Semigrupos cuánticos de Markov: Pasado, presente y futuro

Quantum Markov semigroups (QMS): past, present and future panorama

Semigrupos quánticos de Markov: Pasado, pressente e futuro

Julián A Agredo E[1]*

[1] Matemático, MSc, Phd. Grupo de investigación GIMATH, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Bogotá, Colombia
Email: julian.agredo@escuelaing.edu.co

Recibido: marzo 03 de 2017 **Aceptado**: abril 14 de 2017

Resumen

Los semigrupos cuánticos de Markov (SCM) son una extensión no conmutativa de los semigrupos de Markov definidos en probabilidad clásica. Ellos representan una evolución sin memoria de un sistema microscopico acorde a las leyes de la física cuántica y a la estructura de los sistemas cuánticos abiertos. Esto significa que la dinámica reducida del sistema principal es descrita por un espacio de Hilbert separable complejo $\mathfrak{h}$ por medio de un semigrupo $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_t)_t\geq 0$, el cual actúa sobre una subálgebra de von Neumann $\mathfrak{M}$ del álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ de todos los operadores lineales acotados definidos en $\mathfrak{h}$. Por simplicidad, algunas veces asumiremos que $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. El semigrupo $\mathcal{T}$ corresponde al cuadro de Heisenberg en el sentido que dado cualquier observable x, $\mathcal{T}_t(x)$ describe su evolución en el tiempo t. De esta forma, dada una matriz de densidad p, su dinámica (cuadro de Schrödinger) es dada por el semigrupo predual $\mathcal{T}_{*t}(\rho)$, donde $tr(\rho\mathcal{T}_t(x))=tr(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x)$, $tr(\cdot)$ denota la operación traza. En este trabajo ofrecemos una exposición de varios resultados básicos sobre SCM. Además discutimos aplicaciones de SCM en teoría de la información cuántica y computación cuántica.

Palabras clave: Computación cuántica, semigrupos de Markov cuánticos, teoria de la información.

Abstract

Quantum Markov semigroups (SCM) are a non-commutative extension of the Markov semigroups defined in classical probability. They represent an evolution without memory of a microscopic system according to the laws of quantum physics and the structure of open quantum systems. This means that the reduced dynamics of the main system is described by a complex separable Hilbert space $\mathfrak{h}$ by means of a semigroup $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_t)t\geq 0$, acting on a von Neumann algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ of the linear operators defined on $\mathfrak{h}$. For simplicity, we will sometimes assume that $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. The semigroup $\mathcal{T}$ corresponds to the Heisenberg picture in the sense that given any observable x, $\mathcal{T}_t(x)$ describes its evolution at time t. Thus, given a density matrix p, its dynamics (Schrödinger's picure) is given by the predual semigroup $\mathcal{T}_{*t}(\rho)$, where $tr(\rho\mathcal{T}_t(x))=tr(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x)$, $tr(\cdot)$ denote trace of a matrix. In this paper we offer an exposition of several basic results on SCM. We also discuss SCM applications in quantum information theory and quantum computing.

Key words: Quantum computation, quantum Markov semigroup, information theory.

Resumo

Os semigrupos quânticos de Markov (SCM) são uma extensão não-comutativa de semigrupos de Markov semigroups definidos na probabilidade clássica. Eles representam uma evolução sem memória de um sistema microscópico acorde com as leis da física quântica e da estrutura de sistemas quânticos abertos. Isto significa que a dinâmica reduzida do sistema principal é descrita por um espaço de Hilbert h complexo separável por um semigroup , que actua sobre um subálgebra de von Neumann M del algebra B(h) de todos os operadores lineares limitados definidos em h. Por simplicidade, por vezes, assumir que M=B(h).. O semigroup T corresponde à imagem Heisenberg no sentido de que, dado qualquer observável x, descreve a evolução no tempo t. Assim, dada uma densidade ρ matriz, dinâmica (caixa de Schrödinger) que é dada pelo semigroupo predual , em que , tr(·) denota a operação de traçado. Neste trabalho, oferecemos uma exposição de vários resultados básicos sobre SCM. Além disso, discutimos aplicações de SCM em teoria da informação quântica e computação quântica.

Palavras chave: Computação quântica, quântica semigroupos Markov, teoria da informação.

Introduccion

La dinámica de un sistema cuántico abierto en la aproximación Markoviana es descrita por un semigrupo cuántico de Markov (SCM). Estos semigrupos son una extensión no conmutativa de los semigrupos de Markov definidos en probabilidad clásica y representan una evolución temporal sin memoria de un sistema microscópico acorde a las leyes de la física cuántica. Más concretamente, para la representación de la dinámica en un sistema cuántico abierto se utilizan dos espacios de Hilbert: el primer espacio de Hilbert que denotaremos por $\mathfrak{h}$ será el espacio del sistema y el segundo espacio denotado por $\mathfrak{h}_A$ será el espacio del ambiente, donde la dinámica total del sistema es representada sobre el espacio de Hilbert $\mathfrak{h}_T=\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}_A$ por el generador H_T de un grupo unitario, siendo

$$H_T=H\otimes 1_{\mathfrak{h}A}+1_{\mathfrak{h}}\otimes HA+H_I$$

en el cual H es el Hamiltoniano del sistema, H_A el Hamiltoniano del ambiente y H_I el Hamiltoniano de interacción.

Además si se quiere analizar la dinámica reducida sobre el espacio $\mathfrak{h}$ es necesario conocer el estado inicial del ambiente, el cual es representado por una matriz de densidad ρ_A, una matriz de densidad o estado es un operador acotado positivo con traza igual a uno, definido en $\mathfrak{h}_A$. Con esta matriz de densidad se describe la dinámica reducida sobre h en el cuadro de Schrödinger:

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho)=tr_{\mathfrak{h}A}\ (e^{-itH}\rho\otimes\rho_A e^{itH})$$

donde $tr_{\mathfrak{h}A}$ es la traza parcial sobre las variables ambientales y $(\mathcal{T}_{*t})_t\geq 0$ define un colección de aplicaciones y haciendo reescalamientos temporales y ciertos tipos de límites podemos obtener un semigrupo definido en $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$, donde $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})$ es el conjunto de todas las matrices densidad. También podemos utilizar el estado ρ_A para determinar la esperanza condicional E definida sobre el espacio $\mathfrak{P}(\mathfrak{h})$ formado por todos los operadores acotados en $\mathfrak{h}$ y describir dicha dinámica en el cuadro de Heisenberg:

$$\mathcal{T}_t(x)=E\ (e^{itH}x\otimes 1_{\mathfrak{h}A}e^{-itH}) \quad \text{para } x\in\mathfrak{P}(\mathfrak{h}).$$

En este caso $\mathcal{T}_t$, al igual que en el cuadro Schrödinger, define un colección de aplicaciones y haciendo reescalamientos temporales y ciertos tipos de límites podemos obtener un SCM.

Más exactamente, a nivel matemático y físico el tratamiento riguroso de todo lo descrito anteriormente dió como frutos una cantidad muy variada de trabajos y conceptos entre los cuales se destaca el límite de acoplamiento débil o límite estocástico y el límite de acoplamiento singular, los cuales fueron tratados en una primera versión de manera formalizada por Davies ([11],[12],[13]), enfocándose primordialmente en la dinámica reducida y recientemente se ha trabajado la dinámica en el espacio completo ([1],[3],[14],[15],[16]).

No es el objetivo de este trabajo, discutir los métodos matemáticos para justificar la aproximación Markoviana, nuestro objetivo es distinto. Nosotros suponemos la aproximación Markoviana justificada y por ende la dinámica de nuestro sistema es descrita por un SCM $(\mathcal{T}_t)_t\geq 0$. Bajo este supuesto, este trabajo se concentra en ofrecer una exposición de varios resultados básicos sobre SCM. Además discutimos aplicaciones de SCM en teoría de la información cuántica y computación cuántica.

Álgebras de operadores

Asumiremos siempre los siguientes hechos:

(a) Todos los espacios vectoriales, espacios de Hilbert y álgebras son definidas sobe el cuerpo de escalares C de los complejos.

(b) En un espacio de Hilbert el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en la segunda entrada del producto y antilineal en la primera.

(c) Cualquier espacio de Hilbert $\mathfrak{h}$ es separable y el conjunto de los operadores acotados sobre h será denotado por $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$.

Algunas veces por comodidad utilizaremos la notación de Dirac para el producto interno, es decir, el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ será algunas veces denotado por $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Por ejemplo dados $\mathfrak{u},\mathfrak{v}$ vectores en $\mathfrak{h}$ se define la aplicación $|\mathfrak{u}\rangle\langle\mathfrak{v}|$ tal que para todo $\mathfrak{w}\in\mathfrak{h}$ $|\mathfrak{u}\rangle\langle\mathfrak{v}|(\mathfrak{w})=\langle\mathfrak{v},\mathfrak{w}\rangle\mathfrak{u}$, el cual llamaremos *proyector* y que en notación de Dirac su acción es escrita como $|\mathfrak{u}\rangle\langle\mathfrak{v}|\mathfrak{w}=\langle\mathfrak{v}|\mathfrak{w}\rangle\mathfrak{u}$, para todo $\mathfrak{w}\in\mathfrak{h}$. Nótese que si $\mathfrak{v}=\mathfrak{w}$ obtenemos un operador proyección.

Denotaremos por $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$ el conjunto de los operadores clase traza, equipado con la norma traza $|\varrho|_1 = tr|\varrho|$, donde $|\varrho|=(\varrho^*\varrho)^{1/2}$. En particular, el conjunto de matrices densidad o estados es denotado por $\mathcal{L}_1(\mathfrak{h})$, donde

$$\mathfrak{L}_1(\mathfrak{h})=\{\varrho\in L;(h)\varrho\geq 0,|\varrho|1=1\}.$$

Proposición 1 El espacio de Banach B(h) es el dual topológico de L(h) debido a la dualidad $(x,\varrho)=tr(x\varrho)$, $x\in B(h),\varrho\in L(\mathfrak{h})$. Además la topología débil-* en $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ asociada a esta dualidad coincide con la topología σ-débil.

(Una prueba de esta proposición puede ser encontrada por ejemplo en [8], teorema 3.2, página 87). En virtud de este último teorema, en el resto de este trabajo σ-débil es denotado por $\mathfrak{w}^*$ (débil-* que traducido al inglés sería weak-*).

Semigrupos cuánticos de Markov (SCM)

Los SCMs son aplicaciones completamente positivas. A continuación discutimos sobre el concepto de aplicación completamente positiva y algunas consecuencias.

Definición Sean dos *-álgebras A,B. Una aplicación $\Phi:A\mapsto B$ es

(a) positiva si $\Phi(a^*a)$ es un elemento positivo para todo $a\in A$;

(b) n- positiva si para cualquier par de colecciones a1,...,an∈A y b1,...,bn∈B, el elemento i,j=1n b*iΦ(a*iaj)bj∈B, es positivo;

(c) completamente positivo si Φ es n- positivo para todo n≥1.

Recordemos que un elemento positivo de una *- álgebra A es un elemento de la forma a^*a con $a\in A$ y que aplicación positiva es una aplicación que envia elementos positivos en elementos positivos, entonces una aplicación completamente positiva es en particular 1-positiva o positiva. Si Φ es 2- positiva entonces Φ satisface la desigualdad de Schwartz $\Phi(a^*a)\leq\Phi(a)^*\Phi(a)$ $\forall a\in B(h)$.

Para una demostración de esta última afirmación ver por ejemplo [28].

Definición Un semigrupo cuántico de Markov (*SCM*) *en una *- álgebra A con unidad 1, es una familia uniparamétrica $T=(T_t)_{t\geq 0}$ de aplicaciones lineales de A en si mismo cumpliendo*

(a) $T_0(x)=x$, *para todo* $x\in A$;

(b) Cada $T_t(\cdot)$ *es completamente positivo;*

(c) $T_t(T_s(x))=T_{t+s}(x)$, *para todo* $t,s\geq 0, x\in A$;

(d) $T_t(1)=1$ *para todo* $t\geq 0$.

De lo anterior deducimos que por la 2- positividad de T_t se sigue la desigualdad de Schwartz $T_t(x^*x)\leq T_t(x)^*T_t(x)$ para todo $t\geq 0$ y para todo $x\in A$.

En este trabajo nos centraremos principalmente en SCM definidos en *B(h)* y siempre asumiremos que todas las *-álgebras tienen unidad 1 a menos que se diga lo contrario.

La continuidad del semigrupo es definido acorde a las diferentes topologías de *B(h)*:

Definición *Un semigrupo cuántico de Markov* $(T_t)_{t\geq 0}$ es:

(a) uniformemente continuo (o continuo en norma) si

$$lim_{t\to 0}\sup_{|x|\leq 1}|T_t(x)-x|=0;$$

(b) de Feller si

$$lim_{t\to 0}|T_t(x)-x|=0,$$

(c) *w*- continuo si Tt(·) es w*- continuo para todo t≥0*, y

$$lim_{t\to 0}tr(\varrho(T_t(x)-x))=0, \text{ para todo } x\in B(h),\varrho\in L1(h).$$

El generador *L* del semigrupo *T* es definido en la topología débil-*. Esto es, su dominio *D(L)* consiste de elementos x del álgebra para los cuales el w*-límite of $t^{-1}(T_t(x)-x)$ existe cuando $t\to 0$. Este límite es denotado entonces por *L(x)*.

El generador del semigrupo nos revela mucha información sobre el semigrupo por ejemplo, un SCM es continuo en norma si y sólo si su generador L(·) es un operador acotado en *B(h)*. En este caso existe un conjunto de operadores $(L_k)_{k\in N}$ tal que $L= k\, L^*kLk$ es un operador acotado en $B(h)$ y $k\, L^*kxLk\in B(h)$ cuando $x\in B(h)$ y existe también un operador autoadjunto $H=H^*\in B(h)$ tal que $L(x)=i[H,x]- 12\, k\, (L^*kLkx-2L^*kxLk+xL^*kLk)$.

Esta última representación es debida a Gorini, Kossakowski, Sudarshan y Lindblad y es llamada en forma abreviada forma *GKSL* de L. Para una prueba ver por ejemplo teorema 5.6 de [28]. Gorini, Kossakowski y Sudarshan encontraron la forma de L en el caso de dimensión finita, posteriormente Lindblad extendió la representación al caso de dimensión infinita.

La representación *GKSL* en general no es única; pero existen condiciones para aproximarse a dicha unicidad:

Teorema Sea L el generador de un *SCM* continuo en norma en $B(h)$ y $\varrho\in L_1(h)$. Entonces existe un operador acotado autoadjunto H y una sucesión finita o infinita $(L_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $B(h)$ tal que:

(a) $tr(\varrho L_k)=0$ para todo $k\geq 1$,

(b) $k\geq 1\, L^*kLk$ es una suma fuertemente convergente,

(c) si $(c_k)_{k\geq 0}$ es una sucesión cuadrado-sumable de escalares complejos y $c01+ k\geq 1\, c_kL_k=0$ entonces $c_k=0$ para todo $k\geq 0$,

(d) la siguiente representación de L se cumple $L(x)=i[H,x]- 12\, k\geq 1\, (L^*kLkx-2L^*kxLk+xL^*kLk)$. Si $H',(Lk')k\geq 1$ es otra familia de operadores acotados en $B(h)$ con H' autoadjunto y la sucesión $(L_k')_{k\geq 1}$ es finita o infinita, entonces las condiciones (a)-(d) son satisfechas con $H,(L_k)_{k\geq 1}$ reemplazado por $H',(L_k')_{k\geq 1}$ respectivamente si y sólo si los tamaños de las sucesiones $(L_k)_{k\geq 1},(L_k)_{k\geq 1}$ son iguales y para algún escalar $c\in R$ y una matriz unitaria $(u_{kj})k_j$ tenemos que

$$H'=H+c \text{ y } Lk'= j\, u_{kj}L_j$$

Una prueba de este resultado puede ser consultada en el teorema 30.16 de [26]. Una representación *GKSL* de L que verifica las hipótesis del teorema anterior será llamada una representación especial. La matriz unitaria $(u_{kj})_{kj}$ obviamente puede ser vista como un operador unitario sobre un espacio de Hilbert *k*, llamado espacio libre de multiplicidad con dimensión igual a el tamaño de la sucesión $(L_k)_{k\geq 1}$, la cual es también determinada en forma única por L debido al tamaño de la condición de minimalidad (c).

Como se había comentado anteriormente, el teorema 3.2 nos permite aproximarnos a la unicidad de la descomposición *GKSL*; más concretamente, una consecuencia inmediata de este teorema es la unicidad en la descomposición de *L* como la suma de una derivación i[H,·] y una parte disipativa $L-i[H,\cdot]$, suponiendo la representación GKSL especial. La descomposición de L en la forma $L(x)=G^*x+ k\geq 1\, L^*kxLk+xG$ es única, salvo un múltiplo imaginario puro del operador identidad sumando en G.

De lo anterior podemos ver que el suponer $L(\cdot)$ acotado no sólo nos da propiedades topológicas fuertes sino además representaciones álgebraicas del generador, las cuales como veremos más adelante serán bastante útiles para estudiar la dinámica descrita por *T*. Hasta el momento hemos discutido la dinámica definida en el álgebra *B(h)*, es decir, en el cuadro de Heisenberg; pero si deseamos trabajar con los estados (en el cuadro de Schrödinger) entonces debemos usar el predual de *B(h)*, del cual hablaremos a continuación.

Definición *Sea A un álgebra de von Neumann. Llamaremos predual de A el espacio de todos los funcionales σ- débilmente continuos definidos en A, y denotaremos el conjunto formado por estos como A*.*

En particular $B(h)^*=L(h)$, el espacio de los operadores clase traza. Es claro que $A^*\subset A^*$. Además A^* es un espacio de Banach en la norma de A^*.

Definición Un funcional lineal positivo ω sobre A es normal si para toda red creciente $(a_\alpha)\alpha$ en A+ con envolvente superior, tenemos $\sup_\alpha\omega(a_\alpha)=\omega(\sup_\alpha a\alpha)$. Un estado ω es un funcional lineal positivo tal que ω(**1**)=**1**.

Proposición *Si ω es un estado en A, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) ω *es normal;*

(b) ω *es σ-débilmente continuo*;

(c) *existe* $\varrho\in L_1(h)$ *tal que* $\omega(a)=tr(\varrho a)$ *para todo* $a\in A$;

(d) ω(i∈I pi)= i∈I ω(pi) para cada colección {pi}i∈I de proyecciones ortogonales dos a dos en A.

Una prueba de lo anterior es encontrada en [9], teorema 2.4.21. En este contexto ϱ es llamado operador densidad, matriz densidad o estado. En adelante identificaremos ω con ϱ.

Ahora hablaremos sobre la evolución de los estados que nosotros manejaremos:

Definición El semigrupo predual de un *SCM* T^* de A es el semigrupo T^* de operadores en A^* definido por $(T^*_t(\omega))(a)=\omega(T_t(a))$ para cada $a\in A$ y cada $\omega\in A^*$. En particular, si $A=B(h)$ entonces el semigrupo predual es definido en $L_1(h)$ por la relación $t_r(T^*t(\varrho)x)=t_r(\varrho T_t(x))$ *foralll*$t\geq 0,x\in B(h),\varrho\in L1(h)$

Su generador es denotado por L^*.

Si T es continuo con respecto a la topología débil en $B(h)$, el semigrupo T^* es también continuo con respecto a la topología débil en el espacio de Banach $L(h)$. Entonces por el corolario 3.1.8 en [9] , T^* es un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach $L(h)$. Además, si $T_t(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ para todo $t\geq 0$, entonces T^* aplica estados en estados. En efecto, para cada estado normal ω, $T^*_t(\omega)$ es positivo y $(T_t^*(\omega))(\mathbf{1})=\omega(T_t(\mathbf{1}))=\omega(\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

Una hipótesis que haremos con frecuencia es suponer que existe un estado normal fiel e invariante para el semigrupo T. A continuación aclararemos que significa este supuesto

Definición Un funcional normal $\omega\in A^*$ es llamado invariante con respecto a T *(o T-invariante)* si $(T^*_t(\omega))(a)=\omega(a)$ (o equivalentemente $\omega(T_t(a))=\omega(a)$) para todo $a\in A, t\geq 0$. El funcional ω es fiel si $\omega(a^*a)>0$ para todo $a\neq 0$.

Notar que si ω es un estado fiel en A entonces la forma sesquilineal definida por

$$\langle a,b\rangle\omega:=\omega(a^*b) \quad \text{para todo } a,b\in A$$

es un producto interno en A.

Aplicaciones en teoría de la información cuántica y computación cuántica

En teoría de la información cuántica y en computación cuántica T_t puede ser interpretado como el paso t-ésimo de un algoritmo de un computador cuántico, teniendo ruidos que perturban la evolución de dicho algoritmo, de esta forma existe una conección natural con los objetos de estudio de teoría de la información y computación cuántica. Dado que el ruido generado por el ambiente puede alterar y afectar la evolución del algoritmo, una pregunta natural es como saber si existe una forma de elegir inputs adecuados para nuestro algoritimo descrito por T_t de tal forma que su evolución no sea alterada por este ruido. En particular, uno de los efectos del ruido que mas afecta a T_t es la decoherencia, la cual hace que rasgos cuánticos del algoritmo se pierdan, asi que nos interesaria encontrar como seleccionar inputs que no se dejen afectar por la decoherencia, para ello debemos encontrar inputs que evolucionen siempre en forma unitaria a medida que evoluciona el tiempo. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, debemos elegir inputs que esten generados en un subespacio especial del espacio de Hilbert h, dicho espacio es llamado subespacio libre de decoherencia. A continuación precisamos matemáticamente esta situación.

Subespacio libre de decoherencia

Recordemos que un estado ω sobre $B(h)$ es un operador positivo de traza igual a uno y que esta definido sobre h, en particular es un operador clase traza definido sobre h. El soporte de ω denotado por supp(ω) es el subespacio cerrado de h generado por vectores propios los cuales tienen valores propios estrictamente positivos.

Definición Un subespacio *hf* de h es libre de decoherencia *(LD)* si existe un operador autoadjunto K definido en h_f tal que para todo estado ω con soporte en h_f se tiene que

$$T^*_t(\omega)=e^{-itK}\omega e^{itK} \text{ para todo } t\geq 0. \tag{1}$$

Cada vez que tengamos un operador autoadjunto K que cumple con las condiciones descritas anteriormente diremos que K es un operador asociado a h_f.

Es claro que un operador autoadjunto K definido en h_f siempre puede ser extendido al espacio de Hilbert h, por lo tanto, de manera equivalente, los subespacios *LD* pueden ser definidos con K un operador autoadjunto definido en h que deja invariante un subespacio h_f. También se puede ver fácilmente que el subespacio *LD* es un subespacio cerrado con respecto a la topología inducida por la norma de h. Un subespacio de un subespacio *LD* el cual es invariante por K es a su vez un subepacio *LD*, por lo cual cada vez que nos refiramos a un subespacio *LD* estamos haciendo mención a un subespacio *LD* maximal.

Usando la estructura del generador del semigrupo es posible dar condiciones necesarias y suficientes para hallar los subespacios libres de decoherencia de cualquier semigrupo Markoviano cuántico. Dicho resultado es formulado tanto para el caso en que L^* está dado por operadores acotados como también en el caso no acotado. A continuación recordamos el resultado para el caso acotado. (Para consultar la prueba en el caso no acotado, ver [5], proposición 7).

Teorema *Un subespacio* h_f *es un subespacio LD con operador autoadjunto asociado K, si y solo si, en cualquier representación GKSL de* L^* *por medio de ope-*

radores L_s,G existen números complejos λ_s ($s\geq 1$) y un número real r tal que s $|\lambda s|2<\infty$ y

1. $L_s u=\lambda_s u$ *para todo* $u\in h_f$ *y* $s\geq 1$,
2. $(G+iK)u=-(\ 12\ s\geq 1\ |\lambda_s|2+ir)u$ *para todo* $u\in h_f$.

Producción de entropía para SCM

Otra aplicación interesante, principalmente enfocada en teoría de la información cuántica, se da al preguntarse por la entropía relativa, la cual es una forma de medir cuanto información se pierde o se gana en un proceso y en particular para caracterizar los estados de equilibrio de un SCM, los cuales se pueden interpretar como aquellos estados en donde la perdida de información a medida que transcurre el tiempo es despreciable. Mas exactamente, dichos estados se pueden caracterizar usando condiciones de balance detallado y usando el concepto de producción de entropía.

La noción de balance detallado que manejaremos aquí es una extensión no conmutativa de la que se emplea en probabilidad clásica, por esta razón empezamos hablando del caso clásico.

Sea (Ω,F,μ) un espacio de medida con μ medida σ-finita y sea $T=(T_t)t\geq 0$ un semigrupo de Markov clásico w^*-continuo formado por funciones lineales acotados sobre $L\infty(\Omega,F,\mu)$

T es el semigrupo dual de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo sobre el espacio predual $L_1(\Omega,F,\mu)$denotado por T^*. Supongamos que T admite una densidad de probabilidad ϖ la cual es invariante por T (es decir, ϖ es una función no negativa de norma uno en $L_1(\Omega,F,\mu)$ tal que $T^*_t(\varpi)=0$ para $t\geq 0$) anulándose unicamente en elementos de Ω que tengan medida nula. Entonces es bien sabido que la forma sesquilineal

$$(f,g)=\Omega \quad f\, g\varpi d\mu$$

define un producto escalar sobre $L\infty(\Omega,F,\mu)$ que denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle\varpi$. Si denotamos por T_t el operador adjunto de T_t con respecto a este producto escalar, es fácil ver que

$$Tt(g)=\varpi^{-1}T_{*t}(\varpi g)$$

para todo $t\geq 0$ y para todo $g\in L\infty(\Omega,F,\mu)$.

En efecto, si $\varpi g\in L_1(\Omega,F,\mu)$, como ϖ es invariante bajo T^* entonces

$$|T_t(g)|\leq\varpi-1T_{*t}(\varpi)|g|\infty=|g|\infty,$$

por lo tanto T_t es un operador acotado bien definido en $L\infty(\Omega,F,\mu)$. Además

$$\langle T_t(g),f\rangle\varpi=\Omega \quad T_t(g)\, f\varpi d\mu=\Omega\ \varpi^{-1}\ \ T_{*t}(\varpi g)\, f\varpi d\mu$$

$$=\Omega\ T_{*t}(\varpi\ \ g\ )fd\mu=\Omega\ (\varpi\ \ g\ )T_t(f)d\mu$$

$$=\langle g,Tt(f)\rangle\varpi$$

para todo $f,g\in L\infty(\Omega,F,\mu)$. Claramente la aplicación T_t también es positiva, entonces $T=(T_t)t\geq 0$ es un semigrupo w*-continuo de aplicaciones positivas acotadas en $L\infty(\Omega,F,\mu)$.

El semigrupo T es Markov pues $T_t(\mathbf{1})=\varpi^{-1}T_{*t}(\varpi)=\mathbf{1}$.

Definición Diremos que T satisface la condición de balance detallado clásica si cada operador Tt es autoadjunto con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle\varpi$, es decir, $T_t=T_t$.

Entonces T satisface la condición de balance detallado clásica si y sólo si para todo $t\geq 0$

$$T_t(f)=\varpi^{-1}T_{*t}(\varpi f). \qquad (2)$$

Nota *Balance detallado es equivalente a reversibilidad en el contexto de cadenas de Markov clásicas. En efecto, si asumimos por ejemplo (por simplicidad)* $\Omega=\{1,\ldots,d\}$ *con la σ-álgebra F igual al conjunto de partes de Ω, la medida μ como la medida de conteo y además con un semigrupo de Markov al cual le asociamos una matriz de tasas de transición* $(qjk)1\leq j,k\leq d$ *definida por* $q_{jk}=limt\to 0t-1(T_t1\{k\}-1\{k\})(j)$,

siendo $1_{\{k\}}$ *la función indicatriz del conjunto* $\{k\}$. *Denotando* $(q_{jk})1\leq j,k\leq d$ *la matriz de tasa de transición del semigrupo de Markov* $(T_t)_{t\geq 0}$, *se sigue inmediatamente de la definición que (6) es equivalente a la condición* $\varpi_j q_{jk}=\varpi_k q_{kj}$ *para todo* $j,k\in\Omega$. *Esta condición es conocida como reversibilidad, la cual es también conocida en cadenas de Markov a tiempo discreto.*

En el caso cuántico, dada su naturaleza no conmutativa se tiene que varias definiciones de condiciones de balance detallado cuántico (BDC) existen en la literatura. Al parecer, historicamente, la primera fue trabajada por Agarwal (ver [4]) y posteriormente extendida por Majewski (ver [24]), esta definición involucra una operación $\tau:A\to A$ de tal forma que si $a,b\in A$ entonces:

(a) $\tau(a^*)=\tau(a)^*$,

(b) $\tau(ab)=\tau(b)\tau(a)$,

(c) $\tau^2(a)=a$.

En este contexto, un SCM T satisface la condición de BDC de Agarwal-Majewski con respecto al estado ω y al operador reversante τ, si

$$\omega(aT_t(b))=\omega(\tau(b)T_t(\tau(a))) \quad \text{para todo } a,b\in A.$$

Si el estado ω es invariante bajo el operador reversante ($\omega(\tau(a))=\omega(a)$ para todo $a\in A$) entonces la condición BDC de Agarwal-Majewski es equivalente a

$$\omega(aT_t(b))=\omega((\tau\circ T_t\circ\tau)(a)b) \quad \text{para todo } a,b\in A. \tag{3}$$

En consecuencia, si ω es fiel e invariante bajo τ, la igualdad (7) significa que bajo el producto interno definido por ω la aplicación Tt admite aplicaciones duales coincidiendo con $\tau\circ T_t\circ\tau$ para tod $t\geq 0$; en particular las aplicaciones duales deben ser positivas dado que τ preserva la positividad.

Si $A=B(h)$, la elección canónica para $\tau\Theta$ es dada por $\tau\Theta(a)=\Theta a^*\Theta$ donde Θ es definida sobre una base ortonormal fijada $(e_n)_{n\geq 0}$ de h como

$$\Theta \sum_{n\geq 0} u_n e_n = \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}\, e_n.$$

En este caso, vemos que $\Theta^2=\mathbf{1}$ y $\langle\Theta v,\Theta u\rangle=\langle u,v\rangle$ para todo $u,v\in h$ (es decir, Θ es una involución y un operador antiunitario). Además, si ω es invariante bajo Θ y un estado normal es representado por $\varrho\in L_1(h)$ entonces

$$\begin{aligned} tr(\varrho a) &= tr(\varrho(\tau\Theta(a)))=tr(\varrho\Theta a^*\Theta)=\sum_n \langle e_n,\varrho\Theta a^*\Theta e_n\rangle \\ &= \sum_n \langle \Theta\varrho\Theta a^*(\Theta e_n),(\Theta e_n)\rangle=tr(\Theta\varrho\Theta a) \end{aligned}$$

para todo $a\in A$, entonces $\varrho=\Theta\varrho\Theta$, es decir, Θ conmuta con ϱ. Es facil ver que si Θ conmuta con ϱ entonces ω es invariante bajo τ_Θ. Por lo tanto obtenemos:

Proposición Si $\omega(\cdot)=tr(\varrho\cdot)$ es un estado en $B(h)$. ω es invariante bajo la operación reversante canónica τ_Θ si y sólo si Θ conmuta con ϱ.

La condición BDC más popular es debida a Alicki [6], [7] y Kossakowski, Frigerio, Gorini, Verri [23]. En este caso, BDC se cumple si existe un SCM *dual* $T=(T_t)_{t\geq 0}$ *(GNS-dual) en A tal que* $\omega(aT_t(b))=\omega\, T_t(a)b$ y la diferencia de generadores L y L es una derivación.

Cuando esta condición se cumple, todas las aplicaciones positivas T_t admiten aplicaciones duales positivas con respecto al producto interno definido por la forma bilineal $(a,b)\to\omega(ab)$, entonces todas las aplicaciones Tt deben commutar con el grupo modular $(\sigma\omega t)_{t\in R}$ asociado con el par (A,ω) (ver Prop. 2.1 en [23], Prop. 5 en [25]).

Esta restricción álgebraica es evitable, si consideramos la forma bilineal

$$(a,b)\to\omega(\sigma_{i/2}(a)b)$$

introducida por Petz (ver [27]) entonces podemos definir un SCM dual (KMS-dual), también cuando las aplicaciones T_t no conmutan con el grupo modular (ver [10], [22]).

Las condiciones BDC que surgen cuando consideramos KMS-duales en vez de GNS-duales son llamadas estándar:

Definición *Sea T un SCM con SCM dual T' tal que* $\omega(\sigma_{i/2}(a)T_t(b))=\omega(\sigma_{i/2}(T_t'(a))b)$ *para todo* $a,b\in A, t\geq 0$. *El semigrupo T satisface:*

(a) La condición de balance detallado cuántica estándar con respecto a la operación reversante τ *(BDCE-τ)*, si $T_t'=\tau\circ T_t\circ\tau$ para todo $t\geq 0$,

(b) La condición de balance detallado cuántica estándar (BDCE), si la diferencia de generadores $L-L'$ de T y T' es una derivación densamente definida.

Nos concentraremos en el caso $A=B(h)$ y todos los estados serán asumidos normales e identificados con sus densidades. Entonces $\omega(x)=tr(\varrho x)$ y $\sigma_t(x)=\varrho^{it}x\varrho^{-it}$. En consecuencia, la definición anterior se lee

Definición *Sea T un SCM en B(h) con un SCM dual T' que cumple*

$$tr(\varrho^{1/2}x\varrho^{1/2}T_t(y))=tr(\varrho^{1/2}T'_t(x)\varrho^{1/2}y).$$

El semigrupo ^{T} satisface:

(a) La condición de balance detallado cuántica estándar con respecto a la operación reversante τ *(BDCE-τ)*, si

$$tr(\varrho^{1/2}\Theta x^*\Theta\varrho^{1/2}T_t(y))=tr(\varrho^{1/2}\Theta T_t(x^*)\Theta\varrho^{1/2}y$$

para todo $x,y\in B(h)$ y para todo $t\geq 0$,

(b) La condición de balance detallado cuántica estándar (BDCE), si existe un operador autoadjunto K tal que

$$L(x)-L'(x)=2i[K,x],$$

para todo $x\in Dom(K)$. Donde L es el generador de T, L' es el generador de T', y $Dom(K)$ es denso en h.

En este caso, la condicion BDCE coincide con la condición de Agarwal-Majewski y Alicki-Gorini-Kossakowski-Frigerio-Verri respectivamente cuando el SCM T conmuta con el grupo modular *(σt)t∈R* asociado con el par *(B(h),ϱ)* (ver, [10], [25], [21], [20]).

Supondremos adicionalmente que la aplicación canónica τΘ será una operación reversante con respecto a alguna base tal que dado un estado fiel invariante ϱ entonces ϱ conmuta con Θ. Un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt muestra que siempre es posible encontrar dicha base ortonormal de h conformada de vectores propios de ϱ que son también Θ-invariantes (ver proposición 7 en [18]).

Las siguientes afirmaciones describen caracterizaciones de SCM continuos en norma satisfaciendo condiciones de BDC estándar (las demostaciones pueden ser consultadas en [20], teorema 15,18 y nota 4).

Teorema *Un SCM T satisface la condición de BDCE si y sólo si para cualquier representación especial GKSL del generador L por medio de los operadores G,Lk existe una matriz unitaria $(u_{mk})_{mk}$ en k la cual es también simétrica (es decir, $u_{mk}=u_{km}$ para todo m,k) tal que, para todo s≥1,*

$$\varrho^{1/2}L^*s= k\ uskLk\varrho^{1/2}.$$

Teorema *Un SCM T satisface la condición BDCE-Θ si y sólo si para cualquier representación especial GKSL del generador L por medio de los operadores G,Lk existe una matriz unitaria (umk)mk en k la cual es también simétrica tal que:*

(a) $\varrho^{1/2}\Theta G^*\Theta=G\varrho^{1/2}$,

(b) $\varrho^{1/2}L^*s= k\ uskLk\varrho^{1/2}$ *para todo s≥1.*

Nota *La condición BDCE−Θ es más restrictiva que la condición BDCE porque esta involucra también la identidad $\varrho^{1/2}\Theta G^*\Theta=G\varrho^{1/2}$; pero si $\Theta G^*\Theta=G$ and ϱ commutan con G entonces ambas condiciones son equivalentes. Esta última suposición es satisfecha por muchos SCM como por ejemplo, aquellos derivados del límite de acoplamiento débil (o límite estocástico) (ver [2], [16]).*

Teorema *Sea T un SCM con generador L teniendo representación especial GKSL por medio de los operadores G,Lk. Asumamos que*

$$\varrho^{1/2}L^*s= k\ uskLk\varrho^{1/2}$$

para todo *s≥1*, y para una matriz unitaria autoadjunta (umk)mk en *k*. Entonces

$$L'(x)-(\tau\Theta\circ L\circ\tau\Theta)(x)=i[K,x]$$

con *K* autoadjunto conmutando con ϱ.

La demostración de este teorema puede ser consultada en [18].

Fagnola y Rebolledo definieron el concepto de producción de entropía para SCM (ver [18]), el cual es una extensión no conmutativa del caso clásico (ver [19]) y probaron que un estado invariante con producción de entropía nula es caracterizado por condiciones de balance detallado estándar entonces la producción de entropía mide no reversibilidad y por lo tanto no equilibrio.

En esta sección, repasaremos la noción de producción de entropía en SCM. Asumiremos que es dado un SCM con un estado fiel e invariante con respecto al semigrupo, el cual es definido en *B(h)*. La producción de entropía será definida en términos de la entropía relativa de estados de dos puntos forward y backward.

Sean *V* un conjunto contable y *(en)n∈V* una base ortonormal de h la cual da una representación diagonal del estado *T-invariante* ϱ.

Definición El estado de dos puntos forward es definido por

$$\vec{\Omega}t(x\otimes y)=tr\ \varrho^{1/2}\Theta x^*\Theta\varrho^{1/2}T_t(y),\quad x,y\in B(h)$$

y el estado de dos puntos backward es dado por

$$\Omega t(x\otimes y)=tr\ \varrho^{1/2}\Theta Tt(x^*)\Theta\varrho^{1/2}y,\quad x,y\in B(h).$$

Es claro de la definición anterior que T satisface la condición BDCE-Θ si y sólo si $\vec{\Omega}_t=\Omega_t$ para todo *t≥0*.

Proposición *Sea $\varrho= j\ \varrho j|ej\rangle\langle ej|$ una descomposición espectral de ϱ.*

(1) *Los funcionales $\vec{\Omega}t$ y Ωt son estados normales en $B(h)\otimes B(h)$ con densidades*

$$\vec{D}_t=(1\otimes T_{*t})(D),D_t=(T_{*t}\otimes 1)(D) \tag{4}$$

respectivamente. Donde $D=|r\rangle\langle r|$ con

$$r= j\ \varrho^{1/2}j\Theta ej\otimes ej.$$

(2) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\vec{\Omega}t=\Omega t$.

(b) $dd_t\vec{D}_t|t=0 \qquad =(1\otimes L^*)(D)= dd_tD_t|t=0$

$=(L^*\otimes 1)(D)$.

Los operadores $\Theta x^*\Theta$ pueden ser vistos como elementos del álgebra opuesta $B(h)^\circ$ de $B(h)$. En efecto, recordando que $B(h)\circ$ esta en correspondencia inyectiva con $B(h)$ como un conjunto via la identificación trivial $x\to x\circ$, teniendo la misma estructura de espacio vectorial, la misma involución y norma pero con producto $\circledcirc$ definido por $x\circ\circledcirc y\circ=(yx)\circ$. Entonces la aplicación lineal $\tau\Theta:B(h)\to B(h)\circ$ definida por $x\to\Theta x^*\Theta$ es un *-isomorfismo (sobreyectivo) de $B(h)$ en $B(h)\circ$ puesto que

$$\tau\Theta(x)\circledcirc\tau\Theta(y) =\Theta x^*\Theta\circledcirc\Theta y^*\Theta=\Theta y^*\Theta\Theta x^*\Theta$$

$$=\Theta(xy)^*\Theta=\tau\Theta(xy).$$

Claramente $\tau\Theta\otimes\mathbf{1}:B(h)\otimes B(h)\to B(h)\circ\otimes B(h)$ es un *-isomorfismo. Esta observación es útil para definir producción de entropía como un índice que mide desviación de la condición de balance detallado estándar sin operación reversante. En efecto, se puede definir el estado $\vec{\Omega}'0=\Omega'0$ en $B(h)\circ\otimes B(h)$ por

$$\vec{\Omega}'_0(x\otimes y)=tr(\varrho^{1/2}x\varrho^{1/2}y).$$

Por lo tanto, podemos definir la producción de entropía otra vez considerando la entropía relativa de $\vec{D}t$ y Dt pero ahora visto como densidades de estados en $B(h)\circ\otimes B(h)$.

Denotamos la traza sobre $h\otimes h$ por $Tr(\cdot)$. La entropía relativa de $\vec{\Omega}_t$ con respecto a Ω_t es dada por

$$S(\vec{\Omega}_t,\Omega_t)=Tr\ \vec{D}_t\ log\vec{D}_t-logD_t,$$

si el soporte de $\vec{\Omega}_t$ esta incluido en el soporte de Ω_t, en caso contrario

$$S(\vec{\Omega}_t,\Omega_t)=+\infty.$$

Definición *La tasa de producción de entropía de un SCM T y un estado invariante* ϱ *es definido por*

$$pe(T,\varrho)=lim\ sup_{t\to 0+}\ S(\vec{\Omega}_t,\Omega_t)t.$$

Es claro que $pe(T,\varrho)\geq 0$ y entonces $pe(T,\varrho)=0$ si y sólo si la condición BDCE$-\Theta$ (o la condición de BDCE, viendo $\vec{\Omega}_t$ y Ω_t como estados en $B(h)\circ\otimes B(h)$) se cumple.

Teorema *Asumamos todas las suposiciones previas dadas en esta sección. Sea T un SCM continuo en norma definido en B(h) con un estado normal, fiel e invariante* ϱ. *Si el soporte de* $\vec{D}_t$ *y el soporte de* D_t *coinciden y son de dimensión finita entonces*

$$pe(T,\varrho)=\ 12Tr\ \ \vec{\Phi}^*(D)-\Phi^*(D)B(D),\ donde\ B(D)=log\ \vec{\Phi}^*(D)-log\ \Phi^*(D),\vec{\Phi}^*(D)=\ k\ (1\otimes L_k)D(1\otimes L^*_k)\ y$$

$$\Phi^*(D)=\ k\ (Lk\otimes 1)D(L^*k\otimes 1)$$

con L_k *operadores de una representación especial GKSL de L.*

Adicionalmente, si G es dado en la representación especial GKSL de L tal que $[\varrho,G]=[\varrho,\Theta]=0$ y $\Theta G^*\Theta=G$ entonces $pe(T,\varrho)=0$ si y sólo si la condición $BDCE-\Theta$ (o la condición de BDCE, viendo $\vec{\Omega}_t$ y Ω_t como estados en $B(h)\circ\otimes B(h)$), se cumple.

Para una demostración ver teorema 5 en [18].

Referencias

Accardi L, Frigerio A, Lu YG. The weak coupling limit as a quantum functional central limit, Comm Math Phys. 1990;131(3):537-570. https://doi.org/10.1007/BF02098275

Accardi L, Lu YG. Volovich I. 2002. Quantum theory and its stochastic limit, Springer-Verlag, Berlin.

Accardi L,. Lu YG, Volovich I. 2002. Quantum Theory and Its Stochastic Limit, Springer, New York. Phys.

Agarwal GS. Open quantum Markovian systems and the microreversibility, Z. Physik 1973;258:409

Agredo J, Fagnola F, Rebolledo R. Decoherence free subspaces of a quantum Markov Semigroup, J. Math. Phys. 2014;55:

Alicki R. On the detailed balance condition for non-Hamiltonian systems, Rep. Math. Phys. 1976;10:

Alicki R. K: Lendi Quantum Dynamical Semigroups and Applications, Lecture Notes in Physics. 1987;286: Springer-Verlag, Berlin.

Attal S. 2006. Elements of Operators Algebras and Modular Theory, Open Quantum Systems I:

The Hamiltonian approach. Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics, Pp. 1-105.

Bratelli O, Robinson DW. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, 1987;1: second e.d., springer-Verlag,

Cipriani F. Dirichlet forms and markovian semigroups on standard forms of von Neumann algebras, J. Funct. Anal. 1997;147:259

Davies EB. Markovian master equations, Comm. Math. Phys. 1974;39:

Dereziński J, De Roeck W. Extended weak coupling limit for Pauli-Fierz operators, Comm. Math. Phys. 2008;279:

Derezynski J, Fruboes R. Fermi golden rule and open quantum systems, Open Quantum Systems III - Recent Developments, Lecture Notes in Mathematics 1882, Springer Berlin, Heidelberg (2006), pp. 67116.

Fagnola F. Quantum Markov semigroups and quantum flows, Proyecciones. J. Math. 1999;18(3):

Fagnola F, Rebolledo R. Entropy production for quantum Markov semigroups, arXiv:1212.1366v1

Fagnola F, Rebolledo R. From classical to quantum entropy production, QP--PQ:Quantum Probab. White Noise Anal. 2010;25:245

Fagnola F, Umanità V. Generators of KMS symmetric Markov semigroups on B(h). Symmetry and quantum detailed balance, Commun. Math. Phys. 2010;298:298

Fagnola F, Umanità V. Generators of detailed balance quantum Markov semigroups, Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics. 2007;10:335

Goldstein S, Lindsay JM. Beurling-Deny condition for KMS symmetric dynamical semigroups, C. R. Acad. Sci. Paris. 1993;317:1053

Kossakowski A, Gorini V, Verri M. Quantum detailed balance and KMS condition, Comm. Math. Phys. 1977;57:97

Majewski WA. The detailed balance condition in quantum statistical mechanics, J. Math. Phys. 1984;25:614

Majewski WA, Streater RF. Detailed balance and quantum dynamical maps, J. Phys. A: Math. Gen. 1998;31:7981

Parthasarathy KR. An introduction to quantum stochastic calculus, Monographs in Mathematics Birkhäuser- Verlag, Basel. 1992;85:

Rebolledo R. 2006. Complete Positivity and the Markov structure of Open Quantum Systems, Open Quantum Systems II: The Markovian approach. Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics. Pp. 149-182.