Análisis Armónico

Autor:

Caviedes Núñez Juan Andrés

Dirigido por:

PhD. Acosta Gempeler Ernesto

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Programa de Matemáticas
UNIVERSIDAD ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

17 de septiembre del 2022

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar los grupos topológicos como estructura fundamental del análisis armónico abstracto y dar un primer paso en esta área de estudio.
Para ello, se plantearon los siguientes objetivos particulares: Conocer y entender conceptos fundamentales de análisis funcional y teoría de la medida, definir la estructura de grupo topológico y estudiar las propiedades de este, comprender el concepto de espacio homogéneo y sus propiedades y analizar la teoría de representaciones unitarias como concepto básico de la teoría básica de representaciones.
La importancia de este trabajo radica en un aspecto principal: al estudiar matemáticas en la Escuela Colombiana de Ingeniería se estudian varias de las áreas de estudio principales de esta: el álgebra lineal, la teoría de conjuntos, el análisis real, la teoría de grupos, anillos y cuerpos, la teoría de la medida, el análisis funcional, entre otros, y en ocasiones se puede dar la impresión que las relaciones entre estas son pocas, o inclusive inexistentes. Con este trabajo se pretende unificar mediante una teoría moderna las diferentes áreas de estudio de las matemáticas que se enseñan en el programa. Se busca entonces mostrar que existe una relación entre algunas de ellas y conocer los fundamentos del área que las estudia: el análisis armónico abstracto.
La información para este trabajo se extrajo exclusivamente de textos de diferentes áreas, principalmente de análisis armónico abstracto, pero también de análisis funcional, teoría de grupos, topología y álgebra lineal, necesarios para contextualizar el trabajo mismo.
El propósito del texto de Folland, que es la principal fuente de información de este trabajo, es dar una exposición de ideas y teoremas fundamentales del análisis armónico que se pueden realizar con pocas suposiciones sobre la naturaleza del grupo sobre el cual se está trabajando.
Es necesario aclarar que se hicieron algunos cambios respecto a notación para que esta coincida con la que se maneja en el programa. También, se demuestran afirmaciones que no están demostradas en el material principal.
Como contexto histórico, la teoría de grupos topológicos se desarrolló alrededor de 1930. La existencia de medidas de Haar para grupos dos contables, la demostró Haar, y von Neumann demostró la unicidad de estas. Weil fue quien dio un primer enfoque sistemático del análisis en grupos localmente compactos utilizando la medida de Haar, esto lo hizo al mostrar que no era necesaria la suposición sobre la contabilidad. Además, demostró un teorema en el cual se afirma que esencialmente los únicos grupos medibles dotados de una medida invariante son los grupos localmente compactos.
La existencia de medidas cuasi invariantes en espacios homogéneos G/H fue también probada en un comienzo para espacios dos contables por Mackey, y fueron Bruhat y Loomis quienes mostraron como obtener medidas fuertemente cuasi invariantes sin hipótesis de contabilidad.
Este trabajo se divide en tres partes, en la primera se presentan resultados necesarios para estudiar los grupos topológicos, entre ellos se realiza un estudio general de los espacios de Hilbert, definiendo las formas sesquilineales, las sumas directas, las isometrías y aplicaciones unitarias, también una forma de integrar funciones vectoriales y algunos conceptos básicos de las álgebras de Banach.
En la segunda se presentan resultados ya conocidos sobre los grupos topológicos, los cuales son fundamentales, como la existencia y unicidad de una medida λ invariante bajo traslaciones en cualquier grupo localmente compacto, la dotación de $L^1(\lambda)$ con la estructura de una $*-$álgebra de Banach. Se hace un interludio en el cual se estudia la relevancia de considerar que el grupo a estudiar sea $\sigma-$compacto o no. Después, se define formalmente la función modular y se estudian algunas propiedades de esta, las cuales son de utilidad para definir y estudiar los conceptos de convolución de medidas, y posteriormente de funciones, y de espacios homogéneos.
Finalmente, se realiza una breve introducción a la teoría básica de representaciones, en la cual se presentan conceptos básicos de la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos: las representaciones unitarias, los operadores entrelazados, la equivalencia de representaciones, el espacio centralizador, los subespacios invariantes, las sub representaciones, las representaciones reducibles e irreducibles, las representaciones cíclicas y, un resultado final, el lema de Schur, a partir del cual se plantean las preguntas principales a responder respecto al análisis armónico sobre un grupo G.

Notación y Terminología

- $\mathbb{T}$ denota el grupo multiplicativo de los complejos cuyo módulo es 1.
- X_E denota la función característica o indicatriz. Si π es una representación unitaria de dimensión finita, X_π denota su carácter.
- Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, $C(X)$ representa el espacio de funciones complejas continuas,$C_C(X)$ representa el espacio de las funciones continuas con soporte compacto y el espacio $C_0(X)$ representa la adherencia del espacio $C_C(X)$ Estos espacios coinciden cuando X es compacto.
- La $\sigma - algebra$ de conjuntos Borel es la $\sigma - algebra$ más pequeña que contiene a los abiertos de X
- Una **medida de Borel** es cualquier medida μ definida en la $\sigma - algebra$ de conjuntos de Borel.
- Una medida de Borel es **regular por fuera** si el conjunto se puede aproximar en medida mediante abiertos que lo contienen, **regular por dentro** si el conjunto se puede aproximar en medida mediante compactos contenidos en este.
- Una **medida de Radon** en X es cualquier medida de Borel que es finita en conjuntos compactos, regular por fuera en conjuntos de Borel y regular por dentro en conjuntos de abiertos. Las medidas $\sigma - finitas$ de Radon son **regulares**, esto es, regulares por dentro y por fuera.
- Si X y Y son espacios de Banach, el espacio de todas las aplicaciones lineales de X en Y se denota $\mathcal{L}(X, Y)$, y el espacio de aplicaciones lineales de X en sí mismo se denota por $\mathcal{L}(X)$
- $\|f\|_{sup}$ denota la norma uniforme de f, dada por $\|f\|_{sup} = sup\{|f(x)| : x \in s\}$
- Las medidas de Haar izquierda y derecha sobre un grupo localmente compacto G se denotan con λ y ρ respectivamente.
- Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto C de $\mathcal{V}$ se dice que es
    - **Convexo** si para todo $x, y \in C$ la curva $tx + (1-t)y$, para $t \in [0, 1]$ esta totalmente contenida en C.
    - **Equilibrado** si para todo $x \in C$, $|\lambda| \leq 1$ implica qué $\lambda x \in C$.
    - **Absorbente** si la unión de tC sobre todo $t > 0$ es C, equivalentemente, para todo $x \in \mathcal{V}$, $tx \in C$ para algún $t > 0$,
    - **Absolutamente convexo** si es a la vez equilibrado y convexo
- Un **espacio vectorial topológico localmente convexo** es un espacio vectorial topológico en el cual el origen tiene una base local de conjuntos absorbentes y absolutamente convexos.
- Un **espacio de Frechét** es un espacio vectorial topológico real, completo en el sentido de los espacios uniformes, que es localmente conexo y metrizable por una distancia invariante por translaciones.

Índice

1. Preliminares

1.1. Formas Sesquilineales

Sean V y X espacios vectoriales complejos. Una aplicación $T : V \to X$ es **anti lineal** si $T(au+bv) = \overline{a}Tu + \overline{b}Tv$ para todo par de constantes $a, b \in \mathbb{C}$ y todo par de vectores $u, v \in V$. Una aplicación $B : V \times V \to X$ es **sesquilineal,** si es lineal respecto al primer parámetro y anti lineal respecto al segundo parámetro. Las aplicaciones sesquilineales definidas de $V \times V$ en $\mathbb{C}$ reciben el nombre de **formas sesquilineales**. Las aplicaciones sesquilineales están completamente determinadas por sus valores en diagonal:

Proposición 1. La identidad de polarización. *Sea $B : V \times V \to X$ sesquilineal, y sea $Q(v) = B(v, v)$. Entonces, para todo $u, v \in V$,*

$$B(u, v) = \frac{1}{4}\left[Q(u+v) - Q(u-v) + iQ(u+iv) - iQ(u-iv)\right]$$

Demostración. Sean $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
& Q(u+v) - Q(u-v) + iQ(u+iv) - iQ(u-iv) \\
= \; & B(u+v, u+v) - B(u-v, u-v) + iB(u+iv, u+iv) - iB(u-iv, u-iv) \\
= \; & B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) + B(v,v) - B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) - B(v,v) + iB(u,u) \\
& + iB(u,iv) + B(iv,u) + B(iv,iv) - iB(u,u) + iB(u,iv) + iB(iv,u) - iB(iv,iv) \\
= \; & 2B(u,v) + 2B(v,u) + 2B(u,v) - 2B(v,u) \\
= \; & 4B(u,v)
\end{aligned}$$

□

Una forma sesquilineal B en V se dice **hermitiana** si $B(u, v) = \overline{B(v, u)}$ para todo $u, v \in V$, y se dice **positiva** si $B(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$

Corolario 1. *Una forma sesquilineal B es hermitiana si y solo si $B(u, u) \in \mathbb{R}$ para todo u. Toda forma sesquilineal positiva es hermitiana.*

Demostración. La primera parte se tiene directamente teniendo en cuenta que $z \in \mathbb{R}$ si y solo sí $z = \overline{z}$. Adicionalmente, si la forma es positiva, necesariamente debe ser un número real, pues se definió en términos del orden usual en los reales. □

Proposición 2. Desigualdades de Schwartz y Minkowski. *Sea B una forma sesquilineal positiva en V, y sea $Q(u) = B(u, u)$. Entonces*

$$|B(u, v)|^2 \leq Q(u)Q(v) \qquad y \qquad Q(u+v)^{\frac{1}{2}} \leq Q(u)^{\frac{1}{2}} + Q(v)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Primero se demuestra la desigualdad de Schwartz. Para ello, si $y = 0$, se tiene trivialmente, entonces se supone qué $y \neq 0$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$0 \leq Q(u - zv) = Q(u) - zB(u, v) - \overline{z}B(u, v) + |z|^2 Q(v)$$

En particular, si $z = \frac{B(u,v)}{Q(v)}$, entonces se obtiene que

$$0 \leq Q(u) - \frac{|B(u,v)|^2}{Q(v)}$$

Que es lo que se quería mostrar. Esta demostración es la usual para espacios de Hilbert, igual sucede para la desigualdad de Minkowski, por lo cual se omite. $\square$

1.2. Sumas Directas

Sea $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de espacios de Hilbert. La **suma directa** $\bigoplus_{\alpha\in A}\mathcal{H}_\alpha$ es el conjunto de todos los $v = (v_\alpha)_{\alpha\in A}$ en el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in A}\mathcal{H}_\alpha$ tales qué $\sum\|v_\alpha\|^2 < \infty$. Esta condición implica que $v_\alpha = 0$ para todos, salvo una cantidad contable de índices α . $\bigoplus_{\alpha\in A}\mathcal{H}_{\alpha\in A}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle u, v\rangle = \sum_{\alpha\in A}(u_\alpha, v_\alpha)$$

y los sumandos $\mathcal{H}_\alpha$ están embebidos en este como subespacios cerrados mutuamente ortogonales.
Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de subespacios cerrados mutuamente ortogonales de H, cuyo espacio generado es denso en $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ se puede identificar como $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$. Cuando se hable de sumas directas de subespacios de un espacio de Hilbert, siempre se va a suponer que los subespacios son mutuamente ortogonales, salvo que se especifique lo contrario.

1.3. Isometrías y Aplicaciones Unitarias

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert, y $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ una aplicación lineal acotada. El **operador adjunto de** T es la aplicación $T^* : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ tal que $\langle T^*v, u\rangle = \langle v, Tu\rangle$. T es una **isometría** si $\|Tu\| = \|u\|$ para todo $u \in \mathcal{H}_1$.

Proposición 3. *Una aplicación T es una isometría si, y solo si, T^*T es la aplicación idéntica en $\mathcal{H}_1$.*

Demostración. Primero se supone que T es una isometría. Entonces se define el operador $A = T^*T - Id$, el cual satisface qué $A^* = A$. Entonces, si $u \in \mathcal{H}_1$, $\|Tu\| = \|u\|$ es equivalente a $\langle Au, u\rangle = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
& \|Tu\| = \|u\| \\
\equiv & \quad \langle \text{ elevando al cuadrado } \rangle \\
& \|Tu\|^2 = \|u\|^2 \\
\equiv & \quad \langle \text{ propiedad del producto interno } \rangle \\
& \langle Tu, Tu\rangle = \langle u, u\rangle \\
\equiv & \quad \langle \text{ propiedad de la transpuesta } \rangle \\
& \langle T^*Tu, u\rangle - \langle u, u\rangle = 0 \\
\equiv & \quad \langle \text{ propiedad del producto interno } \rangle \\
& \langle T^*Tu - u, u\rangle = 0 \\
\equiv & \quad \langle \text{ definición de } A \rangle \\
& \langle Au, u\rangle = 0
\end{aligned}$$

Entonces, si $x, y \in \mathcal{H}_1$, se tiene qué $\langle A(x), y\rangle = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&0\\
=\;& \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x*y\rangle + i\langle A(x+iy, x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\\
=\;& \langle A(x)+A(y), x\rangle + \langle A(x)+A(y), y\rangle - \langle A(x)-A(y), x\rangle + \langle A(x)-A(y), y\rangle + i\langle A(x)\\
&+ iA(y), x\rangle + \langle A(x)+iA(y), y\rangle - i\langle A(x)-iA(y), x\rangle - \langle A(x)-iA(y), y\rangle\\
=\;& 2(\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), x\rangle) + i\langle A(x), x\rangle - \langle A(y), x\rangle + \langle A(x), y\rangle\\
&+ i\langle A(y), y - i\langle A(y), x\rangle - \langle A(y), x\rangle - \langle A(x), y\rangle - \langle A(y), y\rangle\\
=\;& 4\langle A(x), y\rangle
\end{aligned}$$

Así, como para todo $x, y \in \mathcal{H}_1$ se cumple que $0 = \langle A(x), y\rangle$, necesariamente A es el operador idénticamente nulo, luego $T^*T - Id = 0$, esto es, $T^*T = Id$.
Por otra parte, si $T^*T = Id$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|Tu\|^2\\
=\;& \langle Tu, Tu\rangle\\
=\;& \langle T^*Tu, u\rangle\\
=\;& \langle u, u\rangle\\
=\;& \|u\|^2.
\end{aligned}$$

□

Las isometrías son inyectivas, más no necesariamente sobreyectivas. Una isometría biyectiva es una aplicación **unitaria**. Si T es unitario, también lo es T^{-1}, luego T^*T y TT^* son el operador identidad en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente, esto es, $T^* = T^{-1}$.
Se dice que T es una **isometría parcial** si $\|Tu\| = \|u\|$ siempre que $u \perp \mathcal{N}(T)$. Es decir, T es una isometría parcial siempre que $\langle T^*Tu, u\rangle = \langle u, u\rangle$ para $u \perp \mathcal{N}(T)$. Así, por polarización, se tiene que T^*T es proyección ortogonal sobre $\mathcal{N}(T)^\perp$. Como $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$, se tiene también que T^* es una isometría parcial y que TT^* es proyección ortogonal sobre $\mathcal{R}(T)$. Esto es, pues si T es isometría parcial, $\|Tu\| = \|u\|$ para todo $u \perp \mathcal{N}(T)$, entonces se debe ver que $\|T^*u\| = \|u\|$ para todo $u \perp \mathcal{N}(T^*)$, o bien, para todo $u \perp \mathcal{R}(T)^\perp$. Esto es, todo u ortogonal a todos los elementos del complemento ortogonal de $\mathcal{R}(T)$, por tanto, $u \perp T$.

1.4. Topologías en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, sobre el conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se definen tres topologías que van a ser de utilidad:

1. La **Topología Normada** o **N-Topología** es la topología inducida por la norma

$$\|T\| = sup_{\|u=1\|}\|Tu\|$$

2. La **Topología Fuerte** o **F-Topología** es la topología inducida por las seminormas

$$T \to \|Tu\|, u \in \mathcal{H}$$

   Una red $\{T_\alpha\}$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ converge a T fuertemente si y solo si $\|T_\alpha u - Tu\| \to 0$, $\forall u \in \mathcal{H}$.

3. La **Topología Débil** o **D-Topología** es la topología inducida por las seminormas

$$T \to, u, v \in \mathcal{H}$$

   Una red $\{T_\alpha\}$ converge a T débilmente, si y solo sí $\langle T_\alpha u, v\rangle \to \langle Tu, v\rangle$ $\forall u, v \in \mathcal{H}$.

Así, la topología normada es la topología de convergencia uniforme en subconjuntos acotados de $\mathcal{H}$, la topología fuerte es la topología de convergencia puntual en $\mathcal{H}$, y la topología débil es la topología de convergencia débil en $\mathcal{H}$.

Ejemplo 1. *Sea $\{e_k\}_1^\infty$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Se definen operadores T_n y S_n en $\mathcal{H}$, para $n \geq 1$ tales que*

$$T_n\left[\sum_1^\infty a_k e_k\right] = \sum_n^\infty a_k e_k$$

$$S_n\left[\sum_1^\infty a_k e_k\right] = \sum_1^\infty a_k e_{k+n}$$

Las sucesiones $\{T_n\}$ y $\{S_n\}$ no son N-convergentes, y $\{S_n\}$ no es fuertemente convergente, pues para $n < m$, $\|(T_n - T_m)e_n\| = \|e_n\| = 1$ y $\|(S_n - S_m)e_1\| = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ Por otra parte, $\{T_n\}$ converge fuertemente a 0, pues si $u = \sum a_k e_k$, $\|T_n u\|^2 = \sum_n^\infty |a_k|^2 \to 0$; y $\{S_n\}$ converge débilmente a cero, pues dados $u = \sum a_k e_k$ y $v = \sum b_k e_k$,

$$|\langle S_n, u\rangle| = |\sum_n^\infty a_{k-nb_k}| \leq \|u\| \left[\sum_n^\infty |b_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0$$

1.5. Integrales Vectoriales

Sea $\mathcal{V}$ un espacio topológico vectorial localmente convexo y sea $\mathcal{V}^*$ el espacio de las funciones lineales y continuas sobre V. Sea también (X, μ) un espacio de medida. Se dice que una función $F : X \to \mathcal{V}$ es **débilmente integrable** si $\phi \circ F \in L^1(\mu)$ para todo $\phi \in \mathcal{V}^*$. Esto es, existe un vector $v \in \mathcal{V}$ tal que

$$\phi(v) = \int \phi \circ F d\mu$$

para todo $\phi \in \mathcal{V}^*$. Tal v es necesariamente único, pues los funcionales lineales y continuos separan puntos en $\mathcal{V}$. Se dice que v es la integral de F, y se escribe $v = \int F d\mu$.
Las integrales conmutan con aplicaciones lineales y continuas en el siguiente sentido:
Sea $F : X \to \mathcal{V}$ débilmente integrable, esto es, $\int F d\mu$ existe, y, si $\mathcal{W}$ es un espacio localmente convexo, sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Si $\phi \in \mathcal{W}^*$, entonces $\phi \circ T \in \mathcal{V}^*$, por lo tanto, $T \circ F$ es débilmente integrable y

$$\phi \circ T\left[\int F d\mu\right] = \int \phi \circ T \circ F d\mu$$

con lo cual $\int T \circ F$ existe y

$$T \int F d\mu = \int T \circ F d\mu$$

Se presenta a continuación un teorema de existencia, demostrado en el análisis de Rudin[pg. 108. Teoremas 3.27 y 3.29].

Teorema 1. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio de Fréchet y μ una medida de Radon en el espacio de Hausdorff localmente compacto X. Si $F : X \to \mathcal{V}$ es continua con soporte compacto, entonces $\int F d\mu$ existe y pertenece al espacio cerrado generado por el rango de F. Más aún, si $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach,*

$$\left\|\int F d\mu\right\| \leq \int \|F(x)\| d\mu(x)$$

Aunque este teorema basta para la existencia de la integral vectorial débil, la condición $F \in C_C(X, \mathcal{V})$ es demasiado fuerte, por tanto, se tiene el siguiente teorema

Teorema 2. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio de Banach y μ una medida de Radon sobre el espacio localmente compacto y Hausdorff X. Si g es una función escalar en $L^1(\mu)$ y $H : X \to \mathcal{V}$ es acotada y continua, entonces $\int gHd\mu$ existe y pertenece al espacio cerrado generado por el rango de H, y*

$$\left\| \int gHd\mu \right\| \leq sup_{x\in X}\|H(x)\| \int |g(x)|d\mu(x)$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{V}^*$. Se tiene que $\phi \circ H$ es continua y acotada, luego gH es débilmente integrable, esto es, $\phi \circ (gH) = g(\phi \circ H) \in L^1(\mu)$. Más aún, como μ es de Radon, existe una sucesión $\{g_n\}$ en $C_C(X)$ que converge a g en la norma de L^1, entonces

$$\int \|g_n(x)H(x) - g_m H(x)\|d\mu \leq C \int |g_n(x) - g_m(x)|d\mu(x)$$

Donde, si $m, n \to \infty$, el término de la derecha tiende a cero, por lo cual $\{\int g_n H d\mu\}$ es de Cauchy en $\mathcal{V}$. Sea v su límite, entonces para todo $\phi \in \mathcal{V}^*$,

$$\int |\phi \circ (g_n H| d\mu \leq C \int |g_n - g| d\mu$$

y nuevamente el término de la derecha tiende a cero. Así,

$$\phi(v) = \lim \phi \left[\int g_n H d\mu \right] = \lim \int \phi \circ (g_n H) d\mu = \int \phi \circ (gH) d\mu$$

Por lo tanto, $\int gHd\mu$ existe y es igual a v. Ahora, como $\int g_n H d\mu$ pertenece al espacio cerrado generado por el rango de H para todo n, también $\int gHd\mu$ pertenecerá a este. Finalmente, por el teorema de existencia de Rudin en espacios de Banach, para $F = g_n H$, se cumple la desigualdad planteada en este teorema para g_n, donde al hacer tender n a infinito, también se tendrá para g. □

Usualmente, cuando se hable de integrales vectoriales, X será sobre un grupo localmente compacto G y μ será la medida de Haar sobre G.

1.6. Conceptos Básicos de las Álgebras de Banach

Un **álgebra de Banach** es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre el campo de los números complejos respecto al cual es un espacio de Banach que satisface $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, para todo x, y en $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es **Unital** si posee el elemento neutro para la multiplicación, que denotaremos con e.
Una **Involución** sobre un álgebra $\mathcal{A}$ es un anti-automorfismo de $\mathcal{A}$ de orden 2, esto es, una aplicación $x \to x^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ que satisface

$$(x + y)^* = x^* + y^*, (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, (xy)^* = y^* x^*, x^{**} = x$$

Para todo par de puntos $x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Un álgebra dotada de una involución se dice una $* - algebra$.
Un álgebra de Banach que satisface que

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

para todo x recibe el nombre de $C^* algebra$.
No se necesita que una involución satisfaga que $\|x^*\| = \|x\|$, aunque esto es verdadero en la mayoría de los casos. En particular se cumple en las c^*-álgebras, pues $\|x\|^2 = \|x^* x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, que implica $\|x\| \leq \|x^*\|$, luego $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$.
Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras de Banach, un **homomorfismo** de álgebras de Banach de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una aplicación lineal y acotada $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $*-$álgebras, un ***-homomorfismo** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un homomorfismo ϕ tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

2. Grupos Localmente Compactos

2.1. Grupos Topológicos

Un **grupo topológico** es un grupo G dotado de una topología respecto a la cual las operaciones del grupo son continuas; esto es, $(x,y) \to xy$ es continua de $G \times G \to G$ y $x \to x^{-1}$ es continua de G en G. Si G es un grupo topológico, se denota el elemento unitario de G con 1. Si $A \subset G$, se definen

$$Ax = \{yx : y \in A\}, xA = \{xy : y \in A\}, A^{-1} = \{y^{-1} : y \in A\}$$

y si $B \subset G$,

$$AB = \{xy : x \in A \wedge y \in B\}$$

Se dice que A es **simétrico**, sí $A = A^{-1}$. Es de notar que $A \cap B = \emptyset$ si y solo sí $1 \notin A^{-1}B$. A continuación se presentan algunas propiedades útiles de los grupos topológicos, las cuales fueron demostradas en la primera parte de este trabajo dirigido, por lo tanto, se omite su demostración en este.

Proposición 4. *Sea G un grupo topológico.*

- *La topología de G es invariante bajo traslaciones e inversión. Esto es, si U es abierto, xU, Ux y U^{-1} también lo son para todo $x \in G$. Más aún, si U es abierto, entonces UA y AU también lo son para todo $A \subset G$.*
- *Para toda vecindad U de 1 existe una vecindad simétrica V de 1 tal que $VV \subseteq U$.*
- *Si H es un subgrupo de G, $\overline{H}$ también lo es.*
- *Todo subgrupo abierto de G es cerrado.*
- *Si A y B son conjuntos compactos en G, AB también lo es.*

Sea ahora H un subgrupo del grupo topológico G. Sea G/H el espacio de coclases izquierdas de H, y sea $q : G \to G/H$ la aplicación cociente canónico. Si se dota a G/H de la topología cociente, es decir, $U \subset G/H$ es abierto si y solo si $q^{-1}(U)$ es abierto en G. q envía entonces abiertos de G en abiertos de G/H, pues si V es abierto en G, entonces $q^{-1}(q(V)) = VH$ es abierto por propiedades de los grupos topológicos, por lo cual $q(V)$ es abierto.

Proposición 5. *Sea H un subgrupo del grupo topológico G.*

- *Si H es cerrado, G/H es de Hausdorff.*
- *Si G es localmente compacto, también lo es G/H.*
- *Si H es normal, G/H es un grupo topológico.*

Corolario 2. *Si G es T_1, entonces G es de Hausdorff. Si G no es T_1, entonces $\overline{\{1\}}$ es un subgrupo cerrado normal y $G/\overline{\{1\}}$ es un grupo topológico de Hausdorff.*

A partir de este corolario se hace evidente que no es necesario que G sea un espacio de Hausdorff, pues se puede trabajar entonces con $G/\overline{\{1\}}$. En particular, un **grupo localmente compacto** es un grupo topológico cuya topología es localmente compacta y Hausdorff.

Proposición 6. *Si G es un grupo localmente compacto, G tiene un subgrupo H que es abierto, cerrado y $\sigma-$compacto.*

2.2. Medida de Haar

Sea G un grupo localmente compacto. Se define el conjunto

$$C_C^+(G) = \{f \in C_C(G) : f \geq 0 \wedge f \neq 0\}$$

Como las partes positivas y negativas de una función real y continua son continuas, el espacio generado por $C_C^+(G)$ es $C_C(G)$.
Una **medida de Haar izquierda** (análogamente derecha) es una medida de Radon μ no nula sobre G que satisface que $\mu(xE) = \mu(E)$ para todo conjunto de Borel E y todo $x \in G$.

Proposición 7. *Sea μ una medida de Radon en el grupo localmente compacto G, y sea $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$.*

1. *μ es una medida de Haar izquierda si y solo si $\tilde{\mu}$ es una medida de Haar derecha.*
2. *μ es una medida de Haar izquierda si y solo si $\int L_y f d\mu = \int f d\mu$ para todo $f \in C_C^+(G)$ y todo $y \in G$.*

Demostración. Sea G un grupo localmente compacto.

1. Sea μ una medida de Haar izquierda, $x \in G$

$$\begin{array}{ll} & \mu(xE) = \mu(E) \\ \equiv & \quad \langle \text{ Definición } \rangle \\ & \tilde{\mu}((xE)^{-1} = \tilde{\mu}(E^{-1}) \\ \equiv & \quad \langle \text{ Propiedad invertiva } \rangle \\ & \tilde{\mu}(E^{-1}x^{-1}) = \tilde{\mu}(E^{-1}) \end{array}$$

   Así, como E es un conjunto de Borel, E^{-1} también lo es, por lo tanto, $\tilde{\mu}$ es una medida de Haar derecha.

2. Sea μ una medida de Radon. Si μ es una medida de Haar izquierda, sean $y \in G$ y $f \in C_C^+(G)$.

$$\begin{array}{ll} & \int L_y f d\mu \\ = & \quad \langle \text{ Definición traslación } \rangle \\ & \int_E f(yx) d\mu(x) \\ = & \quad \langle \text{ Hipótesis } \rangle \\ & \int_{y^-1E} f(yx) d\mu(x) \\ = & \quad \langle \text{ Cambio de variable } yx = \nu \rangle \\ & \int_{y^-1E} f(v) d\mu(y^-1v) \\ = & \quad \langle \text{ Hipótesis } \rangle \\ & \int_E f(v) d\mu(v) \end{array}$$

   Ahora, si se cumple la segunda afirmación para todo $f \in C_C^+(G)$, se cumple entonces para todo $f \in C_C(G)$, entonces se tiene que $\mu = \mu_y$ por la unicidad del teorema de representación de Riesz.

$\square$

A partir de esta proposición se concluye que es de poca importancia si se estudia la medida de Haar derecha o izquierda. En este texto se va a trabajar principalmente con la izquierda. A continuación se van a presentar teoremas de existencia y unicidad para las medidas de Haar.

Teorema 3. *Todo grupo localmente compacto posee una medida de Haar izquierda* λ.

Proposición 8. *Si* λ *es una medida de Haar izquierda sobre* G*, entonces* $\lambda(U) > 0$ *para todo abierto no vacío* U*, y* $\int f d\lambda > 0$ *para toda* $f \in C_C^+(G)$.

Teorema 4. *Si* λ *y* μ *son medidas de Haar izquierdas sobre* G*, existe entonces un real positivo* c *tal que* $\mu = c\lambda$.

Adicionalmente, el siguiente lema va a ser de utilidad en varias demostraciones futuras

Lema 1. *Si* U *es una vecindad simétrica, entonces* $\lambda(U) = \rho(U)$.

Demostración. Recordando la construcción que se presentó en la primera parte de este trabajo, para G un grupo localmente compacto y $\phi, \alpha \in C_c^+(G)$, con $\alpha \neq 0$, se define su cociente como

$$(\phi : \alpha) = inf\{\epsilon(a) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge \phi \leq a\alpha\}$$

Ahora, sea $\phi_0 \in C_c^+(G)$ una función no nula fija. Se define entonces

$$I(\phi, \alpha) = \frac{(\phi : \alpha)}{(\phi_0 : \alpha)}$$

donde $\phi, \alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$.
Entonces, para definir la medida de Haar, se hizo lo siguiente:
Sean ahora $P = C_c^+(G) - \{0\}$, $Q = \prod_{\phi \in P}[\frac{1}{\phi_o : \phi}, (\phi : \phi_0)]$.Dada una vecindad simétrica de la identidad V y una función no nula $\alpha \in C_c^+(G)$ con $supp(\alpha) \subseteq V$, se considera $(I(\phi, \alpha))_{\phi \in P} \in Q$ y el conjunto $Q_v \subset Q$ que consiste de dichos elementos. Dichos conjuntos satisfacen la propiedad de la intersección finita, por lo tanto,

$$\cap\{\overline{Q_v} : V \subseteq G \text{ es una vecindad simétrica de la identidad}\} \subseteq Q$$

Es no vacío. Si se toma un I que pertenezca a esta intersección, I será una aplicación definida de P en el conjunto de los números reales, dada por

$$I(\phi) = pr_\phi(I) \in \left[\frac{1}{(\phi_o : \phi)}, (\phi : \phi_0)\right] \subseteq \mathbb{R}$$

Y $I \in \overline{Q_v}$ para toda vecindad de la identidad V. Entonces, como desde un comienzo, se consideró que las funciones I estaban dadas en términos de la función α soportada en una vecindad simétrica, se tiene entonces el resultado deseado por la construcción misma. $\square$

2.3. Interludio: Algunas Tecnicidades

Con el fin de no restringir artificialmente la generalidad de estos estudios, no se ha supuesto que el grupo localmente compacto G sobre el cual se trabaja sea $\sigma - compacto$. En el caso no $\sigma - compacto$, la medida de Haar no es $\sigma - finita$, resultado que trae complicaciones en la teoría de la medida. En esta sección se presentarán estos problemas y se mostrarán algunas soluciones.
Sea G un grupo localmente compacto que no es $\sigma - compacto$. Se sabe que este tiene un subgrupo H que es abierto, cerrado y $\sigma - compacto$. Sea Y un subconjunto de G que contiene exactamente un elemento de cada coclase izquierda de H, de forma que G es la unión disjunta de los conjuntos $yH, y \in Y$. Se tiene entonces que la restricción de λ a los subconjuntos de Borel de Hes una medida izquierda en H. Más aún, esta restricción determina completamente a λ. En primer lugar, determina a λ en los subconjuntos de Borel de cada coclase yH, pues $\lambda(yE) = \lambda(E)$. Se podría pensar que para todo conjunto de Borel $E \subseteq G$ se tiene que $\lambda(E) = \sum_{y \in Y} \lambda(E \cap yH)$, pero en realidad sucede lo siguiente.

Proposición 9. *Sea* $E \subset G$ *un conjunto de Borel. Si* $E \subset \cup_1^\infty y_j H$ *para algún conjunto contable* $\{y_j\} \subset Y$*, entonces* $\lambda(E) = \sum_1^\infty \lambda(E \cap y_j H)$*. Si* $E \cap yH \neq \emptyset$ *para una cantidad no contable de* y*, entonces* $\lambda(E) = \infty$.

Demostración. La primera parte se cumple directamente por la aditividad contable. Para demostrar la segunda, gracias a la regularidad por fuera, basta con suponer que E es abierto, en cuyo caso se sabe que $\lambda(E \cap yH) > 0$ siempre que $E \cap yH \neq \emptyset$. Si esto sucede para una cantidad no contable de elementos y de Y, para algún ϵ existirá una cantidad no contable de elementos y para los cuales $\lambda(E \cap yH) > \epsilon$, con lo cual se tiene que $\lambda(E) = \infty$ □

Ejemplo 2. *Sea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$, donde $\mathbb{R}_d$ denota el conjunto de los números reales dotado de la topología discreta. Si se definen $H = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $Y = \{0\} \times \mathbb{R}_d$, para obtener la medida de Haar λ de G simplemente se considera la medida de Lebesgue para cada recta horizontal de la forma $\mathbb{R} \times \{y\}$ y se juntan como en la proposición 9. En particular, nótese que Y es cerrado y $\lambda(Y) = \infty$ aunque la intersección de Y con cualquier coclase de H o cualquier conjunto compacto tiene medida* 0. *Esto es también cierto en el caso general siempre que G no sea discreto. Esto demuestra que λ no es regular por dentro en Y. También muestra que λ no es exactamente el producto de la medida de Lebesgue y la medida de conteo., denotadas por μ y ν respectivamente.*

Existen tres teoremas fundamentales de la teoría de la medida que fallan con medidas que no sean $\sigma - finitas$: El teorema de Fubini, el teorema de Radon-Nikodym y la dualidad de L^1 y L^∞. En esta sección se estudia sobre ellos.
Se va a utilizar el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración más adelante, pero no hay ningún problema en hacer esto siempre que f se anule fuera de un conjunto $\sigma -$ *compacto* $E \subseteq G \times G$. En efecto, en este caso, las proyecciones E_1 y E_2 de E también serían $\sigma -$ *compactas*, y $E \subseteq E_1 \times E_2$, por lo cual se puede reemplazar G por el espacio $\sigma - finito$ $E_1 \times E_2$, para el cual el teorema de Fubini para productos de Radon es válido (Folland[39, Teorema (7,27)]. Más aún, esta hipótesis sobre f es válida casi siempre cuando f está construido a partir de funciones sobre G que pertenecen a $L^p(\lambda)$, para algún $p < \infty$, para tales funciones se anulan fuera de algún conjunto $\sigma -$ *compacto* $\cup_1^\infty y_j H$ por la proposición 9. Por ejemplo, cuando más adelante se trabaje con convoluciones, se estudiaran funciones de la forma $f(x, y) = g(x)h(x^{-1}y)$. Si g se anula fuera de A y h se anula fuera de B, entonces f se anula fuera de $A \times AB$, y AB es $\sigma -$ *compacto* siempre que A y B lo sean.
A partir de esto, se va a utilizar el teorema de Fubini sin mayor verificación. Respecto al teorema de Radon-Nikodym, las medidas de Radon, o más bien sus extensiones de Carathéodory, que son completas y saturadas, están dotadas de una propiedad denotada "Descomponibilidad", la cual implica que una versión del teorema de Radon-Nikodym es adecuada para virtualmente todos los propósitos (Hewitt-Ross[62,Teorema (12.7)]). Para medidas de Haar, la descomponibilidad es obtenida a partir de las proposiciones 9 y 6. A pesar de esto, realmente solo se necesitará en las siguientes situaciones restringidas.
La primera es para dos medidas de Radon μ y ν definidas en un espacio localmente compacto X de Hausdorff son tales que $\nu \ll \mu$ y ν es $\sigma - finita$. Por la regularidad interior se sabe que existe un conjunto E $\sigma -$ *compacto* tal que $\nu(X - E) = 0$. Esta restricción de μ a subconjuntos de E es $\sigma - finita$, luego existe una función medible $f : E \to [0, \infty)$ tal que $d\nu = f d\mu$ en E. Si se fija $f = 0$ en $X - E$, se tiene entonces que $d\nu = f d\mu$ siempre.
La segunda situación es cuando dos medidas de Radon μ y ν en un espacio de Hausdorff X localmente compacto son **equivalentes**, esto es, son mutuamente absolutamente continuas. En los casos que se van a presentar más adelante no va a ser necesario recurrir al teorema de Radon-Nikodym, pero se va a poder producir una función continua $f : X \to (0, \infty)$ tal que $\int \phi d\nu = \int \phi f d\mu$ para toda $\phi \in C_C(X)$, como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 10. *Sean μ y ν medidas de Radon en un espacio localmente compacto y de Hausdorff X, y sea $f : X \to (0, \infty)$ continúa tal que $\int \phi d\nu = \int \phi f d\mu$ para todo $\phi \in C_C(X)$. Entonces $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo conjunto de Borel $E \subset X$.*

Demostración. Sea $\tilde{\nu}(E) = \int_E f d\mu$ una medida de Borel sobre X. Para demostrar que $\tilde{\nu} = \nu$, basta con probar que $\tilde{\nu}$ es regular por fuera y que para todo abierto U, $\tilde{\nu}(U) = \nu(U)$.
Sean E un conjunto de Borel tal que $\tilde{\nu}(E) < \infty$ y $\epsilon > 0$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se define $V_j = \{x : 2^{j-2} < f(x) < 2^j\}$. Como f es continua, V_j es abierto para cada j, y la colección de estos forma una cubierta

abierta de X, por lo cual se tiene que $E = \cup_{-\infty}^{\infty} E_j$, donde $E_j \subset V_j$. Al ser μ regular por fuera, como $\mu(E_j) < 2^{2-j} \int_{E:j} f d\mu = 2^{2-j}\tilde{\nu}(E_j) < \infty$, para todo j existe un abierto $U_j \subseteq V_j$ tal que $E_j \subseteq U_j$ y $\mu(U_j - E_j) < \epsilon 2^{-2|j|}$. Entonces $\tilde{\nu}(U_j E_j) < 2^j \mu(U_j - E_j) < 2\epsilon^{-|j|}$, de forma que $U = \cup - \infty^{\infty} U_j$ es un abierto que contiene a E tal que $\tilde{\nu}(U - E) < 3\epsilon$. Así $\tilde{\nu}$ es regular por fuera. Ahora, si U es abierto, sea $\Phi = \{\phi \in C_C(X) : 0 \leq \phi \leq 1 \wedge supp(\phi) \subset U\}$. Entonces $\nu(U) = sup_\Phi \int \phi d\nu = \sup_\Phi \int \phi f d\mu$. Como $sup_\Phi \phi f = X_u f$, por el teorema de convergencia monótona para redes de funciones semicontinuas por debajo (Folland[39, Proposición (7.12)]), se tiene qué $sup_\Phi \int \phi f d\mu = \int X_U f d\mu = \tilde{\nu}(U)$. □

Si μ y ν satisfacen la proposición anterior, se dice que son **fuertemente equivalentes**. Si bien los argumentos utilizados parecen ser más complicados de lo necesario, es de notar que la proposición 10 no es verdadera si se permite que f tome el valor 0. Por ejemplo, si λ es una medida de Haar en el grupo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$, y $f(x, y) = |x|$, entonces la medida $\nu(E) = \int_E f d\lambda$ no es una medida de Radon, pues si $Y = \{0\} \times \mathbb{R}_d$, entonces $\nu(Y) = 0$ pero $\nu(U) = \infty$ para todo abierto U que contenga a Y, por el argumento usado en la proposición 9.
Finalmente, se considera la dualidad de $L^1(\mu)$ y $L^\infty(\mu)$. Cuando μ no es $\sigma-$finita, es falso que $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$ con la definición usual de L^∞, pero cuando μ es una medida de Radon en un espacio de Hausdorff X localmente compacto, se puede obtener el resultado mediante algunas modificaciones a la definición de L^∞. Se dice que un conjunto $E \subseteq X$ es **localmente Borel** si para todo conjunto de Borel F con $\mu/F) < \infty$, $E \cap F$ es también de Borel. Un conjunto localmente Borel E se dice **localmente nulo** si para todo conjunto de Borel F con $\mu(F) < \infty$ se tiene qué $\mu(E \cap F) = 0$. Una afirmación sobre los puntos de X se dice que es verdadera **localmente casi siempre**(l.c.s) si es verdadera salvo quizá por un conjunto localmente nulo. Una función $f : X \to \mathbb{C}$ se dice **localmente medible** si $f^{-1}(A)$ es localmente Borel para todo conjunto de Borel $A \subseteq \mathbb{C}$. Se redefine entonces L^∞ como el conjunto de todas las funciones localmente medibles que son acotadas salvo por un conjunto localmente nulo, modulo las funciones que son nulas localmente casi siempre. Con esta definición, dotado de la siguiente norma

$$\|f\|_\infty = inf\{x : |f(x)| \leq c, l.c.s\}$$

Con lo cual se tiene qué $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$.

2.4. La Función Modular

Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar izquierda λ. Para investigar sobre la invarianza derecha de λ, se define $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$, la cual es medida de Haar, pues de la propiedad asociativa se concluye qué $y(Ex) = (yE)x$. Así, por el teorema de unicidad se sabe que existe un real $\Delta(x) > 0$ tal que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$, donde $\Delta(x)$ no depende de la elección inicial de λ. La función $\Delta : G \to (0, \infty)$ se denota como la **función modular** de G. Se denota por $\mathbb{R}_X$ al grupo multiplicativo de los números reales.

Proposición 11. *Δ es un homomorfismo continuo de G en $\mathbb{R}$. Más aún, para toda $f \in L^1(\lambda)$,*

$$\int R_y f d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f d\lambda$$

Si se fija $y_0 = y^{-1}$ en esta proposición, y se considera la sustitución $x \to xy_0$, se obtiene

$$\Delta(y_0) \int f(x) d\lambda(x) = \int f(xy_0^{-1}) d\lambda(x) = \int f(x) d\lambda(xy_0)$$

Que permite escribir el resultado de la proposición de forma abreviada

$$d\lambda(xy_0) = \Delta(y_0) d\lambda(x)$$

Se dice que G es **unimodular** si $\Delta \equiv 1$, esto es, que la medida de Haar izquierda es la misma medida de Haar derecha.

Proposición 12. *Sí K es un subgrupo compacto de G, entonces la $\Delta|K \equiv 1$.*

Corolario 3. *Sí G es compacto, entonces G es unimodular.*

Proposición 13. *Sí $G/[G,G]$ es compacto, entonces G es unimodular.*

Proposición 14. *λ y ρ son fuertemente equivalentes y*

$$d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$$

Demostración. Se sabe que para $f \in C_C(G)$ se cumple que

$$\int R_y f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x) = \Delta(y)\int f(xy)\Delta((xy)^{-1})d\lambda(x)$$
$$\int f(x)\Delta(x^{-1})d\lambda(x)$$

Con lo cual el funcional $f \to \int f(x)\Delta(x^{-1})$ es invariante a derecha, por tanto, su medida de Radon asociada es una medida de Haar derecha, luego existe una constante real positiva c tal que $c\rho$ es igual a dicha medida asociada. Por la proposición 10 se tiene que $cd\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$, con lo cual basta que mostrar qué $c = 1$. De no ser así, existiría una vecindad simétrica U de 1 en G tal que $|\Delta(x^{-1})| \leq \frac{1}{2}|c-1|$ en U. Esto implica que $\lambda(U) = \rho(U)$, con lo que

$$|c-1|\lambda(U) = |c\rho(U) - \lambda(U)| = \left|\int_U \Delta(x^{-1}) - 1\right| d\lambda(x) \leq \frac{1}{2}|c-1|\lambda(U)$$

Que es absurdo ◻

La formula $d\rho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$ se puede reescribir de la siguiente manera, particularmente útil para hacer sustituciones al integrar

$$d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x), d\rho(x^{-1})\Delta(x)d\rho(x)$$

En caso de que G no sea unimodular, la función Δ es no acotada, por tanto, los espacios $L^p(\lambda)$ y $L^p(\rho), (1 \leq p < \infty)$ no son el mismo. A pesar de esto, se puede definir una forma de relacionarlos: Se definen las aplicaciones

$$\tilde{f}(x) = f(x^{-1}), M_p f(x) = \Delta(x)^{\frac{1}{p}} f(x)$$

A partir de las cuales, los operadores $f \to \tilde{f}$ y $f \to M_p f$ son isomorfismos isométricos de $L^p(\lambda)$ en $L^p(\rho)$, pues $d\lambda(x) = d\rho(x^{-1}) = \Delta(x)d\rho(x)$. Al componer estos operadores, se obtiene un isomorfismo isométrico lineal de $L^p(\lambda)$ en sí mismo:

$$M_p^{-1}\tilde{f}(x) = \tilde{M_p f}(x) = \Delta(x)^{\frac{-1}{p}} f(x^{-1})$$

2.5. Convoluciones

A partir de este punto se supone que todo grupo localmente compacto G está dotado de una medida de Haar izquierda λ fija. Generalmente, se escribirá dx en vez de $d\lambda(x)$, $\int f$ en vez de $\int f d\lambda$, $|E|$ en vez de λE y L^p o $L^p(G)$ en vez de $L^p(\lambda)$.
Sea G un grupo localmente compacto y $M(G)$ el espacio de medidas complejas de Radon sobre G. Se define la convolución entre dos medidas $\mu, \nu \in M(G)$ así:
La aplicación $I(\phi) = \int\int \phi(xy)d\mu(x)d\nu(y)$ es un funcional lineal sobre $C_0(G)$, directamente por propiedades de la integral, el cual satisface qué $|I\phi| \leq \|\phi\|_{sup}\|\mu\|\|\nu\|$. Por lo tanto, está dada por una medida $\mu * \nu \in M(G)$ que satisface $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\|\nu\|$, que se denota la **convolución** de μ y ν:

$$\int \phi d(\mu * \nu) = \int\int \phi(xy)d\mu(x)d\nu(y)$$

Donde el orden de integración es irrelevante, lo único que importa es que el orden de las variables de integración para μ y ν coincida con el orden en el cual aparecen como parámetros de ϕ.
La convolución es asociativa, pues si $\mu, \nu, \sigma \in M(G)$ y $\phi \in C_C(G)$:

$$\int \phi d[\mu * (\nu * \sigma)] = \int \int \phi(xy) d\mu(x) d(\nu * \sigma)(y)$$

$$= \int \int \int \phi(xyz) d\mu(x) d\nu(y) d\sigma(z)$$

$$= \int \int \phi(yz) d(\mu * \nu)(y) d\sigma(z)$$

$$\int \phi d[(\mu * \nu) * \sigma]$$

Además, la convolución es conmutativa si y solo si G es abeliano. En efecto, si G es abeliano se tiene que para todo $x, y \in G, \phi(xy) = \phi(yx)$ con lo cual se tiene la conmutatividad. Por este mismo argumento se tendría que si se supone la conmutatividad de la convolución, entonces G será abeliano. Si $\delta_x \in M(G)$ denota la masa puntual en $x \in G$, se tiene que

$$\int \phi(d\delta_x * \delta_y) = \int \int \phi(uv) d\sigma_x(u) d\delta_y(v) = \phi(xy) = \int \phi d\delta_{xy}$$

Esto es, $\delta_x \delta_y = \delta_{xy}$. A partir de esto se concluye que $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ si y solo sí $xy = yx$.
El hecho de que $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$ hace que $M(G)$ sea un álgebra de Banach, llamada el **álgebra de medida** de G. $M(G)$ tiene una identidad multiplicativa: la masa puntual δ_1:

$$\int \phi d(\delta * \mu) = \int \int \phi(xy) d\sigma(x) d\mu(y) = \int \phi d\mu(y) = \int \phi d\mu$$

análogamente se tiene qué $\mu * \delta = \mu$. $M(G)$ también tiene una involución canónica $\mu \to \mu^* 0$ dada por

$$\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$$

O análogamente

$$\int \phi d\mu^* = \int \phi(x^{-1}) d\overline{\mu}(x)$$

Que es en efecto una involución, pues

$$\int \phi d(\mu * \nu)^* = \int \phi(x^{-1}) d\overline{(\mu * \nu)}$$

$$= \int \int \phi((xy)^{-1}) d\overline{\mu}(x) d\overline{\nu}(y)$$

$$= \int \int \phi(y^{-1} x^{-1}) d\overline{\mu}(x) d\overline{\nu}(y)$$

$$= \int \int \phi(yx) d\mu^*(x) d\nu^*(y)$$

$$= \int \phi d(\nu^* * \mu^*)$$

de forma que $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$
En general, el álgebra $M(G)$ es demasiado grande y complicada para trabajar respecto a ella, por lo

cual se prefiere considerar al espacio $L^1(G)$ como subespacio de $M(G)$, identificando la función f con la medida $f(x)dx$. si $f, g \in L^1(G)$, la **convolución** de f y g está dada por

$$f * g(x) = \int f(y)g(y^{-1}x)dy$$

Para ver que la convolución de dos funciones en L^1, se denota a las medidas asociadas a f y a g con μ^f y μ^g,respectivamente y basta con ver qué $\int \phi d(\mu^f + \mu^g) = \int \phi d\mu^{f*g}$. En efecto,

$$\int \phi d(\mu^f + \mu^g)$$
$$= \int \int \phi(xy) d\mu^f(x) d\mu^g(y)$$
$$= \int \int f(x)\phi(xy) d\lambda(x) d\mu^g(y)$$
$$= \int \int g(y)f(x)\phi(xy) d\lambda(x) d\lambda(y)$$

Si $z = xy$

$$\int \phi d(\mu^f + \mu^g)$$
$$= \int g(x^{-1}z)f(x)\phi(z) d\lambda(x) d\lambda(z)$$
$$= \int \int g(x^{-1}z)f(x) d\lambda(x)\phi(z) d\lambda(z)$$
$$= \int (f * g)(z)\phi(z) d\lambda(z)$$
$$= \int \phi d\mu^{f*g}$$

Mediante el uso del teorema de Fubini se tiene que esta integral es absolutamente convergente para casi todo x y que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, pues por la invarianza de la medida dx

$$\left| \int \int f(y)g(y^{-1}x) dx dy \right| \leq \int \int |f(y)g(y^{-1}x)| dx dy = \int \int |f(y)g(x)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

La integral que define $f * g(x)$ se puede expresar de diferentes maneras mediante las sustituciones $x \to yx$ y $x \to x^{-1}$:

$$f * g(x)$$
$$= \int f(y)g(y^{-1}x)dy$$
$$= \int f(xy)g(y^{-1})dy$$
$$= \int f(y^{-1})g(yx)\Delta(y^{-1})dy$$
$$= \int f(xy^{-1})g(y)\Delta(y^{-1})dy$$

La involución sobre $M(G)$ restringida a L^1 está dada por la relación $f^*(x)dx = \overline{f(x^{-1})}$. En efecto, como $(\mu^f)^*[E] = \overline{\mu^f[E^{-1}]}$, entonces

$$\int \phi d(\mu^f)^*$$

$$= \int \phi(x^{-1})d\overline{\mu^f}$$

$$= \int \phi(x^{-1})\overline{f(x)}d\lambda$$

$$\int \phi(x)\overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})d\lambda(x)$$

$$= \int \phi(x)f^*(x)d\lambda(x)$$

$$= \int \phi d\mu^{f^*}$$

Luego, por propiedades de la función modular se tiene que

$$f^*(x) = \overline{\Delta}(x^{-1})f(x^{-1})$$

Con la convolución e involución definidas, $L^1(G)$ es una $*-$álgebra de Banach, denotada el **grupo álgebra** de L^1. Obsérvese que

$$f * g = \int f(y)L_y g dy = \int g(y^{-1})R_y f dy$$

Lo cual se puede interpretar de dos formas: puntualmente, en la cual coincide con lo mostrado anteriormente, y como integrales vectoriales, donde las expresiones de la derecha se consideran integrales de funciones de y con valores en L^p. Entonces, $f * g$ es una combinación lineal generalizada de traslaciones izquierdas de g o traslaciones derechas de f. Además, como las traslaciones izquierdas conmutan con las traslaciones derechas, (esto es, la ley asociativa), se sigue que las convoluciones satisfacen las siguientes propiedades respecto a traslaciones:

$$L_z(f * g) = (L_z f) * g, R_z(f * g) = f * (R_z g)$$

En efecto,

$$L_z((f * g)(x)) = (f * g)(z^{-1}x) = \int g(y^{-1})(R_y f)(z^{-1}x)dy = \int (y^{-1})R_y(L_z f)(x)dy$$

Las convoluciones se pueden extender de L^1 a otros espacios L^p. Se tienen entonces los siguientes resultados

Proposición 15. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1$ y $g \in L^p$*

- *$f * g$ converge absolutamente para casi todo x, y se tiene que $f * g \in L^p$ y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.*
- *Si G es unimodular, se satisfacen las condiciones del inciso a) para $g * f$*
- *Si G no es unimodular y f tiene soporte compacto, $g * f \in L^p$.*
- *Cuando $p = \infty$, $f * g$ es continua y, bajo las condiciones del inciso b) o c), $g * f$ también lo es.*

Demostración.

- A partir de la desigualdad de Minkowski para integrales, aplicada a $f * g$ se obtiene que

$$\|f * g\|_p = \left\| \int f(y)L_y g(\cdot)dy \right\|_p \leq \int |f(y)| \|L_y g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p$$

Donde la última parte se concluye, pues la norma L^p es invariante a izquierda.

- Sea G unimodular. De igual manera se utiliza la desigualdad de Minkowski, pero a $f * g$ escrito de forma alterna

$$\|g * f\|_p = \left\| \int R_{y^{-1}} g(\cdot) f(y) dy \right\|_p \leq \int \|R_{y^{-1}}\| |f(y)| dy = \|g\|_p \|f\|_1$$

- Sea $K = supp(f)$, entonces de forma similar al inciso anterior

$$\|g * f\|_p = \left\| \int R_{y^{-1}} g(\cdot) f(y) \Delta(y^{-1}) \right\|_p \leq \int \|R_{y^{-1}}\|_p |f(y)| \Delta(y^{-1}) = \|g\|_p \int_K |f(y)| \Delta(y)^{(\frac{1}{p})-1} dy$$
$$\leq C \|g\|_p \|f\|_1$$

Donde $C = sup_K \Delta(y)^{(\frac{1}{p})-1}$.

- Si $p = \infty$ y $f \in C_C(G)$, se tiene por la continuidad uniforme por derecha de f qué $f * g$ y $g * f$ son continuas. Como $C_C(G)$ es denso en L^1 y que $f_n \to f$ en L_1, entonces $f_n * g \to f * g$ uniformemente. En efecto,

$$\begin{aligned} &\|f_n * g - f * g\| \\ &= \left\| \int f_n(y) g(y^{-1}x) - f(y) g(y^{-1}x) dy \right\| \\ &= \left\| \int (f_n - f)(y) g(y^{-1}x) dy \right\| \\ &\leq \|f_n - f\|_1 \|g\|_p \end{aligned}$$

Lo cual tiende a cero. Así, $f * g$ es continuo para todo $f \in L^1$. Para el caso de $g * f$ se procede como en los incisos anteriores.

□

Proposición 16. *Sea G unimodular. Si $f \in L^p(G)$ y $g \in L^q(G)$ donde $1 < p, q < \infty$ y $p^{-1} + q^{-1} = 1$, entonces $f * g \in C_0(G)$ y $\|f * g\|_{sup} \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demostración. A partir de la desigualdad de Hölder y la invarianza de integrales de Haar bajo traslaciones e inversiones, se tiene que para todo elemento x de G

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Ahora, si $f, g \in C_C(G)$, necesariamente $f * g \in C_C(G)$. Como $c_C(G)$ es denso en $L^p(G)$ y suponiendo que $f_n \to f$ en L^p y $g_n \to g$ en L^q, entonces $f_n * g_n \to f * g$ uniformemente, pues

$$\begin{aligned} &\|f_n * g_n - f * g\| \\ &= \| \int f_n(y) g_n(y^{-1}x) - f(y) g(y^{-1}x) dy \| \\ &= \|f_n(x) g_n(y^{-1}x) - f_n(x) g(y^{-1}x) + f_n(y) g(y^{-1}x) - f(y) g(y^{-1}x) dy\| \\ &\leq \|f_n * g - g_n\| + \|f_n - f * g\| \\ &\leq \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene el resultado deseado □

Cuando G es discreto, la función δ dada por $\delta(x) = 1$ si $x = 1$, $\delta(x) = 0$ de lo contrario, satisface que $f * \delta = \delta * f = f$ para todo f. Cuando G no es discreto, no existe una función que satisfaga esta propiedad. Si bien es cierto que existe una medida que lo hace, la masa puntual en el origen, se va a construir una función, denotada "identidad aproximada" que satisfaga la propiedad deseada. Para ello se establece la continuidad de las traslaciones en L^p

Proposición 17. *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p$, entonces $\|L_y f - f\|_p$ y $\|R_y f - f\|_p$ tienden a cero cuando $y \to 1$.*

Demostración. Sea V una vecindad de 1. Si $g \in C_C(G)$ se define entonces $K = (supp\ g)V \cup V(supp\ g)$. Entonces K es compacto y tanto $L_Y g$ como $R_y g$ están soportadas en él. Por esto, se tiene que $\|L_y g - g\|_p \leq |K|^{\frac{1}{p}} \|L_y g - g\| : \infty$ el cual tiende a cero cuando y tiende a 1 por la proposición 2.6, así como $\|R_y g - g\|_p$ tiende a cero bajo la misma condición.
Si ahora $f \in L^p$, se tiene que $\|L_y f\|_p = \|f\|_p$ y que $\|R_y f\|_p = \Delta(y)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq C\|f\|_p$ para todo $y \in V$. Dado $\epsilon > 0$ existe una función g con soporte compacto tal que $\|f - g\|_p \leq \epsilon$, por lo cual

$$\|R_y f - f\|_p \leq \|R_y(f-g)\|_p + \|R_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq (C+1)\epsilon + \|R_y g - g\|_p$$

Donde el último término tiende a cero cuando $y \to 1$. De esta misma manera se tiene el resultado deseado para $L_y f$ □

Proposición 18. *Sea $\mathcal{U}$ una base de vecindades de 1 en G. Para todo $U \in \mathcal{U}$, sea ψ_U una función con soporte compacto contenido en U, tal que $\psi_U \geq 0$, $\psi_U(x^{-1}) = \psi_U(x)$ y $\int \psi_U = 1$. Si $U \to \{1\}$, o si $p = \infty$ y f es uniformemente continua, entonces $\|f * \psi_U - f\|_p \to 0$ y $f \in L^p$. Más aún, $\|\psi_U f - f\|_p \to 0$ cuando $u \to \{1\}$, siempre que $1 \leq p \leq \infty$, o si $p = \infty$ y f es uniformemente continua por izquierda*

Demostración. A partir de las hipótesis sobre la función ψ_U se tiene que

$$f * \psi_U(y) - f(y) = \int f(yx)\psi_U(x^{-1})dx - f(y) \int \psi_U(x)dx$$

$$\int (R_x f(y) - f(y))\psi_U dx$$

Con lo cual, a partir de la desigualdad de Minkowski para integrales,

$$\|f * \psi_U\| - f_p \leq \int \|R_y f - f\|\psi_U(x)dx \leq sup_{x \in U}\|R_y f - f\|_p$$

Donde, por la proposición anterior, se tiene que el término de la derecha tiende a 0, y si se considera $p = \infty$ y f uniformemente continua, se obtiene directamente el resultado. La segunda afirmación se cumple de forma parecida, ya que:

$$\psi_U * f(y) - f(y) = \int (L_x f(y) - f(y))\psi_U(x)dx$$

Con lo cual, bajo el mismo argumento, se concluye. □

Una familia $\{\psi_U\}$ de funciones que cumple la proposición anterior se llama una **Identidad aproximada**. Existen abundantes identidades aproximadas, por ejemplo, si se considera que los conjuntos U son compactos y simétricos, se define entonces $\psi_U = |U|^{-1}_{\xi U}$, o se pueden tomar las ψ_U continuas. Al trabajar con estas, se dirá "Sea g una identidad aproximada" en vez de decir "Sea $g = \psi_U$ y $U \to \{1\}$".
Finalmente, se mencionan algunas extensiones de la noción de convolución. Primero si $\mu \in M(G)$ y $f \in L^p(G)$ se puede definir la función $\mu * f$ así

$$\mu * f(x) = \int f(y^{-1}x)d\mu(y)$$

Mediante el argumento utilizado para demostrar la parte 1 de la proposición 15 se ve que $\mu * f \in L^p$ y que $\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\|_p \|f\|_p$. Si G es unimodular o cuando $p = 1$, se puede definir esta convolución similarmente. Si G no fuese unimodular, se tendría que $L^p * L^1 \subseteq L^p$ y que $L^p * L^{p_1} \subseteq L^\infty$, donde p_1 es el exponente conjugado de p, por las proposiciones 15 y 16. Una aplicación del teorema de Riesz-Thorin permite mostrar que $L^p * L^q \subseteq L^r$, y que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ siempre que $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$

2.6. Espacios Homogéneos

Sea G un grupo localmente compacto y S un espacio de Hausdorff localmente compacto. Una **acción** de G sobre S es una aplicación continua definida de $G \times S \to S$ dada por $(x,s) \to xs$ tal que $s \to xs$ es un homeomorfismo de S para cada $x \in G$ y $x(ys) = (xy)s$ para todo $x, y \in G$ y $s \in S$. Un espacio S dotado de una acción de G se denota un **G-espacio**. Un $G-$espacio se dice **transitivo** si para todo $s, t \in S$ existe $x \in G$ tal que $xs = t$.
El ejemplo estándar de $G-$espacio es el espacio cociente G/H, donde H es un subgrupo cerrado de G, en el cual G actúa mediante la multiplicación a izquierda. Incluso se puede afirmar que estos son los únicos ejemplos, como se demuestra más adelante. Si S es un $G-$espacio transitivo, se fija $s_0 \in S$ y se define $\phi : G \to S$ así: $\phi(x) = xs_0$. Sea $H = \{x \in G : xs_0 = s_0\}$. Entonces H es un subgrupo cerrado de G y ϕ es una sobreyección continua de G sobre S, la cual es constante en las coclases izquierdas de H, pues $\phi(xH) = \{xhs_0 : h \in H\} = \{xs_0\}$. Entonces ϕ induce una biyección continua $\Phi : G/H \to S$ tal que $\Phi \circ q = \phi$, donde $q : G \to G/H$ es el cociente canónico. Lo único que falta para identificar con S a G/H es la continuidad de Φ^{-1}, lo cual no se cumple siempre. Por ejemplo, considérese $G = \mathbb{R}$ dotado de la topología discreta, actuando mediante traslaciones en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Es, sin embargo, válido cuando G es $\sigma - compacto$.

Proposición 19. *Con la misma notación que en el párrafo anterior, si G es $\sigma-$compacto, entonces Φ es un homeomorfismo*

Demostración. Basta con mostrar que ϕ es una aplicación abierta. Para ello, sea U abierto en G y $x_0 \in U$. Se toma una vecindad simétrica V de 1, que sea compacta, tal que $x_0VV \subseteq U$. Al ser G $\sigma-$compacto, existe una colección contable $\{y_n\} \subseteq G$ tal que los conjuntos y_nV cubren a G. Entonces $S = \cup_1^\infty \phi(y_nV)$. Cada conjunto $\phi(y_nV)$ es homeomorfo a $\phi(v)$ pues la aplicación $s \to y_ns$ es un homeomorfismo de S, y estos son compactos, por tanto, cerrados. Finalmente, por el teorema de categorización de Baire para espacios localmente compactos de Hausdorff(Folland[39,Ejercicio 5.32]) $\phi(V)$ debe tener un punto interior $\phi(x_1)$, con $x_1 \in V$. De ser así, $\phi(x_0)$ es entonces punto interior de $\phi(x_0x_1V)$, donde $x_ox_1^{-1}V \subseteq x_0VV \subseteq U$, con lo cual $\phi(x_0)$ debe ser un punto interior de $\phi(U)$. Así, $\phi(U)$ es un conjunto abierto. □

Si un $G-$espacio transitivo S es isomorfo al espacio cociente G/H, se dirá que es un **espacio homogéneo**, esto es, un espacio para el cual la aplicación ϕ descrita en la proposición anterior es un homeomorfismo, por lo cual generalmente G/H se identifica con S. Esta identificación depende del punto base $s_0 \in S$ que se elija. Si se elige otro distinto, por ejemplo $s_0' = x_0s_0$, se reemplaza entonces H por $H' = x_0Hx_0^{-1}$; y la aplicación $x \to x_0xx_0^{-1}$ induce un homeomorfismo $G-$equivariante entre G/H y G/H'.
Por esto, se considera entonces espacios homogéneos G/H, donde G es un grupo localmente compacto arbitrario y H es un subgrupo cerrado arbitrario. El objetivo ahora es determinar si existe una medida de Radon $G-$invariante en G/H, esto es, una medida de Radon μ tal que $\mu(xE) = \mu(E)$ para todo $x \in G$. Esto no siempre se va a dar, por ejemplo, si se considera la recta real $\mathbb{R}$, esta es un espacio homogéneo del grupo de transformaciones afines $x \to ax + b$ de $\mathbb{R}$. La única medida en $\mathbb{R}$ que es invariante bajo traslaciones es la medida de Lebesgue, pero esta no es invariante bajo dilataciones. A pesar de esto, se puede obtener una condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha medida invariante, e incluso un sustituto en caso de que no se cumplan las hipótesis.
En lo que queda de esta sección se considerara a G como un grupo localmente compacto dotado de la medida de Haar izquierda dx, a H como un subgrupo de G con medida de Haar izquierda $d\xi$, y Δ_G denotara la función modular de G mientras que Δ_H la función modular de H. Se define entonces una aplicación $P : C_C(G) \to C_C(G/H)$ así

$$Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi$$

La cual está bien definida por la invarianza a izquierda de la medida de Haar: si $\eta \in H$ es tal que $Y = x\eta$, entonces

$$\int f(y\xi)d\xi = \int f(x\xi)d\xi$$

Por otra parte, Pf es continua y *supp* (Pf) está contenido en $q(supp\ f)$.Más aún, si $\phi \in C_C(G/H)$ entonces

$$\begin{aligned} &P[(\phi \circ q) \cdot f](xH) \\ &= \int_H [(\phi \circ q) \cdot f](x\xi)d\xi \\ &= \int_H \phi(xH)f(x\xi)d\xi \\ &= \phi(xH) \int_H f(x\xi)d\xi \\ &= \phi(xH)Pf(xH) \end{aligned}$$

con lo cual $P[(\phi \circ q) \cdot f] = \phi \cdot Pf$. Ahora se demuestra que P es sobreyectiva, junto con algunos lemas que serán de utilidad más adelante

Lema 2. *Si $E \subset G/H$ es compacto, existe un conjunto compacto $K \subset G$ tal que $q(K) = E$*

Demostración. Sea V una vecindad abierta de 1 en G con adherencia compacta. Como q es una aplicación abierta, para todo elemento x de G los conjuntos $q(xV)$ son una cubierta abierta de G, por lo tanto, existe una sub cubierta finita $q(x_jV)$, $j = 1, 2, \ddots n$. Sea $K = q^{-q}(E) \cap \cup_1^n x_j\overline{V}$. Como $q^{-q}(E)$ es cerrado, K es compacto, luego $q(K) = E$ □

Lema 3. *Si $F \subset G/H$ es compacto, existe $f \geq 0$ con soporte compacto sobre G, tal que $Pf = 1$ en F.*

Demostración. Sea E una vecindad compacta de F en G/H, por el lema anterior se sabe que existe un compacto $K \subseteq G$ tal que $q(K) = E$. Tomando una función no negativa $g \in C_C(G)$, con $g > 0$ en K y $\phi \in C_C(G/H)$ con soporte en E tal que $\phi = 1$ en F, se fija entonces

$$f = \frac{\phi \circ q}{Pg \circ q} g$$

entendiendo que la fracción es cero siempre que el numerador lo sea. f es entonces continua, pues $Pg > 0$ sobre el soporte de ϕ, su soporte está contenido en el soporte de g y $Pf = (\phi/Pg)Pg = \phi$.

□

Proposición 20. *Sí $\phi \in C_C(G/H)$, existe $f \in C_C(G)$ tal que $PF = \phi$, $q(suppf) = supp\phi$ y además si $\phi \geq 0$ entonces $f \geq 0$*

Demostración. Si $\phi \in C_C(G/H)$, por el lema anterior existe una función no negativa g en $C_C(G)$ tal que $Pg = 1$ en el soporte de ϕ. Sea entonces $f = (\phi \circ q)g$. entonces $Pf = \phi(Pg) = \phi$, a partir de lo cual se deducen las demás propiedades. □

Teorema 5. *Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado de G. Existe una medida de Radon μ $G-$invariante en G/H sí y solo sí $\Delta_G|H = \Delta_H$. En este caso μ es única salvo por un factor constante, el cual se puede elegir de forma apropiada para obtener que*

$$\int_G f(x)dx = \int_{G/H} Pfd\mu = \int_{G/H} \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH)$$

donde $f \in C_C(G)$

Demostración. Sea G una medida μ $G-$invariante. Entonces $f \to \int Pf d\mu$ es un lineal funcional positivo, no nulo e invariante a izquierda sobre $C_C(G)$, por lo cual existe una constante $c > 0$ tal que $\int Pf d\mu = c \int f(x)dx$. A partir de la proposición anterior, se sabe que esta fórmula determina completamente μ, con lo cual μ es única, salvo por la constante arbitraria de la medida de Haar. Si se reemplaza entonces μ por $c^{-1}\mu$, se puede suponer entonces que $c = 1$ para que se satisfaga la igualdad deseada. En este caso, si $\eta \in H$ y $f \in C_C(G)$ entonces

$$\Delta_G(\eta) \int_G f(x)dx$$

$$= \int_G f(x\eta^{-1})dx$$

$$= \int_{G/H} \int_H f(x\xi\eta^{-1})d\xi d\mu(xH)$$

$$= \Delta_H(\eta) \int_{G/H} \int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH)$$

$$= \Delta_H(\eta) \int_G f(x)dx$$

Con lo cual $\Delta_G(\eta) = \Delta_H(\eta)$.
Ahora, se supone qué $\Delta_G|J = \Delta_H$. Por el Lema 3, existe una función $\phi \in C_C(G)$ tal que $P\phi = 1$ en $q(supp\ f)$. Se tiene entonces que

$$0 = Pf(xH) = \int f(x\xi)d\xi = \int f(x\xi^{-1})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi = \int f(x\xi^{-1})\Delta_g(\xi^{-1})d\xi$$

Luego, integrando a ambos lados,

$$0 = \int_G \int_H \phi(x)f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})d\xi dx$$

$$= \int_H \int G\phi(x)f(x\xi^{-1})\Delta_G(\xi^{-1})dxd\xi$$

$$= \int_H \int_G \phi(x\xi)f(x)dxd\xi$$

$$= \int_G P\phi(xH)f(x)dx$$

$$= \int_G f(x)dx$$

Esto significa que si $Pf = Pg$ entonces $\int_G f = \int_G g$. Se sigue entonces de la proposición anterior que la aplicación $Pf \to \int_G f$ es un funcional lineal, positivo, $G-$invariante y bien definido sobre $C_C(G/H)$. Así, la medida de Radon asociada es la medida μ deseada. □

Corolario 4. *Si H es compacto, G/H admite una medida de Radon $G-$invariante.*

Demostración. Se sabe que la función modular restringida a cualquier subgrupo compacto de de G es la función constante 1. □

Cuando no existe tal medida, se puede definir una condición más débil que sea de utilidad. Sea mu una medida de Radon en G/H. Para cada $x \in G$ se define la traslación μ_x de μ cómo $\mu_x(E) = \mu(xE)$. Se dice que μ es **cuasi-invariante** si todas las medidas μ_x son equivalentes, y se dice que μ es **fuertemente cuasi-invariante** si existe una función continua $\lambda : G \times (G/H) \to (0, \infty)$tal que, para todo $x \in G$ y $p \in G/H$ se tenga qué $d\mu_x(p) = \lambda(x, p)d\mu(p)$. Así, cuasi-invarianza fuerte implica no solo que las medidas

μ_x sean fuertemente equivalentes, sino que la derivada de Radon-Nikodym $(d\mu_x/d\mu)(p)$ es continua en (x,p).
A continuación se presentan algunos resultados necesarios para garantizar la existencia de medidas F-cuasi-invariantes para un espacio homogéneo arbitrario y se muestra como construirlas mediante una modificación del teorema 2.49, pero antes se demuestran algunos lemas técnicos.

Lema 4. *Sea V una vecindad abierta y simétrica de 1 con adherencia compacta. Existe un conjunto $A \subset G$ tal que:*

- *Para todo $x \in G$ existe $a \in A$ tal que $xH \cap Va \neq \emptyset$.*
- *Si $K \subset G$ es compacto, existe una cantidad finita de $a \in A$ tal que $KH \cap \overline{V}a \neq \emptyset$*

Demostración. Por el lema de Zorn existe un conjunto maximal $A \subseteq G$ tal que si $a, b \in A$ entonces $a \notin VbH$. Para todo $x \in G$, xH interseca algún Va, pues de no ser así se tendría que $x \notin VaH$ para todo a, lo que contradice la maximalidad de A. También, si $K \subseteq G$ es compacto y $KH \cap \overline{V}a \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de elementos a, existiría entonces una colección de elementos $a_1, a_2, \ddots \in A$ y $h_1, h_2, \ddots \in H$ tales que $A_j h_j \in \overline{V}K$ para todo j, Como $\overline{V}K$ es compacto, la sucusión $a_j h_j$ tiene un punto de acumulación z. Tomando una vecindad simétrica W de 1 tal que $WW \subseteq V$, existen entonces dos enteros distintos jy k tales que $a_j h_k \in Wz$ y $a_k h_j \in Wz$, con lo cual $a_j h_j \in V a_k h_k$. De ser así, $a_j \in V a_k H$, que contradice la definición de A. □

Lema 5. *Existe una función continua $f : G \to [0, \infty)$ tal que*

- *Para todo $x \in G$, $\{t : f(y) > 0\} \cap xH \neq \emptyset$*
- *Para todo compacto $K \subset G$, $(supp f) \cap KH$ es compacto.*

Demostración. Sean $g \in C_C^+(G)$ tal que $g(x) = g(x^{-1})$ y $g(1) > 0$, $V = \{x : g(x) > 0\}$. Si se elige $A \subseteq C$ como en el lema anterior para este V, luego se fija $f(x) = \sum_{a \in A} g(xa^{-1})$. Por la parte dos del lema anterior, se sabe que para todo x en cualquier compacto existe una cantidad finita de elementos en esta suma, por lo tanto, f está bien definida y es continua. Más aún, como el soporte de f es $\overline{\cup_a Va} \subseteq \cup_a \overline{V}a$, para todo compacto $K \subseteq G$ se tiene que $(supp\ f) \cap KH$ está contenido en la unión finita de conjuntos de la forma $\overline{V}a$, la cual es compacta. Finalmente, por la primera parte del lema anterior, se sabe que para toda coclase xH, su intersección con $\{y : f(y) > 0\} = \cup_a Va$ es no vacía. □

Una **rho-función** para el par (G, H) es una función continua $\rho : G \to (0, \infty$ tal que

$$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\rho(x)$$

Esta se conoce como la ecuación funcional de rho-funciones.

Proposición 21. *Para todo grupo localmente compacto G y todo subgrupo cerrado H de G, existe una rho función en (G, H).*

Demostración. Sea f como en el lema 4. Se define entonces

$$\rho(x) = \int_H \frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)} f(x\eta) d\eta$$

Esta integral converge directamente por las propiedades de f y define una función continua y positiva en G. Más aún,

$$\rho(x\xi) = \int \frac{\Delta_G(\eta)}{\Delta_H(\eta)} f(x\xi\eta) d\eta = \int \frac{\Delta_G(\xi^{-1}\eta)}{\Delta_H(\xi^{-1}\eta)} f(x\eta) d\eta = \frac{\Delta_G(\xi)}{\Delta_H(\xi)}\rho(x)$$

□

El teorema 6, junto con los próximos dos teoremas siguientes, garantizan la existencia de medidas fuertemente cuasi invariantes en G/H, junto con una caracterización de estas.

Lema 6. *Si $f \in C_C(G)$ y $Pf = 0$ entonces $\int f\rho = 0$ para cualquier rho-función ρ*

Demostración. Se tiene que

$$0 = \int_H f(x\xi)d\xi = \int_H f(x\xi^{-q})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi$$

para todo $x \in G$. Por el Lema 3, existe $\phi \geq 0$ con soporte compacto en G tal que $P\phi = 1$ en $q(supp\ f)$, luego

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \int_H \rho(x)\phi(x)f(x\xi^{-1})\Delta_H(\xi^{-1})d\xi dx \\ &= \int_H \int_G \rho(x\xi)\phi(x\xi)f(x)\Delta_H(\xi^{-1})\Delta_G(\xi)dxd\xi \\ &= \int_G \int_H \rho(x)\phi(x\xi)f(x)d\xi dx \\ &= \int_G f(x)\rho(x)P\phi(q(x))dx \\ &= \int_G f(x)\rho(x)dx \end{aligned}$$

Donde gracias a ϕ se tiene la convergencia absoluta de las integrales. □

Teorema 6. *Dada cualquier rho-función ρ del par (G, H), existe una medida μ F-cuasi-invariante sobre G/H tal que*

$$\int_{G/H} Pf d\mu = \int_G f(x)\rho(x)dx$$

donde $f \in C_C(G)$. Además, μ satisface que para todo $x, y \in G$

$$\frac{d\mu_x}{d\mu}(yH) = \frac{\rho(xy)}{\rho(y)}$$

Demostración. Se tiene por la proposición 20 y el Lema 6 que la aplicación $Pf \to \int f\rho$ es un funcional lineal positivo, que está bien definido en $C_C(G/H)$, por lo tanto, este define una medida de Radon μ en G/H. Ahora, por la ecuación funcional de ρ funciones, se tiene que el cociente $\rho(xy)/\rho(y)$ depende únicamente de las coclases yH. En efecto,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho(xy)}{\rho(y)} \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad Invertiva } \rangle \\
& \frac{\rho(yy^{-1}xy)}{\rho(y)} \\
= & \quad \langle \text{ Ecuacion Funcional } \rangle \\
& \frac{\Delta_H(y^{-1}xy)}{\Delta_G(y^{-1}xy)} \\
= & \quad \langle\ \Delta \text{ es homomorfismo, propiedad invertiva } \rangle \\
& \frac{\Delta_H(y^{\tilde{-}1}y)\Delta_H(y^{-1}xy)\Delta_H(y^{-1\tilde{y}})}{\Delta_G(y^{\tilde{-}1}y)\Delta_G(y^{-1}xy)\Delta_G(y^{-1\tilde{y}})} \\
= & \quad \langle\ \Delta \text{ es homomorfismo, propiedad invertiva } \rangle \\
& \frac{\Delta_H(y^{\tilde{-}1}x\tilde{y})}{\Delta_G(y^{\tilde{-}1}x\tilde{y})} \\
= & \quad \langle \text{ Ecuacion Funcional } \rangle \\
& \frac{\rho(\tilde{y}y^{\tilde{-}1}x\tilde{y})}{\rho(\tilde{y})} \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad Invertiva } \rangle \\
& \frac{\rho(x\tilde{y})}{\rho(\tilde{y})}
\end{aligned}$$

Por tanto, este define una función continua $\lambda : G \times (G/H) \to (0, \infty)$ dada por $\lambda(x, q(y)) = \rho(xy)/\rho(y)$. Como la aplicación P conmuta con la acción por izquierda de G, se tiene que para todo $x \in G$ y $f \in C_C(G)$, como $P[f\lambda(x, q(\cdot))] = (Pf)\lambda(x, \cdot)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{G/H} Pf(p)d\mu_x(p) \\
&= \int_{G/H} Pf(x^{-1}p)d\mu(p) \\
&= \int_G f(x^{-1}y)\rho(y)dy \\
&= \int_G f(y)\rho(xy)dy \\
&= \int_G f(y)\lambda(x, q(y))\rho(y)dy \\
&= \int_{G/H} Pf(p)\lambda(x, p)d\mu(p)
\end{aligned}$$

Esto demuestra la cuasi invarianza fuerte y determina la fórmula deseada para $d\mu_x/d\mu$. □

Proposición 22. *Si μ es una medida cuasi-invariante en G/H, entonces $\mu(U) > 0$ para todo conjunto abierto y no nulo U.*

Demostración. Esta demostración sigue el mismo razonamiento que en la proposición 8, en el cual se tiene que $\mu(u) = 0$ si y solo si $\mu(xu) = 0$, lo que implica que $K \subseteq xU$ y K es compacto. Entonces $\mu(k) = 0$ por lo cual $\mu(G) = 0$ □

Teorema 7. *Toda medida F-cuasi-invariante en G/H surge de una rho-función como en el teorema anterior, y todas estas medidas son fuertemente equivalentes.*

Demostración. Sea μ fuertemente cuasi invariante, de forma que $(d\mu_x/d\mu)(p) = \lambda(x,p)$ donde λ es una función positiva y continua en $G \times G \times H$. Como, para todo $x, y \in G$ se tiene que $\mu_{xy} = (\mu_x)_y$, la regla de la cadena para derivadas de Radon-Nikodym implica que

$$\lambda(xy,p) = \lambda(x,yp)\lambda(y,p)$$

localmente casi siempre en p. Como ambos lados de la igualdad son continuos en p, el conjunto donde no se cumple la igualdad es abierto, luego por la proposición anterior se tiene que la igualdad se cumple siempre. Si $f \in C_C(G)$ y $y \in G$, se tiene entonces que

$$\int_{G/H}\int_H f(y^{-1}x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH)$$

$$= \int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(yx\xi,H)^{-1}\lambda(y,xH)d\xi d\mu(xH)$$

$$= \int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH)$$

Esto se tiene, ya que $\lambda(yx\xi,H) = \lambda(y,x\xi H)\lambda(x\xi,H) = \lambda(y,xH)\lambda(x\xi,H)$. Ahora, como $f \to \int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH)$ es un funcional lineal positivo, invariante a izquierda sobre $C_C(G)$, debe existir una constante real $c > 0$ tal que

$$\int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH) = c\int_G f(x)dx$$

Sea $\rho(x) = c\lambda(x,H)$. Si se reemplaza f por $f\lambda(\cdot,H)$ se obtiene que

$$\int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH) = \int_G f(x)\rho dx$$

De forma que se satisface la igualdad del teorema 6. Más aún, si $\eta \in H$,

$$\int_G f(x)\rho(x\eta)dx = \Delta_G(\eta)^{-1}\int f(x\eta^{-1})\rho(x)dx$$

$$= \Delta_G(\eta)^{-1}\int_{G/H}\int_H f(x\xi)\lambda(x\xi,H)^{-1}d\xi d\mu(xH)$$

$$= \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta)\int_{G/H}\int_H f(x\xi)d\xi d\mu(xH)$$

$$= \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta)\int_G f(x)\rho(x)dx$$

Que se cumple para todo f, por tanto $\rho(x\eta) = \Delta_G(\eta)^{-1}\Delta_H(\eta)\rho(x)$. Al ser ρ continua y positiva, se concluye que es una rho-función.

Finalmente, sea μ y μ' dos medidas fuertemente cuasi invariantes, con rho funciones asociadas respectivamente ρ y ρ'. Por la ecuación funcional de rho-funciones, se sabe que el cociente $\rho'(y)/\rho(y)$ depende únicamente de las coclases de y por tanto, define una función positiva y continua $\phi(yH) = \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}$ en G/H. Para $f \in C_C(G)$ se tiene que $P(f\rho'/\rho) = (Pf)\phi$, luego

$$\int_{G/H} Pf d\mu' = \int_G f\rho' = \int_G f(\rho'/\rho)\rho = \int_{G/H}(Pf)\phi d\mu$$

Con lo cual $d\mu'/d\mu = \phi$. □

El teorema anterior implica que todas las medidas cuasi invariantes en G/H tienen los mismos conjuntos nulos. Más aún, todo conjunto de medida finita respecto a una medida cuasi invariante debe estar contenido en un conjunto $\sigma-$compacto. Se sigue que todas las medidas cuasi invariantes en G/H tienen los mismos conjuntos localmente nulos, y que un conjunto en G/H es localmente nulo si y solo si la intersección de este y cualquier conjunto compacto es nula.
Antes de enunciar el siguiente lema se deben presentar algunas definiciones: Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, se dice que una familia de funciones Φ definidas de X en $[0,\infty]$ es dirigida si para todo $\phi, \psi \in \Phi$ existe $\chi \in \Phi$ tal que $\chi \geq max(\phi, \psi)$. Se dice que una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua por debajo en x_0 sí para todo real $y > f(x_0)$ existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x) < y$ para todo $x \in U$. Es un hecho que f es semicontinua por debajo si y solo si $f = supp\ \phi$ para alguna familia dirigida $\Phi \subset C_C(G)$, y en este caso, $\int f d\nu = sup \int \phi d\nu$ para toda medida de Radon ν sobre X.

Lema 7. *Sea $f : G \to [0,\infty]$ semicontinua por debajo. Entonces Pf es semicontinua por debajo y se satisface la igualdad del teorema 6.*

Demostración. Sean $f : G \to [0,\infty]$ semicontinua por debajo, y Φ una familia dirigida en $C_C(G)$ tal que $f = sup_{\phi\in\Phi}\phi$. Para todo $x \in G$ se tiene que

$$Pf(xH) = \int_H f(x\xi)d\xi = sup_{\phi\in\Phi}\int_H \phi(x\xi)d\xi) = sup_{\phi\in\Phi} P\phi(xH)$$

Donde el conjunto $\{P\phi : \phi \in \Phi\}$ es también dirigido, ya que $P(max)\phi, \psi) \geq max(P\phi, P\psi)$, esto es porque si se definen $A_\phi = \{x\xi|\phi(x\xi) \geq \psi(x\xi)\}$ y $A_\psi = \{x\xi|\psi(x\xi) \geq \phi(x\xi)\}$, entonces estos son disjuntos y $H = A_\phi \cup A_\psi$, por lo tanto,

$$P(max(\phi, \psi)) = \int_H max(\phi(x\xi), \psi(x\xi))d\xi$$

$$= \int_{A_\phi} \phi(x\xi)d\xi + \int_{A_\psi} \psi(x\xi)d\xi$$

Con lo cual, necesariamente va a ser mayor que $\int_{A_\phi} \phi(x\xi)d\xi$ y que $int_{A_\psi}\psi(x\xi)d\xi$, es decir, mayor que $max(P\phi, P\psi)$. Además, $\{\phi\rho : \phi \in \Phi\}$ es dirigido, con $sup_{\phi\in\Phi}\phi\rho = f\rho$, con lo cual Pf es semicontinua por debajo, luego

$$\int_{G/H} Pf d\mu = \sup_{\phi\in\Phi} \int_{G/H} \phi(x)\rho(x)dx = \int_G f(x)\rho(x)dx$$

□

Lema 8. *Para todo compacto $K \subset G$ existe una constante $C_K > 0$ tal que $|U| \leq C_K\mu(q(U))$ para todo abierto $U \subset K$.*

Demostración. Sea $f \geq 0$ una función con soporte compacto sobre G, con $f = 1$ en K. Se definen entonces

$$c_K = [inf\{\rho(x) : x \in suppf\}]^{-1}, C_K = \|Pf\|_{sup}c_k$$

Ya que $U \subseteq q^{-q}(q(U))$, se tiene entonces que

$$|U| = \int_G f(x)\chi_U(x)dx \leq c_K \int_G f(x)\chi_{q(U)}(q(x))dx$$

Como U es abierto, $f \cdot (\chi_{q(U)} \circ q)$ es semicontinua por debajo, luego por el lema anterior

$$|U| \leq c_K \int_{G/H} Pf\dot{\chi}_{q(U)}f\mu \leq C_K\mu(q(U))$$

□

Teorema 8. *Un conjunto $E \subset G/H$ es localmente nulo respecto a cualquier medida μ cuasi invariante si y solo si $q^{-1}(E)$ es localmente nulo en G respecto a la medida de Haar.*

Demostración. Sean E localmente nulo en G/H y K un compacto en G. Sea V un abierto que contiene a K, con adherencia compacta. Ya que $q(K) \cap E$ es nulo, para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto W en G/H tal que $q(K) \cap E \subset W$ y $\mu(W) < \epsilon / C_{\overline{V}}$, donde $C_{\overline{V}}$ es como en el lema anterior. Sea $U = V \cap q^{-1}(W)$, entonces U es abierto y $q((E)^{-1} \cap K \subseteq U$, luego por el lema anterior $|U| \leq C_{\overline{V}}\mu(W) < \epsilon$. Al ser ϵ arbitrario, se tiene entonces que $|K \cap q^{-1}(E)| = 0$.
Ahora, se supone que $q^{-1}(E)$ es localmente compacto en G y que K es compacto en G/H. Por el lema 3 existe una función $f \geq 0$ con soporte compacto en G tal que $Pf = 1$ en K. Sea $A = q^{-1}(E \cap K) \cap (supp\ f)$, entonces $|A| = 0$, luego para todo $\epsilon > 0$ existo un abierto U, que contiene a A, tal que $|U| \leq \epsilon / \|f\rho\|_{sup}$. Así $f \cdot \chi_U \rho$ es semicontinua por debajo, entonces por el Lema 7,

$$\int_{G/H} P(f\chi_U) d\mu = \int_G f(x)\chi_U(x)\rho(x)dx < \epsilon$$

Se tiene por la construcción de U que $f \cdot \chi_U \geq f(\chi_{E\cap K} \circ q)$, luego $P(f\chi_U) \geq Pf\chi_{E\cap K}$. Se sigue entonces que $\mu(E \cap K) < \epsilon$, donde ϵ es arbitrario. Así, $\mu(E \cap K)$. $\square$

3. Teoría de Representaciones Unitarias

Definición 1. *Sea G un grupo localmente compacto. Una* **representación unitaria** *de G es un homomorfismo $\pi : G \to U(\mathcal{H}_\pi)$ que es continuo respecto a la topología fuerte. Esto es, $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ y $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$, donde $x \to \pi(x)u$ es continuo de G en $\mathcal{H}_\pi$ para todo $u \in \mathcal{H}_\pi$. $\mathcal{H}_\pi$ es el* **espacio de representación** *de π, y su dimensión denota la* **dimensión** *o* **grado** *dé π.*

Se pueden considerar de forma general representación de G que no sean unitarias, esto es, homomorfismos continuos definidos de G en el grupo de operadores lineales continuos e invertibles sobre algún espacio vectorial topológico. De forma general, se van a trabajar únicamente representaciones unitarias, por lo cual al escribir "representaciones" se sobreentiende que se habla de representaciones unitarias, salvo que se especifique lo contrario.
También es de notar que la continuidad en la topología normada, o N-continuidad, de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$es una condición demasiado fuerte para ser de interés, mientras que la continuidad en la topología fuerte implica la continuidad en la topología débil, pues estas topologías coinciden en $U(\mathcal{H}_\pi)$. En efecto, si $\{T_\alpha\}$ es una red de operadores unitarios que convergen débilmente a T, entonces para todo $u \in \mathcal{H}_\pi$ se tiene que:

$$\|(T_\alpha - T)\|^2 = \|T_\alpha u\|^2 - 2Re\langle T_\alpha u, Tu\rangle + \|Tu\|^2$$
$$= 2\|u\|^2 - 2Re\langle T_\alpha u, Tu\rangle$$

Donde, al tener la hipótesis de convergencia débil de $\{T_\alpha\}$, el segundo término converge a $2\|TU\|^2$ y, como T es unitario, $2\|u\|^2$, con lo cual se concluye la convergencia fuerte de la red.
Se pueden encontrar representaciones unitarias siempre que el grupo G actúe sobre un espacio de Hausdorff S localmente compacto. En este caso, G también actúa sobre las funciones de S, mediante

$$[\pi(x)f](s) = f(x^{-1}s)$$

Si S tiene una medida de Radon μ que es $G-$invariante, entonces π define una representación unitaria en $L^2(\mu)$, la cual es continua por el argumento dado en la proposición 17. De forma más general, sea G un grupo que actúa sobre S, y S admite una medida μ F-cuasi invariante; esto es, una medida de Radon μ tal que $d\mu(xs) = \phi(x,s)d\mu(s)$ para alguna función positiva y continua ϕ. Entonces se puede a partir de π obtener una representación unitaria de G sobre $L^2(\mu)$ así:

$$[\tilde{\pi}(x)f](s) = \phi(x, x^{-1}s)^{-\frac{1}{2}} f(x^{-1}s)$$

Que en efecto es unitaria, pues:

$$\|\pi(x)f\|^2$$
$$= \int \phi(x, x^{-1}s)^{-1}|f(x^{-1}s)|^2 d\mu(s)$$
$$= \int \phi(x,s)^{-1}|f(s)|^2 d\mu(xs)$$
$$= \int |f(s)|^2 d\mu(s)$$
$$= \|f\|^2$$

Como la regla de la cadena para derivadas de Radon-Nikodym implica que $\phi(xy,s) = \phi(x,ys)\phi(y,s)$ se tiene entonces que $\tilde{\pi}(xy) = \tilde{\pi}(x)\tilde{\pi}(y)$, y la continuidad de se tiene por lo mencionado nuevamente por la proposición 17.
El ejemplo más básico de estas construcciones surge al considerar la acción de G sobre sí mismo mediante traslaciones a izquierda o derecha. Las traslaciones a izquierda producen la **representación regular izquierda** π_L de G en $L^2(G)$; la cual está dada por

$$[\pi_L(x)f](y) = L_x f(y) = f(x^{-1}y)$$

donde L_x denota la acción traslación a izquierda. De la misma manera, la traslación a derecha R_x define una representación unitaria π_R sobre $L^2(G,\rho)$, donde ρ es la medida de Haar por derecha sobre G. A partir de dicha representación se puede definir una representación $\tilde{\pi}_R$ en $L^2(G)$, es decir, con la medida de Haar por izquierda como se muestra a continuación:

$$[\pi_R(x)f](y) = R_x f(y) = f(yx)$$

$$[\tilde{\pi}_R(x)f](y) = \Delta(x)^{\frac{1}{2}} R_x f(y) = \Delta(x)^{\frac{1}{2}} f(yx)$$

Donde π_R y $\tilde{\pi}_R$ reciben ambas el nombre de **representación regular derecha** de G.
Toda representación unitaria π de G en $\mathcal{H}_\pi$ determina una representación unitaria $\overline{\pi}$ en el espacio dual $\mathcal{H}'_\pi$ de $\mathcal{H}_\pi$, la cual está dada por $\overline{\pi}(x) = \pi(x^{-1})'$, donde $'$ denota la transposición. Aunque usualmente el espacio dual de un espacio de Hilbert es el mismo espacio, en este texto se va a considerar que $\mathcal{H}'_\pi$ es anti lineal para evitar considerar el operador transpuesto cuando se trabaje con el adjunto. Entonces, si se considera una base ortonormal para $\mathcal{H}_\pi$, de forma que $\pi(x)$ esté representado por una matriz $M(x)$, entonces la matriz que representa a $\overline{\pi}(x)$ es la matriz inversa y transpuesta de $M(x)$, donde al ser π unitario, esta matriz sería simplemente la conjugada compleja de $M(x)$. Se dice que $\overline{\pi}$ es él **contra gradiente** dé π. En algunos casos, por ejemplo, cuando existe de $\mathcal{H}_\pi$ en la cual todas las matrices $M(x)$ son reales, se tendrá que $\overline{\pi}$ es equivalente a π, lo cual se definirá formalmente más adelante.
Si π_1 y π_2 son representaciones unitarias de G, un **operador entrelazado** para π_1 y π_2 es una aplicación lineal y acotada $T : \mathcal{H} - \pi_1 \to \mathcal{H} : \pi_2$ tal que, para todo $x \in G$, $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$. El conjunto de todos los operadores entrelazados de π_1 y π_2 se denota por $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$. Se dice que π_1 y π_2 son **unitariamente equivalentes** si $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ contiene un operador unitario U tal que $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^{-1}$. Como no se van a considerar otro tipo de equivalencias, normalmente se dirá simplemente que π_1 y π_2 son equivalentes.

Ejemplo 3. *La representación regular derecha π_R en $L^2(G,\rho)$ o $\tilde{\pi}_R$ en $L^2(G,\lambda)$ son equivalentes, y $f \to \Delta^{\frac{1}{2}} f$ es un operador entrelazado de estas representaciones.*
Más aún, π_R es equivalente a la representación regular izquierda π_L, y $Uf(x) = f(x^-1)$ es un operador entrelazado entre ellas.

En vez de escribir $\mathcal{C}(\pi,\pi)$ simplemente se escribirá $\mathcal{C}(\pi)$. Este es el espacio de operadores acotados de $\mathcal{H}_\pi$ que conmutan con $\pi(x)$ para todo $x \in G$; que recibe el nombre de **conmutante** o **centralizador** de π. $\mathcal{C}(\pi)$ es un álgebra que es cerrada bajo límites débiles, por tanto, es cerrada tomando adjuntas, pues si $t \in \mathcal{C}(\pi)$ entonces $T^*\pi(x) = [\pi(x^{-1}T]^* = [T\pi(x^{-1})]^* = \pi(x)T^*$. Entonces, $\mathcal{C}(\pi)$ es una C^*-álgebra, débilmente cerrada, de operadores sobre $\mathcal{H}_\pi$, esto es, un álgebra de von Neumann.
Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado dé $\mathcal{H}_\pi$. $\mathcal{M}$ es un **subespacio invariante** para π sí $\pi(x)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ para todo $x \in G$. Si $\mathcal{M}$ es invariante y distinto de $\{0\}$, la restricción de π a $\mathcal{M}$,

$$\pi^{\mathcal{M}} = \pi(x)|\mathcal{M}$$

define una representación de G sobre $\mathcal{M}$, llamada una **sub representación** de π. Se va a utilizar la notación $\pi^{\mathcal{M}}$ para la sub representación de π en $\mathcal{M}$. Si π admite un subespacio invariante no trivial, se dice que π es **reducible**, de lo contrario, π es **irreducible**.
Si $\{\pi_i\}_{i\in I}$ es una colección de representaciones directas, su suma directa $\bigoplus \pi_i$ es la representación π en $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_{\pi_i}$ definida por $\pi(x)(\sum v_i) = \sum \pi_i(x)v_i$, para $v_i \in \mathcal{H}_{\pi_i}$. En este caso, los subespacios $\mathcal{H}_{\pi_i}$, como subespacios de, $\mathcal{H}$ son invariantes bajo π, y cada π_i es una sub representación dé π.

Proposición 23. *Si $\mathcal{M}$ es invariante bajo π, entonces $\mathcal{M}^\perp$ también lo es.*

Demostración. Si $u \in \mathcal{M}$ y $v \in \mathcal{M}^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \pi(x)v, u\rangle &= \langle v, \pi(x)^{-1}u\rangle \\ &= \langle v, u'\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde $u' \in \mathcal{M}$. Esto es, $\pi(x)\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}^\perp$. $\square$

Corolario 5. *Si π tiene un subespacio invariante $\mathcal{M}$ no trivial, entonces π es la suma directa de $\pi^{\mathcal{M}}$ y $\pi^{\mathcal{M}^{\perp}}$*

Demostración. Este corolario se reduce a notar que $\mathcal{M}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M} \bigoplus \mathcal{M}^{\perp}$, con lo cual se tiene directamente el resultado. □

Vale la pena destacar que este resultado es falso para representaciones que no son unitarias. Por ejemplo, $\pi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ define una representación de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{C}^2$, y el único subespacio invariante no trivial es el generado por $(1, 0)$.
Si π es una representación unitaria de G y $u \in \mathcal{H}_\pi$, el subespacio cerrado $\mathcal{M}_u$ generado por $\{\pi(x)u : x \in G\}$ en $\mathcal{H}_\pi$ se llama el **subespacio cíclico** generado por u. Se tiene que $\mathcal{M}_u$ es invariante, bajo π . Si $\mathcal{M}_u = \mathcal{H}_\pi$, se dice que u es un **vector cíclico** para π. Se dice que π es una **representación cíclica** si tiene un vector cíclico.

Proposición 24. *Toda representación unitaria es suma directa de representaciones cíclicas.*

Demostración. Sea π una representación en H_π. Por el lema de Zorn existe una colección maximal $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subespacios cíclicos de H_ϕ, mutuamente ortogonales. Si existiese un $u \in H_\pi$, no nulo, ortogonal a todos los M_α, el subespacio cíclico generado por u también sería ortogonal a estos por la proposición 23, lo que contradice la maximalidad. Entonces $H_\pi = \bigoplus M_\alpha$ y $\pi = \bigoplus \pi^{M_\alpha}$ □

Proposición 25. *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_\pi$ y sea P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{M}$ es invariante, bajo π si y solo sí $P \in \mathcal{C}(\pi)$.*

Demostración. Si $P \in \mathcal{C}(\pi)$ y $v \in M$, entonces $\pi(x)v = \pi(x)Pv = P\pi(x)v \in M$, con lo cual M es invariante. Ahora, si M es invariante, se tiene que $\pi(x)Pv = \pi(x)v = P\pi(x)v$ para $v \in M$, y $\pi(x)Pv = 0 = P\pi(x)v$ para $v \in M^{\perp}$, por la proposición 23. Así $\pi(x)P = P\pi(x)$ □

Proposición 26. Lema de Schur

- *Una representación unitaria π de G es irreducible si y solo si $\mathcal{C}(\pi)$ contiene únicamente múltiplos escalares de la aplicación idéntica.*
- *Sean π_1 y π_2 representaciones unitarias irreducibles de G. Si π_1 y π_2 son equivalentes, entonces $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ es unidimensional, de lo contrario $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$*

Demostración.

- Si π es reducible, $\mathcal{C}$ contiene proyecciones no triviales por la proposición anterior. Ahora, si $T \in \mathcal{C}(\pi)$ y $T \neq cI$. Entonces $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $B = \frac{1}{2}(T - T^*)$ pertenecen a $\mathcal{C}(\pi)$, y por lo menos uno de ellos, sin perdida de generalidad se toma a A, no es múltiplo de I. A es auto adjunto, entonces todo operador que conmute con A, y en particular todo $\pi(x)$,conmuta con todas las proyecciones $\chi_E(A)$, $E \subseteq R$ por el teorema 1.51 del texto.
  Entonces $\mathcal{C}(\pi)$ contiene proyecciones no triviales, por tanto, π es reducible por la proposición anterior.
- Si $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, entonces $T^* \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ pues

$$T^*\pi_2(x) = [\pi_2(x^{-1})T]^* = [T(\pi_1(x^{-1})]^* = \pi_1(x)T^*$$

  Se sigue que $T^*T \in \mathcal{C}(\pi_1)$ y que $TT^* \in \mathcal{C}(\pi_2)$, de forma que $T^*T = cI$ y $TT^* = cI$. Esto implica que $T = 0$ o $c^{-\frac{1}{2}}T$ es unitario. Esto demuestra que $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = \{0\}$ cuando π_1 y π_2 no son equivalentes, y que $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ consiste de múltiplos escalares de operadores unitarios. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, entonces $T_2^{-1}T_1 = T_2^*T_1 \in \mathcal{C}(\pi_1)$, luego $T_x^{-1}T_1 = cI$ y $T_1 = cT_2$, con lo cual $dim\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2) = 1$.

□

Es de notar que el teorema 1.51 está fuera del alcance del trabajo, por lo cual se consideró verdadero sin mayor verificación.

Corolario 6. *Si G es Abeliano, toda representación irreducible de G es unidimensional*

Demostración. Si π es una representación de G, los operadores $\pi(x)$ conmutan entre sí, por tanto, pertenecen a $\mathcal{C}(\pi)$. Si π es irreducible, se tiene que $\pi(x) = c_x I$ para todo $x \in G$. De ser así, todo subespacio unidimensional de $\mathcal{H}_\pi$ es invariante, por lo cual $dim\mathcal{H}_\pi = 1$. □

Las representaciones unitarias irreducibles de un grupo localmente compacto G son la base para construir el análisis armónico asociado a G. El teorema de Gelfand-Raikov asegura que todo grupo dado G tiene representación irreducible distinta de la representación unidimensional trivial $\pi_0(x) \equiv 1$. Teniendo esto, las preguntas básicas del análisis armónico sobre G son las siguientes:

1. Describir todas las representaciones unitarias irreducibles de G, en términos de equivalencias.
2. Determinar cuantas representaciones unitarias arbitrarias de G se pueden construir a partir de representaciones irreducibles.
3. Dada una representación unitaria específica de G como la representación regular, mostrar concretamente como construirla a partir de representaciones irreducibles.

Bibliografía

[1] Folland, G (2000) A Course in Abstract Harmonic Analysis.

[2] Kramer, L.(2017) Locally Compact Groups.

[3] Munkres, J. (2001). Topología. Madrid: Prentice Hall.

[4] Charris, J; Aldana, B; Acosta, P. (2013) Álgebra, Fundamentos, Grupos, Anillos, Cuerpos y Teoría de Galois.

[5] Abuabara, T; Lesmes, C. (2008)Elementos del Análisis funciónal.