Resultados relacionados con la función zeta de Riemann

Trabajo de Grado

Autor:

Andrés Diego
CASTAÑEDA GARCÍA

Dirigido por:

PhD. Julián Andrés
AGREDO ECHEVERRY

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Programa de Matemáticas
UNIVERSIDAD ESCUELA COLOMBIANA DE
INGENIERÍA JULIO GARAVITO

DICIEMBRE DE 2022

Dedicado a mi familia, amigos y profesores que se encargaron de acompañarme y apoyarme durante estos cinco años.

Resumen

En este texto se estudiará el comportamiento de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann. En la primera parte del documento se presentan algunos resultados preliminares de variable compleja y análisis que serán útiles en la parte principal del trabajo. Luego de esto, se comienza por dar la definición de la función zeta como suma de Dirichlet para luego mostrar sus extensiones analíticas en el plano complejo, en esta parte algunos resultados generales sobre la función zeta serán solamente mencionados, ya que se da por hecho que el lector conoce y domina estos temas. Entre los resultados más influyentes de esta sección se encuentran los relacionados con la función theta de Jacobi y la función de von Mangoldt. En la última parte del documento se presentan demostraciones detalladas de la fórmula de Riemann - von Mangoldt y el teorema de Hardy, los cuales corroboran la existencia de infinitos ceros no triviales en la banda crítica, que es donde se plantea la hipótesis de Riemann.

Palabras clave: Función zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, ceros no-triviales, tetha de Jacobi, teorema de Hardy.

Abstract

In this text we will study the behavior of non trivial zeros of the zeta Riemann function. The first part of the paper presents some preliminary results of complex variable and analysis that will be useful in the main part of the work. Then we begin by giving the definition of the zeta function as the sum of Dirichlet and then showing its analytic extensions in the complex plane, in this part some general results on the zeta function will only be mentioned, as it is taken for granted that the reader knows and masters these topics. Among the most influential results of this section are those related to the Jacobi theta function and the von Mangoldt function. The last part of the paper shows detailed demonstrations of Riemann's formula - von Mangoldt and Hardy's theorem which corroborate the existence of infinite non-trivial zeros in the critical band, which is where Riemann's hypothesis is posed.

Key words: Riemann zeta function, Riemann hypothesis, non-trivial zeros, Jacobi tetha, Hardy theorem.

Introducción

La hipótesis de Riemann, formulada por primera vez por Bernhard Riemann en su tesis de doctorado: "Sobre los números primos menores que una magnitud dada" en 1859, es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, en la que se plantea que todos los ceros no-triviales de la función ζ están en la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Esta se presentó al desarrollar una fórmula explícita para calcular la cantidad de primos menores que x. A pesar de esto, Riemann no intentó dar una demostración ya que no era esencial para el propósito central de su artículo, pero sabía que los ceros no triviales de la función zeta están distribuidos en torno a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$ y que todos los ceros no triviales debían estar en el rango $0 \leq \Re(s) \leq 1$. También en su tesis presenta una fórmula para expresar el comportamiento de la cantidad de ceros en una región acotada de la banda crítica, la cual no sería demostrada hasta 1905 por von Mangoldt. En 1900, Hilbert incluyó la hipótesis de Riemann en su famosa lista de los 23 problemas no resueltos y es el único problema de los que propuso Hilbert que está en el premio del milenio del Instituto Clay de Matemáticas. En 1914, Hardy demostró que existe un número infinito de ceros sobre la recta crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$; sin embargo, todavía era posible que un número infinito de los ceros no-triviales se encontraran en algún otro lugar de la banda $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Los ceros de la función zeta y los números primos satisfacen ciertas propiedades de dualidad que muestran, usando análisis de Fourier, que los ceros de la función zeta de Riemann pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Por esta relación, la hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática actual.

Índice

1. Preliminares

A continuación se presentan los resultados más relevantes y que serán usados en la parte principal del texto. Entre estos tenemos resultados relacionados con funciones de valor complejo, integrales de Lebesgue, series de Fourier y transformada de Mellin. Se dejan las referencias a los libros, que se encuentran en la bibliografía, donde se pueden encontrar las demostraciones.

1.1. Funciones complejas

Teorema 1.1. *Sea $h(t,z)$ una función a valor complejo continua, definida para $t \in [a,b]$ y $z \in D \subset \mathbb{C}$, donde D es un dominio. Si para cada t fijo, $h(t,z)$ es analítica en D, entonces*

$$H(z) = \int_a^b h(t,z)dt, \qquad z \in D$$

es analítica en D.

Demostración. Ver [4], p. 121 □

Definición 1.1. *Una sucesión $\{f_i\}$ de funciones sobre un dominio D converge uniformemente a f en E si, para todo i, existe ϵ_i tal que*

$$|f_i(z) - f(z)| \leq \epsilon_i \qquad \forall z \in D$$

donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Teorema 1.2. *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente a f en D, entonces f es analítica en D*

Demostración. Ver [4], p. 136 □

Teorema 1.3. *Sea γ una curva suave a trozos en el plano complejo. Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones continuas de valor complejo sobre γ y $\{f_j\}$ converge uniformemente a f sobre γ, entonces $\int_\gamma f_j(z)dz$ converge a $\int_\gamma f(z)dz$*

Demostración. Ver [4], p. 153 □

Teorema 1.4. ***(Principio de unicidad)**. Si f y g son funciones analíticas en un dominio D y $f(z) = g(z)$ para $z \in A \subset D$, donde A es un conjunto con un punto de acumulación, entonces*

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in D$$

Demostración. Ver [4], p. 156 □

Teorema 1.5. *Suponga que $g_k(z) = 1 + h_k(z)$, con $k \geq 1$ son funciones en un conjunto E y existen constantes $M_k > 0$ tales que $\sum M_k$ converge y $|h_k(z)| \leq M_k$ para todo $z \in E$. Entonces $\prod_{k=1}^m g_k(z)$ converge uniformemente en E cuando $m \to \infty$*

Demostración. Ver [4], p.354 □

Definición 1.2. *Una sucesión $\{f_k(z)\}$ de funciones analíticas en un dominio D converge normalmente a la función analítica $f(z)$ en D si converge uniformemente a $f(z)$ en cualquier disco cerrado contenido en D.*

Teorema 1.6. *Sea $g_k(z)$ con $k \geq 1$, una función analítica en un dominio D, tal que $\prod_{k=1}^{m} g_k(z)$ converge normalmente en D a $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g_k(z)$. Entonces*

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}$$

con $z \in D$, donde la suma converge normalmente en D.

Demostración. Ver [4], p.355 □

Teorema 1.7. *Sea z_0 una singularidad aislada de f. z_0 es un polo de orden N de f si y solo si*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^N}$$

Donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Demostración. Ver [4], p. 191 □

Definición 1.3. *Suponga que $f(z)$ es analítica en un dominio D. Para una curva γ en D tal que $f(z) \neq 0$ en γ nos referimos a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d log f(z)$$

como la integral logarítmica de $f(z)$ a lo largo de γ. Así, la integral logarítmica mide el cambio de $log f(z)$ a lo largo de la curva γ.

Teorema 1.8. ***(Principio del argumento)*** *Sea D un dominio acotado con frontera suave por partes, y sea $f(z)$ una función meromorfa en D que se extiende analíticamente a ∂D, tal que $f(z) \neq 0$ en ∂D. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_{\infty}$$

donde N_0 es el número de ceros de $f(z)$ en D y N_{∞} es el número de de polos de $f(z)$ en D, contando multiplicidades.

Demostración. Ver [4], p. 224 □

Teorema 1.9. *Sea $a \in \mathbb{C}$y f una función compleja, entonces*

$$\lim_{z \to a} (z-a) \frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} -N & si\ a\ es\ un\ polo\ de\ orden\ N \\ N & si\ a\ es\ un\ cero\ de\ orden\ N \\ 0 & si\ f\ es\ analítica\ en\ a\ y\ f(a) \neq 0 \end{cases}$$

Demostración. Ver [1], p. 2 □

1.2. Teorema de la convergencia dominada

Teorema 1.10. ***(Teorema de la convergencia monótona)*** *Sea f_n una sucesión creciente de funciones medibles no-negativas sobre E, que es un conjunto medible. Si $f_n \to f$ puntualmente sobre E, entonces*

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$$

Demostración. Ver [5], p. 31 □

Definición 1.4. *Una función medible no-negativa f en un conjunto medible E es integrable sobre E, si*

$$\int_E f d\mu < \infty$$

Teorema 1.11. ***(Teorema de la convergencia dominada)*** *Sea f_n una sucesión creciente de funciones integrables que convergen casi siempre a una función a valor real medible f. Sí existe una función integrables g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Demostración. Ver [5], p. 44 □

Para lo siguiente la función f estará definida como una función $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ y se supondrá que la función $x \to f(x, t)$ es medible para cada $t \in [a, b]$.

Corolario 1.1. *Suponga que para algún $t_0 \in [a, b]$*

$$f(x, t_0) = \lim_{t\to t_0} f(x, t)$$

para cada $x \in X$ y que existe una función integrable g en X tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$. Entonces

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \int f(x, t) d\mu(x)$$

Demostración. Sea t_n una sucesión en $[a, b]$ que converge a t_0, con $t_n \neq t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, si definimos $f_n(x) = f(x, t_n)$ para todo $x \in X$ por las hipótesis, junto al teorema de la convergencia dominada se sigue el resultado. □

Corolario 1.2. *Supongamos que la función $t \to f(x, t)$ es continua en $[a, b]$ para cada $x \in X$ y que existe una función integrable g en X tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$. Entonces la función F definida por*

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

es continua para todo $t \in [a, b]$

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior. □

Corolario 1.3. *Suponga que para algún $t_0 \in [a, b]$ la función $x \to f(x, t_0)$ es integrable en X, que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe en $X \times [a, b]$ y que existe una función integrable g en X tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$. Entonces la función F definida en el corolario anterior es diferenciable en $[a, b]$ y*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Demostración. Ver [5], p 46 □

1.3. Series de Fourier y transformada de Mellin

Definición 1.5. *Sea $\mathscr{S}$ el espacio vectorial de la funciones infinitamente diferenciables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que decaen en el infinito más rápido que cualquier función potencia negativa, es decir*

$$\mathscr{S} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es } C^\infty \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} |x|^n f(x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Este espacio es llamado el espacio de Schwartz
Entonces para todo $f \in \mathscr{S}$ se define la transformada de Fourier de f como la función

$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)dx \tag{1}$$

Proposición 1.1. *La integral (1) converge para todo $y \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathscr{S}$*

Demostración. Como f está en el espacio de Schwartz, existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|x|^{-2}$ para $|x| > 0$, esto implica que

$$|\hat{f}(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi ixy} f(x)\right| dx \leq \int_{-1}^{1} |f(x)|dx + 2\int_{1}^{\infty} Cx^{-2}dx$$

Donde las últimas dos integrales existen, por lo tanto la transformada de Fourier converge □

Lema 1.1. *Si $f \in \mathscr{S}$, $b > 0$ y $h(x) = f(bx)$ entonces*

$$\hat{h}(y) = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{y}{b}\right)$$

Demostración. Calculamos $\hat{h}(y)$ directamente de la definición

$$\hat{h}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(bx)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\frac{u}{b}y} f(u)\frac{du}{b} \\ &= \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iu\frac{y}{b}} f(u)du \\ &= \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2. *Si $f \in \mathscr{S}$ está dada por $f(x) = e^{-\pi x^2}$, entonces $\hat{f} = f$*

Demostración. Notemos que

$$\hat{f}'(y) = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)dx = -2\pi i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} xf(x)dx$$

Donde diferenciar dentro de la integral es correcto ya que

$$\left|\frac{d}{dy}(e^{-2\pi ixy}e^{-\pi x^2})\right| \leq |2\pi xe^{-\pi x^2}|$$

la cual es una función integrable, así que es posible usar el corolario 1.3
Ahora integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}\hat{f}' &= -2\pi i e^{-2\pi ixy}\left(\frac{1}{-2\pi}e^{-\pi x^2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i\int_{-\infty}^{\infty} -2\pi iy e^{-2\pi ixy}\frac{e^{-\pi x^2}}{-2\pi}dx \\ &= -2\pi y\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy}f(x)dx \\ &= -2\pi y\hat{f}\end{aligned}$$

por lo tanto $\hat{f}$ satisface la ecuación diferencial

$$\hat{f}'(y) = -2\pi y\hat{f}(y)$$

la cual tiene solución

$$\hat{f}(y) = Ce^{-\pi y^2}$$

Para encontrar el valor de C, haciendo $y = 0$ obtenemos

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$$

Se concluye que

$$\hat{f} = e^{-\pi y^2}$$

como se deseaba □

Proposición 1.3. ***(Fórmula de suma de Poisson).*** *Si $f \in \mathscr{S}$ entonces*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)$$

Demostración. Definimos

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

entonces $F(x)$ es $1-$periódica y tiene representación en serie de Fourier

$$G(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$$

donde los coeficientes c_k se pueden calcular como

$$\begin{aligned}c_k &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)e^{-2\pi ikx}dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)e^{-2\pi ikx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx \\ &= \hat{f}(k)\end{aligned}$$

Donde la segunda ecuación está justificada porque $f \in \mathscr{S}$ implica que existen constantes $C_m > 0$ tales que $|f(x)| \leq C_m|x|^{-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto para n_0 lo suficientemente grande

$$\sum_{|n|\geq n_0} |f(x+n)| \leq \sum_{|n|\geq n_0} C_m|x+n|^{-m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ así que la cola de la serie se hace arbitrariamente pequeña. Esto implica que $F(x)$ converge absolutamente y uniformemente en todos los sunconjuntos compactos. De lo anterior se tiene que podemos escribir

$$F(x) = \sum_{k=\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

En particular si $x = 0$ obtenemos

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

que es lo que se quería demostrar. □

Definición 1.6. *Sea $f(t)$ una función definida en el eje real positivo $0 < t < \infty$. La transformada de Mellin $\mathcal{M}$ es la operación que envía la función f en la función F definida en plano complejo por la relación:*

$$\mathcal{M}[f;s] =\equiv F(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt \tag{2}$$

La función $F(s)$ es llamada la transformada de Mellin de f. En general la integral existe solamente para valores complejos de $s = a + ib$ tales que $a_1 < a < a_2$, donde a_1 y a_2 dependen de la función $f(t)$ que se va a transformar.

Proposición 1.4. ***(Relación con transformada de Laplace y de Fourier)*** *La transformada de Mellin está estrechamente relacionada con una forma extendida de la transformada de Laplace. El cambio de variable dado por $t = e^{-x}$ transforma la integral (2) en:*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-sx}dx$$

luego de hacer un cambio de función $g(x) = f(e^{-x})$ se tiene que la anterior integral es la transformada bilateral de Laplace de g definida por:

$$\mathcal{L}[g;s] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-sx}dx$$

lo cual se puede escribir simbólicamente como

$$\mathcal{M}[f;s] = \mathcal{L}[f(e^{-x});s]$$

Para obtener la transformada de Fourier, es posible escribir $s = a + i2\pi\beta$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$, por lo cual

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-sx}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-ax}e^{-i2\pi\beta x}dx \end{aligned}$$

que se puede escribir simbólicamente como

$$\mathcal{M}[f(t); a + i2\pi\beta] = \mathcal{F}[f(e^{-x})e^{-ax};\beta]$$

donde $\mathcal{F}$ representa la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}[f;\beta] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\beta x}dx$$

con lo cual hemos visto que la transformada de Mellin se puede expresar en términos de las transformadas de Laplace y de Fourier.

Teorema 1.12. ***(Fórmula de inversión)*** *Una forma de invertir la transformada de Mellin es empezar a partir del teorema de inversión de Fourier, el cual dice que si $\hat{f} = \mathcal{F}[f;\beta]$ es la transformada de Fourier de f, la función original se recupera por*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\beta)e^{i2\pi\beta x}d\beta$$

si aplicamos esto a

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-ax}e^{-i2\pi\beta x}dx$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} f(e^{-x})e^{-ax} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi\beta x}d\beta \\ f(t) &= t^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)t^{i2\pi\beta}d\beta \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)t^{-s}ds \end{aligned}$$

1.4. Orden de una función

Definición 1.7. *Diremos que una función $f(t)$ tiene el mismo orden de $g(t)$, $f(t) = O(g(t))$ si existe $C > 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq C|g(t)|$ para todo t tal que $|t| \geq t_0$.*

Teorema 1.13. *Para funciones de variable compleja se tiene que $O(\Re(f(z))) = O(\Im(f(z))) = O(f(z))$.*

Demostración. Se sigue de las desigualdades $|\Re(f(z))| \leq |f(z)|$ y $|\Im(f(z))| \leq |f(z)|$ ☐

Teorema 1.14. *Si $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{f(t)} = A$ con $A \in \mathbb{R}$ y $f(t) = O(h(t))$ entonces $g(t) = O(h(t))$*

Demostración. Como $\lim_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{f(t)} = A$, existen $B > 0$ y $t_1 > 0$ tal que para todo t tal que $|t| > t_1$ se satisface que

$$\left|\frac{g(t)}{f(t)}\right| \leq B$$

por lo tanto si $f(t) = O(h(t))$ existen $C > 0$ y $t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|f(t)| \leq C|h(t)|$ para todo t tal que $|t| \geq t_2$, con lo cual si $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq B|f(t)| \\ &\leq BC|h(t)| \end{aligned}$$

para todo t tal que $|t| \geq t_0$, esto es $g(t) = O(h(t))$ que es lo que se quería demostrar. ☐

Definición 1.8. *Decimos que $f(t) = g(t) + O(h(x))$ si $O(f(x) - g(x)) = h(x)$.*

Teorema 1.15. *Para $t > 0$ si $f(t) = g(t) + O(t^{-1})$ y $\lim_{t\to\infty} t(g(t) - h(t)) = B$ con $B \in \mathbb{R}$ entonces $f(t) = h(t) + O(t^{-1})$.*

Demostración. Por hipótesis existe $C > 0$ tal que $t|f(t) - h(t)| < C$ y $x > 0$, $D > 0$ tales que si $t > x$ entonces $t|g(t) - h(t)| < D$, por lo cual si $t > x$

$$\begin{aligned} t|f(t) - h(t)| &= t|f(t) - g(t) + g(t) - h(t)| \\ &\leq t|f(t) - g(t)| + t|g(t) - h(t)| \\ &\leq C + D \end{aligned}$$

esto es $f(t) - g(t) = O(t^{-1})$ que es lo que se quería demostrar. □

1.5. Criterio de Condensación de Cauchy

Teorema 1.16. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y decrecientes. La serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie condensada $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.*

Demostración. Sean s_n y r_n las sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum 2^n a_{2^n}$ respectivamente. Esto es

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\ r_n &= 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ... + 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

Consideremos primero s_n. Como la serie es decreciente, tenemos que

$$\begin{aligned} s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \leq a_1 + a_2 + a_2 = a_1 + r_1 \\ s_7 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 = a_1 + r_2 \\ s_{15} &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8_a 8 = a_1 + r_3 \end{aligned}$$

Se tiene que $s_7 - s_3 \leq 4a_4$, $s_{15} - s_7 \leq 8a_8$ y de forma general

$$s_{2^{n+1}-1} - s_{2^n-1} \leq 2^n a_{2^n}$$

para $n = 1, 2, ...$, por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(s_{2^{k+1}-1} - s_{2^k-1}\right) + s_1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(2^n a_{2^n}\right) + s_1 \\ &= r_n + a_1 \end{aligned}$$

Lo cual muestra que la suma parcial de $\sum a_n$ se puede acotar por la suma parcial de $\sum 2^n a_{2^n}$, para esto notemos que

$$2^n a_{2^n} = \overbrace{2a_{2^n} + 2a_{2^n} + ... + 2a_{2^n}}^{2^{n-1}\text{ términos}} \leq \overbrace{2a_{2^{n-1}+1} + 2a_{2^{n-1}+2} + ... + 2a_{2^n}}^{2^{n-1}\text{ términos}}$$

usando nuevamente el hecho de que la serie es decreciente tenemos que

$$\begin{aligned} r_n &= 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 ... + 2^n a_{2^n} \\ &\leq 2a_2 + (2a_3 + 2a_4) + (2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8) + ... + (2a_{2^{n-1}+1} + ... + 2a_{2^n}) \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_{2^n} \\ &= 2s_{2^n} \end{aligned}$$

Lo cual muestra que la suma parcial de $\sum 2^n a_{2^n}$ se puede acotar por la suma parcial de $\sum a_n$. De lo anterior se sigue que la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie condensada $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. □

2. Definición de la función Zeta y sus continuaciones analíticas

Sea $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ un número complejo . Consideremos la serie de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... \tag{3}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} = \begin{cases} \ln x|_1^{\infty} \text{ si } \sigma = 1 \\ \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \text{ si } \sigma \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty \text{ si } \sigma \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma-1} \text{ si } \sigma > 1 \end{cases}$$

Entonces $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^\sigma}$ converge si y solo si $\sigma > 1$. Y como $f(x) = \frac{1}{x^\sigma}$ es una función real monótona decreciente, por el criterio de la integral tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right|$$

converge para $\sigma > 1$. Así que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$.
Más aún , (3) converge uniformemente para $\sigma \geq R > 1$ ya que si $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^R} \\ &=\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R} - \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^R} \\ &= \epsilon_k \end{aligned}$$

Donde $\epsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ converge. Además como $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^R}$ son funciones analíticas para $\Re(s) > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ define una función analítica en este dominio. Los resultados anteriores se pueden condensar en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *La función*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4}$$

*Es una función analítica en el dominio $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, que converge absolutamente para $\Re(s) > 1$ y uniformemente para $\Re(s) \geq R$, con $R > 1$. Esta función se conoce como la **función zeta de Riemann**.*

Teorema 2.2. ***(Producto de Euler)*** *Si $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$ entonces*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

donde el producto se hace sobre todos los primos.

Demostración. Ver [1], p. 5 □

Lema 2.1. *Para $\sigma > 1$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma - 1}$ es convergente.*

Demostración. Usaremos el criterio de condensación de Cauchy, por lo cual basta demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\sigma - 1}$ es convergente. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1})^\sigma - 1}}{\frac{2^n}{(2^n)^\sigma - 1}} &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(2^\sigma)^n - 1}{(2^\sigma)^{n+1} - 1} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^\sigma} - \frac{1}{(2^\sigma)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{(2^\sigma)^{n+1}}} \\
&= \frac{2}{2^\sigma}
\end{aligned}$$

y $2^{1-\sigma} < 1$ si y solo si $1 < \sigma$, usando el criterio del cociente se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\sigma - 1}$ es convergente si $1 < \sigma$, por lo tanto lo mismo aplica para $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma - 1}$. □

Teorema 2.3. *Si $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$ entonces la sucesión $\left\{\prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ donde p_k denota el $k-$ésimo número primo.*

Demostración. Si escribimos $g_k(s) = \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ entonces $g_k(s) = 1 + h_k(s)$ donde $h_k(s) = \dfrac{1}{p_k^s - 1}$, además

$$|h_k(s)| = \left| \frac{1}{p_k^s - 1} \right| \leq | \frac{1}{|p_k^s| - 1} = \frac{1}{p_k^\sigma - 1}$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^\sigma - 1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma - 1}$$

donde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma - 1}$ es una serie convergente si $\sigma > 1$, obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^2 - 1}$ también es convergente, se sigue por el teorema 1.5 que $\left\{\prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ para $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$. □

Corolario 2.1. *Para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$ se tiene que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1}$$

y que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

donde $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt la cual está definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Las funciones $g_k(s) = \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ son analíticas en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ y en el teorema anterior se mostró que $\left\{\prod_{k=1}^{m} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ en este dominio, por lo tanto también converge normalmente en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, del teorema 1.6 se sigue que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$. De lo anterior también se tiene que

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s(1 - \frac{1}{p_k^s})} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s}\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^{sn}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^{sn}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado. □

Corolario 2.2. *$\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$*

Demostración. Sea p un primo. Como $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0$ para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ entonces

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0$$

para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ □

Procederemos a extender la función zeta de Riemann a dominios más amplios, primero se mostrará una forma de extenderla al semiplano $\Re(s) > 0$, luego nos centraremos en dos posibles extensiones equivalentes al plano complejo, que nos permitirán deducir la ecuación funcional de la función ζ.

2.1. Extensión al semiplano $\Re(s) > 0$

Teorema 2.4. *La función $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$ es una función analítica en $\Re(s) > 0$ con $s \neq 1$ y posee un polo simple en $s = 1$ el cual tiene residuo 1.*

Demostración. Ver [1], p. 7 □

2.2. Extensiones al plano complejo

Ahora procedemos a extender la función ζ a una función meromorfa en el plano complejo por medio de la función Γ. Recordemos que una función f es meromorfa en un dominio D si f es analítica en D excepto en singularidades aisladas, las cuales son polos de la función. Sea $s \in \mathbb{C}$, tal que $\Re(s) > 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$, si $t = nx$ entonces $dt = ndx$. Así que

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-nx}(nx)^{s-1}ndx \\ &= \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}n^s dx \\ &= n^s \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nx}x^{s-1}dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx\end{aligned}$$

La última igualdad esta justificada por la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}$ en $[R, \infty)$ para $R \geq 0$. Además, como $\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1}$, ya que $|e^{-x}| \leq 1$ para todo $x \geq 0$, entonces para $\Re(s) > 1$:

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(s)}{n^s} \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx\end{aligned}$$

Para que ζ sea una función meromorfa en $\mathbb{C}$, es necesario que esta ultima integral también lo sea, pero esta diverge para $\Re(s) \leq 1$. Por lo tanto primero vamos a considerar la siguiente integral, para la cual estaremos interesados en su analiticidad, su independencia del camino de integración en el que se define y la relación con la función ζ por medio de la integral de la ecuación anterior.

Teorema 2.5. *Sea $z \in \mathbb{C} - [\{z \in \mathbb{C} : z = 2\pi ik \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup [0; \infty)]$, $s \in \mathbb{C}$ y $\{\delta, \epsilon\} \subset \mathbb{R}$ tales que $0 < \epsilon < \delta < 2\pi$. Si $g(s, z) = \dfrac{z^{s-1}}{e^z - 1}$ y $C(\delta, \epsilon)$ es el camino indicado en la figura 1, entonces*

$$I(s) = \int_{C(\delta,\epsilon)} g(s, z)dz$$

es una función entera.

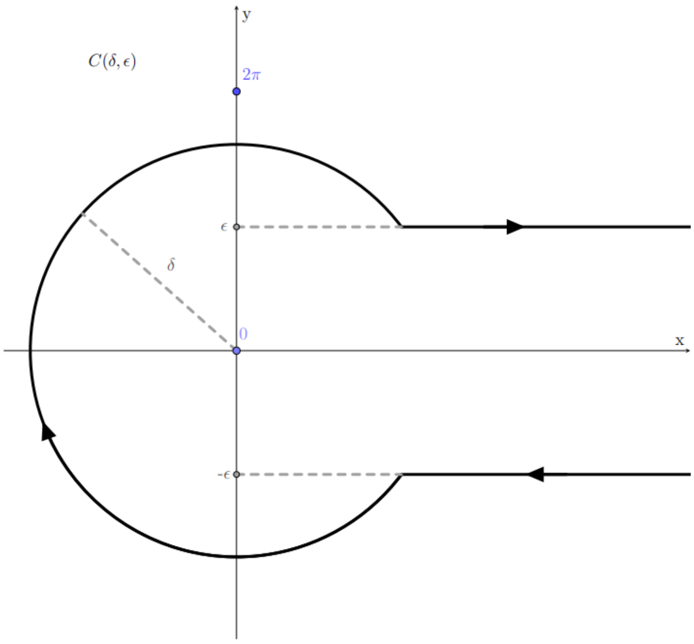

Figura 1: Camino de integración $C(\delta, \epsilon)$

Demostración. Ver [1], p. 11 □

Teorema 2.6. *La integral I es independiente del valor de ϵ y δ*

Demostración. Considere $\{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2\} \subset \mathbb{R}$ tales que $\delta_1 < \delta_2$ y$\epsilon_1 < \epsilon_2$ y $0 < \epsilon_i < \delta_i < 2\pi$ para $i \in \{1, 2\}$. Sea λ el contorno compuesto por $C_n(\delta_1, \epsilon_1)$ y $C_n(\delta_2, \epsilon_2)$, donde $n > \epsilon_2$, que es recorrido como en la figura 2: Como g es analítica para $z \in D$ y $\lambda \subset D$, entonces por el teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\lambda} g(s,z)dz \\ &= \int_{-C_n(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz + \int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{C_n(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz \right| &\le \int_{L_2} \left| \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| + \int_{L_1} \left| \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \\ &< \int_{L_2} \frac{|z|^{\alpha-1} e^{|\beta| 2\pi}}{|e^z| - 1} |dz| + \int_{L_1} \frac{|z|^{\alpha-1} e^{|\beta| 2\pi}}{|e^z| - 1} |dz| \\ &= \int_{-\epsilon_2}^{-\epsilon_1} \frac{(n^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta| 2\pi}}{e^n - 1} dy + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(n^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta| 2\pi}}{e^n - 1} dy \\ &= \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \frac{(n^2 + (-u)^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta| 2\pi}}{e^n - 1} (-du) + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(n^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta| 2\pi}}{e^n - 1} dy \\ &= 2 \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(n^2 + y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta| 2\pi}}{e^n - 1} dy \end{aligned}$$

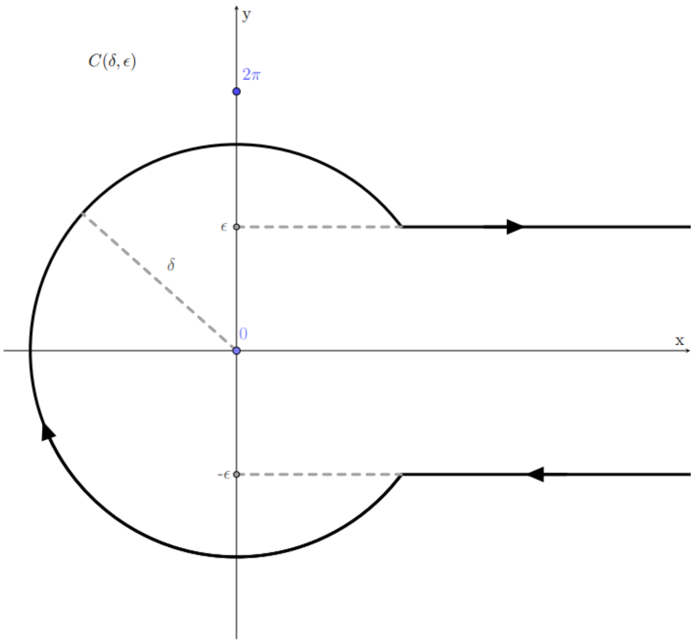

Figura 2: Contorno de integración λ

y además $n > \epsilon_2$, entonces

$$\left| \int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz \right| < 2\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(2n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^n - 1} dy$$
$$= \frac{2(2n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^n - 1}(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

Si $n \to \infty$ el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 y por lo tanto $\int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz$ también lo hace. Entonces si $n \to \infty$ en la ecuación de deducida a partir del teorema de Cauchy tenemos que

$$0 = -\int_{C_n(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz + \int_{C_n(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz$$

es decir,

$$\int_{C_n(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz = \int_{C_n(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz$$

Luego la integral $\int_{C(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz$ no depende de ϵ o δ. □

Teorema 2.7. *Para $\Re(s) > 1$ se tiene que*

$$I(s) = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}{\Gamma(1-s)}$$

Demostración. Ver [1], p. 14 □

Teorema 2.8. *La función*

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)e^{-i\pi s}}{2\pi i} I(s) \tag{5}$$

es una extensión meromorfa en el plano complejo de (4) con un polo simple en $s = 1$ *y residuo* 1.

Demostración. Ver [1], p. 17 □

Otra forma de extender la función ζ se mostrará a continuación, para esta usaremos nuevamente la función Γ y la función Theta de Jacobi.
Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) = \sigma > 1$,$n \in \mathbb{N}$, de la definición de la función Gamma tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

haciendo $t = n^2\pi x$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}(n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1} n^2\pi dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{N} e^{-n^2\pi x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} dx \\
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) dx
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad esta justificada por la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ en $[R,\infty)$ para $R \geq 0$.
Donde

$$\vartheta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$

es la función theta de Jacobi.

Teorema 2.9. *La función theta de Jacobi, satisface la ecuación funcional*

$$x^{\frac{1}{2}}\vartheta(x) = \vartheta(x^{-1}) \tag{6}$$

para $x > 0$

Demostración. Fijemos $x > 0$ y definamos

$$h(t) = e^{-\pi x t^2}$$

podemos reescribir esta función como $h(t) = f(x^{\frac{1}{2}}t)$ donde $f(t) = e^{-\pi t^2}$, por el lema 1.1 y por la proposición 1.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{h}(y) &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\hat{f}\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}f\left(\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}e^{-\pi\frac{y^2}{x}}\end{aligned}$$

usando la fórmula de suma de Poisson tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{h}(m)\\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x m^2} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}e^{-\pi\frac{m^2}{x}}\\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x m^2} &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^{-1}m^2}\\ x^{\frac{1}{2}}\vartheta(x) &= \vartheta(x^{-1})\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado.

□

Teorema 2.10. *La función ζ satisface la ecuación*

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\} \tag{7}$$

Demostración. Evaluando la función Γ en $\frac{s}{2}$ donde $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$ se tiene que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt$$

si realizamos la sustitución $t = n^2\pi x$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-(n^2\pi x)}(n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1}n^2\pi dx\\ n^{-s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx\end{aligned}$$

por lo cual al hacer la suma sobre todos los n y teniendo en cuenta que $\vartheta(x) \in \mathscr{S}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx\\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\right)dx\\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}\end{aligned}$$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}}x^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\vartheta(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}}x^{-\frac{3}{2}}\vartheta(x^{-1})dx - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{2}\int_\infty^1 u^{-\frac{s}{2}}u^{\frac{3}{2}}\vartheta(u)(-u^{-2})du - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\vartheta(u)du - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}$$

con lo cual queda demostrado. □

Teorema 2.11. *Las funciones* $\Gamma(s)$ *y* $\zeta(s)$ *satisfacen que* $\overline{\Gamma(s)} = \Gamma(\bar{s})$ *y* $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(\bar{s}) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{\bar{s}-1}dt \\ &= \int_0^\infty \overline{e^{-t}t^{s-1}}dt \\ &= \overline{\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt} \\ &= \overline{\Gamma(s)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\zeta(s)} &= \overline{\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{\bar{s}}{2}}}{\Gamma(\frac{\bar{s}}{2})}\left\{\frac{1}{\bar{s}\overline{(s-1)}} + \int_1^\infty \left(x^{\overline{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}} + x^{\overline{\frac{s}{2}-1}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\} \\ &= \zeta(\bar{s})\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado. □

2.2.1. Ecuación funcional

Una vez que se tiene la extensión meromorfa de la función ζ, es posible empezar el estudio de los ceros de esta función. Para esto, es necesario conocer la ecuación funcional de la función zeta de Riemann.

Teorema 2.12. *Para* $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^+$, *la función* ζ *satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{8}$$

Demostración. Ver [1], p. 18 □

3. Ceros de la función ζ

Por el Corolario 2.2 , para $\Re(s) > 1$, $\zeta(s) \neq 0$. Por otro lado, si $\Re(s) < 0$, por la ecuación funcional tenemos que $2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$ si y solo si $\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$ .Esto se debe a que $\Gamma(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{C}$ y $\zeta(1-s) \neq 0$ cuando $\Re(1-s) > 1$. Luego en esta región, $\zeta(s) = 0$ si $s = -2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. A partir de esto podemos clasificar los ceros de la función ζ en dos:

Definición 3.1. *Los ceros de ζ determinados por la función $\sin(\frac{s\pi}{2})$ son conocidos como los **ceros triviales***

Definición 3.2. *Los ceros **no-triviales** de la función ζ pertenecen a la región $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(s) \leq 1\}$. Esta región se conoce como la **región crítica** o la **banda crítica** de la función ζ.*

Teorema 3.1. *Los ceros no-triviales de ζ son simétricos respecto a $\Re(s) = \frac{1}{2}$*

Demostración. Ver [1], p. 21 □

Teorema 3.2. *No hay ceros no-triviales de ζ en la recta $\Re(s) = 1$ ni en la recta $\Re(s) = 0$*

Demostración. Ver [1], p. 23 □

Recapitulando, tenemos que la región libre de ceros no-triviales, señalada en verde en la figura 3, se divide en dos:

1. $\Re(s) \geq 1$, donde no existen ceros de la función ζ
2. $\Re(s) \leq 0$, donde solo existen ceros triviales y estos son de la forma $-2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$

Más aún, los ceros no triviales poseen una simetría alrededor de la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Resumimos estos hechos en la figura 3.

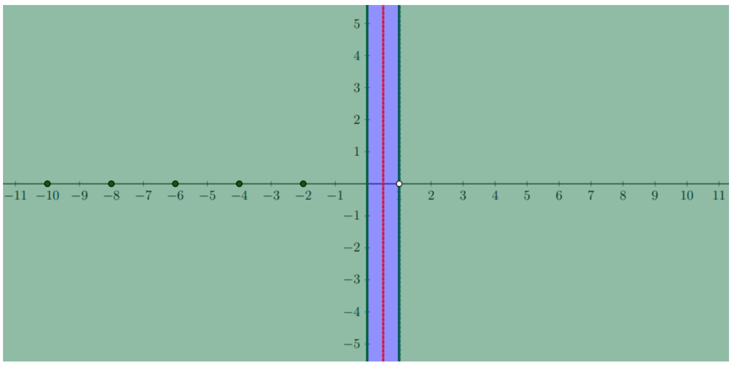

Figura 3: Región crítica de ζ

Conjetura 3.1. ***Hipótesis de Riemann*** *Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ están en la línea crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

3.1. Fórmula de Riemann - Von Mangoldt

Conociendo que la región crítica es donde se desenvuelve la hipótesis de Riemann enunciaremos teoremas sobre el comportamiento de los ceros en esta región.

Definición 3.3. *Denotamos $N(T)$ el número de ceros de la función ζ en el rectángulo definido por $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t < T\}$, es decir*

$$N(T) := \#\{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t < T, \zeta(\sigma + it) = 0\}$$

Definición 3.4. *Por conveniencia y claridad definimos la función ξ como*

$$\xi(s) := \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{9}$$

Como la función ζ tiene un polo simple en $s = 1$ se sigue que $\xi(s)$ es una función entera y los ceros de $\xi(s)$ coinciden con los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica, por lo cual trabajar con esta función nos será de utilidad. Además ξ se puede reescribir como

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

Teorema 3.3. *La función $\xi(s)$ satisface la igualdad*

$$\xi(s) = \xi(1-s) \tag{10}$$

por lo tanto, ξ es simétrica respecto a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .Adicionalmente

$$\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s}) \tag{11}$$

Demostración. Para demostrar la ecuación (10) usaremos (6) que involucra la función theta de Jacobi.

$$\begin{aligned}
\xi(1-s) &= \frac{1-s}{2}(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \\
&= \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\frac{\pi^{\frac{1-s}{2}}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}\left\{\frac{1}{(1-s)(-s)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{-\frac{1-s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\} \\
&= \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left\{\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right\} \\
&= \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \\
&= \xi(s)
\end{aligned}$$

Para la ecuación (11) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\overline{\xi(s)} &= \overline{\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)} \\
&= \frac{\bar{s}}{2}(\bar{s}-1)\pi^{\overline{-\frac{s}{2}}}\Gamma\left(\frac{\bar{s}}{2}\right)\zeta(\bar{s}) \\
&= \xi(\bar{s})
\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado. □

Para demostrar el siguiente teorema necesitaremos los siguientes lemas

Lema 3.1. $\lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{2}[\log(\frac{25}{16} + \frac{T^2}{4})^{\frac{1}{2}} - \log(\frac{T^2}{4})^{\frac{1}{2}}] = \frac{25}{16}$ *y* $\lim_{T\to\infty} T[\frac{3}{4}\arctan(\frac{2T}{5}) - \frac{3\pi}{8}] = -\frac{15}{8}$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{2}\left[\log\left(\frac{25}{16}+\frac{T^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \log\left(\frac{T^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] &= \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{4}\left[\log\left(\frac{25}{4}\frac{1}{T^2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left[\log\left(\frac{25}{4}u+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{25}{4}u+1}\frac{25}{4} \\
&= \frac{25}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} T\left[\frac{3}{4}\arctan\left(\frac{2T}{5}\right)-\frac{3\pi}{8}\right] &= \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\left[\frac{3}{4}\arctan\left(\frac{2}{5}\frac{1}{u}\right)-\frac{3\pi}{8}\right] \\
&= \frac{3}{4}\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{2}{5}\frac{1}{u^2}}{\left(\frac{2}{5}\frac{1}{u}\right)^2+1} \\
&= -\frac{3}{10}\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2+u^2} \\
&= -\frac{15}{8}
\end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *La serie* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2+1)^2}$ *es convergente.*

Demostración. Usaremos el criterio de condensación de Cauchy, por lo cual basta demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{(2^n)^2}{((2^n)^2+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{8^n}{(4^n+1)^2}$ es convergente. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8^{n+1}}{(4^{n+1}+1)^2}}{\frac{8^n}{(4^n+1)^2}} &= 8\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+1)^2}{(4^{n+1}+1)^2} \\
&= 8\left(\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4^{n+1}+1}\right)^2 \\
&= 8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
&< 1
\end{aligned}$$

por lo cual usando el criterio del cociente se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8^n}{(4^n+1)^2 n\log 2}$ converge así que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2+1)^2\log n}$ también converge . □

Lema 3.3. *Existe* $C>0$ *tal que para todo* $s=2+it$, $t\in\mathbb{R}$ *se satisface que* $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leq C$

Demostración. Usando el corolario 2.1 tenemos que

$$\left|\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\log p_k|}{|p_k^s-1|} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log p_k}{|p_k^s|-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log p_k}{p_k^2-1} \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2-1}$$

donde la última serie es convergente, para ver esto usaremos el criterio de condensación de Cauchy, así que basta ver que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^n\log 2^n}{(2^n)^2-1}$ converge. Para eso notemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\log 2^{n+1}}{(2^{n+1})^2-1}\frac{(2^n)^2-1}{2^n\log 2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(4^n-1)}{n(4^{n+1}-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{4^n-1}{4^{n+1}-1} \\
&= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \\
&< 1
\end{aligned}
$$

por lo cual usando el criterio del cociente se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \log 2^n}{(2^n)^2-1}$ converge, con lo cual queda demostrado que existe $C > 0$ tal que para todo $s = 2 + it$, $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq C$. □

El siguiente teorema permite expresar el comportamiento de la cantidad de ceros no triviales en el conjunto $\{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t < T\}$, en particular si $T \to \infty$ la fórmula muestra que $N(T) \to \infty$ lo cual corroborá la existencia de infinitos ceros no triviales en la banda crítica.

Teorema 3.4. ***(Fórmula de Riemann - Von Mangoldt)*** *Para $N(T)$ definido anteriormente tenemos que*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log(\frac{T}{2\pi}) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

Demostración. En lugar de trabajar con $\zeta(s)$, haremos uso de la función $\xi(s)$. Ya que $\xi(s)$ tiene los mismos ceros que $\zeta(s)$ en la banda crítica y $\xi(s)$ es una función entera así que podemos aplicar el principio del argumento a $\xi(s)$ en lugar de $\zeta(s)$. Sea R el contorno rectangular orientado positivamente con vértices -1,2,$2 + iT$ y $-1 + iT$. Por el principio del argumento, tenemos que

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} \Delta_R \arg(\xi(s))$$

Si dividimos R en tres subcontornos como se muestra a continuación.

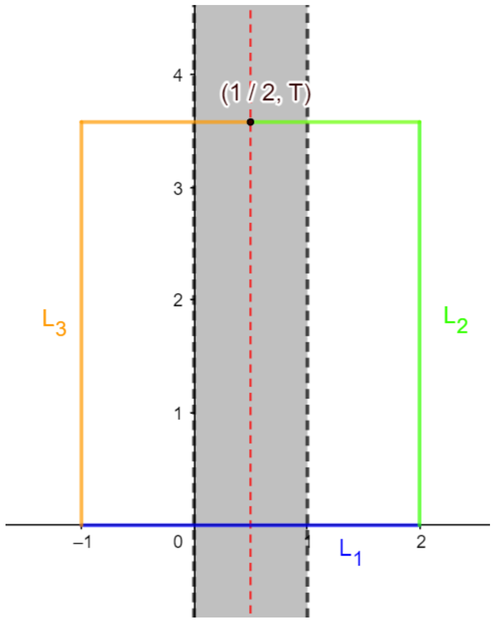

Figura 4: Contorno R divido en L_1, L_2, L_3

Sea L_1 el segmento de línea horizontal desde -1 a 2. Sea L_2 el contorno que consiste en el segmento de línea vertical desde 2 hasta $2 + iT$ y luego el segmento de línea horizontal desde $2 + iT$ hasta $\frac{1}{2} + iT$.

Finalmente sea L_3 el contorno que consiste en el segmento de línea horizontal desde $\frac{1}{2}+iT$ hasta $-1+iT$ y luego el segmento de línea vertical desde $-1+iT$ hasta -1. Ahora

$$\Delta_R \arg(\xi(s)) = \Delta_{L_1} \arg(\xi(s)) + \Delta_{L_2} \arg(\xi(s)) + \Delta_{L_3} \arg(\xi(s))$$

Por lo cual debemos hallar como cambia el argumento de $\xi(s)$ a lo largo de cada contorno.
Para empezar no hay cambio en el argumento a lo largo de L_1 ya que los valores de $\xi(s)$ son reales en ese contorno y por lo tanto todos los argumentos de $\xi(s)$ son cero. Entonces

$$\Delta_{L_1} \arg(\xi(s)) = 0$$

De la ecuación funcional de $\xi(s)$ y la ecuación (10) tenemos que

$$\xi(\sigma+it) = \xi(1-\sigma-it) = \overline{\xi(1-\sigma+it)}$$

así que el cambio del argumento de $\xi(s)$ cuando s se mueve a lo largo de L_3 es el mismo cambio en el argumento de $\xi(s)$ cuando s se mueve a lo largo de L_2. Por lo tanto junto a lo anterior mencionado obtenemos

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} 2\Delta_{L_2} \arg(\xi(s)) = \frac{1}{\pi}\Delta_{L_2} \arg(\xi(s)) \tag{12}$$

al usar la relación $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ tenemos que

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

así que

$$\Delta_{L_2} \arg(\xi(s)) = \Delta_{L_2} \arg(s-1) + \Delta_{L_2} \arg(\pi^{-\frac{s}{2}}) + \Delta_{L_2} \arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) + \Delta_{L_2} \arg(\zeta(s))$$

Procedemos a calcular cada uno de estos cambios por separado,

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg(s-1) &= \arg(-\frac{1}{2}+iT) - \arg(1) \\
&= \arg(-\frac{1}{2}+iT) \\
&= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{2T}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + O(T^{-1})
\end{aligned}$$

ya que $\arctan\left(\frac{1}{2T}\right) = O(T^{-1})$. Ahora consideramos

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg(\pi^{-\frac{s}{2}}) &= \Delta_{L_2} \arg(e^{-\frac{s}{2}\log\pi}) \\
&= \arg(e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+iT)\log\pi}) - \arg(e^{-\frac{2}{2}\log\pi}) \\
&= \arg(e^{(-\frac{1}{4}-i\frac{T}{2})\log\pi}) \\
&= -\frac{T}{2}\log\pi
\end{aligned}$$

Ahora usaremos la fórmula de Stirling para dar una estimación asintótica de $\Gamma(s)$ (ver ecuación (5) del capítulo 10 de [6]):

$$\log\Gamma(s) = (s-\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(|s|^{-1})$$

la cual es válida cuando $|s|$ tiende a ∞ y el argumento satisface $-\pi + \delta < \arg s < \pi + \delta$ para todo $\delta > 0$ fijo.

$$\begin{aligned}
\Delta_{L_2} \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) &= \arg \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+iT\right)+1\right) - \arg \Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right) \\
&= \Im\left(\log \Gamma\left(\frac{5}{4}+i\frac{T}{2}\right)\right) \\
&= \Im\left\{\left(\frac{3}{4}+i\frac{T}{2}\right)\log\left(\frac{5}{4}+i\frac{T}{2}\right) - \frac{5}{4} - i\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\log 2\pi + O(T^{-1})\right\} \\
&= \frac{T}{2}\log\left(\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{T^2}{4}}\right) + \frac{3}{4}\arg\left(\frac{5}{4}+i\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\
&= \frac{T}{2}\log\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{T^2}{4}}\right) + \frac{3}{4}\arctan\frac{2T}{5} - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) \\
&= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} + \frac{3}{8}\pi - \frac{T}{2} + O(T^{-1})
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia del lema 3.1 y el teorema 1.13
Juntando todo esto resultados obtenemos que

$$\begin{aligned}
N(T) &= \frac{1}{\pi}\Delta_{L_2}\arg(\xi(s)) \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\Delta_{L_2}\arg(s-1) + \Delta_{L_2}\arg(\pi^{-\frac{s}{2}}) + \Delta_{L_2}\arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) + \Delta_{L_2}\arg(\zeta(s))\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + O(T^{-1}) - \frac{T}{2}\log\pi + \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} + \frac{3}{8}\pi - \frac{T}{2} + O(T^{-1}) + \Delta_{L_2}\arg(\zeta(s))\right\} \\
&= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \mathcal{S}(T) + O(T^{-1})
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{S}(T) := \frac{1}{\pi}\Delta_{L_2}\arg(\zeta(s)) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)$$

nótese que también $\mathcal{S}(T)$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(T) &= \frac{1}{\pi}\left[\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right) - \arg\zeta(2)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\Im\log\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right) - \Im\log\zeta(2)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\Im\log\zeta(s)\Big|_2^{\frac{1}{2}+iT} \\
&= \frac{1}{\pi}\Im\int_{L_2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds
\end{aligned}$$

para estimar la última integral teniendo en cuenta que L_2 consiste en los segmentos $[2; 2+iT]$ y $[2+iT; \frac{1}{2}+iT]$ podemos escribir

$$\frac{1}{\pi}\Im\int_{L_2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = \frac{1}{\pi}\Im\int_2^{2+iT}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds + \frac{1}{\pi}\Im\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds$$

se observa que la primera integral es acotada ya que

$$\left|\Im\int_2^{2+iT}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right| \le \left|\int_2^{2+iT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2}^{2+iT}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{-1}{n^s\log n}\Big|_{2}^{2+iT}\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^{2+iT}}\right)\Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\left(\Big|\frac{1}{n^2}\Big|+\Big|\frac{1}{n^{2+iT}}\Big|\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2\log n} \\
&\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2} \\
&= 2\frac{-\zeta'(2)}{\zeta(2)}
\end{aligned}
$$

donde la primera igualad está justificada por la convergenica uniforme y el último valor es una cota postiva ya que $\zeta(s)$ es analítica en 2 y $\zeta'(2)$ es negativo. Con lo cual únicamente queda estimar la integral del intervalo $[2+iT; \frac{1}{2}+iT]$.
Haciendo uso de la función $\xi(s)$, la cual se puede escribir como

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

y también

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})e^{\frac{s}{\rho}}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ y ρ recorre todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ (Fórmula de Hadamard).
Al tomar logaritmo y derivar en ambas igualdades obtenemos que

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

y

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{\rho}\right)$$

por lo tanto al igualar ambas expresiones resulta que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{\rho}\right) \tag{13}$$

Tomando $t \geq 2$ y $1 \leq \sigma \leq 2$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
-\Re\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right] &= -B - \frac{1}{2}\log\pi + \Re\left[\frac{1}{s-1}\right] + \Re\left[\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\right] - \Re\left[\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\right] \\
&\leq -B - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{4} + A_1\log t - \sum_{\rho}\Re\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{\rho}\right) \\
&\leq A_2\log t - \sum_{\rho}\Re\left(\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned}
$$

donde la primera desigualdad esta justificada ya que el término que involucra la función Γ tiene orden $O(|s|)$ y por tanto también $O(\log t)$ (ver ecuación (5) del capítulo 10 de [6]). Al tomar $s = 2 + iT$ en la ecuación anterior y usando el lema 3.3 se obtiene que

$$\sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho}\right) \leq A_2 \log T + \Re\left[\frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)}\right] \leq A_3 \log T$$

Si $\rho = \beta + i\gamma$ es un cero no trivial de $\zeta(s)$, se tiene que $\Re(\frac{1}{\rho}) > 0$ y

$$\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T-\gamma)^2}$$

por lo cual

$$\frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \leq \Re\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho}\right) \leq A_3 \log T$$

usando el teorema 1.13 y la anterior desigualdad resulta que

$$\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \leq \Re\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho}\right) = O(\log t)$$

así que

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\log t)$$

Usando nuevamente (13) con s y $2 + it$ donde $t > 2$ no es la coordenada de ningún ρ,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B + \frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{\rho}\right)$$

y

$$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = B + \frac{1}{2}\log \pi - \frac{1}{1+it} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(2+\frac{it}{2})}{\Gamma(2+\frac{it}{2})} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{2+it-\rho} - \frac{1}{\rho}\right)$$

al restar obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1+it} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{s}{2}+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(2+\frac{it}{2})}{\Gamma(2+\frac{it}{2})} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right)$$

como $t > 1$ se tiene que $\frac{1}{t} < \log t$, usando el lema 3.3 y la fórmula de Stirling se sigue que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right)$$

Para términos que cumplan que $|\gamma - t| \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right| &= \left|\frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+it-\rho)}\right| \\ &= \frac{|2-\sigma|}{\sqrt{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\sqrt{(2-\beta)^2+(t-\gamma)^2}} \\ &\leq \frac{3}{|\gamma-t|^2} \end{aligned}$$

y nuevamente por el teorema 1.13 obtenemos que $O(\frac{3}{|\gamma-t|^2}) = O(\frac{1}{1+(T-\gamma)^2})$ por lo tanto

$$\sum_{|\gamma-t|>1}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right) = O(\log t)$$

y para $|\gamma - t| < 1$ se tiene que $|2 + it - \rho| \geq 1$ así que

$$\sum_{|\gamma - t| \geq 1} \frac{1}{2 + it - \rho} = O(\log t)$$

juntando todo esto

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_{\rho, |\gamma - t| < 1} \frac{1}{s - \rho}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Im\Big[\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds\Big] &= O(\log T) + \Im\Big[\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \sum_{\rho, |\gamma - t| < 1} \frac{1}{s - \rho} ds\Big] \\
&= O(\log T) + \sum_{\rho, |\gamma - t| < 1} \Delta \arg(s - \rho) \\
&= O(\log T)
\end{aligned}$$

ya que $|\Delta \arg(s - \rho)| < \pi$ en $[2 + iT; \frac{1}{2} + iT]$,es decir

$$\begin{aligned}
N(T) &= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \mathcal{S}(T) + O(T^{-1}) \\
&= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + O(\log T) + O(T^{-1}) \\
&= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la fórmula de Riemann - von Mangoldt. □

3.2. Teorema de Hardy

El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes a favor de la hipótesis de Riemann. Corrobora además el comportamiento de $N(T)$ cuando $T \to \infty$ encontrado en el teorema anterior y establece una de las condiciones necesarias para que la hipótesis sea verdadera, para poder demostrarlos necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 3.4. *$\xi(\frac{1}{2} + it) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de las igualdades (10) y (11), ya que

$$\begin{aligned}
\overline{\xi\big(\frac{1}{2} + it\big)} &= \overline{\xi\big(1 - (\frac{1}{2} + it)\big)} \\
&= \overline{\xi\big(\frac{1}{2} - it\big)} \\
&= \xi\big(\frac{1}{2} + it\big)
\end{aligned}$$

esto es $\overline{\xi(\frac{1}{2} + it)} = \xi(\frac{1}{2} + it)$, por lo tanto $\xi(\frac{1}{2} + it) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Lema 3.5. *La función $\xi(\frac{1}{2} + it)$ satisface $\xi(\frac{1}{2} + it) = O(|t|^3 e^{-\frac{\pi}{4}|t|})$.*

Demostración. Recordemos que

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

por lo cual debemos estimar el comportamiento de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, para esto notemos que al usar la expresión de $\zeta(s)$ del teorema 2.4 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right| &= \left|\frac{\frac{1}{2}+it}{-\frac{1}{2}+it} - (\frac{1}{2}+it)\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{\frac{3}{2}+it}}dx\right| \\
&\leq 1 + |\frac{1}{2}+it|\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx \\
&= 1 + |\frac{1}{2}+it|2 \\
&\leq 2 + 2|t| \\
&\leq 4|t|
\end{aligned}$$

si $|t| \to \infty$, esto es $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(|t|)$. También se tiene que $|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})| = O(e^{-\frac{\pi}{4}|t|})$ si $|t| \to \infty$, en efecto teniendo en cuenta el teorema 1.13 y la fórmula de Stirling existe $A > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|\Re\left(\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right) - \Re\left((-\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\log(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}) - \frac{1}{4} - i\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\log 2\pi\right)\right| &\leq A|t^{-1}| \\
\left|\ln\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right| + \frac{t}{2}\arg\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log 2\pi\right| &\leq A|t^{-1}| \\
\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right|\left|\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right|^{\frac{1}{4}} e^{\frac{t}{2}\arctan(2t)} e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log 2\pi} &\leq e^{A|t^{-1}|} \\
\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right| &\leq B\left|\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}\arctan(2t)} e^{C|t^{-1}|} \\
\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right| &\leq B\left|\frac{1}{4}\right|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{2}\arctan(2t)} e^{C|t^{-1}|} \\
\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right| &\leq Ce^{-\frac{t}{2}\arctan(2t)} \\
\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right| &\leq De^{-\frac{\pi}{4}|t|}
\end{aligned}$$

donde $B = e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2\pi}$, la sexta desigualdad está justificada ya que $e^{A|t^{-1}|}$ es acotada si $|t| \to \infty$ y la última desigualdad es consecuencia de que $e^{-\frac{t}{2}\arctan(2t)} = O(e^{-\frac{\pi}{4}|t|})$.
De estos dos resultados se obtiene que

$$\begin{aligned}
\left|\xi(\frac{1}{2}+it)\right| &= \left|(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})(-\frac{1}{2}+it)\pi^{-1-i\frac{t}{2}}\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\zeta(\frac{1}{2}+it)\right| \\
&= \left|\frac{1}{8}-\frac{t^2}{2}\right|\pi^{-1}\left|\Gamma(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2})\right|\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right| \\
&\leq D\left(\frac{1}{8}+\frac{|t|^2}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{4}|t|}|t| \\
&= M|t|^3 e^{-\frac{\pi}{4}|t|}
\end{aligned}$$

esto es $\xi(\frac{1}{2}+it) = O(|t|^3 e^{-\frac{\pi}{4}|t|})$, con lo cual queda demostrado. □

Lema 3.6. *La función*

$$h(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it}dt$$

es analítica en $W = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$.

Demostración. Notemos que para $z \in W$ fijo $h(z)$ converge, en efecto

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt\Big| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\frac{1}{2}+it)|}{|t^2+\frac{1}{4}|} |z^{-\frac{1}{2}+it}| dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi(\frac{1}{2}+it)|}{t^2+\frac{1}{4}} |z^{-\frac{1}{2}}||z^{it}| dt \\
&\leq M|z^{-\frac{1}{2}}| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^3 e^{-\frac{\pi}{4}|t|}}{t^2} |z^{it}| dt \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{\pi}{4}|t|} |z^{it}| dt \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\int_{-\infty}^{0} -te^{\frac{\pi}{4}t} |z^{it}| dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\frac{\pi}{4}t} |z^{it}| dt\Big] \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\int_{0}^{\infty} te^{-\frac{\pi}{4}t} |z^{-it}| dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\frac{\pi}{4}t} |z^{it}| dt\Big] \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\int_{0}^{\infty} te^{-\frac{\pi}{4}t} e^{t\arg z} dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\frac{\pi}{4}t} e^{-t\arg z} dt\Big] \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\int_{0}^{\infty} te^{-t(\frac{\pi}{4}-\arg z)} dt + \int_{0}^{\infty} te^{-t(\frac{\pi}{4}+\arg z)} dt\Big] \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\int_{0}^{\infty} te^{-at} dt + \int_{0}^{\infty} te^{-bt} dt\Big] \\
&= M|z^{-\frac{1}{2}}| \Big[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big]
\end{aligned}$$

donde $a = \frac{\pi}{4} - \arg z$, $b = \frac{\pi}{4} + \arg z$ son valores positivos ya que $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$. Ahora

$$\begin{aligned}
h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt \\
&= g(z) + f(z)
\end{aligned}$$

veamos que $f(z), g(z)$ son analíticas en W, en efecto para $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(z) = \int_{0}^{n} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt$$

por el teorema 1.1. $f_n(z)$ es analítica en W para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalmente a $f(z)$ ya que

$$\begin{aligned}
|f(z) - f_n(z)| &= \Big|\int_{n}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt\Big| \\
&\leq M|z^{-\frac{1}{2}}| \int_{n}^{\infty} te^{-bt} dt \\
&\leq M_1 \Big[\frac{n}{b} + \frac{1}{b^2}\Big] e^{-bn} \\
&= \epsilon_n
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $|z^{-\frac{1}{2}}|$ está acotada en subconjuntos compactos de W y $\epsilon_n \to 0$ si $n \to \infty$. Por lo tanto $f(z)$ es analítica en W, análogamente se obtiene el resultado para $g(z)$ con lo cual se sigue que $h(z)$ es analítica en W. □

Teorema 3.5. ***(Teorema de Hardy)*** *Hay infinitos ceros de la función $\zeta(s)$ en la línea crítica.*

Demostración. Para poder realizar la demostración haremos uso de la transformada de Mellin la cual nos dice que si

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)t^{-s}ds$$

ahora recordando la ecuación (9) y la ecuación

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx$$

que se obtuvo en la deducción de la ecuación (7) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx \\
\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} &= \int_0^\infty u^{s-1}\big(\vartheta(u^2)-1\big)du \\
\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} &= \int_0^\infty u^{s-1}\left(\vartheta(u^2)-1-\frac{1}{u}\right)du
\end{aligned}$$

al usar esta igualdad en $1-s$ y teniendo en cuenta la igualdad (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2\xi(1-s)}{(1-s)((1-s)-1)} &= \int_0^\infty u^{(1-s)-1}\left(\vartheta(u^2)-1-\frac{1}{u}\right)du \\
\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} &= \int_0^\infty u^{-s}\left(\vartheta(u^2)-1-\frac{1}{u}\right)du
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de inversión de Mellin obtenemos

$$\vartheta(u^2)-1-\frac{1}{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{2\xi(s)}{s(s-1)}u^{s-1}ds \tag{14}$$

donde $\vartheta(u^2)-1-\frac{1}{u}$ está definida para $u \in \mathbb{R}$, si extendemos está función a una función de variable compleja se obtiene que la función

$$\vartheta(z^2)-1-\frac{1}{z}$$

está definida en donde $\vartheta(z^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z^2}$ esté definida, esto es, donde la serie converja. Para ver en que región del plano complejo se satisface está condición notemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\pi z^2}\right)^{n^2}+1$$

para que la última serie sea convergente es necesario que $|e^{-\pi z^2}| < 1$ ya que en ese caso se obtiene que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\pi z^2}\right)^{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|e^{-\pi z^2}|^{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|e^{-\pi z^2}|^{n}$$

en donde esta última serie es una serie geométrica convergente. Por lo tanto si escribimos $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|e^{-\pi z^2}| &< 1 \\
|e^{-\pi(a^2-b^2+iab)}| &< 1 \\
e^{-\pi(a^2-b^2)} &< 1 \\
-\pi(a^2-b^2) &< 0 \\
\pi b^2 &< \pi a^2 \\
\frac{b^2}{a^2} &< 1 \\
|\frac{b}{a}| &< 1 \\
-1 < \frac{b}{a} &< 1 \\
-\frac{\pi}{4} < \arctan\big(\frac{b}{a}\big) &< \frac{\pi}{4} \\
-\frac{\pi}{4} < \arg z &< \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Por lo cual $\vartheta(z^2)$ está definida en $W = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ y además es analítica en ese dominio. Notemos que $\vartheta(z^2)$ y sus derivadas se aproximan a 0 cuando z se aproxima a $e^{i\frac{\pi}{4}}$ (por ejemplo a lo largo de $|z| = 1$ en W). En efecto, usando la ecuación funcional $z^{\frac{1}{2}}\vartheta(z^2) = \vartheta(z^{-1})$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\vartheta(z^2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z^2} e^{\pi n^2 i} e^{-\pi n^2 i} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2(z^2-i)}(-1)^n \\
&= ... + e^{-\pi 16(z^2-i)} - e^{-\pi 9(z^2-i)} + e^{-\pi 4(z^2-i)} - e^{-\pi(z^2-i)} + 1 - e^{-\pi(z^2-i)} + e^{-\pi 4(z^2-i)} - e^{-\pi 9(z^2-i)} + ... \\
&= ... - e^{-\pi 16(z^2-i)} - e^{-\pi 9(z^2-i)} - e^{-\pi 4(z^2-i)} - e^{-\pi(z^2-i)} - 1 - e^{-\pi(z^2-i)} - e^{-\pi 4(z^2-i)} - e^{-\pi 9(z^2-i)} - ... \\
&\qquad + 2(... + e^{-\pi 16(z^2-i)} + e^{-\pi 4(z^2-i)} + 1 + e^{-\pi 4(z^2-i)} + e^{-\pi 16(z^2-i)} ...) \\
&= -\vartheta(z^2-i) + 2\vartheta(4(z^2-i)) \\
&= -\frac{1}{(z^2-i)^{\frac{1}{2}}}\vartheta\left(\frac{1}{z^2-i}\right) + \frac{1}{(z^2-i)^{\frac{1}{2}}}\vartheta\left(\frac{1}{4(z^2-i)}\right) \\
&= \frac{1}{(z^2-i)^{\frac{1}{2}}}\Bigg[...e^{-\frac{\pi 16}{4(z^2-i)}} + e^{-\frac{\pi 9}{4(z^2-i)}} + e^{-\frac{\pi 4}{4(z^2-i)}} + e^{-\frac{\pi}{4(z^2-i)}} + 1 + e^{-\frac{\pi}{4(z^2-i)}} + e^{-\frac{\pi 4}{4(z^2-i)}} + e^{-\frac{\pi 9}{4(z^2-i)}} + ... \\
&\qquad ... - e^{-\frac{\pi 4}{z^2-i}} - e^{-\frac{\pi}{z^2-i}} - 1 - e^{-\frac{\pi}{z^2-i}} - e^{-\frac{\pi 4}{z^2-i}} - ...\Bigg] \\
&= \frac{1}{(z^2-i)^{\frac{1}{2}}} \sum_{nimpar}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2}{4(z^2-i)}}
\end{aligned}$$

Como $u^k e^{-\frac{1}{u}}$ se aproxima a 0 cuando $u \to 0^+$ para todo entero k se sigue que $\vartheta(z^2)$ y todas sus derivadas se aproximan a 0 cuando z se aproxima a $e^{\frac{i\pi}{4}}$ en el dominio W. Retomando la ecuación (14) al hacer la sustitución $s = \frac{1}{2} + it$ del lado derecho y al extender la función a variable compleja se obtiene la función

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt$$

la cual es analítica en $z \in W$ por el lema 3.6., por lo tanto como las extensiones de cada lado de la igualdad (14) son analíticas en W y la igualdad se cumple para todo $z \in \mathbb{R}^+$ el cual es un conjunto de puntos de acumulación de W por el teorema 1.4 se sigue que la igualdad es cierta para todo $z \in W$, esto es

$$\vartheta(z^2) - 1 - \frac{1}{z} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it} dt \tag{15}$$

Si aplicamos el operador $z\frac{d^2}{dz^2}z$ a ambos lados de (15) obtenemos

$$\begin{aligned} z\frac{d^2}{dz^2}z\left(\vartheta(z^2) - 1 - \frac{1}{z}\right) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z\frac{d^2}{dz^2}z\left(\frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}+it}\right) dt \\ H(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\xi(\frac{1}{2}+it)}{t^2+\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}+it}\right) dt \\ H(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z\xi\left(\frac{1}{2}+it\right) z^{-\frac{3}{2}+it} dt \\ H(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) z^{-\frac{1}{2}+it} dt \end{aligned}$$

donde es válido usar el operador dentro de la integral ya que el lado derecho de la ecuación al ser una función analítica de z tiene representación como una serie de potencias en la cual la convergencia es uniforme por lo cual es válido derivar término a término. Además

$$H(z) := z\frac{d^2}{dz^2}z\left(\vartheta(z^2) - 1 - \frac{1}{z}\right)$$

por como se define $H(z)$ se tiene que está función y todas sus derivadas se aproximan a 0 cuando z se aproxima a $e^{i\frac{\pi}{4}}$, esto se debe a que $H(z)$ y sus derivadas son combinaciones de términos de la forma $z^k\vartheta(z^2)$ y $\vartheta(z^2)$ al igual que sus derivadas se aproximan a 0 cuando z se aproxima a $e^{i\frac{\pi}{4}}$. Usando la serie de Taylor de la función exponencial obtenemos

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}}H(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) z^{it} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\log z)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (i\log z)^n \end{aligned}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\pi n!}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^n dt$$

como $\xi(s)$ es simétrica respecto a la línea crítica se tiene que

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{1}{\pi(2n+1)!}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt \\ &= \frac{1}{\pi(2n+1)!}\left[\int_{-\infty}^{0} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt + \int_{0}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi(2n+1)!}\left[-\int_{\infty}^{0} \xi\left(\frac{1}{2}-it\right) (-t)^{2n+1} dt + \int_{0}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi(2n+1)!}\left[-\int_{0}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt + \int_{0}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right) t^{2n+1} dt\right] \end{aligned}$$

$$= 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, además

$$c_{2n} = \frac{2}{\pi(2n)!}\int_0^\infty \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt$$

Supongamos que el teorema de Hardy es falso. Entonces teniendo en cuenta el lema 3.4. la función $\xi(\frac{1}{2}+it)$ tiene un número finito de ceros y $\xi(\frac{1}{2}+it)$ no cambia de signo a partir de algún $T > 0$. Por ejemplo si $\xi(\frac{1}{2}+it)$ es positivo para $t \geq T$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\pi(2n)!c_{2n}}{2} &= \int_0^\infty \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt \\
&= \int_0^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt + \int_{T+2}^\infty \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt \\
&\geq \int_0^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt \\
&= \int_0^{T+1} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt + \int_{T+1}^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt \\
&\geq \int_0^{T+1} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)t^{2n}dt + \int_{T+1}^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)(T+1)^{2n}dt \\
&\geq -\int_0^{T} \left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|T^{2n}dt + A(T+1)^{2n} \\
&= A(T+1)^{2n} - BT^{2n}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad está justificada porque la función $\xi(\frac{1}{2}+it)t^{2n} + |\xi(\frac{1}{2}+it)|T^{2n}$ es positiva en el intervalo $[0,T]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además las constantes

$$A = \int_0^T \left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt \ , \ B = \int_{T+1}^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2}+it\right)dt$$

son positivas , por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_{2n} > 0$ para todo $n \geq N$. Análogamente si se supone que $\xi(\frac{1}{2}+it)$ es negativo para $t \geq T$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_{2n} < 0$ para todo $n \geq N$.
Teniendo en cuenta que

$$z^{\frac{1}{2}}H(z) = \sum_{n=0}^\infty c_{2n}(i\log z)^{2n}$$

al hacer $z \to e^{i\frac{\pi}{4}}$ ambos lados de la igualdad deben tender al mismo valor, si hacemos la sustitución $w = i\log z$ obtenemos

$$e^{-\frac{w}{2}}H(e^{-iw}) = \sum_{n=0}^\infty c_{2n}w^{2n}$$

al derivar esta expresión $2N$ veces se obtiene

$$\frac{d^{2N}}{dw^{2N}}\left(e^{-\frac{w}{2}}H(e^{-iw})\right) = \sum_{n=N+1}^\infty d_{2n}w^{2n}$$

donde las constantes d_{2n} tienen todas el mismo signo. De la sustitución se obtiene que si $z \to e^{i\frac{\pi}{4}}$ entonces $w \to -\frac{\pi}{4}$ por lo tanto se debe cumplir que

$$\lim_{w\to-\frac{\pi}{4}} \frac{d^{2N}}{dw^{2N}}\left(e^{-\frac{w}{2}}H(e^{-iw})\right) = \lim_{w\to-\frac{\pi}{4}} \sum_{n=N+1}^\infty d_{2n}w^{2n}$$

pero
$$\lim_{w \to -\frac{\pi}{4}} \sum_{n=N+1}^{\infty} d_{2n} w^{2n} \neq 0$$
ya que todos los términos de la serie tienen el mismo signo y son todos distintos de 0. Por otro lado
$$\lim_{w \to -\frac{\pi}{4}} \frac{d^{2N}}{dw^{2N}} \left(e^{-\frac{w}{2}} H(e^{-iw}) \right) = 0$$
ya que derivar respecto a w se puede ver como el operador
$$\frac{d^k}{dw^k} = \sum_{j=i}^{k} \alpha_j z^j \frac{d^j}{dz^j}$$
donde las $\alpha_j \in \mathbb{C}$, con lo cual el límite anterior es en efecto 0 ya que $H(z)$ y todas sus derivadas tienden a 0 cuando $z \to e^{i\frac{\pi}{4}}$.
La contradicción a la que hemos llegado se debe a suponer que el teorema de Hardy es falso, por lo tanto hemos demostrado el teorema de Hardy. $\square$

Conclusiones

Con este trabajo se pudo evidenciar la necesidad de representar de distintas formas la función zeta de Riemann. Para los resultados obtenidos fue fundamental la representación que involucra la función theta de Jacobi, ya que es esta la que permite no trabajar directamente con la función zeta de Riemann a la hora de contar la cantidad de ceros en la región crítica y entender el comportamineto de estos sobre la línea crítica. Es de recalcar que para el estudio de este tema se necesitaron resultados sobre integración con medida, series de Fourier y transformada de Mellin, lo cual evidencia claramente la complejidad del problema ya que involucra distintas ramas de las matemáticas además del análisis complejo. Como trabajo futuro se propone investigar la conexión que posee la función zeta con la teoría de números.

Bibliografía

[1] Pedraza Luis E. , Sobre la función Zeta de Riemann. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Programa de Matemáticas

[2] P. Borwein y col. The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike. CMS Books in Mathematics. Springer, 2008

[3] Jakob Glas, Kevin Yeh. The Classical Theta Function and the Riemann Zeta Function. Seminar on Modular Forms, ETH Zurich, 2019

[4] T. Gamelin. Complex Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2001.

[5] R. Bartle. The Elements of Integration. John Wiley & Sons, New York 1966.

[6] H. Davenport. Multiplicative Number Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.