3). A pesar de ello se considera que los métodos generales, como el de Gauss y el de Cholesky, siguen siendo satisfactorios, especialmente si en las ecuaciones pertinentes se reduce el intervalo de subíndices para

aprovechar el hecho de que muchos términos valen cero.

Así por ejemplo, si la matriz $[A]$ tiene un ancho de banda igual a $2w - 1$, en donde w es el ancho de la semibanda, es decir, que todos sus elementos a_{ij} para los cuales $|i - j| > w - 1$ son cero, y además es simétrica, la matriz $[G]$ del método de Cholesky resulta ser triangular, de banda, con ancho w . Igual ocurre con las matrices $[G]$ y $[S]$ y en consecuencia el intervalo de j en la segunda de las ecuaciones (C-107) o (C-109) irá desde $i + 1$ hasta $i + w - 1 \leq n$ y no hasta $(n + 1)$ como iba antes.

Más adelante se vuelve a tratar este tema y se presentan diagramas de flujo que permiten un uso eficiente del computador en la solución de ecuaciones con matrices simétricas de banda.

Ejemplo C.44

(Referencia C.9). Se pide resolver el siguiente conjunto de ecuaciones, con dos vectores de términos independientes, usando el método modificado de Cholesky.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 1.5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -7 \\ 0 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Se observa que el ancho de la banda es 5. Por consiguiente, $2w - 1 = 5$ y $w = 3$. De las ecuaciones (C-109).

Primera fila: $i = 1$ $i + w - 1 = 3$

$$s_{11} = a_{11} = 3 \qquad s_{12} = \frac{a_{12}}{s_{11}} = \frac{2}{3} \qquad s_{13} = \frac{a_{13}}{s_{11}} = \frac{4}{3}$$

Segunda fila: $i = 2$ $i + w - 1 = 4$

$$s_{22} = a_{22} - s_{12}^2 s_{11} = -1 - \frac{4}{9} \times 3 = -\frac{7}{3}$$

$$s_{23} = \frac{1}{s_{22}} (a_{23} - s_{12} s_{13} s_{11}) = -\frac{3}{7} \left(5 - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times 3 \right) = -1$$

$$s_{24} = \frac{1}{s_{22}} (a_{24} - s_{12} s_{14} s_{11}) = 0$$

Tercera fila: $i = 3$, $i + w - 1 = 5$

$$s_{33} = a_{33} - (s_{13}^2 s_{11} + s_{23}^2 s_{22}) = 6 - \frac{16}{9} \times 3 - 1 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 3$$

$$\begin{aligned} s_{34} &= \frac{1}{s_{33}} (a_{34} - s_{13} s_{14} s_{11} - s_{23} s_{24} s_{22}) = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 2 - \frac{4}{3} \times 0 \times 3 - (-1) \times 0 \times \left(-\frac{7}{3}\right) \right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{35} &= \frac{1}{3} (a_{35} - s_{13} s_{15} s_{11} - s_{23} s_{25} s_{22}) = \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 8 - \left(\frac{4}{3}\right) \times 0 \times 3 - (-1) \times 0 \times \left(-\frac{7}{3}\right) \right\} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Igualmente se obtiene:

$$S_{44} = \frac{2}{3} \quad S_{45} = -\frac{1}{2} \quad S_{46} = 6$$

$$S_{55} = -20 \quad S_{56} = -\frac{1}{4}$$

$$S_{66} = -20.75$$

Para obtener los valores de [Y] se usa la ecuación (C-111):

$$Y_{11} = \frac{b_{11}}{s_{11}} = \frac{1}{3} \quad Y_{12} = \frac{b_{12}}{s_{11}} = 0$$

$$Y_{21} = \frac{1}{s_{22}} (b_{21} - s_{12} s_{11} Y_{11}) = -\frac{3}{7} \left(-3 - \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{7}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{s_{22}} (b_{22} - s_{12} s_{11} Y_{12}) = -\frac{3}{7} \left(-7 - \frac{2}{3} \times 3 \times 0 \right) = 3$$

$$Y_{31} = \frac{1}{s_{33}} (b_{31} - s_{13} s_{11} Y_{11} - s_{23} s_{22} Y_{21}) =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 0 - \frac{4}{3} \times 3 \times \frac{1}{3} - (-1) \times \left(-\frac{7}{3} \right) \times \frac{11}{7} \right\} = -\frac{5}{3}$$

$$Y_{32} = \frac{1}{s_{33}} (b_{32} - s_{13} s_{11} Y_{12} - s_{23} s_{22} Y_{22}) =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ 5 - \frac{4}{3} \times 3 \times 0 - (-1) \times \left(-\frac{7}{3} \right) \times 3 \right\} = -\frac{2}{3}$$

$$Y_{41} = \frac{1}{s_{44}} (b_{41} - s_{14} s_{11} Y_{11} - s_{24} s_{22} Y_{21} - s_{34} s_{33} Y_{31}) =$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ 2 - 0 \times 3 \times \frac{1}{3} - 0 \times \left(-\frac{7}{3} \right) \times \frac{11}{7} - \frac{2}{3} \times 3 \times \left(-\frac{5}{3} \right) \right\} = 8$$

$$Y_{42} = \frac{1}{s_{44}} (b_{42} - s_{14} s_{11} Y_{12} - s_{24} s_{22} Y_{22} - s_{34} s_{33} Y_{32}) =$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ 6 - 0 \times 3 \times 0 - 0 \times \left(-\frac{7}{3} \right) \times 3 - \frac{2}{3} \times 3 \times \left(-\frac{2}{3} \right) \right\} = 11$$

$$Y_{51} = \frac{1}{s_{55}} (b_{51} - s_{15} s_{11} Y_{11} - s_{25} s_{22} Y_{21} - s_{35} s_{33} Y_{31} - s_{45} s_{44} Y_{41}) =$$

$$= -\frac{1}{20} \left\{ 4 - 0 - 0 - \frac{8}{3} \times 3 \times \left(-\frac{5}{3} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 8 \right\} = -1$$

$$Y_{52} = \frac{1}{s_{55}} (b_{52} - s_{15} s_{11} Y_{12} - s_{25} s_{22} Y_{22} - s_{35} s_{33} Y_{32} - s_{45} s_{44} Y_{42}) =$$

$$= -\frac{1}{20} \left\{ 1 - 0 - 0 - \frac{8}{3} \times 3 \times \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 11 \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$Y_{61} = \frac{1}{s_{66}} (b_{61} - s_{16} s_{11} Y_{11} - s_{26} s_{22} Y_{21} - s_{36} s_{33} Y_{31} - s_{46} s_{44} Y_{41} - s_{56} s_{55} Y_{51}) =$$

$$= -\frac{4}{83} \left\{ 0 - 0 - 0 - 0 - 6 \times \frac{2}{3} \times 8 + \frac{1}{4} (-20) (-1) \right\} = \frac{108}{83} = 1.301$$

$$Y_{62} = \frac{1}{s_{66}} (b_{62} - s_{16} s_{11} Y_{12} - s_{26} s_{22} Y_{22} - s_{36} s_{33} Y_{32} - s_{46} s_{44} Y_{42} - s_{56} s_{55} Y_{52}) =$$

$$= -\frac{4}{83} \left\{ 0 - 0 - 0 - 0 - 6 \times \frac{2}{3} \times 11 + \frac{1}{4} (-20) \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = 2$$

Finalmente, utilizando la ecuación (C-112), se obtienen los valores de [X]:

$$X_{61} = Y_{61} = 1.301$$

$$X_{62} = Y_{62} = 2$$

$$X_{51} = Y_{51} - s_{56} X_{61} = -1 + \frac{1}{4}(1.301) = -0.675$$

$$X_{52} = Y_{52} - s_{56} X_{62} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2) = 0$$

$$X_{41} = Y_{41} - s_{45} X_{51} - s_{46} X_{61} = 8 + \frac{1}{2}(-0.675) - 6(1.301) = -0.144$$

$$X_{42} = Y_{42} - s_{45} X_{52} - s_{46} X_{62} = 11 + \frac{1}{2} \times 0 - 6(2) = -1$$

$$\begin{aligned} X_{31} &= Y_{31} - s_{34} X_{41} - s_{35} X_{51} - s_{36} X_{61} = \\ &= -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}(-0.144) - \frac{8}{3}(-0.675) - 0 = 0.229 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{32} &= Y_{32} - s_{34} X_{42} - s_{35} X_{52} - s_{36} X_{62} = \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-1) - \frac{8}{3} \times 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{21} &= Y_{21} - s_{23} X_{31} - s_{24} X_{41} - s_{25} X_{51} - s_{26} X_{61} = \\ &= \frac{11}{7} + 1(0.229) - 0 - 0 - 0 = 1.800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{22} &= Y_{22} - s_{23} X_{32} - s_{24} X_{42} - s_{25} X_{52} - s_{26} X_{62} = \\ &= 3 + 1 \times 0 - 0 - 0 - 0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{11} &= Y_{11} - s_{12} X_{21} - s_{13} X_{31} - s_{14} X_{41} - s_{15} X_{51} - s_{16} X_{61} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(1.800) - \frac{4}{3}(0.229) - 0 - 0 - 0 = -1.172 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{12} &= Y_{12} - s_{12} X_{22} - s_{13} X_{32} - s_{14} X_{42} - s_{15} X_{52} - s_{16} X_{62} = \\ &= 0 - \frac{2}{3}(3) - \frac{4}{3}(0) - 0 - 0 - 0 = -2 \end{aligned}$$

En el cuadro siguiente se presenta, con fines comparativos, la solución del mismo

problema por eliminación gaussiana con matriz triangular superior unitaria.

C	Ag								Id.	Equiv.
0	3	2	4	0	0	0	1	0	F_1^0	$= F_4' = F_4''$ $= F_5' = F_5''$ $= F_6' = F_6'' = F_6'''$
	2	-1	5	0	0	0	-3	-7	F_2^0	
	4	5	6	2	8	0	0	5	F_3^0	
	0	0	2	2	5	4	2	6	F_4^0	
	0	0	8	5	1,5	3	4	1	F_5^0	
	0	0	0	4	3	2	0	0	F_6^0	
I	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	F_1'	$F_1^0/3$
	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	-7	F_2'	$F_2^0 - 2F_1'$
	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	8	0	$-\frac{4}{3}$	5	F_3'	$F_3^0 - 4F_1'$
II	0	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{7}$	3	F_2''	$F_2'/(-\frac{7}{3})$
	0	0	3	2	8	0	-5	-2	F_3''	$F_3' - (-\frac{7}{3})F_2''$
III	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	F_3'''	$F_3''/3$
	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{22}{3}$	F_4'''	$F_4'' - 2F_3'''$
	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{6}$	3	$\frac{52}{3}$	$\frac{19}{3}$	F_5'''	$F_5'' - 8F_3'''$
IV	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	6	8	11	F_4^{IV}	$F_4'''/(\frac{2}{3})$
	0	-0	0	0	-20	5	20	10	F_5^{IV}	$F_5''' - (\frac{1}{3})F_4^{IV}$
	0	0	0	0	5	-22	-32	-44	F_6^{IV}	$F_6''' - 4F_4^{IV}$
V	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{2}$	F_5^V	$F_5^{IV}/(-20)$
	0	0	0	0	0	$-\frac{83}{4}$	-27	$-\frac{83}{2}$	F_6^V	$F_6^{IV} - 5F_5^V$
VI	1						$\frac{108}{83}$	2	F_6^{VI}	$F_6^{IV}/(-\frac{83}{4})$
1							1	$-\frac{1}{4}$	F_5^V	
							1	$-\frac{1}{2}$	F_4^{IV}	
							1	$\frac{2}{3}$	F_3'''	
							1	-1	F_2''	
							$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	F_1'	
							0	0	F_1'	

Luego se obtienen los valores de las incógnitas, por sustitución regresiva:

$$X_{61} = 108/83 = 1.3012 \qquad X_{62} = 2$$

$$X_{51} = -1 + \frac{1}{4} \left(\frac{108}{83} \right) = -\frac{56}{83} = -0.675$$

$$X_{52} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2) = 0$$

$$X_{41} = 8 - 6\left(\frac{108}{83}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{56}{83}\right) = -\frac{12}{83} = -0.1446$$

$$X_{42} = 11 - 6(2) + \frac{1}{2}(0) = -1$$

$$X_{31} = -\frac{5}{3} - \frac{8}{3}\left(-\frac{56}{83}\right) - \frac{2}{3}\left(-\frac{12}{83}\right) = \frac{19}{83} = 0.2289$$

$$X_{32} = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3}(0) - \frac{2}{3}(-1) = 0$$

$$X_{21} = \frac{11}{7} + 1\left(\frac{19}{83}\right) = \frac{1046}{581} = 1.8003$$

$$X_{22} = 3 + 1(0) = 3$$

$$X_{11} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{19}{83}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1046}{581}\right) = -\frac{681}{581} = -1.1721$$

$$X_{12} = 0 - \frac{4}{3}(0) - \frac{2}{3}(3) = -2$$

Estos resultados muestran que tanto los valores de [X] como los de [Y] son idénticos a los resultados obtenidos en las fórmulas y que la matriz [S] sólo difiere de la matriz [U⁰] del cuadro, en los términos de la diagonal, pues los s_{ii} no valen 1.

C.4.4.6. Planteamiento alternativo del método de Cholesky aplicado a matrices simétricas

Weaver y Gere, en el apéndice D de la referencia C.11, presentan el método de Cholesky en forma ligeramente distinta y dan diagramas de flujo para resolver sistemas de ecuaciones por dicho método y para aprovechar el hecho de que las matrices de coeficientes en los problemas de ingeniería estructural, además de ser simétricas, son de banda. A continuación, un resumen y una adaptación de tal presentación.

Se parte, como antes, de la descomposición en dos matrices triangulares, que cuando [A] es simétrica resulta en:

$$[A] = [L][U] = [A]^T = [U]^T [L]^T$$

Lo cual implica, como ya se había visto, que:

$$[L]^T = [U] \quad \text{y} \quad [U]^T = [L] \quad (\text{C-101})$$

La presentación de los autores citados difiere de la vista antes en que ellos parten de la matriz triangular superior [U], así encontrada, en vez de la triangular inferior [L]. Si a dicha matriz [U] se la llama [H], la descomposición de [A] puede expresarse así:

$$[A] = [H]^T [H] \quad (\text{C-102a})$$

Para hallar los términos de [H] se emplean las siguientes ecuaciones:

$$h_{ii} = \left[a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki}^2 \right]^{1/2} \quad (\text{C-106a})$$

$$h_{ij} = \frac{1}{h_{ij}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki} h_{kj} \right] \quad (j > i)$$

que se aplican por filas. Obviamente, la matriz [H] es la transpuesta de la matriz [G], estudiada anteriormente, cuyos términos se calculaban con las ecuaciones (C-106).

De nuevo, para evitar los inconvenientes de la raíz cuadrada, se ha ideado una modificación. Recordando que para las matrices simétricas la descomposición básica:

$$[A] = [L^0][D][U^0] \quad (\text{C-82})$$

se convierte en:

$$[A] = [A]^T = [U^0]^T [D][L^0]^T$$

se deduce que $[L^0]^T = [U^0]$ y la ecuación (C-82) se transforma en:

$$[A] = [U^0]^T [D][U^0] \quad (\text{C-104a})$$

Comparando esta ecuación con la (C-102a) se ve que es posible considerar la matriz [D] como una matriz diagonal que contiene los cuadrados de términos factorizados de las filas de [H]. Si la factorización se hace con los términos de la diagonal, es decir con los h_{ii} , el término típico d_{ii} se puede representar así:

$$d_{ii} = h_{ii}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C-113})$$

En la referencia citada se demuestra que los elementos de [D] y de $[U^0]$ pueden calcularse con las fórmulas siguientes:

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} (u_{ki}^0)^2 \quad (\text{C-114})$$

$$u_{ij}^0 = \frac{1}{d_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} d_{kk} u_{ki}^0 u_{kj}^0 \right] \quad (j > i)$$

Similares a las (C-109). Al comparar las ecuaciones (C-106a) con las (C-114) se observa que estas últimas requieren el doble de multiplicaciones que las primeras; con el fin de reducirlas al mismo número, se define un producto intermedio:

$$u_{kj}^{0*} = d_{kk} u_{kj}^0 \quad (C-115)$$

y se cambia el orden del proceso para que la generación de los términos se haga por columnas. Las fórmulas correspondientes quedan, finalmente, así:

$$u_{ij}^{0*} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^0 u_{kj}^{0*} \quad (j > i) \quad (C-116a)$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj}^0 u_{kj}^{0*} \quad (C-116b)$$

donde

$$u_{kj}^0 = \frac{u_{kj}^{0*}}{d_{kk}} \quad (C-115a)$$

Para aplicarlas, se empieza por evaluar para la columna j los productos intermedios u_{ij}^{0*} , luego se calculan los términos u_{ij}^0 y finalmente se halla el valor de la diagonal d_{jj} .

Cuando se trata del sistema de ecuaciones

$$[A][X] = [B]$$

en que A es una matriz simétrica, se puede utilizar la ecuación (C-104a) y escribir:

$$[U^0]^T [D] [U^0] [X] = [B] \quad (C-117)$$

Definiendo ahora vectores auxiliares $[Y]$ y $[Z]$, tales que:

$$[U^0] [X] = [Y] \quad y \quad (C-118)$$

$$[D] [Y] = [Z] \quad (C-119)$$

la ecuación (C-117) se reduce a:

$$[U^0]^T [Z] = [B] \quad (C-120)$$

de la cual se pueden obtener los valores de $[Z]$ por sustitución progresiva. Conocido dicho vector, el $[Y]$ se averigua mediante la ecuación (C-119) y finalmente se calcula $[X]$ por sustitución regresiva en la ecuación (C-118).

Las respectivas fórmulas generales son:

$$Z_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^0 Z_k \quad (\text{C-121})$$

$$Y_i = \frac{Z_i}{d_{ii}} \quad (\text{C-122})$$

$$X_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik}^0 X_k \quad (\text{C-123})$$

Tanto el procedimiento de factorización como el de solución estudiados aquí se aplican también a matrices de banda, en cuyo caso la matriz $[U^0]$ resulta del mismo tipo, con ancho igual al de la semibanda de la matriz $[A]$. En consecuencia, el número de operaciones necesarias para llevar a cabo ambos procesos se reduce considerablemente.

Ejemplo C.45

Utilice el procedimiento explicado en el artículo anterior, para hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3X_1 - X_2 &= -2.5 \\ -X_1 + 5X_2 + 2X_3 &= 1.5 \\ 2X_2 + 4X_3 - 3X_4 &= -10.5 \\ -3X_3 + 7X_4 + X_5 &= 17 \\ X_4 + 2X_5 &= 2.5 \end{aligned}$$

Solución

El sistema dado se puede expresar, en forma matricial, así:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.5 \\ -10.5 \\ 17 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la forma general $[A][X] = [B]$, en donde $[A]$ resultó simétrica y de banda, de ancho 3. Por consiguiente el ancho de la semibanda es 2 y este mismo valor será el ancho de banda de la matriz $[U^0]$.

En primer lugar, se procede a evaluar esta matriz mediante la aplicación de las ecuaciones (C-116) y (C-115a).

Como la matriz $[U^0]$ es una matriz triangular superior unitaria:

$$u_{11}^0 = u_{22}^0 = u_{33}^0 = u_{44}^0 = u_{55}^0 = 1$$

Primera columna: $d_{11} = a_{11} = 3$

Segunda columna: $j - w + 1 = 1$

$$u_{12}^{0*} = a_{12} = -1$$

$$u_{12}^0 = \frac{u_{12}^{0*}}{d_{11}} = -\frac{1}{3}$$

$$d_{22} = a_{22} - u_{12}^0 u_{12}^{0*} = 5 - \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) = \frac{14}{3}$$

Tercera columna: $j - w + 1 = 2$

$$u_{13}^{0*} = a_{13} = 0 \quad (\text{sobra el cálculo, pues } i + w - 1 = 2)$$

$$u_{13}^0 = 0$$

$$u_{23}^{0*} = a_{23} - u_{12}^0 u_{13}^{0*} = 2 - \left(-\frac{1}{3}\right)(0) = 2$$

$$u_{23}^0 = \frac{u_{23}^{0*}}{d_{22}} = \frac{2}{(14/3)} = \frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} d_{33} &= a_{33} - u_{13}^0 u_{13}^{0*} - u_{23}^0 u_{23}^{0*} = \\ &= 4 - 0 - \frac{3}{7}(2) = \frac{22}{7} \end{aligned}$$

Cuarta columna: $j - w + 1 = 3$

$$u_{14}^{0*} = u_{14}^0 = u_{24}^{0*} = u_{24}^0 = 0$$

$$u_{34}^{0*} = a_{34} - u_{13}^0 u_{14}^{0*} - u_{23}^0 u_{24}^{0*} =$$

$$= -3 - 0 - \frac{3}{7}(0) = -3$$

$$u_{34}^0 = \frac{u_{34}^{0*}}{d_{33}} = -\frac{3}{22/7} = -\frac{21}{22}$$

$$\begin{aligned} d_{44} &= a_{44} - u_{14}^0 u_{14}^{0*} - u_{24}^0 u_{24}^{0*} - u_{34}^0 u_{34}^{0*} = \\ &= 7 - 0 - 0 - \left(-\frac{21}{22}\right)(-3) = \frac{91}{22} \end{aligned}$$

Quinta columna: $j - w + 1 = 4$

$$u_{15}^{0*} = u_{15}^0 = u_{25}^{0*} = u_{25}^0 = u_{35}^{0*} = u_{35}^0 = 0$$

$$\begin{aligned} u_{45}^{0*} &= a_{45} - u_{14}^0 u_{15}^{0*} - u_{24}^0 u_{25}^{0*} - u_{34}^0 u_{35}^{0*} = \\ &= 1 - 0 - 0 - \left(-\frac{21}{22}\right)(0) = 1 \end{aligned}$$

$$u_{45}^0 = \frac{u_{45}^{0*}}{d_{44}} = \frac{1}{91/22} = \frac{22}{91}$$

$$\begin{aligned} d_{55} &= a_{55} - u_{15}^0 u_{15}^{0*} - u_{25}^0 u_{25}^{0*} - u_{35}^0 u_{35}^{0*} - u_{45}^0 u_{45}^{0*} = \\ &= 2 - 0 - 0 - 0 - \frac{22}{91}(1) = \frac{160}{91} \end{aligned}$$

Recordando ahora la ecuación (C-120):

$$[U^0]^T [Z] = [B]$$

se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{22} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{91} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.5 \\ -10.5 \\ 17 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

De donde, por sustitución progresiva, o aplicando la ecuación (C-121):

$$Z_1 = -2.5$$

$$Z_2 = 1.5 + \frac{1}{3}(-2.5) = \frac{2}{3} = 0.6667$$

$$Z_3 = -10.5 - \frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{151}{14} = -10.7857$$

$$Z_4 = 17 + \frac{21}{22}\left(-\frac{151}{14}\right) = \frac{295}{44} = 6.7045$$

$$Z_5 = 2.5 - \frac{22}{91}\left(\frac{295}{44}\right) = \frac{80}{91} = 0.8791$$

Además, por la ecuación (C-119):

$$[D][Y] = [Z]$$

o sea:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 91/22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 160/91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 2/3 \\ -151/14 \\ 295/44 \\ 80/91 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \frac{-2.5}{3} = -\frac{5}{6} = -0.8333$$

$$Y_2 = \frac{2/3}{14/3} = \frac{1}{7} = 0.1429$$

$$Y_3 = \frac{-151/14}{22/7} = -\frac{151}{44} = -3.4318$$

$$Y_4 = \frac{295/44}{91/22} = \frac{295}{182} = 1.6209$$

$$Y_5 = \frac{80/91}{160/91} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Y por la ecuación (C-118):

$$[U^0] = [X] = [Y]$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{22}{91} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{151}{44} \\ \frac{295}{182} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, por sustitución regresiva, o aplicando la ecuación (C-123):

$$X_5 = 1/2 = 0.5$$

$$X_4 = \frac{295}{182} - \frac{22}{91} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$X_3 = \frac{151}{44} + \frac{21}{22} \left(\frac{3}{2} \right) = -2$$

$$X_2 = \frac{1}{7} - \frac{3}{7}(-2) = 1$$

$$X_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}(1) = -\frac{1}{2}$$

que es la solución pedida.

C.4.4.7. Subprogramas FACTORIZAR y RESOLVER para hallar la solución de sistemas de ecuaciones que involucren matrices simétricas

Las figuras C.10 y C.11 representan los diagramas de flujo de los subprogramas FACTORIZAR y RESOLVER, adaptados de los presentados por Weaver y Gere. El primero de ellos descompone una matriz simétrica $[A]$, de tamaño n , en la matriz triangular superior $[U^0]$, del método modificado de Cholesky, por medio de las ecuaciones (C-115a), (C-116a) y (C-116b). Sus elementos se generan por columnas y se guardan, para economizar memoria, en las mismas posiciones ocupadas originalmente por la parte triangular superior de la matriz $[A]$. Es por esto por lo que en todo el diagrama sólo aparece esta matriz. Por la misma razón los elementos d_{ii} de la matriz diagonal $[D]$ se guardan en las posiciones de los elementos diagonales a_{ii} de la matriz $[A]$. El programa verifica que todos los elementos d_{ii} sean mayores que cero, y cuando esto no se cumple, suspende la ejecución y anuncia error. En los diagramas las letras I, J, K, II y J1 representan números enteros que se usan como límites de conteo o como subíndices. S y T son variables reales utilizadas para almacenamiento temporal.

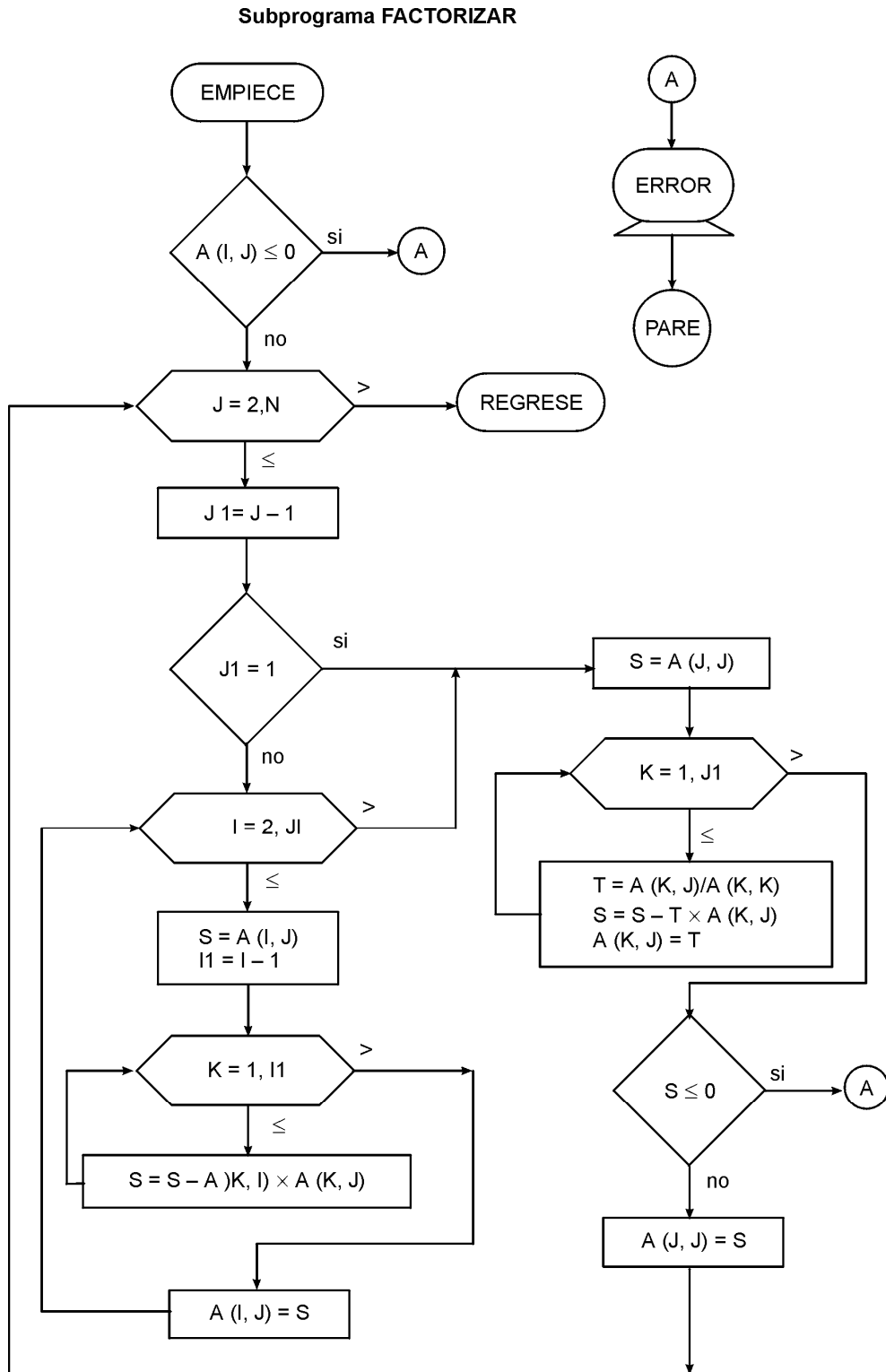


Figura C.10. Subprograma para calcular los valores de $[U^0]$ por el método de Cholesky, modificado. (Adaptado de la referencia C.11)

Subprograma RESOLVER

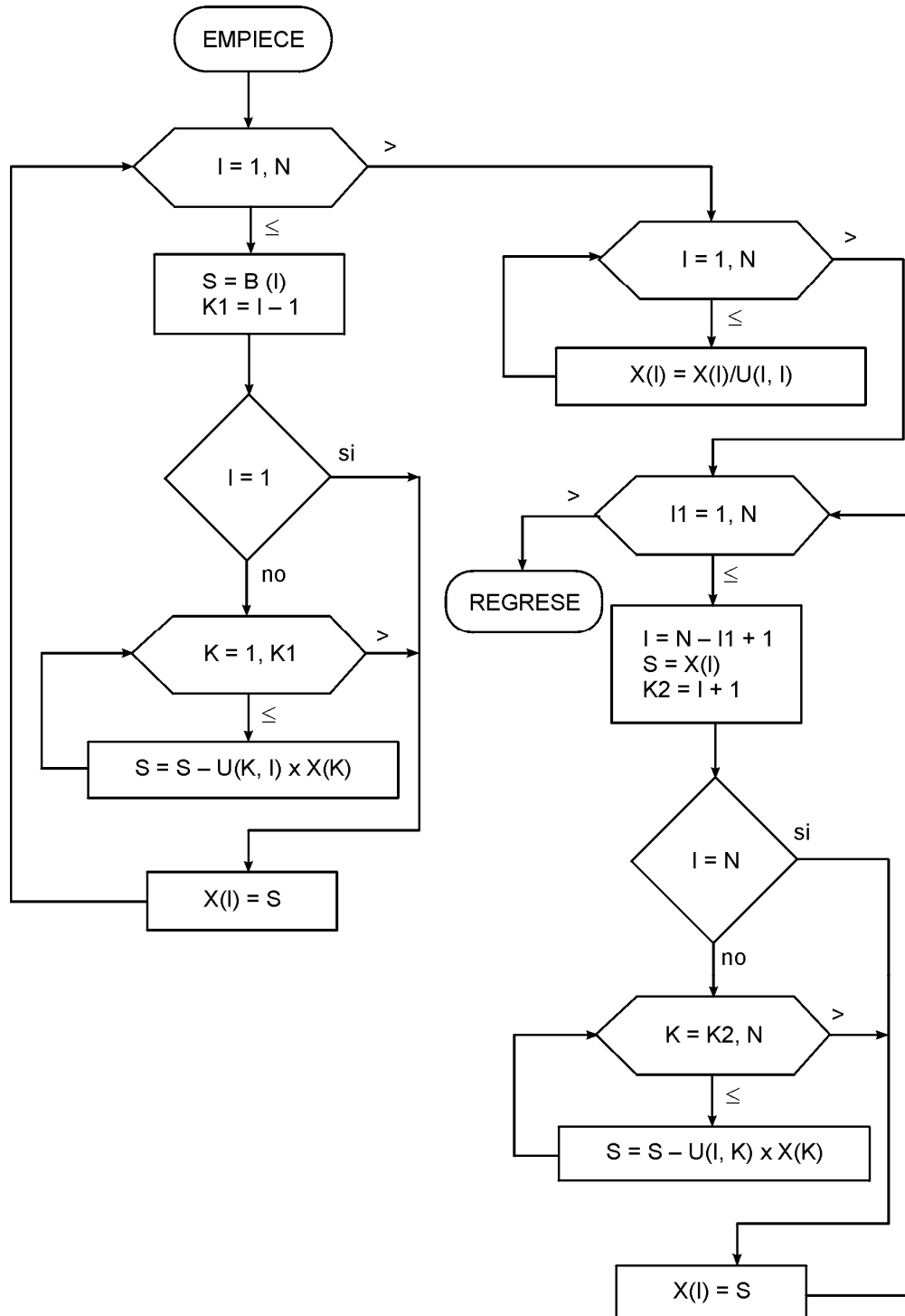


Figura C.11. Diagrama de flujo para resolver un sistema de ecuaciones a partir de la matriz $[U^0]$, obtenida por el método Cholesky, modificado. (Adaptado de la referencia C.11).

El subprograma RESOLVER parte de la matriz triangular superior $[U^0]$, generada por el subprograma FACTORIZAR, y del vector de términos independientes $[B]$.

En la figura C.11 puede observarse que en la primera parte del programa se calcula el vector $[Z]$ por aplicación hacia adelante de la ecuación (C-121) y que, con el fin de ahorrar memoria, dicho vector se guarda temporalmente en el espacio reservado para $[X]$. A continuación se halla el vector $[Y]$ por medio de la ecuación (C-122), recordando que los términos d_{ii} están ocupando las posiciones de u_{ii}^0 . El vector $[Y]$ se guarda en las mismas posiciones de $[X]$. Por último, se aplica hacia atrás la ecuación (C-123), con lo cual se obtiene finalmente el vector $[X]$ y se llega al término del proceso.

C.4.4.8. Subprogramas FACBAN y SOLBAN para descomponer matrices simétricas de banda y resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes

Como ya se dijo, en los problemas de ingeniería estructural se generan matrices de tamaño considerable, pero escasamente pobladas, es decir, con muchos términos iguales a cero. Es posible, mediante una numeración apropiada de los nudos, agrupar todos los términos diferentes de cero en las proximidades de la diagonal principal, obteniéndose una matriz simétrica de banda. La solución del sistema de ecuaciones correspondiente se puede obtener, muy eficientemente, mediante la aplicación del método modificado de Cholesky. Para ahorrar memoria de computador, conviene guardar únicamente los términos de la semibanda, lo cual exige una identificación cuidadosa de los mismos para poder relacionarlos en cualquier instante con su posición original. Weaver y Gere presentan en la referencia C.11 sus programas FACBAN y SOLBAN, cuyos diagramas de flujo corresponden acá a las figuras C.12 y C.13, para descomponer y resolver, respectivamente, sistemas simétricos de banda, con base en los coeficientes de la semibanda almacenados en una matriz rectangular.

En la figura C.14, tomada de la misma referencia, se puede comparar la forma normal de almacenamiento de una matriz de banda con la forma rectangular, condensada, de almacenamiento de la semibanda.

En dicha figura, N indica el tamaño de la matriz original y W el ancho de la semibanda. Se observa que la diagonal queda guardada en la primera columna del arreglo rectangular y que la mayoría de los términos nulos se han eliminado. En el programa se introdujo un nuevo índice, $J2$, para limitar los cálculos a los elementos diferentes de cero. De la figura C.14a se concluye que para cualquier columna de número superior a W , el primer término distinto de cero se presenta en la fila

$$J2 = J - W + 1 \quad (W < J \leq N)$$

Para las demás columnas (con excepción de la primera):

$$J2 = 1 \quad (1 < J \leq W)$$

Los programas FACTORIZAR y FACBAN difieren únicamente en las instrucciones adicionales que lleva el segundo para calcular el índice $J2$, y en los cambios de subíndices en las ecuaciones (C-115a), (C-116a) y (C.116b), necesarios para tener en cuenta el almacenamiento en forma rectangular, ya que las columnas I y J de la matriz original quedan guardadas siguiendo un patrón tipo escalera en la matriz rectangular.

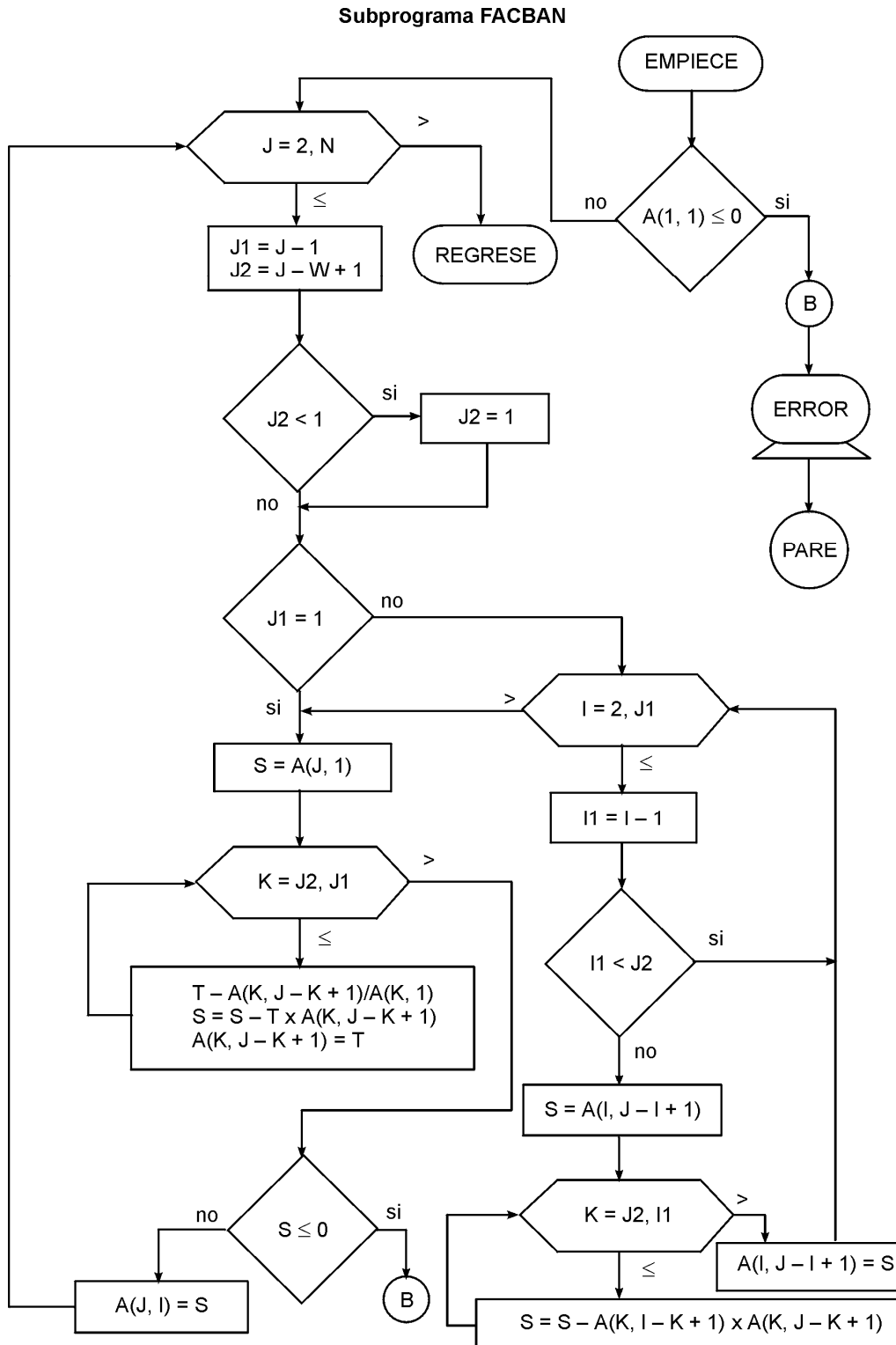


Figura C.12. Diagrama de flujo del subprograma FACBAN que descompone una matriz simétrica, de banda, almacenada en un arreglo rectangular. (Adaptado de la referencia C.11).

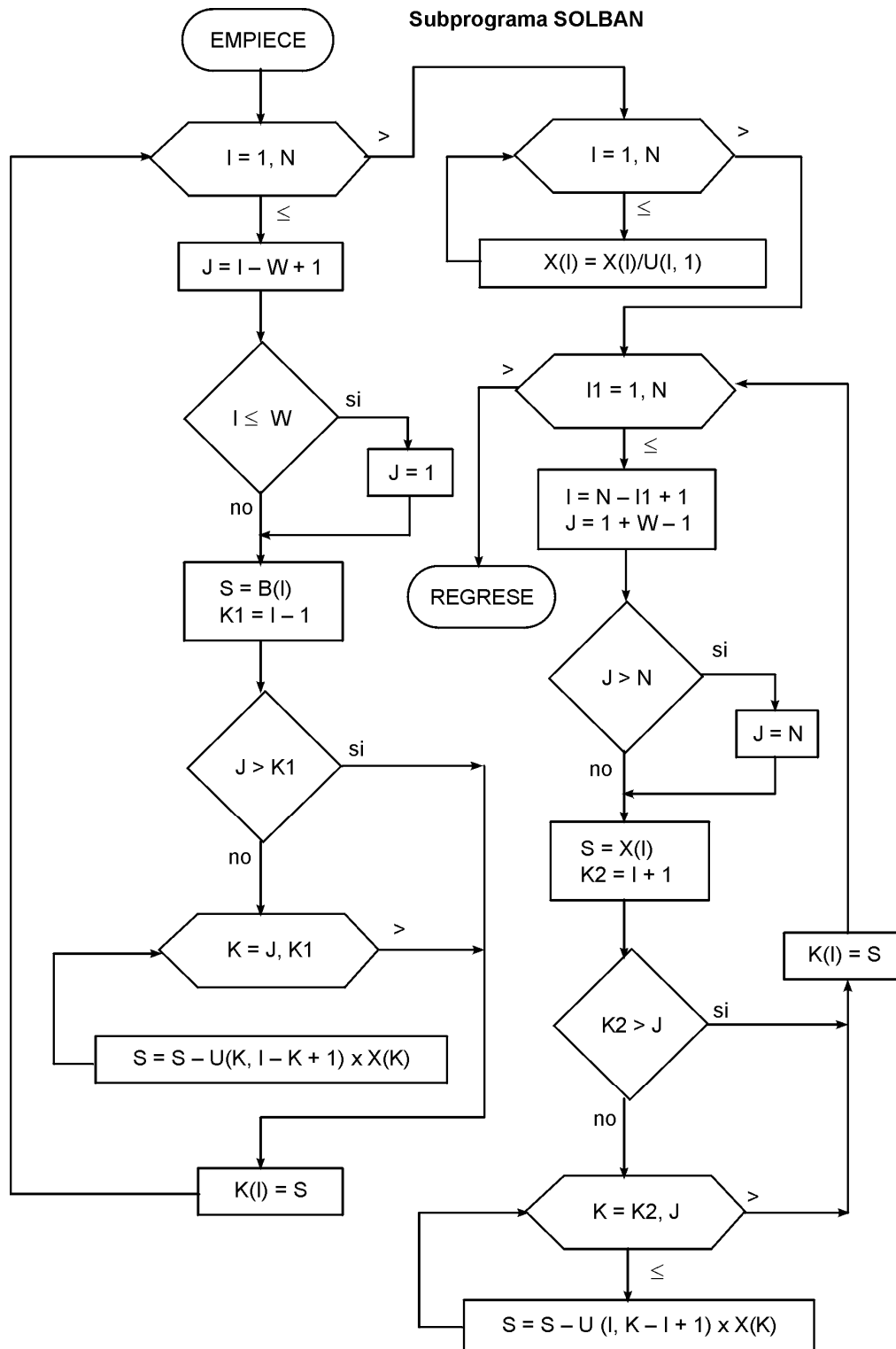


Figura C.13. Diagrama de flujo del subprograma SOLBAN que resuelve un sistema de ecuaciones utilizando la matriz $[U^0]$, calculada por FACBAN. (Adaptado de la referencia C.11).

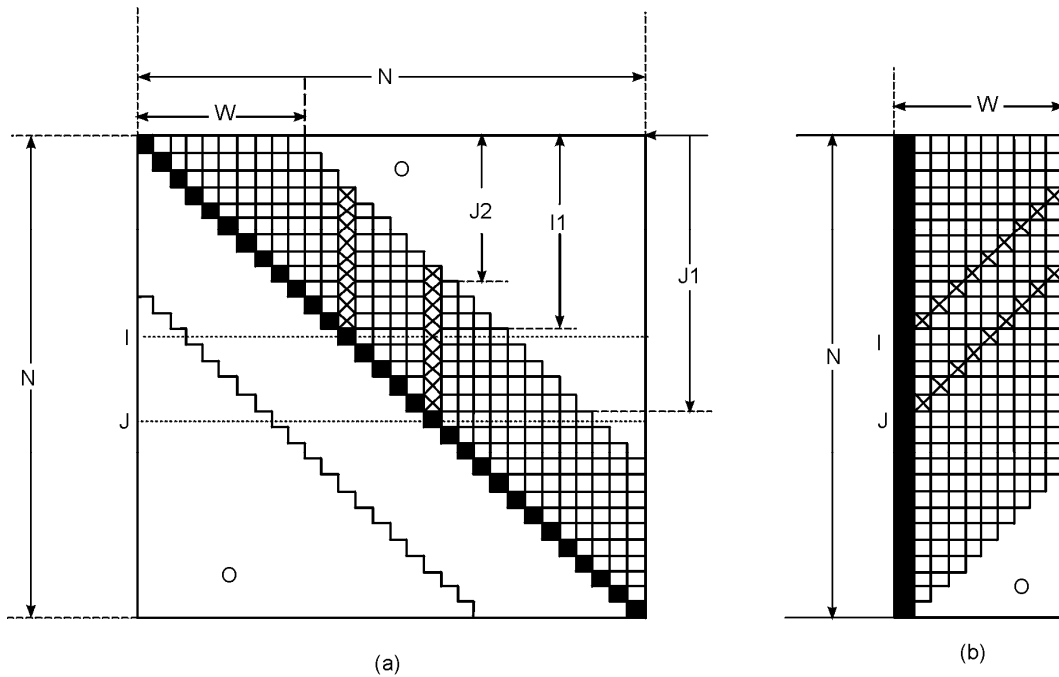


Figura C.14. Matriz de banda: a) forma usual de almacenamiento y, b) semibanda superior almacenada en arreglo rectangular. (Referencia C.11).

El subprograma SOLBAN parte de la semibanda superior generada por FACBAN y resuelve el sistema original de ecuaciones. Es muy similar al subprograma RESOLVER, visto antes, excepto por las complicaciones que ocasiona el almacenamiento, en forma rectangular, de la semibanda superior de la matriz $[U^0]$.

Al aplicar las ecuaciones (C-121) y (C-123), se utiliza el subíndice J para señalar los términos diferentes de cero que entran en los cálculos. En el paso de sustitución progresiva, el primer término distinto de cero en la columna I, mayor que W, tiene como número de fila:

$$J = I - W + 1 \quad (W < I \leq N)$$

Mientras que en las primeras NB columnas (excepto la primera):

$$J = 1 \quad (1 < I \leq W)$$

Por otra parte, en la sustitución regresiva el índice de columna para el último término distinto de cero en la fila I de la matriz $[U^0]$ es:

$$J = I + W - 1 \quad 1 \leq I < (N - W)$$

$$J = N \quad (N - W) < I < N$$

según corresponda.

Además, los índices de columna de los elementos en $[U^0]$ se modifican de acuerdo con su localización real en el arreglo rectangular.

En ambos programas se utilizan los mismos artificios para ahorrar memoria empleados en los dos anteriores y, por tanto, en SOLBAN los vectores intermedios $[Z]$ y $[Y]$ se guardan temporalmente en el espacio de $[X]$. El algoritmo tiene la ventaja de no cambiar los valores de $[U^0]$ y de $[B]$, lo cual permite volver a utilizar la matriz $[U^0]$ para resolver el sistema con otros vectores de términos independientes.

C.4.5. Comparación de los métodos para resolver ecuaciones simultáneas

Al comparar diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones se tienen en cuenta tres factores: exactitud, rapidez y memoria requerida. La rapidez depende fundamentalmente del número y tipo de operaciones involucradas, mientras que la exactitud de los resultados depende del número de iteraciones en los métodos iterativos, de la máquina que se use y del tamaño de la matriz en los métodos de eliminación.

En la tabla C.1, tomada de la referencia C.9, se presentan los requisitos de almacenamiento y el número aproximado de operaciones involucradas en cada método.

Tabla C.1

Almacenamiento requerido y número de operaciones aritméticas involucradas en los diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones (referencia C.9)

Método	$[A][X]=[B]$				$[A]^{-1}$			
	Almac.	Div.	Mult.	Sumas	Almac.	Div.	Mult.	Sumas
Gauss	n^2+n	N	$\frac{1}{3}n^3+n^2$	$\frac{1}{3}n^3+n$	n^2+n	N	n^3	n^3-2n^2
Cholesky (sim)	$\frac{n^2+3n}{2}$	n^*	$\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2$	$\frac{1}{6}n^3+n^2$	$\frac{n^2+n}{2}$	n	n^3	n^3-2n^2
Jacobi	n^2+3n	n	n^2	n^2-n				
Gauss- Seidel	n^2+2n	n	n^2	n^2-n				
Matriz de banda (sim)	$(w+1)n$	n	$\frac{n(w^2+3w)}{6}$	$\frac{n(w^2+w)}{6}$				

*n raíces cuadradas

Weaver y Gere dan a su vez, en la referencia C.11, los números de operaciones efectua-

das en los programas FACTORIZAR y RESOLVER y los comparan con las cantidades correspondientes en una eliminación gaussiana compacta (referencia C.12) que, se sabe, requiere el mínimo de operaciones. Estos datos se presentan en la tabla C.2. Obsérvese que la suma de las multiplicaciones y divisiones es igual por ambos métodos y también lo es el número de adiciones.

Parece haber consenso entre los autores de que sólo se justifica la inversión completa cuando se trata de resolver un conjunto de ecuaciones; para un sistema único, en cambio, son más eficientes los métodos de eliminación. La tendencia en los programas más recientes es usar el algoritmo de Gauss aunque también se utiliza con frecuencia el de Cholesky, que suele ser el más rápido (referencias C.1 y C.9).

El lector interesado podrá encontrar diagramas de flujo más detallados de los diversos métodos en la referencia C.10 y una discusión muy útil sobre análisis de errores en el capítulo 11 del libro de McGuire y Gallagher (Ref. C.1).

Tabla C.2

Operaciones necesarias en los programas FACTORIZAR y RESOLVER, comparadas con las de una eliminación gaussiana compacta.

Método		Multiplicaciones	Divisiones	Sumas
Cholesky modificado	Factorizar	$\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6}$	$\frac{n^2}{n} - \frac{n}{2}$	$\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6}$
	Resolver	n^2	n	$n^2 - n$
	Totales	$\frac{n^3}{6} + n^2 - \frac{n}{6}$	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$	$\frac{n^3}{6} + n^2 - \frac{7n}{6}$
Eliminación gaussiana compacta		$\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{2n}{3}$	n	$\frac{n^3}{6} + n^2 - \frac{7n}{6}$

REFERENCIAS

- C.1 McGuire, W. y Gallagher, R.H., *Matrix Structural Analysis*, Wiley, 1979.
- C.2. Meyer, C., *Solution of Linear Equations-State of the Art*, *Proc. ASCE, Journal de la Div. de Estructuras*, Vol. 99, N° ST7, julio de 1973, pp. 1506-1526.
- C.3 Meyer, C., *Special Problems Related to Linear Equation Solvers*, *Proc. ASCE, Journal de la Div. de Estructuras*, Vol. 101, N° ST4, abril de 1975, pp. 869-890.
- C.4 Melosh, R.J. y Bamford, R.B., *Efficient Solution of Load-Deflection Equations*, *Proc. ASCE, Journal de la Div. de Estructuras*, Vol. 95, N° ST4, abril de 1969.
- C.5 Roy, J.R., *Numerical Error in Structural Solutions*, *Proc. ASCE, Journal de la Div.*

- de Estructuras*, Vol. 97, N° ST4, abril de 1971, pp. 1039-1054.
- C.6 Gere, J.M. y Weaver, W., *Matrix Algebra for Engineers*, Van Nostrand, 1965.
- C.7 Beaufait, F.W.; Rowan, W.H.; Hoadley, P.G. y Hackett, R.M., *Computer Methods of Structural Analysis*, Prentice Hall, 1970.
- C.8 Salvadori, M.G. y Baron, M.L., *Numerical Methods in Engineering*, Prentice Hall, 1964.
- C.9 Kardestuncer, H., *Introducción al análisis estructural con matrices*, McGraw-Hill, 1975.
- C.10 Southworth, R.W. y Deleeuw, S.L., *Digital Computation and Numerical Methods*, McGraw-Hill, 1965.
- C.11 Weaver, W. y Gere, J.M., *Matrix Analysis of Framed Structures*, 2ª ed., D. Van Nostrand, 1980.
- C.12 Fox, L., *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, Oxford University Press, 1965, p. 184.

A

- Acción virtual, 81
- Aceleración pico efectiva, 39-40
- ACI, 32, 39, 26
- Adición de matrices, 675
- AISC, 32
- AISC-1986, 29, 32
- AISI, 32
- Álgebra matricial
 - introducción, 665
- Altura equivalente de piso, 299
- Altura ficticia del piso n, 255
- Análisis aproximado de pórticos ortogonales, 337
- Análisis aproximados de vigas, 335
- Análisis de
 - estructuras indeterminadas, 67
 - estructuras métodos aproximados, 335
 - pórticos espaciales, método matricial, 567
 - pórticos planos, método de ángulos de giro y deflexión, 178
 - pórticos planos, método de Cross, 197
 - pórticos planos, métodos de Cross modificado, 251
 - pórticos planos, método de Kani, 275
 - pórticos planos, método de Takabeya, 305
 - pórticos planos, método matricial, 488
 - vigas método de ángulos de giro y deflexión, 178
 - vigas, ecuación de los tres momentos, 161
 - vigas, método del área de momentos, 127
 - vigas, método matricial, 463
 - vigas, viga conjugada, 142
- Análisis matricial
 - de cerchas espaciales, 441, 454
 - de cerchas planas, 413, 429, 463
 - de parrillas, 537-566
 - de pórticos espaciales, 567-585
 - de pórticos planos, 488-536
 - de un pórtico plano ortogonal, 491
 - de vigas, 463-478
 - matriz de flexibilidad, 413
 - matriz de rigidez, 413
 - método de desplazamientos, 413
 - método de rigidez, 413
 - programación, 586
 - reseña histórica, 413
 - vigas con cargas repartidas, 478-480
- Análisis por elementos finitos, 77
- Análisis,
 - métodos de desplazamientos, 11, 18
 - métodos de fuerza, 18
 - teoremas de área-momento, 81-89
 - viga conjugada, 142
- Ángulos de giro y deflexión, 197
- ANSI, 29
- Aplicación del Teorema de Castigliano, 97
- Apoyo simple, 10
- Apoyos,
 - clasificación, 10
 - con ejes diferentes a los estructurales, 10
- Arcos, 66
- Área de momentos, 127
- Aristóteles, 74, 77
- Armaduras, 8, 14
- Armaduras espaciales,

análisis por el método matricial de los desplazamientos, 441
 matriz de fuerzas internas, 443
 matriz de rigidez, 443
 Armaduras planas, 10
 análisis por el método matricial de los desplazamientos, 428-429
 matriz de fuerzas internas, 422
 matriz de rigidez, 428-429
 Armaduras esfuerzos térmicos, 457-458
 Arquímedes, 74
 Asociación Canadiense de Normas, 28
 Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 39
 ATC-3, 39

B

Barras, 9
 Basler, 27
 Beaufait, 702-714
 Bernouilli, Daniel, 75
 Bernouilli, James, 75
 Bernouilli, Johann, 77
 Betti, E., 76
 Betti, Teorema recíproco, 83
 Bisplinghoff, 413
 Bresse, 76

C

CAL-91, 644, 645
 Cálculo de deflexiones, 93
 Candela, F, 22
 Carga
 axial, 22
 centrada, 22
 concentrada, 21
 de diseño, 31
 de todos los días, 22
 de viento, 23
 elástica, 144
 excéntrica, 21
 fija, 20
 fluctuante, 20
 momentánea, 20
 muertas, 20-25, 51
 normal al eje longitudinal, 21

sísmica, 31
 sostenida, 20
 viva, 20, 52
 Cargas,
 clasificación, 20
 de ocupación, 21
 debidas a la acción de la gravedad, 20
 debidas a la presión hidrostática, 20
 debidas al empuje, 20
 dinámicas, 20
 en el plano, 22
 estáticas, 20
 gravitacionales, 20
 normales a la superficie, 22
 normales al plano, 22
 puntuales, 21
 repartidas, 21
 tangentes a la superficie, 22
 últimas, 22
 Cáscaras, 8
 Castigliano, A., 77, 85
 primer teorema, 85
 segundo teorema, 85-89
 solución de armaduras, 87
 solución de vigas, 86
 CCCSR, 31
 CEB, 3
 Cerchas espaciales
 matriz de fuerzas internas, 443
 matriz de rigidez, 441
 Cholesky, 751-771
 método de, 745
 CIRIA, 29
 Clapeyron, 76
 Clough, 77
 Código Colombiano de Construcciones Sismo Resistentes, 25-38
 Código modelo CEB-FIP, 3
 Códigos,
 de construcción, 24
 de construcción determinísticos, 24
 de construcción probabilísticos, 24
 Coeficiente de
 altitud, 56
 desplazamiento, 256, 284, 313
 distribución, 278
 giro, 278, 280
 grado de seguridad y vida útil, 56

importancia de la edificación, 41
 linealidad, 35
 presión, 56
 reducción, 31
 rugosidad, altura y tamaño, 56
 topografía, 56
 variación, 32, 33
 Coeficientes de
 carga y de resistencia, 31, 33
 translación, 285
 Cofactor de un determinante, 667
 Columnas, 10
 Combat, 648
 Componentes correspondientes
 de deflexión, 83
 Componentes de deflexión paralelas, 83
 Condensación, 670
 Condensación pivotal, 669
 Condición antimétrica, 338
 Condiciones de apoyo, 10
 Confiabilidad, 28
 Consejo sobre edificios altos y hábitat
 urbano, 25
 Constante de proporcionalidad, 306
 Construcción, 7
 Consultoría Colombiana, 55
 Cornell, 28, 32
 Corte, 22
 Coulomb, 76
 Cramer, 711
 Cramer, regla de, 711
 Cremona, 76, 63
 Cross, Hardy, 77
 CSA, 29
 Culmann, 76

D

Da Vinci, Leonardo, 74
 Defectos de fabricación, 457-463
 Deflexión de armaduras, 87-88
 Deflexión debida a la torsión, 87-88
 Deflexión debida al corte, 87-88
 Deflexión por flexión, 87-88
 Deflexiones de,
 vigas, carga unitaria, 109
 vigas, Castigliano, 86
 vigas, trabajo virtual, 109

Deflexiones debidas a flexión, 109
 Deflexiones por corte y torsión, 110
 Deflexiones por temperatura, 113
 Deflexiones resultantes de
 deformaciones axiales, 108
 Deformación virtual, 81
 Desarrollo de un proyecto, 5
 Descomposición de matrices, método de
 Cholesky, 745
 Descomposición de una matriz cuadrada,
 718
 Desplazamiento relativo de piso, 316, 327
 Desplazamiento virtual, 81
 Determinación, 11
 externa, 11
 interna, 14
 Determinantes, 665
 condensación pivotal, 669
 definición, 665
 menores y cofactores, 667
 propiedades, 668
 Diagrama de Williot, 76
 DIN 1055, 21
 Diseño a la resistencia última, 27
 elástico, 26
 final, 6
 para esfuerzos de trabajo, 25
 para estados límites, 25, 28
 Preliminar, 6
 Distribución de momentos, 67, 77

E

Ecuación de
 la elástica de vigas indeterminadas
 cálculo directo, 122
 los tres momentos, 67, 161
 los tres momentos, asentamientos
 diferenciales de los apoyos, 166
 los tres momentos, programación, 177
 los tres momentos, vigas con inercias
 diferentes, 163-177
 Ecuaciones de ángulo de giro y deflexión,
 67, 173-182, 201, 313
 Ecuaciones simultáneas, 776, 777
 Efecto de las cargas, 34, 37
 Efecto local de la respuesta sísmica, 40
 Efecto P- Δ , 252, 329

- Ejes
 - de la estructura, 429
 - del elemento, 429
 - generales, 429
 - locales, 429
 - Elementos
 - finitos, 9
 - laminares curvos, 22
 - laminares planos, 22
 - no prismáticos, 201
 - Eliminación de Gauss, 178, 719
 - variantes, 730
 - Energías internas de deformación, 86
 - Ensamblaje de resortes, 418
 - Equilibrio estático, condiciones, 4
 - Equivalencia entre apoyos de la viga real y la conjugada, 142
 - ETABS, 644, 647
 - Esfuerzos,
 - admisibles, 26
 - cortantes, 22
 - de composición simple, 22
 - de tensión simple, 22
 - por temperatura, 457
 - secundarios, 8
 - Espectro elástico de aceleraciones, 42
 - Estabilidad, 11
 - interna,
 - y determinación externas, 11
 - y determinación internas, 14
 - y determinación totales, 17
 - Estados,
 - de carga, 22
 - límites de servicio, 30
 - límites últimos, 30
 - límites, clasificación, 30
 - límites, criterio de diseño, 31
 - límites, definición, 30
 - Estructura,
 - curva de resistencia, 24
 - elementos, 9
 - idealización, 9
 - Estructuras,
 - clasificación, 8
 - comparación, 19
 - comportamiento, 25
 - con desplazamiento, método de
 - Cross tradicional, 222
 - determinadas, 9
 - especiales, 9
 - estáticamente determinadas, 9
 - estáticamente indeterminadas, 9
 - indeterminadas, 9
 - laminares, 8
 - masivas, 8
 - reticulares, 8
 - Euler, Leonhard, 75
 - Evaluación de alternativas, 6
- F**
- Factores de
 - carga, 20, 35
 - mayoración, 57
 - reducción de capacidad, 57
 - seguridad, 27-28
 - Fallas, tipos de, 4-5
 - Fernández Casado, 4
 - Flecha de una viga, 117
 - Flexión, 22
 - Flexocompresión, 22
 - Flexotensión, 22
 - Formato de segundo momento, 29
 - Fórmulas de concentración, 362-363
 - Fuerzas
 - clasificación, 20
 - de empotramiento, 174
 - externas, 20
 - internas, 20
 - redundantes, 64
 - Funciones de singularidad, 121
- G**
- Galileo, 75
 - Gallagher, 77, 665, 777
 - Gauss, 715
 - Gauss-Jordan, 703, 705
 - Gauss-Seidel, 718
 - Gennaro, 251, 269
 - Gere, 673, 769, 777
 - Gergely, 22
 - Grubenmann, Jean, 75
 - Grubenmann, Ulrich, 75
 - GT-Strudl, 646

H

Hooke, R., 75

I

Indeterminación,
 cinemática, 11-18
 estática, 11
 externa, 11, 12, 13, 14
 interna, 11, 16, 17
 total, 11
 Índice de seguridad, 29, 33
 Inestabilidad, 14, 454
 Ingeniería estructural, objeto, 3
 Instituto americano del hierro y el acero,
 646
 Inversión de una matriz:
 por matriz adjunta, 694
 por partición, 702
 por transformaciones sucesivas, 696
 Inverso de una matriz,
 definición, 692
 propiedades, 692

J

Jacobi, 715
 Jordan, 730

K

Kani, 77
 Kinney, J.S., 11, 73, 77
 Krenk, 27

L

Lamé, 76
 Lang, 413
 Langefors, 413
 Lansing, 413
 Levy, 413
 Ley de Hooke, 64
 Lind, 27
 Línea elástica, 116
 Líneas de influencia, 66
 de armaduras, 399
 de pórticos, 403

de vigas determinadas, 382
 de vigas indeterminadas, 393
 definición, 381
 utilidad, 382

M

MacGregor, 33
 Madsen, 27, 29
 Maillart, 22
 Maney, G.A., 178
 Mapa,
 aceleración pico efectivo, 656
 riesgo eólico, 662
 velocidad pico efectiva, 662
 zonas de riesgo sísmico, 655
 Marco, 8
 Margen de seguridad, 27
 Mariotte, E., 75
 Martin, 77, 413
 Matrices,
 adición, 675
 definiciones, 675
 descomposición, 718
 inversión, 692
 multiplicación, 677
 multiplicación por un escalar, 677
 partición, 689
 sustracción, 676
 transformaciones elementales, 686
 Matriz adjunta, 681
 Matriz de,
 banda, 684
 cofactores, 681
 flexibilidad, 67, 413, 414, 415
 fuerzas internas, 422
 fuerzas internas de un resorte, 423
 fuerzas internas
 de un elemento de cercha espacial,
 441
 de un elemento de cercha plana, 432-
 433
 de un elemento de pórtico plano, 515-
 519
 rigidez, 413, 414, 416
 de un resorte elástico, 417-418
 significado físico, 374
 de un elemento de cercha espacial,
 441-443

- de un elemento de cercha plana, 429-432
- de un elemento de pórtico espacial, 570, 573, 576
- de un elemento de pórtico plano, 515, 519
- de un elemento prismático a flexión y corte, 463-478
- de un elemento prismático a fuerza axial, flexión y corte, 488, 491
- de un elemento prismático de parrilla, 537, 545, 553, 554
- de un elemento prismático sometido a torsión, 537
- de un ensamblaje de resortes, 418-419
- de una barra prismática, 428
- de una columna, 491-497
- obtención por superposición, 421
- transformación, 430, 553
 - de un elemento de armadura espacial, 441
 - de un elemento de cercha plana, 429
 - de un elemento de parrilla, 556
 - de un elemento de pórtico plano, 515
- Matriz,
 - diagonal, 682
 - escalar, 682
 - identidad, 683
 - inversa, definición, 692
 - inversa, propiedades, 692
 - nula, 682
 - ortogonal, 684
 - simétrica, 681
 - transpuesta, 680
 - triangular inferior, 683
 - triangular superior, 683
 - triangular unitaria, 684
 - unitaria, 683
- Máxima carga posible, 24
- Máxima carga probable, 24
- Maxwell, 76-81
- Maxwell-Mohr, 81
- McGuire, 665, 777
- Menor de un determinante, 667
- Método alternativo de Cross, 251, 254, 329, 337
 - programación, 269
- Método alternativo de doble integración, 121
- Método de,
 - ángulos de giro y deflexión, 77, 161
 - programación, 177
 - teoría, 178
 - Cholesky, aplicación a matrices de banda, 756
 - Cholesky, aplicación a matrices simétricas, 749
 - Cholesky, planteamiento alternativo, 762
 - Cross, 178
 - alternativo o modificado, 337
 - estructuras sin desplazamiento, 204
 - simplificación por extremos articulados, 212
 - simplificaciones por simetría y antisimetría, 218
 - esfuerzos de trabajo, 49
 - Gennaro, 251
 - Kani, 67, 251, 275, 329, 337
 - aplicado a pórticos ortogonales, 337
 - programación, 300
 - estructuras sin desplazamiento, 276
 - estructuras sin desplazamiento con extremos articulados, 279
 - introducción, 275
 - pórticos con desplazamiento horizontal y cargas horizontales sobre las columnas, 282
 - pórticos con desplazamiento horizontal y columnas articuladas en la base, 297
 - pórticos con nudos desplazables en sentido horizontal, cargas horizontales, 282
 - ventajas, 282
 - la distribución de momentos, 197
 - la doble integración, 116
 - la ecuación de los tres momentos, 197
 - la estructura conjugada, 145
 - la estructura en voladizo, 337, 348-355
 - la fuerza horizontal equivalente, 45
 - la resistencia, 33
 - la viga conjugada, 142
 - los ángulos de giro y deflexión, 197
 - los cortes, 17
 - los desplazamientos, solución general, 426
 - Newmark, 351
 - aplicado a elementos acartelados,

- programación, 375
 - cálculo de giros y deflexiones en vigas, 363
 - cálculo de rigideces absolutas, 365
 - coeficientes de transmisión y momentos, 365
 - cargas concentradas equivalentes, 361
 - evaluación de la matriz de rigidez de miembros acartelados, 374
 - fuerzas de corte y momentos por carga distribuida, 361
 - rigidez, 365
 - Takabeya, 67, 251, 305, 337
 - aplicado a pórticos ortogonales, programación, 329
 - estructuras con desplazamientos, 313
 - cargas horizontales aplicadas en los nudos, 313
 - estructuras sin desplazamiento, 305
 - introducción, 305
 - pórticos con desplazamiento y columnas articuladas en la base, 326
 - simplificación por extremo articulado, 307
 - Método del,
 - área de momentos, 127
 - teorema 1, 127
 - teorema 2, 128
 - portal, 337-341
 - trabajo mínimo, 89
 - trabajo real, 93
 - trabajo virtual, 80, 107
 - Métodos aproximados, 335
 - Métodos de, 45
 - análisis, división general, 45
 - desplazamientos, 18, 63, 67
 - diseño, 26
 - fuerzas, 18, 63, 67
 - Métodos matriciales, 77, 191
 - Métodos tradicionales, 93
 - Modelo de Cornell, 32
 - Modelos Reducidos, 25
 - Mohr, 76
 - Momento de,
 - desbalance por desplazamiento, 256
 - fijación de nudo, 277
 - piso, 256, 284
 - piso según Kani, 284
 - Momentos de
 - desplazamiento, 257
 - empotramiento, 179, 203, 375
 - empotramiento para casos comunes, 164, 165
 - de carga, 164, 165
 - por desplazamiento, 202, 257, 375
 - Movimiento sísmico de diseño, 38
 - Multiplicación de matrices, 677
 - Müller-Breslau, 77, 81, 379
 - principio de, 380
- N**
- Navier, 76
 - Nervi, 22
 - Newmark, N., 200
 - Newton, I., 75
 - Nodos, 9
 - Norris, 75
 - Nudos, 9
- O**
- Osfenfeld, 77
- P**
- Palladio, 74
 - Parrillas,
 - análisis matricial, 540-553
 - Partición de matrices, 689
 - Pascal, 71
 - Período de retorno de sismo, 39
 - Período fundamental del edificio, 45
 - Planeamiento general, 6
 - Pórtico, 8
 - plano ortogonal, 491-492
 - análisis matricial, 491-515
 - Pórticos, 16
 - espaciales, análisis por el método matricial de los desplazamientos, 567
 - ortogonales
 - con desplazamiento, 251
 - análisis por el método de Cross alterno, 251-268
 - análisis por el método de Kani, 280-300

análisis por el método de Takabeya, 303, 329

planos,
 análisis por el método de ángulos de giro y deflexión, 186-190
 análisis por el método de Cross, 195, 251
 análisis por el método matricial de los desplazamientos, 488, 537

Predimensionamiento, 7

Presión dinámica, 56

Presión sobre la superficie, 55

Principio de
 acción y reacción, 338
 conservación de la energía, 93
 los desplazamientos virtuales, 77-79
 Maxwell y Betti, 85
 Müller-Breslau, 382
 superposición, 64, 82, 179

Principio el trabajo virtual, 81, 107

Probabilidad de falla, 24, 32

Programa
 FACBAN, 772, 773
 FACTORIZAR, 769-773
 RESOLVER, 769, 771, 772
 SOLBAN, 774-776

Programación de la ecuación de los tres momentos, 177

Programación de análisis matricial, 586

Programación del método de ángulos de giro y deflexión, 190
 Cross modificado, 277
 Kani, 280
 Takabeya, 329

Programación
 descomposición por el método de Cholesky, 751-756, 773
 inversión de matrices por Gauss-Jordan, 703
 solución de ecuaciones por Cholesky, 774
 solución de ecuaciones por eliminación de Gauss modificado, 731, 732
 solución de ecuaciones de Gauss-Jordan, 733, 734
 solución de ecuaciones por Gauss-Seidel, 718

Puntos de inflexión, 333, 334

R

Rand, 413

Rankine, 76

RCBE, 648

Reanálisis de la estructura, 641

Recuento histórico, 73

Reducción de capacidad, 33

Regla de Cramer, 711

Resistencia de la estructura, 33

Resorte elástico, 417

Resortes, ensamblaje, 418

Respuesta estructural, 379

Riesgo
 eólico, 55
 sísmico, 39
 sísmico, mapas, 662

Rigidez
 absoluta, 198, 375
 absoluta de elementos prismáticos, 200
 modificada, 279, 280
 relativa, 182, 200

Ritter, 76

Rotaciones en los apoyos para casos comunes de carga, 164, 165

Ruskin, 7

S

Saint-Venant, 76

SAP-2000, 647

Schuerch, 413

Siedel, 718

Sexsmith, 22

Sistemas de ecuaciones,
 solución, 709
 solución por el método de Cholesky, 745
 solución por el método de Gauss-Jordan, 730
 solución por eliminación, 718
 solución por inversión, 709
 solución por iteración, 714
 solución por regla de Cramer, 711, 713

Sociedad Americana de Ingenieros Civiles, 197

STAAD/PRO, 649

Stevin, 75
Stress, 644, 645
Substracción de matrices, 677
Subestructuración, 625

T

Takabeya, 77, 275
Teorema de
 Castigliano, 77, 85
 Maxwell, 77, 81
 Maxwell de las deflexiones recíprocas,
 81
Teorema recíproco, 81
 de Maxwell y Betti, 83
Teoría de Wilson, 77
 de deflexión, 63, 64, 65, 66
 de estructuras, 63, 71
 elástica, 63-66
 plástica, 63-66
Tipos de
 apoyo, 8, 10
 de elementos, 8
 de estructuras, 8
Topp, 77, 413

Torroja, 19, 22
Torsión, 22
 análisis matricial, 537-539
Trabajo Virtual, 80
Transformación de matrices, 686
Tren de cargas, 392
Turner, 80, 413

U

UBC-1982, 21, 647

V

Viento básico, 56
Viento de diseño, 56
Viga conjugada, 142-153, 356
Vigas, 10
 con miembros acartelados, 642
Von Karman, T., 22

W

Wang, 166
Weaver, 673, 769, 777
Wehle, 413
Whipple, Squire, 76
White, 22
Williot, 76
Williot-Mohr, 63
Wilson, Carus, 77
Winkler, E., 379

Z

Zienkiewicz, 77
Zonas de riesgo sísmico, 39