

**PROBLEMAS DE VALORACIÓN EN PROYECTOS DE
EXPLOTACIÓN DE MINAS BAJO INCERTIDUMBRE**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MAESTRÍA EN ACTUARÍA Y FINANZAS CUANTITATIVAS

**AUTOR: YESID ESTEBAN CLAVIJO
DIRECTOR: CARLOS VÁZQUEZ CENDÓN
(UNIVERSIDADE DA CORUÑA)**

Mayo de 2016

A mi familia y amigos.

Índice general

Resumen	VI
Introducción	VII
1. Modelos matemáticos	1
1.1. El Modelo completo de tres factores	1
1.1.1. Dinámicas de las variables espaciales	2
1.1.2. Dinámica del valor de la mina (V)	3
1.1.3. El Modelo completo	4
1.1.4. Consideraciones	6
1.1.5. Condiciones de frontera en el modelo completo	7
1.2. Modelos reducidos	8
1.2.1. Modelo para $V(t, Q, S)$	8
1.2.2. Modelo para $V(t, G, S)$	9
2. Métodos numéricos	11
2.1. Métodos para los Modelos de un factor	11
2.2. Métodos para el modelo asociado a $V(t, Q, S)$	14
2.2.1. Condiciones de contorno	14
2.2.2. Discretización de la EDP	17
3. Resultados numéricos	23
3.1. Resultados modelo de un factor	23
3.1.1. Caso analítico: Validación del método numérico	23
3.1.2. Caso concreto: Resultados Modelo	25
3.1.3. Una valoración numérica	26
3.2. Resultados Modelo para $V(t, Q, S)$	28
Conclusiones	31
Bibliografía	33

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de forma particular al profesor Carlos quien ha estado siempre al pendiente de mis dudas y preguntas, y cuya orientación ha sido siempre atenta y asertiva. Asimismo agradezco a las profesoras Alejandra Sánchez y Johanna Garzón, cuyas directrices me han sido de ayuda en algunos aspectos teóricos y conceptuales del presente trabajo.

Resumen

Las compañías del sector minero se enfrentan con el problema de la planificación del proyecto de extracción de mineral y la valoración de dicho proyecto. El problema conlleva la existencia de diversas fuentes de incertidumbre como, por ejemplo, la incertidumbre en el precio del mineral, la proporción del mineral en el material extraído (*Ore-Grade*) y la cantidad de roca que se podrá extraer. Una metodología para abordar el problema se basa en su formulación en términos de problema de opciones reales, lo que tiene su paralelismo en la valoración de derivados financieros. El presente trabajo se enmarca en esta metodología.

Abstract

Mining companies are faced to the problem of how to value extraction projects, subject to both price and grade uncertainty, as well as to the remaining ore quantity. In this work we study a PDE approach to the problem, which is derived from the *contingent claims* approach, a standard method in quantitative finance.

Introducción

Un problema común que afrontan las empresas mineras es la valoración de un proyecto de extracción en una mina. Las principales dificultades del problema surgen de la gran variedad de fuentes de incertidumbre presentes en el mismo. En efecto, entre otras, se pueden citar las asociadas al precio del mineral que se obtendrá del material extraído de la mina, la riqueza del material en mineral (ore-grade), la cantidad de mineral existente en el interior de la mina, etc.

Una vez identificadas las fuentes de incertidumbre, es preciso seleccionar modelos matemáticos adecuados de las mismas. Para ello, una posibilidad es recurrir a su modelado a través de procesos estocásticos. Por ejemplo, suponiendo que el precio del material evoluciona en el tiempo como un proceso estocástico, de modo que en cada instante de tiempo es una variable aleatoria. Normalmente, no resulta sencillo determinar la expresión analítica del proceso, pero se puede plantear una ecuación diferencial estocástica que modela la dinámica del mismo. Por otro lado, estas ecuaciones diferenciales estocásticas tienen parámetros cuyos valores es preciso especificar o ajustar a los datos de mercado. Una vez que se han establecido los modelos de cada uno de los factores estocásticos asociados a las correspondientes fuentes de incertidumbre, podemos utilizar la analogía con otros problemas de valoración de derivados financieros u opciones reales, de modo que el valor del proyecto de extracción se puede entender como un derivado financiero, cuyos subyacentes son los distintos factores.

En este contexto, se puede aplicar toda la metodología del cálculo estocástico, en particular el lema de Ito y las técnicas de cobertura dinámica, para obtener modelos de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) que verifica la función que relaciona el proceso del valor de la mina con los procesos de los factores estocásticos subyacentes. Usualmente, estas ecuaciones en derivadas parciales no presentan soluciones analíticas y es preciso utilizar combinaciones de técnicas numéricas adecuadas para su resolución. Por otra parte, el análisis matemático de las mismas es fuente de problemas matemáticos teóricos muy interesantes, que permiten obtener la existencia de solución, la unicidad de la misma y propiedades cualitativas relevantes de la solución, que dan validez desde el punto de vista matemático al modelo considerado. En el presente trabajo final de maestría partimos del modelo más general introducido en [6]

para la valoración de un proyecto de extracción minera, cuando se considera incertidumbre en el precio del mineral, en la calidad del material (esto es, el contenido de mineral por material extraído) y en la cantidad de mineral restante por extraer. Bajo distintas consideraciones, este modelo con tres factores estocásticos, da lugar a dos modelos diferentes con dos factores estocásticos. En uno de estos modelos de dos factores (precio y riqueza del material), se puede escribir la solución en términos de dos modelos de un factor estocástico (la riqueza o calidad del mineral). En el otro modelo de dos factores, estos serán la cantidad incierta que queda por extraer y el precio del mineral.

Tras el planteamiento detallado de los modelos, las principales contribuciones del trabajo se centran en el planteamiento de las condiciones de contorno adecuadas, en varios casos originales respecto de trabajos previos, y en la propuesta de métodos numéricos para su resolución. En cuanto a la resolución numérica, por una parte, para los modelos de un factor estocástico se considera un theta-método, que se ha programado en Matlab y validado con ejemplos académicos con solución analítica. En casos particulares, se obtienen los métodos clásicos de Euler explícito, implícito y Crank-Nicolson para la discretización temporal. Por otro lado, para el modelo con dos factores estocásticos, además de introducir novedosas condiciones de contorno, siguiendo el trabajo [4] sobre resolución numérica de modelos de valoración de empresas, se propone un método *semilagrangiano* para una parte del operador diferencial que no tiene término de segundo orden combinado con un método de diferencias finitas en la dirección en que hay derivadas de segundo orden. Esta estrategia permite una resolución eficiente del problema discretizado en cada paso de tiempo, que se plantea como un sistema lineal con una matriz diagonal por bloques, pudiendo resolverse el sistema tridiagonal de cada bloque independientemente mediante un algoritmo de Thomas específico para matrices tridiagonales.

Al igual que en el caso de [4], esta metodología abre la puerta al uso de técnicas de paralelización, que van más allá de los objetivos del presente documento. Como otras extensiones posibles del trabajo realizado se pueden mencionar: el análisis matemático para obtener la existencia de solución de los modelos de dos y tres factores, o la inclusión de elementos adicionales en las dinámicas de algunos de los procesos estocásticos involucrados como, por ejemplo, la posible presencia de saltos en los precios del mineral mediante modelos de tipo salto-difusión, lo que daría lugar a ecuaciones integro-diferenciales.

En cuanto a la estructura del documento, en el Capítulo 1 se presentan todos los modelos matemáticos, en el Capítulo 2 se describen los métodos numéricos utilizados para la resolución de los modelos y en el Capítulo 3 se indican los resultados numéricos obtenidos para los distintos modelos.

Capítulo 1

Modelos matemáticos

Las compañías mineras se ven abocadas al problema de cómo valorar y planear adecuadamente un proyecto de extracción, sujeto a incertidumbre en cuanto al precio del mineral. Un tal proyecto puede durar muchos años y por ello está sujeto a amplias variaciones en el precio; también está sujeto a la calidad del mineral (*Ore-Grade*, gramos de mineral por tonelada de roca), cuya estimación se hacen por interpolación de datos obtenidos para el *Ore-Grade* en perforaciones llamadas «pozos pre-extracción». Tal estimación, sin embargo, no toma en cuenta la calidad del mineral como una incertidumbre. En el presente trabajo se lleva a cabo una valoración de la mina a través de procesos estocásticos, método que tiene en cuenta el precio y la calidad del mineral como fuentes de incertidumbre; creemos que esto último, suponer la cantidad de mineral en cada tonelada de roca como aleatoria, es una suposición realista. Por otra parte, al tomar el precio y la calidad como incertidumbres se evita calcular flujos futuros de efectivo, aspecto esencial en una valoración por DCF (Flujos de Caja Descontados). La valoración así obtenida puede tenerse en cuenta, junto con los resultados de otro método (por ejemplo DCF), para tomar decisiones acerca de un proyecto de extracción: el cómo incorporar los dos o más resultados de aplicar dos o más métodos de valoración queda fuera de los objetivos de este trabajo, aunque cabe resaltar que el uso de procesos estocásticos es una valoración que asume la incertidumbre como un *hecho* y por tanto debería tenerse en cuenta al tomar una tal decisión.

En este trabajo, pues, mostramos que el valor V de un proyecto de extracción debe satisfacer una cierta Ecuación Diferencial Parcial (EDP) y resolvemos numéricamente dos ecuaciones derivadas a partir de ésta.

1.1. El Modelo completo de tres factores

En primer lugar, además del tiempo t se emplean tres *variables*, las cuales son:

- S : precio por unidad del mineral extraído,
- \bar{Q} : peso acumulado de la roca extraída,
- G : calidad de la roca extraída (*ore-grade*).

Al observar datos de una extracción se puede ver cómo varía G con respecto a \bar{Q} , con lo cual puede hacerse una interpolación en pozos pre-extracción y estimar la cantidad de mineral a extraer. Sin embargo, como en cada punto hay errores de medición, se puede interpretar cada muestra como una simulación entre un amplio rango de posibles muestras Kriging. Para modelar este amplio rango de simulaciones se puede ver *la variación en la calidad de mineral como un proceso estocástico* a través de \bar{Q} .

1.1.1. Dinámicas de las variables espaciales

El proceso estocástico $G = (G_t)_{t \geq 0}$ representa la *calidad* de la roca extraída. Más concretamente G_t es el peso del mineral por unidad (estimada) de roca extraída en el tiempo t : G se mide en gramos/tonelada. En este trabajo se toma la variación de G como un proceso estocástico a través de \bar{Q} . Se propone el siguiente modelo de EDE para la dinámica del proceso G , de modo que es un proceso CIR ([5]) que depende de t (como se muestra más abajo, \bar{Q} depende principalmente de t) y de un movimiento browniano X_G

$$dG_t = k(\alpha(\bar{Q}) - G)d\bar{Q} + \sigma_G \sqrt{G} dX_G, \quad (1.1)$$

en donde $\alpha(\bar{Q})$ es la media de G a través de \bar{Q} (ésta media puede tomarse como una interpolación entre los datos conocidos) y dX_G se distribuye $\mathcal{N}(0, \sqrt{d\bar{Q}})$. Este proceso CIR permite que G tome valores alrededor de su media, sin que lleguen a ser menores que cero. Los valores de k , σ_G y $\alpha(\bar{Q}) \equiv \alpha$ son parámetros a estimar, según la muestra dada.* Por otra parte, en lugar de \bar{Q} se usará, por facilidad en la notación, la *cantidad restante de roca por extraer*, es decir

$$Q = Q_{max} - \bar{Q},$$

donde Q_{max} es la cantidad máxima de roca extraíble de la reserva. Con esto, se tiene $dQ = -d\bar{Q}$. Si la tasa de extracción de roca es $q > 0$ entonces se toma $d\bar{Q} = qdt$ (Q es determinístico) con lo cual

$$dQ = -qdt \quad (1.2)$$

y la variación de Q estará limitada por sus valores mínimo y máximo, lo cual requiere que $q \in [q_{min}, q_{max}]$ (puede ser $q_{min} = 0$).

*Los parámetros obtenidos en [6] son $k = 52/kg$, $\sigma_G = 9.6\sqrt{\frac{G}{kg}}$, entretanto que $\alpha(\bar{Q})$ se describe mediante una gráfica de G versus Q .

Mientras que la incertidumbre debida a G se modela vía (1.1), se asume como es usual que el precio S del *subyacente* sigue un movimiento Browniano geométrico cuya dinámica es

$$dS = \mu S dt + \sigma_s S dX, \quad (1.3)$$

donde μ es la tendencia (drift) y σ_s es la volatilidad de S . La variable aleatoria dX_t se distribuye $\mathcal{N}(0, \sqrt{dt})$ y se toma independiente de dX_G . También se asume la hipótesis de que los procesos estocásticos G y S son independientes.

1.1.2. Dinámica del valor de la mina (V)

Si $V(t, S_t, G_t, \bar{Q}_t)$ es una función con derivadas continuas hasta por lo menos el orden 2, tal que en cada tiempo se tiene $V(t, S_t, G_t, \bar{Q}_t) = V_t$, el lema de Ito ([1],[11]) aplicado a la función de valoración $V(t, S_t, G_t, \bar{Q}_t)$ proporciona la siguiente expresión para dV :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial G} dG \\ &+ \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial G} dS dG + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} (dG)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{Q} \partial S} d\bar{Q} dS + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{Q} \partial G} d\bar{Q} dG \right] \\ &+ \frac{\partial V}{\partial Q} dQ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} (dQ)^2 \end{aligned}$$

Sin embargo, $dQ = -qdt$ implica que las expresiones de orden 2 respecto de \bar{Q} (y por consiguiente respecto de Q) son nulas; el término con $dS dG$ también es nulo (S y G son independientes) y entonces, simplificando y sustituyendo dG y dS , tenemos

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma_s S dX_S) + \frac{\partial V}{\partial G} [k(\alpha - G)(-dQ) + \sigma_G \sqrt{G} dX_G] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\sigma_s^2 S^2 dt) + \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} \sigma_G^2 G d\bar{Q} \right] + \frac{\partial V}{\partial Q} dQ = \\ &= \sigma_s S \frac{\partial V}{\partial S} dX_S + \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial V}{\partial G} dX_G \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ &- \left(-\frac{\partial V}{\partial Q} + k(\alpha - G) \frac{\partial V}{\partial G} + \frac{1}{2} \sigma_G^2 G \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} \right) dQ \end{aligned}$$

Usando $dQ = -qdt$, lo anterior queda

$$\begin{aligned}
 dV &= \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} dX_S + \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial V}{\partial G} dX_G \\
 &+ \left(\frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt \\
 &+ \left(\frac{1}{2} q G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + qk(\alpha - G) \frac{\partial V}{\partial G} \right) dt
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.1.3. El Modelo completo

En esta sección se deduce vía el enfoque convencional de portafolios una Ecuación Diferencial Parcial que debe satisfacer la función de valoración V de la mina.

Siguiendo el enfoque convencional al crear y valorar portafolios libres de riesgo, se construye un portafolio Π en el cual instantáneamente se compra la mina (posición *larga*) y se adquiere una posición *corta* en γ_S cantidades de futuros sobre el commodity y en γ_G cantidades de opciones** C sobre el valor de la mina. Esta opción puede ser de compra o de venta, siempre que sea una opción sobre la misma mina. Esto define el valor del portafolio

$$\Pi = V - \gamma_S S - \gamma_G C,$$

en el que lo construimos de esta manera para manejar en algún modo los riesgos asociados al precio S y a la calidad del mineral extraído de la mina. Así construido, la variación del portafolio en el intervalo $[t, t + dt]$ es

$$d\Pi = dV - \gamma_S dS - \gamma_G dC \tag{1.5}$$

Este portafolio se diseña con el fin de que γ_S y γ_G sean en cada momento las cantidades precisas para cubrir la incertidumbre generada por dX_S y dX_G , lo cual es usual en el ámbito de *coberturas* [1]. Por otra parte, se considera que en un pequeño intervalo de tiempo, dt , el valor de Π se incrementa debido a la tasa libre de riesgo menos cualquier costo generado durante el incremento. Este costo económico se compone típicamente de dos partes: la primera, negativa, que es el costo por unidad de extraer roca, denotado por ε_M , y la segunda, **positiva**, el efectivo generado por vender el mineral contenido en la roca extraída, el cual dependerá de una «*convenience yield*» δ , que refleja entre otros

** Contratos que, en su forma más básica, dan al comprador (o vendedor) el derecho mas no la obligación de adquirir o vender un determinado producto a un determinado precio, en una ventana de tiempo estipulada. Un ejemplo es la opción de compra de un jugador de fútbol, por parte de un club profesional: el club puede *ejercer* la opción antes de un tiempo estipulado, caso en el cual compra al jugador. En caso de no ejercerla, no lo compra, sin perjuicio u obligación alguna. La terminología empleada aquí es estándar en Finanzas Cuantitativas ([8],etc)

los costos de transporte y almacenamiento del commodity ([7], pp 250). Se requerirá usualmente una *fase* extra de procesamiento (*milling*) de la roca para extraer el recurso que se destina a la venta. Es razonable suponer que el costo de procesamiento es evitable, esto es, dicho costo de procesamiento de roca por unidad es inferior al ingreso total por unidad de mineral extraído y listo para la venta (la mina deja utilidad): si ε_P representa el costo por unidad de roca procesada, se procesa siempre que $\varepsilon_P < qSG$, de otro modo no se procesa y el costo de procesar entonces es cero, luego el costo asociado a la **decisión** de procesar o no procesar en un intervalo de tiempo será $\max\{0, qSG - \varepsilon_P\}$, con lo cual un cambio en el valor del portafolio puede escribirse como

$$d\Pi = r\Pi dt + \gamma_S \delta S dt - (\max\{0, qSG - \varepsilon_P\} - \varepsilon_M) dt. \quad (1.6)$$

Los valores apropiados de γ_S y γ_G se encuentran como sigue:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \gamma_S dS - \gamma_G dC = \\ &= \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} dX_S + \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial V}{\partial G} dX_G + \dots \\ &\quad - \gamma_S \sigma_S S dX_S - \gamma_G dC, \end{aligned}$$

Donde los puntos suspensivos representan los términos de dV y de dS que no tienen dX_S ni dX_G ; como también se supone que los movimientos brownianos que gobiernan las dinámicas de S y de G son independientes, entonces

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial G} dG + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_S^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial G^2} \sigma_G^2 G q \right) dt$$

y, por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \gamma_S dS - \gamma_G dC = \\ &= \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} dX_S + \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial V}{\partial G} dX_G + \dots \\ &\quad - \gamma_S \sigma_S S dX_S - \gamma_G \left(\frac{\partial C}{\partial S} \sigma_S S dX_S + \frac{\partial C}{\partial G} \sigma_G \sqrt{G} dX_G \right) + \dots \end{aligned}$$

Como antes, los puntos suspensivos indican los términos de dC que no contienen factores de incertidumbre. Entonces el portafolio será libre de riesgo si y sólo si

$$\begin{aligned} \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} - \gamma_S \sigma_S S - \gamma_G \sigma_S S \frac{\partial C}{\partial S} &= 0 \\ -\gamma_G \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial C}{\partial G} + \sigma_G \sqrt{G} \frac{\partial V}{\partial G} &= 0, \end{aligned}$$

De lo cual, resolviendo para γ_G y γ_S , se sigue

$$\begin{aligned}\gamma_G &= \frac{\frac{\partial V}{\partial C}}{\frac{\partial G}{\partial C}}, \\ \gamma_S &= \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\frac{\partial V}{\partial G} \frac{\partial C}{\partial S}}{\frac{\partial C}{\partial G}} = \frac{\partial V}{\partial S} - \gamma_G \frac{\partial C}{\partial S}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Usando los γ_G y γ_S encontrados en (1.7) (que son, como se mencionó anteriormente, las cantidades precisas en cada intervalo de tiempo necesarias para cubrir la incertidumbre generada por dX y dX_G), las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) sustituidas en (1.6) implican

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} q G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + q k (\alpha - G) \frac{\partial V}{\partial G} - \gamma_S (r - \delta) S \right) dt - \gamma_G dC \\ &= (rV - r\gamma_S S - r\gamma_G C) dt + \gamma_S \delta S dt - (\max\{0, qGS - \varepsilon_P\} - \varepsilon_M) dt,\end{aligned}$$

en donde se asume que se está bajo una medida neutral al riesgo^{***}, en la que la dinámica de S es dada por ([13], pp 250)

$$dS = (r - \delta) S dt + \sigma_S S dX$$

Como $\gamma_G dC = \gamma_G r C dt$, se sigue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} \\ &\quad + q k (\alpha - G) \frac{\partial V}{\partial G} - rV + \max\{0, qGS - \varepsilon_P\} - \varepsilon_M = 0,\end{aligned}\quad (1.8)$$

de modo que la función V tal que $V_t = V(t, S_t, G_t, Q_t)$ verifica la EDP (1.8).

1.1.4. Consideraciones

En la ecuación de valoración obtenida en la sección anterior, V es el *valor presente neto* de la mina. Por otra parte, el hecho de que la cantidad G a modelar -el ore grade- es no transable (Q también es no transable pero es determinístico), motiva el introducir su precio de mercado de riesgo *market*

^{***} El modelo propuesto consta de dos activos riesgosos S y G , de los cuales S es transable, y dos fuentes de incertidumbre dX y dX_G , por lo cual es libre de arbitraje (Björk, Meta-Theorem 8.3.1) y esto implica la existencia de una medida neutral al riesgo (Teorema 10.17 de esta misma referencia).

price of risk en la ecuación de valoración ([13], pp 306), con lo cual la ecuación (1.8) queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}qG\sigma_G^2 \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - q\frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} \\ & + qk(\hat{\alpha} - \delta)\frac{\partial V}{\partial G} - rV + \max\{0, qGS - \varepsilon_P\} - \varepsilon_M = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

siendo $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma_G \lambda_G}{\kappa}$ y λ_G es el *market price of risk* para el «ore grade» G . La ecuación (1.9) es la ecuación de valoración de la mina, de acuerdo con [6].

1.1.5. Condiciones de frontera en el modelo completo

A continuación se analizan condiciones de frontera para (1.9). El hecho de que no es posible obtener más beneficio si la reserva ha sido vaciada, $Q = 0$, o si la concesión para explotar la mina ha expirado, es decir que el tiempo t de concesión alcanza su valor máximo T , motiva las condiciones

$$V = 0 \text{ en } Q = 0 \text{ y } V = 0 \text{ en } t = T.$$

Multiplicando (1.9) por $\frac{1}{S^2}$ vemos que para valores grandes de S la segunda derivada $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ tiende a 0 y por tanto la primera derivada tiende a una expresión constante respecto de S :

$$\frac{\partial V}{\partial S} \rightarrow A(G, Q, t) \quad \text{siempre que } S \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Cuando el precio del subyacente es cero, solamente se necesita resolver la forma reducida de la ecuación (1.9) con $S = 0$:

$$\frac{1}{2}qG\sigma_G^2 \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - q\frac{\partial V}{\partial Q} + qk(\hat{\alpha} - \delta)\frac{\partial V}{\partial G} - rV - \varepsilon_M = 0,$$

ecuación de dos variables espaciales y un factor de incertidumbre.

La segunda derivada respecto de G tiende a cero para valores grandes de G , lo cual puede observarse multiplicando (1.9) por $1/G$, para valores grandes de G . Se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - q\frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} \\ & + q\kappa(\alpha - G)\frac{\partial V}{\partial G} - rV + qGS - \varepsilon_P - \varepsilon_M = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

cuando $G \rightarrow \infty$. Por otro lado, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - q\frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta)S\frac{\partial V}{\partial S} \\ & + q\kappa(\alpha)\frac{\partial V}{\partial G} - rV - \varepsilon_M = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

cuando $G \rightarrow 0$.

1.2. Modelos reducidos

El modelo dado por (1.9) se corresponde con una EDP en la que intervienen tres variables espaciales, además del tiempo. Su tratamiento analítico y numérico es complicado. Analíticamente no hay una forma estándar de llegar a una solución, entretanto que numéricamente el uso de diferencias finitas *en cada variable* es complejo y puede conducir a oscilaciones o inestabilidades no evitables. En este trabajo se hacen principalmente dos estudios de dos modelos obtenidos a partir del modelo completo, en donde se reduce a **dos** el número de variables espaciales (factores).

1.2.1. Modelo para $V(t, Q, S)$

Un primer modelo de dos factores se obtiene considerando el precio S y la cantidad de roca por extraer Q como fuentes de incertidumbre, que siguen las dinámicas definidas por las ecuaciones (1.2) y (1.3).

Para este modelo se puede considerar la calidad G como una constante, por ejemplo su media estimada en [6], unos $10gr/ton$, se tiene que si G es constante, $dG = 0$ y $V = V(t, S, \bar{Q})$ con lo cual, aplicando el Lema de Ito, se obtiene

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \bar{Q}} d\bar{Q} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma_s S dX_s) - \frac{\partial V}{\partial Q} q dt + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma_s S \frac{\partial V}{\partial S} dX_s \end{aligned}$$

En este caso, se considera el portafolio

$$\Pi = V - \gamma_S S,$$

$d\Pi = dV - \gamma_S dS$ y asimismo $d\Pi = r\Pi dt + \gamma_S \delta S dt - (\max\{0, qSG - \varepsilon_p\} - \varepsilon_M) dt$, con lo que se obtiene

$$d\Pi = dV - \gamma_S dS = \sigma_s S \frac{\partial V}{\partial S} dX_s + \dots - \gamma_s S dX.$$

De lo cual, haciendo

$$\sigma_s S \frac{\partial V}{\partial S} - \gamma_s \sigma_s S = 0,$$

Se sigue $\gamma_s = \frac{\partial V}{\partial S}$. Así, la dinámica de Π queda

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt - q \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) - \frac{\partial V}{\partial S} \mu S dt \\ &= \left(rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \delta S \frac{\partial V}{\partial S} dt - (\max\{0, qSG - \varepsilon_p\} - \varepsilon_M) dt, \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene la siguiente EDP en dos variables espaciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \\ - rV + \max\{0, qGS - \varepsilon_P\} - \varepsilon_M = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

que es un modelo similar a uno dado en [3], y similar al de Black-Scholes pero con términos adicionales asociados a consideraciones económicas.

1.2.2. Modelo para $V(t, G, S)$

En este modelo se asume que G sigue la dinámica dada por (1.1), y S la dinámica dada por (1.3). Además, se propone una simplificación alternativa del problema: asumir que la tasa de extracción y la decisión de procesar son independientes, tanto del precio como de la calidad del recurso*. Esto simplifica las expresiones de la tasa de extracción y del costo por unidad de roca extraída procesada, respectivamente, a las formas $q = q(Q, t)$ y $\varepsilon = \varepsilon(Q, t)$.

Por tanto los flujos de efectivo generados por la mina son ahora de la forma $qSG - \varepsilon$, ya que ahora siempre se decide procesar. Usando esto y el hecho de que $\frac{\partial Q}{\partial t} = -q$, se puede determinar $Q(t)$ exactamente y calcular el momento en que la reserva se agotará. Con ésto el tiempo T se puede definir como el menor entre los tiempos de expiración de la concesión y el momento en que la reserva se agote. Además, es razonable suponer que la tasa de extracción de roca q es constante a lo largo del tiempo del contrato, supuesto que también se tendrá en cuenta en el presente trabajo. Estas suposiciones permiten *eliminar* la variación de Q del modelo** y escribir $\bar{q}(t) = q(Q(t), t)$ y $\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(Q(t), t)$.

Descomposición de la función $V(t, G, S)$: dos Modelos de la forma $V(t, G)$

En esta sección se hace uso de un hecho que relaciona los modelos reducidos con el original: cualquiera sea la solución encontrada en cualquier modelo reducido, tal solución debe satisfacer la ecuación original y en especial las condiciones de frontera de aquella. En particular, entonces cada solución de (1.9) debe satisfacer la condición de frontera (1.10), lo cual sugiere buscar una solución de la forma

$$V(t, G, S) = SV_1(t, G) + V_2(t, G), \quad (1.14)$$

*Sin ésta simplificación, se tiene que por ejemplo, la cantidad de recurso restante Q depende del tiempo transcurrido y de la tasa de extracción, la cual a su vez dependería del precio S y de la calidad G y por lo mismo es necesario incluir la variación de Q en el modelo.

**En efecto, si en $V = V(t, S, G, Q)$ se conoce una expresión exacta (en términos de t) para $Q = Q(t)$, entonces se tendría $V(t, S, G, Q) = V = V(t, S, G)$, y $\frac{\partial V}{\partial Q}$ ya no es necesaria en la valoración de V .

ya que la segunda derivada de esta expresión con respecto de S es cero. Con esto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= S \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = V_1, \\ \frac{\partial V}{\partial G} &= S \frac{\partial V_1}{\partial G} + \frac{\partial V_2}{\partial G}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} = S \frac{\partial^2 V_1}{\partial G^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial G^2}.\end{aligned}$$

Así, sustituyendo (1.14) en (1.9), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \bar{q} G \sigma_G^2 \left(S \frac{\partial^2 V_1}{\partial G^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial G^2} \right) + S \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{\partial V_2}{\partial t} + (r - \delta) S V_1 \\ + \bar{q} \kappa (\hat{\alpha} - G) \left(S \frac{\partial V_1}{\partial G} + \frac{\partial V_2}{\partial G} \right) - r S V_1 - r V_2 + \bar{q} S G - \bar{\varepsilon} = 0.\end{aligned}$$

Entonces, reorganizando términos, se buscan V_1 y V_2 tales que:

$$\begin{aligned}S \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \bar{q} \kappa (\hat{\alpha} - G) \frac{\partial V_1}{\partial G} + \frac{1}{2} \bar{q} G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial G^2} + (r - \delta) V_1 - r V_1 + \bar{q} G \right) = 0, \quad y \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \bar{q} \kappa (\hat{\alpha} - G) \frac{\partial V_2}{\partial G} + \frac{1}{2} \bar{q} G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial G^2} - r V_2 - \bar{\varepsilon} = 0,\end{aligned}$$

de lo cual se sigue

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial t} + \bar{q} \kappa (\hat{\alpha} - G) \frac{\partial V_1}{\partial G} + \frac{1}{2} \bar{q} G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial G^2} - \delta V_1 = -\bar{q} G \quad y \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + \bar{q} \kappa (\hat{\alpha} - G) \frac{\partial V_2}{\partial G} + \frac{1}{2} \bar{q} G \sigma_G^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial G^2} - r V_2 - \bar{\varepsilon} = 0.\end{aligned} \quad (1.15)$$

Capítulo 2

Métodos numéricos

En este capítulo se aborda una resolución de las ecuaciones (1.15) y (1.13) empleando métodos numéricos (como por ejemplo se hace en [2],[9],[10],[12]), lo cual para el caso de los dos modelos de un factor es un enfoque distinto al de [6] (en donde se resuelven de forma cerrada). Para el caso del modelo de dos factores, el método numérico aquí presentado (*semilagrangiano*) sigue algunas de las ideas de [4].

2.1. Métodos para los Modelos de un factor

Los dos modelos dados en (1.15), que tienen a G como única variable espacial, se analizan considerando la expresión más general:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{q}\kappa(\hat{\alpha} - G)\frac{\partial V}{\partial G} + \frac{1}{2}\bar{q}G\sigma_G^2\frac{\partial^2 V}{\partial G^2} + aV_1 = f(t, G) \quad (2.1)$$

de la cual se tiene (1.15) para $V = V_1$ con $a = -\delta$ y $f(t, G) = -\bar{q}G$, y para $V = V_2$ con $a = -r$ y $f(t, G) = \bar{\varepsilon}$, respectivamente.

A continuación se describe un método de diferencias finitas para dar una solución numérica de (2.1).

En primer lugar, se considera el problema en el dominio acotado $[0, T] \times [0, G_{max}]$, donde G_{max} denota el *grade* máximo asumido para G .

Se divide el intervalo $[0, G_{max}]$ en m subintervalos de longitud $\Delta G = G_{max}/m$ y el intervalo de tiempo $[0, T]$ se divide en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta t = T/n$. Tanto m como n se eligen adecuadamente para garantizar buenas aproximaciones de la solución.

Se consideran los puntos $t_j = j * \Delta t$ en la malla temporal, y los puntos $G_i = i * \Delta G$ en la malla de ore grade, con $1 \leq j \leq n$ y $0 \leq i \leq m + 1$. Para buscar una solución numérica de (2.1) en los puntos (t_j, G_i) se tienen en cuenta las siguientes condiciones de contorno:

- $V(t, 0) = 0$: si el valor de la mina depende sólo de la proporción de mineral en la roca, una mina sin mineral no tiene valor;

$$\blacksquare \frac{\partial V}{\partial G}(t, G_{max}) = 0:$$

Ésta última condición se discretiza en la forma:

$$\frac{V(t_j, G_{max}) - V(t_j, G_{max-1})}{\Delta G} \approx 0$$

Por último, se consideran las condiciones finales

$$V_1(T, G) = 0, V_2(T, G) = 0$$

que describen el valor nulo de la mina en su expiración, hecho que debe reflejar cualquier solución *particular* del problema y por ende cualquier solución de (2.1).

A continuación se muestra la discretización de las derivadas que aparecen en (2.1), junto con el uso del θ - método que se describe por ejemplo en [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} + qk(\alpha - G_i) \left(\theta \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta G} + (1 - \theta) \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i,j+1}}{\Delta G} \right) \\ & + \frac{q}{2} \sigma_G^2 G_i \left(\theta \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta G)^2} + (1 - \theta) \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{(\Delta G)^2} \right) \\ & + a(\theta V_{i,j} + (1 - \theta) V_{i,j+1}) \\ & = \theta f(t_j, G_i) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, G_i), \end{aligned}$$

donde $V_{i,j} \approx V(t_j, G_i)$. La anterior discretización puede escribirse como

$$\begin{aligned} & V_{i-1,j} \left(\frac{q}{2} \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} \theta \right) + V_{i,j} \left(\frac{-1}{\Delta t} + qk(\alpha - G_i) \cdot \frac{-1}{\Delta G} \theta - q \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} \theta + a\theta \right) \\ & + V_{i+1,j} \left(\frac{qk(\alpha - G_i)}{\Delta G} \theta + \frac{q}{2} \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} \theta \right) = \\ & V_{i-1,j+1} \left(\frac{q}{2} \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} (1 - \theta) \right) \\ & + V_{i,j+1} \left(\frac{-1}{\Delta t} + qk(\alpha - G_i) \cdot \frac{-1}{\Delta G} (1 - \theta) - q \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} (1 - \theta) - a(1 - \theta) \right) \\ & + V_{i+1,j+1} \left(\frac{qk(\alpha - G_i)}{\Delta G} (1 - \theta) + \frac{q}{2} \frac{\sigma_G^2 G_i}{(\Delta G)^2} (1 - \theta) \right) + \theta f(t_j, G_i) + (1 - \theta) f(t_{j+1}, G_i) \end{aligned}$$

Y si se fija un $j \in \{n-1, \dots, 0\}$ se tiene un «sistema de ecuaciones con matriz tridiagonal»: en efecto, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ la igualdad anterior puede reescribirse (renombrando los coeficientes) como

$$\alpha_i V_{i-1,j} + \beta_i V_{i,j} + \gamma_i V_{i+1,j} = \rho_i V_{i-1,j+1} + \pi_i V_{i,j+1} + \tau_i V_{i+1,j+1} + \theta f_{i,j} + (1 - \theta) f_{i,j+1}, \quad (2.2)$$

2.2. Métodos para el modelo asociado a $V(t, Q, S)$

En esta sección se describe y utiliza un método semilagrangiano con el fin de dar una solución numérica de (1.13). Por simplicidad se escribe simplemente σ para referirnos a la constante σ_S .

Sea \mathcal{L} un operador definido por

$$\mathcal{L}(V) := \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} - q \frac{\partial V}{\partial Q} - rV.$$

Entonces (1.13) queda en la forma

$$\mathcal{L}(V) = \varepsilon_M - \max\{0, q\bar{G}S - \varepsilon_p\},$$

Con la condición final

$$V(T, Q, S) = 0, \quad Q > 0, S > 0.$$

2.2.1. Condiciones de contorno

Para el desarrollo numérico de (1.13) se considera el dominio

$$\Omega = [0, T] \times [0, Q_{max}] \times [0, S_{max}].$$

A continuación se adaptan las ideas presentadas en [4] y [7] para identificar en qué regiones de la frontera de Ω es necesario y suficiente imponer condiciones de contorno, con el fin de resolver numéricamente el problema.

Siguiendo la notación de [4], sean

$$\begin{aligned} x_0 = t, \quad \underline{x_0} = 0, \quad \bar{x_0} = T, \\ x_1 = Q, \quad \underline{x_1} = 0, \quad \bar{x_1} = Q_{max}, \\ x_2 = S, \quad \underline{x_2} = 0, \quad \bar{x_2} = S_{max}. \end{aligned}$$

Además, reescribimos (1.13) en la forma

$$\sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=0}^2 b_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + y_0 = f,$$

donde

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma^2 x_2^2}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -q \\ (r - \delta)x_2 \end{bmatrix},$$

$$y_0 = -rV, \quad f = \varepsilon_M - \max\{0, q\bar{G}x_2 - \varepsilon_p\}.$$

Definiendo además los conjuntos $\Gamma^* = \partial\Omega$, $\Gamma_0^- = \{x_0 = 0\}$ (la cara $x_0 = 0$ de Ω), $\Gamma_0^+ = \{x_0 = T\}$, $\Gamma_1^- = \{x_1 = 0\}$, $\Gamma_1^+ = \{x_1 = \bar{x}_1\}$, $\Gamma_2^- = \{x_2 = 0\}$, $\Gamma_2^+ = \{x_2 = \bar{x}_2\}$, y

$$\Sigma^0 = \left\{ x \in \Gamma^* : \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} m_i m_j = 0 \right\}, \quad \Sigma^1 = \Gamma^* - \Sigma^0,$$

$$\Sigma^2 = \left\{ x \in \Sigma^0 : \sum_{i=0}^2 \left(b_i - \sum_{j=0}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} \right) m_i < 0 \right\},$$

donde \mathbf{m} es un vector unitario normal a cada cara de Γ^* y apuntando hacia el interior de Ω (p.ej., $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$ para Γ_0^- , etc), observamos entonces que

$$\Sigma^0 = \{x \in \Gamma^* : \mathbf{m}^t B \mathbf{m} = 0\} = \Gamma_0^\pm \cup \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^-,$$

$$\Sigma^1 = \Gamma^* - \Sigma^0 = \Gamma_2^+,$$

$$\Sigma^2 = \left\{ x \in \Sigma^0 : \sum_{i=0}^2 \left(b_i - \sum_{j=0}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} \right) m_i < 0 \right\} = \Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^-.$$

Ahora bien, de acuerdo con [4], la región de Γ^* en donde es necesario y suficiente imponer condiciones de frontera es $\Sigma^1 \cup \Sigma^2$, figura 2.1, y esta región, para nuestro contexto, corresponde a

$$\Gamma_0^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^+ = \{t = T\} \cup \{Q = 0\} \cup \{S = S_{max}\},$$

que es la región en donde se impondrán tales condiciones de contorno. Entonces, las condiciones de contorno propuestas son

$$\begin{aligned} V(T, Q, S) &= 0 && \text{Condición final o de frontera,} \\ V(t, 0, S) &= 0, && t \in (0, T), S > 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, Q, S_{max}) &= 0, && t \in (0, T), Q \in [0, Q_{max}], \end{aligned}$$

donde la tercera condición puede deducirse directamente de (1.13) dividiendo por S^2 y haciendo $S \rightarrow \infty$.

A continuación damos una interpretación de la condición $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, Q, S_{max}) = 0$ en una forma alternativa. Cuando se toma la condición $\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, Q, S) = 0$ y se reemplaza en (1.13), se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = \varepsilon_M + \varepsilon_p - qGS. \quad (2.3)$$

Si se busca una solución lineal en las variables espaciales, e.d. una solución de la forma

$$V(t, Q, S) = H_1(t)Q + H_2(t)S + H_3(t).$$

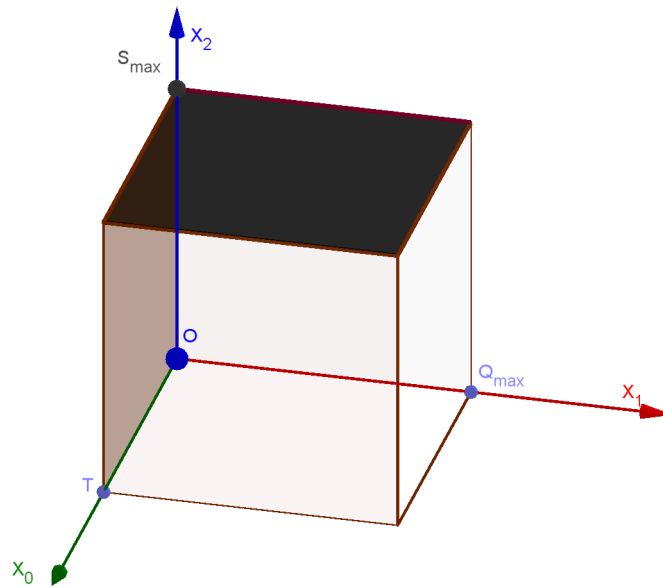


Figura 2.1: El cubo Ω y los planos $x_0 = T$, $x_2 = S_{max}$, $x_1 = 0$.

Entonces

$$\frac{\partial V}{\partial t} = H_1'(t)Q + H_2'(t)S + H_3'(t), \quad \frac{\partial V}{\partial S} = H_2(t), \quad \frac{\partial V}{\partial Q} = H_1(t),$$

con lo que (2.3) queda

$$H_1'(t)Q + H_2'(t)S + H_3'(t) + (r - \delta)SH_2(t) - qH_1(t) - r(H_1(t)Q + H_2(t)S + H_3(t)) = \varepsilon_M + \varepsilon_p - qGS$$

y agrupando términos, se sigue

$$(H_1'(t) - rH_1(t))Q + (H_2'(t) + (r - \delta)H_2(t) - rH_2(t) + qG)S + H_3'(t) - qH_1(t) - rH_3(t) = \varepsilon_M + \varepsilon_p,$$

Lo cual origina el sistema de EDO's

$$\begin{aligned} H_1'(t) &= rH_1(t), \\ H_2'(t) &= \delta H_2(t) - qG, \\ H_3'(t) &= qH_1(t) + rH_3(t) + \varepsilon_M + \varepsilon_p. \end{aligned}$$

Su solución viene dada por:

$$H_1(t) = k_1 e^{rt}, \quad H_2(t) = k_2 e^{\delta t} + \frac{qG}{\delta}, \quad H_3(t) = k_3 e^{rt} + qk_1 t e^{rt} - \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r}.$$

Ahora, la condición final $V(T, Q, S) = 0$ implica que

$$V(T, Q, S) = 0 = k_1 e^{rT} Q + \left(k_2 e^{\delta T} + \frac{qG}{\delta} \right) S + k_3 e^{rT} + qk_1 T e^{rT} - \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r},$$

lo cual finalmente fuerza a que

$$k_1 = 0, k_2 = \frac{-qG}{\delta e^{\delta T}}, k_3 = \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r e^{rT}}.$$

Así, se obtiene

$$\begin{aligned} V(t, Q, S) &= \left(\frac{-qG}{\delta e^{\delta T}} e^{\delta t} + \frac{qG}{\delta} \right) S + \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r e^{rT}} e^{rt} - \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r} = \\ &= \frac{qG}{\delta} (1 - e^{-\delta(T-t)}) S - \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r} (1 - e^{-r(T-t)}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, se propone simplemente reemplazar

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, Q, S_{max}) = 0$$

por la condición

$$V(t, Q, S_{max}) = \frac{qG}{\delta} (1 - e^{-\delta(T-t)}) S_{max} - \frac{\varepsilon_M + \varepsilon_p}{r} (1 - e^{-r(T-t)}).$$

2.2.2. Discretización de la EDP

La ecuación (1.13) puede escribirse en la forma

$$\frac{DV}{Dt} + \mathcal{A}V = \varepsilon_M - \max\{0, q\bar{G}S - \varepsilon_p\} \quad (2.4)$$

donde

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{A}V = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV, \quad (2.6)$$

y la condición final es

$$V(T, Q, S) = 0. \quad (2.7)$$

Siguiendo las ideas de [4] se propone la siguiente discretización en tiempo junto con una del tipo Euler implícita o Crank-Nicolson en espacio.

Sea $(t_n, Q_i, S_j) = (n\Delta t, i\Delta Q, j\Delta S)$ un nodo genérico de la malla de diferencias finitas, cuyos pasos son de tamaños Δt , ΔQ y ΔS respectivamente. Los rangos

de los índices son $n = 0, 1, \dots, N$; $i = 0, 1, \dots, I$; $j = 0, 1, \dots, J$, respectivamente. Se propone la siguiente aproximación para (2.5):

$$\frac{DV}{Dt}(t_n, Q_i, S_j) \approx \frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) - V(t_n, Q_i, S_j)}{\Delta t}, \quad (2.8)$$

donde $\chi_{n+1}(Q_i, S_j) \equiv \chi_{ij}(t_{n+1})$ se obtiene solucionando el siguiente problema de valor inicial asociado a una EDO en la variable χ_{ij} :

$$\frac{d\chi_{ij}}{dw}(w) = -q; \quad \chi_{ij}(t_n) = Q_i$$

La solución de este problema, siendo q constante, es

$$\chi_{ij}(t_{n+1}) = q(t_n - t_{n+1}) + Q_i = -q\Delta t + Q_i$$

Por otro lado, se propone el siguiente θ - método para la discretización del operador \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}V(t_n, Q_i, S_j) &\approx \\ &\frac{\sigma^2 S_j^2 \theta}{2} \left(\frac{V(t_n, Q_i, S_{j+1}) - 2V(t_n, Q_i, S_j) + V(t_n, Q_i, S_{j-1})}{\Delta S^2} \right) \\ &+ \frac{\sigma^2 S_j^2 (1 - \theta)}{2} \left(\frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j+1}) - 2V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) + V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j-1})}{\Delta S^2} \right) \\ &+ (r - \delta) S_j \theta \left(\frac{V(t_n, Q_i, S_{j+1}) - V(t_n, Q_i, S_{j-1})}{2\Delta S} \right) \\ &+ (r - \delta) S_j (1 - \theta) \left(\frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j+1}) - V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j-1})}{2\Delta S} \right) \\ &- r\theta V(t_n, Q_i, S_j) - r(1 - \theta)V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde para $\theta = 0.5$ se tiene un método de Crank-Nicolson.

Usando las ecuaciones (2.8) y (2.9), la discretización de (2.3) queda como sigue:

$$\begin{aligned} &\frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) - V(t_n, Q_i, S_j)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S_j^2 \theta}{2} \left(\frac{V(t_n, Q_i, S_{j+1}) - 2V(t_n, Q_i, S_j) + V(t_n, Q_i, S_{j-1})}{\Delta S^2} \right) \\ &+ \frac{\sigma^2 S_j^2 (1 - \theta)}{2} \left(\frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j+1}) - 2V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) + V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j-1})}{\Delta S^2} \right) \\ &+ (r - \delta) S_j \theta \left(\frac{V(t_n, Q_i, S_{j+1}) - V(t_n, Q_i, S_{j-1})}{2\Delta S} \right) \\ &+ (r - \delta) S_j (1 - \theta) \left(\frac{V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j+1}) - V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j-1})}{2\Delta S} \right) \\ &- r\theta V(t_n, Q_i, S_j) - r(1 - \theta)V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) \\ &= \varepsilon_M - \max\{0, (q\bar{G})S_j - \varepsilon_p\}. \end{aligned}$$

Entonces, reorganizando términos, se tiene

$$\begin{aligned}
& V(t_n, Q_i, S_{j-1}) \left[\frac{\sigma^2 S_j^2 \theta}{-2(\Delta S)^2} + \frac{(r - \delta) S_j \theta}{2\Delta S} \right] + V(t_n, Q_i, S_j) \left[\frac{-1}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2 \theta}{(\Delta S)^2} + r\theta \right] \\
& + V(t_n, Q_i, S_{j+1}) \left[\frac{\sigma^2 S_j^2 \theta}{-2(\Delta S)^2} + \frac{(r - \delta) S_j \theta}{-2\Delta S} \right] = \\
& V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j-1}) \left[\frac{\sigma^2 S_j^2 (1 - \theta)}{2(\Delta S)^2} + \frac{(r - \delta) S_j (1 - \theta)}{-2\Delta S} \right] \\
& + V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) \cdot \left[\frac{-1}{\Delta t} - \frac{\sigma^2 S_j^2 (1 - \theta)}{(\Delta S)^2} - r(1 - \theta) \right] \\
& + V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_{j+1}) \left[\frac{\sigma^2 S_j^2 (1 - \theta)}{2(\Delta S)^2} + \frac{(r - \delta) S_j (1 - \theta)}{2\Delta S} \right] \\
& + \varepsilon_M - \max\{0, (q\bar{G})S_j - \varepsilon_p\}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Para cada paso de tiempo, el conjunto de ecuaciones (2.10) es un sistema lineal de $(I - 1) \times (J - 1)$ incógnitas. No obstante, teniendo en cuenta la discretización escogida y ordenando los nodos de forma lexicográfica, es decir, primero fijando un índice de Q y tomando para dicho índice cada uno de los índices de S , se obtiene una matriz diagonal por bloques con $I - 1$ bloques, cada uno de tamaño $J - 1$:

Usando las convenciones

$$\begin{aligned}
a_1(S_j) &= -\frac{1}{\Delta t} + \frac{\theta \sigma^2 S_j^2}{(\Delta S)^2} + r\theta, \\
a_2(S_j) &= -\frac{\theta \sigma^2 S_j^2}{2(\Delta S)^2} - \frac{\theta(r - \delta) S_j}{2\Delta S}, \\
a_3(S_j) &= -\frac{\theta \sigma^2 S_j^2}{2(\Delta S)^2} + \frac{\theta(r - \delta) S_j}{2\Delta S}, \\
V_{ij}^{n+1} &= V(t_{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j), \quad V_{ij}^n = V(t_n, Q_i, S_j),
\end{aligned}$$

$$\text{queda} A(S) = \begin{bmatrix} a_1(S_1) & a_2(S_1) & 0 & \cdots & 0 \\ a_3(S_2) & a_1(S_2) & a_2(S_2) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1(S_{J-2}) & a_2(S_{J-2}) \\ 0 & \cdots & 0 & a_3(S_{J-1}) & a_1(S_{J-1}) \end{bmatrix}$$

y

$$A(S)V_i^n = b_i^{n+1},$$

donde la j -ésima entrada del i -ésimo vector b_i^{n+1} viene dada por

$$(b_i^{n+1})_j = -\frac{\bar{V}_{ij}^{n+1}}{\Delta t} - \bar{V}_{ij}^{n+1} \left(\frac{(1-\theta)\sigma^2 S_j^2}{(\Delta S)^2} + (1-\theta)r \right) + \bar{V}_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{(1-\theta)\sigma^2 S_j^2}{2(\Delta S)^2} + \frac{(1-\theta)(r-\delta)S_j}{2\Delta S} \right) \\ + \bar{V}_{i,j+1}^{n+1} \left(\frac{(1-\theta)\sigma^2 S_j^2}{2(\Delta S)^2} - \frac{(1-\theta)(r-\delta)S_j}{2\Delta S} \right) + \varepsilon_M - \max\{0, q\bar{G}S_j - \varepsilon_p\},$$

Se tiene entonces que (2.10) puede verse como la *concatenación* de $I - 1$ sistemas lineales con $J - 1$ incógnitas cada uno; Más concretamente, a cada paso de tiempo y dado un valor de i (subíndices de Q) cada bloque del sistema lineal puede escribirse en la forma

$$A(S)V_i^n = b_i^{n+1},$$

y cada uno de estos sistemas se puede resolver independientemente de los demás. Además, es de notar que todos los $I - 1$ sistemas lineales quedan definidos por la misma matriz $A(S)$. Ahora, para establecer el segundo miembro de cada sistema, se hace necesaria una interpolación para aproximar el valor

$$V_{i,j}^{n+1} = V(t^{n+1}, \chi_{n+1}(Q_i, S_j), S_j) = V(t^{n+1}, Q_i - q\Delta t, S_j),$$

debido a que $Q_i - q\Delta t$ puede no coincidir con ningún otro valor de la malla de las Q_i , $i = 1, 2, \dots, I$. Tal interpolación puede ser por ejemplo lineal y se propone como sigue:

- Si $Q_{i-1} < Q_i - q\Delta t < Q_i$ para algún $i \in \{1, \dots, I\}$,
Entonces

$$V(t^{n+1}, Q_i - q\Delta t, S_j) = (1-w)V(t^{n+1}, Q_{i-1}, S_j) + wV(t^{n+1}, Q_i, S_j),$$

donde $w = \frac{Q_i - q\Delta t - Q_{i-1}}{Q_i - Q_{i-1}}$ y

- En otro caso, entonces

$$V(t^{n+1}, Q_i - q\Delta t, S_j) = V(t^{n+1}, 0, S_j)$$

Finalmente, para $S = 0$ podemos observar que (1.13) toma la forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} - q \frac{\partial V}{\partial Q} - rV = \varepsilon_M,$$

lo cual se discretiza como

$$\frac{V(t^{n+1}, Q_j, 0) - V(t^n, \chi(Q_j, 0), 0)}{\Delta t} - \theta r V(t^{n+1}, Q_j, 0) - (1-\theta)r V(t^{n+1}, \chi(Q_j, 0), 0) = \varepsilon_M,$$

y se sigue entonces que

$$V_{j,0}^{n+1} = \frac{\Delta t \varepsilon_M + (\Delta t(1 - \theta)r + 1)\bar{V}_{j,0}^n}{1 - \theta r \Delta t}$$

puede usarse como condición adicional de contorno (dada por el problema mismo) cuando $S = 0$.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En este capítulo, para cada problema se presentan los resultados de la aplicación de los métodos numéricos descritos en el capítulo anterior. Los resultados se presentan en forma tabular en algunos casos y, sobre todo, gráficamente. Los programas de los que se obtienen dichos resultados fueron elaborados en MATLAB.

3.1. Resultados modelo de un factor

3.1.1. Caso analítico: Validación del método numérico

En primer lugar se considera una función en las variables t y G cuya expresión se conoce, y que tiene la propiedad de satisfacer las condiciones de frontera asociadas al modelo (2.1). En concreto, se emplea la función de validación:

$$W(t, G) = (T - t)((G - G_{max})^2 - G_{max}^2).$$

Nótese que W satisface $W(T, G) = 0$ y $W(t, 0) = 0 = \frac{\partial W}{\partial G}(t, G_{max})$, que son las condiciones finales y de frontera dadas en la Sección 2.1. Además si se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}(t, G) &= G_{max}^2 - (G - G_{max})^2, \\ \frac{\partial W}{\partial G}(t, G) &= (T - t) \cdot 2(G - G_{max}), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial G^2}(t, G) &= 2(T - t),\end{aligned}$$

entonces para

$$\begin{aligned}f(t, G) &= G_{max}^2 - (G - G_{max})^2 + \bar{q}k(\alpha - G)(T - t) \cdot 2(G - G_{max}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{q}\sigma_G^2 G \cdot 2(T - t) - \delta(T - t)((G - G_{max})^2 - G_{max}^2)\end{aligned}$$

la función W satisface la ecuación (2.1). Entonces, el programa empleado debe reproducir aproximadamente la gráfica de W , que para cada t fijo (en particular para $t = 0$) es una parábola con mínimo en $G = G_{max}$.

Con los valores $\sigma = 0.5$, $r = 0.1$, $T = 10$, $G_{max} = 30$, $G_{min} = 0$, $q = 1 = k$, $\alpha = 10$, y utilizando $\Delta G = 30/300$ y $\Delta t = 10/3000$, la función W tiene como gráfica en $t = 0$ la curva

$$W(0, G) = 10((G - 30)^2 - 30^2) = 10G^2 - 600G, \quad 0 \leq G \leq 30,$$

parábola con mínimo y vértice en $(30, -9000)$.

En las figuras 3.1 y 3.2 se compara la gráfica obtenida para W , usando el método numérico con $\theta = 0.5$ y los valores dados, con la gráfica *real* para W . El error cuadrático entre la gráfica encontrada numéricamente y la gráfica real es $E \approx 0.0024167$.

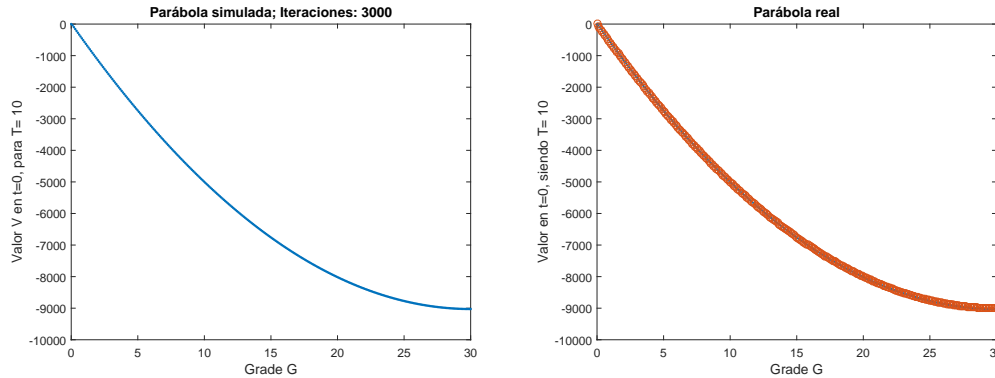


Figura 3.1: Gráficas con el método numérico (izquierda) y real (derecha) para la función W .

A continuación se muestra en una tabla el orden de convergencia del método implícito: para cada malla bidimensional de tamaño $h = (\Delta t, \Delta G)$, usando $R = \frac{error(h)}{error(h/2)}$ como el radio de convergencia del método, el orden es definido como $\log_2(R)$.

Convergencia con $\theta = 1$				
Pasos de tiempo	Pasos de espacio	Error	R	Orden
1000	100	0.00658435	—	—
2000	200	0.00330368	1.993035	0.9950
4000	400	0.00165476	1.996471	0.9974
8000	800	0.00082812	1.998218	0.9987

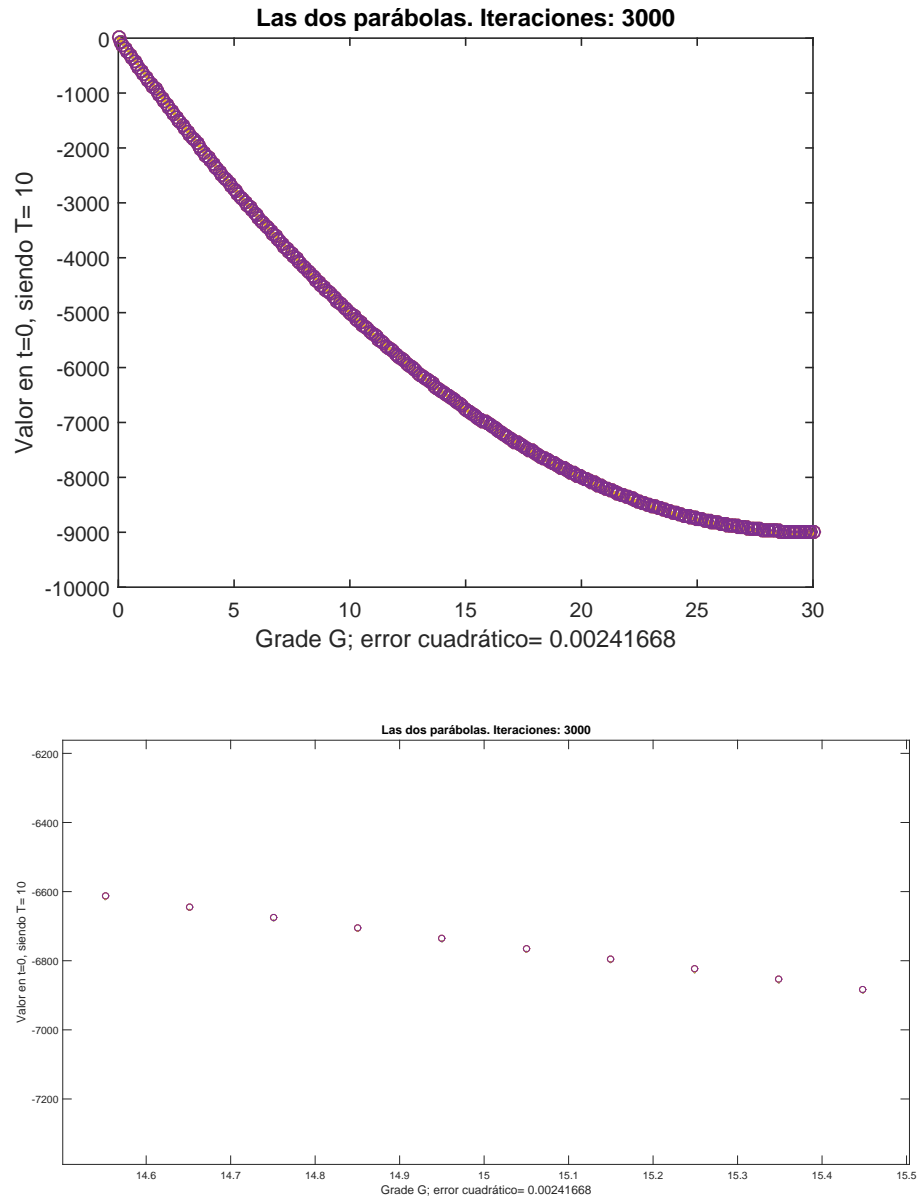


Figura 3.2: Gráficas superpuestas (arriba); ampliación para $G \in [14.5, 15.5]$.

3.1.2. Caso concreto: Resultados Modelo

El programa validado en la subsección anterior se aplica ahora a las ecuaciones (1.15), usando los valores dados en [6]. Para cada función V_1 o V_2 en particular, se obtienen como resultado las figuras 3.3 y 3.4, respectivamente. En la figura 3.3 se observa una dependencia lineal entre $V_1(0, G)$ y G . En la figura 3.4, izquierda, se observa la no dependencia de $V_2(0, G)$ respecto de G , y a la derecha se puede apreciar para V_2 una curva exponencial respecto de t ,

que además es independiente de G ([6], ecuaciones (18)-(21)*). Además, en la figura 3.5 se comparan la solución numérica de (1.15) para V_2 con la solución analítica obtenida en [6].

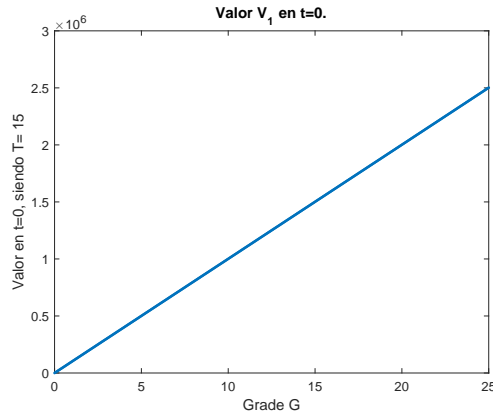


Figura 3.3: Valores de V_1 para G entre 0 y 30, en el tiempo inicial $t = 0$.

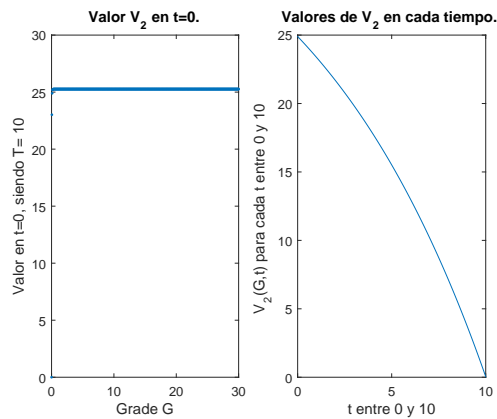


Figura 3.4: **Izquierda:** Valores de V_2 para $0 \leq G \leq 30$ en $t = 0$. **Derecha:** Valores de V_2 en cada tiempo $t \in [0, T]$.

3.1.3. Una valoración numérica

Se concluye la presente sección con el uso de (1.14):

$$V = S \cdot V_1 + V_2$$

y de las soluciones numéricas para V_1 y V_2 , de la subsección anterior, para dar una solución numérica de V con respecto a una malla de precios S especificada

*La expresión en [6] para V_2 es $V_2(t, G) = \frac{\bar{m}}{r}(1 - e^{-r(T-t)})$

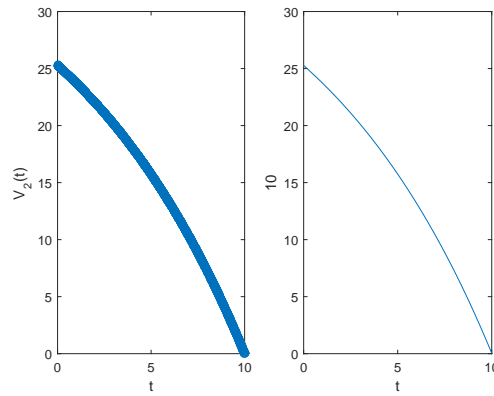


Figura 3.5: **Izquierda:** $V_2(t, G) = \frac{\bar{\epsilon}}{r}(1 - e^{-r(T-t)})$. **Derecha:** Aproximación numérica de V_2 .

(Figura 3.6). En los ejes $S = 0$ y $G = 0$, el precio es asimismo 0, y V es creciente con respecto a G y a S aunque para precios bajos el valor de V es bajo sin importar los valores de G .

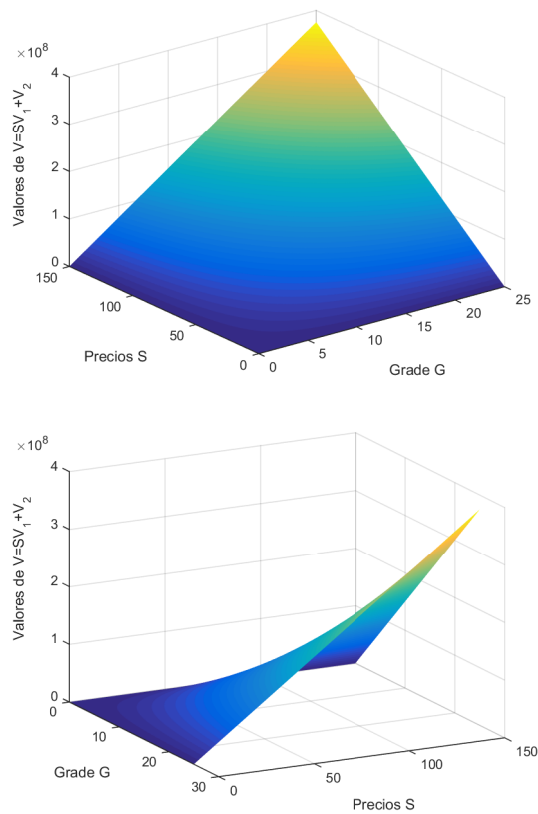


Figura 3.6: La gráfica de $V = V(0, S, G)$ con $0 \leq S \leq 150$, $0 \leq G \leq 25$.

Hasta este punto se han analizado numéricamente las ecuaciones (1.15) de una variable espacial, así como se muestra una superficie en la que el valor de V es función de S y de G , para el tiempo $t = 0$. La gráfica obtenida representa una aproximación numérica a *una* solución del problema original. El método aquí presentado es, en cierto sentido, sólo un primer paso en el análisis de un problema complejo.

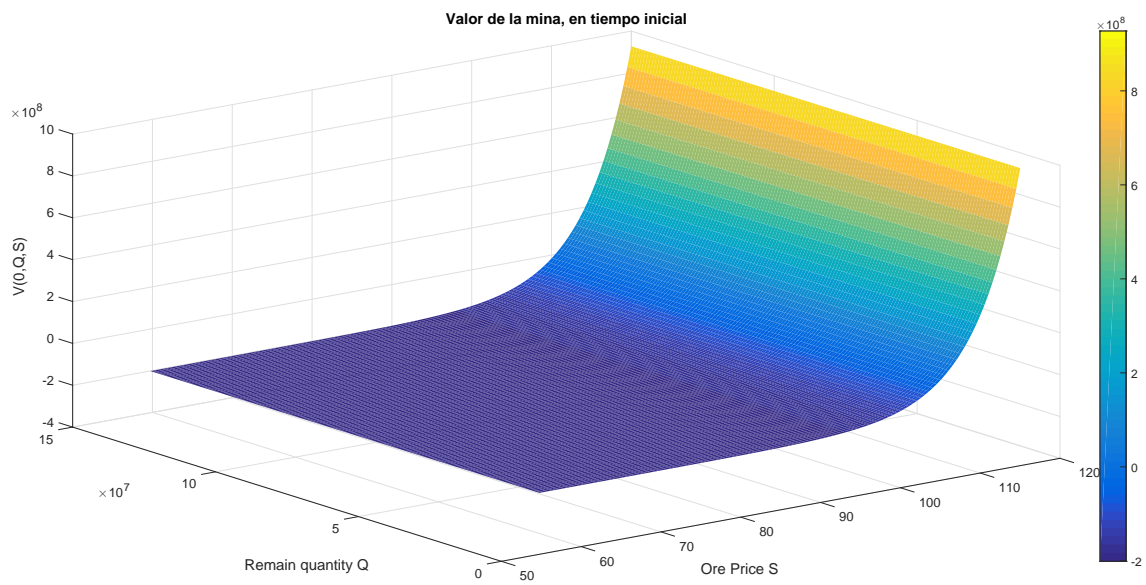
La ecuación (1.13), por su parte, es una simplificación de (1.9) con sólo Q y S como variables espaciales* y sus resultados numéricos asociados se presentan en la próxima sección.

3.2. Resultados Modelo para $V(t, Q, S)$

En la sección 2 del Capítulo 2 se introdujo una descripción del método numérico empleado para dar una solución numérica de (1.13). Este método recae en las escogencias de las discretizaciones descritas en aquella sección así como en el tipo de interpolación escogida para cada par de nodos adyacentes en la malla de Q . En la Figura 3.7 se muestra una gráfica de V que corresponde al dominio computacional definido por $S_{max} = 120$ y $Q_{max} = 1.5 \times 10^8$. Por otro lado, se toma una tasa de extracción $q = 1 \times 10^7$ ton/año, siguiendo los rangos de valores dados en [6]. El valor de V , dados los costos económicos de extracción y demás, es en principio negativo (a diferencia de los modelos anteriores) para valores pequeños de S y presenta un crecimiento observable a partir de $S \approx 100$, si bien es positivo sólo para $S > 110$ aproximadamente. A partir de esos rangos de precios, los costos de extracción son ampliamente superados por los potenciales beneficios. Con respecto a Q el valor es casi constante, y así el valor del proyecto depende principalmente de S y q , para un valor de G dado ($G = 10$ en esta sección).

Las secciones de la Figura 3.7 para Q constante guardan cierta similitud con la curva presentada en la Figura 2 de [6]. El modelo de esta sección es un modelo *simplificado* de aquel.

*El no considerar G como variable es otro posible escenario en la valoración de V , que así dependerá principalmente de S , como se muestra en [7].

Figura 3.7: La superficie $V(0, Q, S)$ con $G = 10$.

Conclusiones

El presente trabajo tenía por objetivo hacer una revisión rigurosa de algunos trabajos existentes en la literatura sobre valoración de un proyecto de extracción en una mina. Además, se trataba de proponer mejoras en los modelos y métodos numéricos para su resolución. Como consecuencia de la revisión se han ordenado los modelos de valoración de la mina por orden de complejidad: partiendo del modelo con tres factores estocásticos se han considerado dos modelos con dos factores estocásticos, uno de los cuales permite una representación de la solución en términos de funciones que solo dependen de un factor estocástico. Para todos los modelos se han analizado las condiciones de contorno que es preciso imponer en las fronteras espaciales y se ha comprobado que en algún caso los trabajos existentes en la literatura imponían más condiciones de las necesarias.

Para los modelos de un factor estocástico se han propuesto técnicas numéricas basadas en un theta-método, que se han programado en Matlab. Los ejemplos numéricos han permitido la validación de los métodos y su adecuación para resolver los problemas propuestos. Para el modelo de dos factores estocásticos, se adaptó un método existente en la literatura en otro problema análogo que permite la resolución eficiente del problema. El método se basa en la descomposición del operador diferencia y la combinación de un método semilagrangiano a una parte y un esquema de diferencias finitas de segundo orden a otra parte. La descomposición permite una resolución muy eficiente del sistema lineal que define el problema totalmente discretizado. Los ejemplos numéricos permiten concluir el buen funcionamiento de los métodos, proporcionando una solución que depende esencialmente de los precios y de la tasa de extracción, siendo independiente de la cantidad de roca pendiente de extraer. No obstante, en los tests académicos no se ha alcanzado el orden dos del método de Crank-Nicolson lo cual pudiera estar relacionado con el tratamiento numérico de las condiciones de contorno.

En cuanto a las posibles extensiones del trabajo realizado, una primera posibilidad es el análisis y resolución numérica del modelo completo, con tres factores estocásticos conjuntamente. En este sentido, los métodos propuestos son generalizables a ecuaciones en derivadas parciales en dimensión superior. El análisis matemático de los modelos es un tema abierto, para el que se pue-

de intentar la analogía con los problemas de valoración de opciones asiáticas. Otra línea de trabajo interesante surge con la consideración de posibilidad de abandono del proyecto, ya propuesto en la literatura, lo que abre un nuevo modelo de valoración, en el que además del valor del proyecto se deben obtener la probabilidad de abandono del mismo y la duración. Para ello, habría que proponer adaptaciones de los métodos numéricos desarrollados.

Bibliografía

- [1] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 3rd edition, Stockholm School of Economics, Oxford University Press, 2009.
- [2] P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics-A MATLAB Based Introduction*, 2nd Edition, Wiley Interscience, John Wiley & Sons, 2006.
- [3] M. Brennan, E. Schwartz, *Evaluating Natural Resource Investments*, The Journal of Business, Volume 58, Issue 2, Apr. 1985, 135-157.
- [4] D. Castillo, A.M. Ferreiro, J.A. García-Rodríguez, C. Vázquez, *Numerical methods to solve PDE models for pricing business companies in different regimes and implementation in GPUs*, Applied Mathematics and Computation 219 (2013) 11233-11257.
- [5] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Volume 53, Issue 2, Mar. 1985, 385-408.
- [6] G.W. Evatt, P.V. Johnson, P.W.Duck, S.D. Howell, *The measurement and inclusion of a stochastic ore-grade uncertainty in mine valuations using PDEs*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 40, 4 (2010).
- [7] G.W. Evatt, P.V. Johnson, P.W.Duck, S.D. Howell, J. Moriarty, *The expected lifetime of an extraction project*, Proceedings of the Royal Society A, 467 (2011) 244-263.
- [8] M. Finan, *A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for the Actuarial Exam FM/2*, Arkansas Tech University, August 20, 2014.
- [9] B. Jensen, P. Lochte, A. Grosen, *A Finite Difference Approach to the Valuation of Path Dependent Life Insurance Liabilities*, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 26: 57-84, 2001.

- [10] K. Kládívko, *Maximum likelihood estimation of the cox-ingersoll-ross process: the matlab implementation*, Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, Prague and Debt Management Department, Ministry of Finance of the Czech Republic.
- [11] H. Kunita, *Itos stochastic calculus: Its surprising power for applications*, Stochastic Processes and their Applications 120 (2010), 622-652.
- [12] K. Vetzal, *An improved finite difference approach to fitting the initial term structure*, Centre for Advanced Studies in Finance, University of Waterloo, Waterloo on canada N2L 3G1
- [13] P. Wilmott, *Derivatives: The theory n practice of financial engineering*, University Edition, John Wiley & Sons, 1998.