ESPACIOS CL-COMPACTOS

Una noción débil de compacidad

JUAN DIEGO RODRÍGUEZ BONILLA

Trabajo de grado para optar el título de Matemático

Asesor

Doctor Néstor Raúl Pachón Rubiano

Profesor titular

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA *JULIO GARAVITO*

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Bogotá D.C., 2013 - 1

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios tantas bendiciones, al llenarme de problemas por solucionar y al darme oportunidades para ser paciente y claro de pensamiento. A mi madre, mi padre y mi hermana porque entre tantas bromas, peleas y regaños hicieron de mi lo que soy.

Agradezco a todos y cada uno de quienes me han enseñado, quienes fueron mis docentes... quienes me inculcaron el amor y el respeto hacia la investigación, especialmente al Dr. Raúl Pachón por su acompañamiento y asesoría durante el desarrollo de este trabajo, su rigurosidad y pulcritud; a la Mat. Bernarda Aldana por su apoyo, sus regaños y su exigencia al estudiar; al Dr. Ernesto Acosta por mostrarme su forma de ver y entender las matemáticas; y al Dr. Carlos Javier Ruíz (Q.E.P.D) por la simplicidad de sus grandes ideas y por enseñarme lo invaluable y lo infalible de las preguntas para el investigador.

Por último, pero sin perder importancia, doy gracias por y a quienes hayan aprendido algo de mi y, por supuesto, a todo el que dedique tiempo a leer y estudiar este trabajo.

Índice general

Introducción

El propósito de este trabajo de grado es presentar una noción de compacidad débil, que aparece de manera natural al considerar una propiedad relativa a los subespacios compactos de un espacio regular. A tales espacios los llamaremos ***cl-compactos***, y estudiaremos el comportamiento de éstos en relación a los subespacios, los productos, cocientes y las imágenes, tanto directas como inversas, bajo ciertas funciones, entre las cuales consideramos las funciones perfectas.

Preliminares

A continuación recordamos algunos conceptos y algunas propiedades de la topología general que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

Definición 1 (Espacio métrico)**.** Sea X un conjunto no-vacío. Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama una **métrica** para X si satisface que, para todos $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) \geq 0$.

(ii) $d(x, y) = 0$ si, y solo si $x = y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

La pareja (X, d) es un **espacio métrico**.

Recordamos algunas topologías especiales para $\mathbb{R}$:

- $\tau = \mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ es la topología discreta para X.
- $\mathcal{U}$ denota la *topología usual* para $\mathbb{R}$.

- Sea X infinito. La topología $C_F = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}$ se llama **topología de los complementos finitos para X**.
- Si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, se dice que $\mathcal{C}$ es la *topología de colas a derecha*.

Notación: Si (X, τ) es un espacio topológico y si $K \subseteq X$. Denotaremos por $\overline{K}$, o por $adh_X(K)$, a la adherencia de K; además, denotaremos por K' al conjunto de puntos de acumulación (o puntos límite) de K.

Definición 2 (Subconjunto denso de un espacio topológico)**.** Un subconjunto D de un espacio topológico (X, τ) es **denso** en X si $\overline{D} = X$.

Definición 3 (Espacios T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 y espacios regulares)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico:

- Se dice que X es T_0 si para todos $a, b \in X$, distintos, existe $U \in \tau$ tal que U contiene a uno solo de los puntos a y b.
- (X, τ) es T_1 si para cualquier par de puntos $a, b \in X$, distintos, existen $U, V \in \tau$ tales que $U \cap \{a, b\} = \{a\}$ y $V \cap \{a, b\} = \{b\}$.
- El espacio topológico es T_2, o de **Hausdorff**, si para cualquier par de puntos distintos, a y b, existen abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $a \in U$ y $b \in V$.
- Se dice que (X, τ) es un espacio topológico **regular** si para todo subconjunto cerrado F y para todo punto $a \in X \setminus F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. (X, τ) es T_3 si es *regular* y T_1.
- X es **normal** si para todo par de cerrados disjuntos F y G, existen $U, V \in \tau$, disjuntos, tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Además, X es T_4 si es *normal* y T_1.

Definición 4 (Espacios compactos)**.** Un espacio topológico (X, τ) es **compacto** si todo cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento finito de X.

Por supuesto, dado el propósito de este trabajo, enunciaremos ahora algunas propiedades, que serán de gran utilidad, sobre los espacios compactos.

Propiedades (De los espacios compactos):

- Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.
- Toda imagen continua de un espacio compacto es un espacio compacto.
- Subespacios compactos de un espacio T_2 son cerrados.
- En un espacio regular, un subconjunto compacto y un subconjunto cerrado, disjuntos, se pueden separar por abiertos disjuntos.

Definición 5 (Producto cartesiano)**.** Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de conjuntos. El **producto cartesiano** de estos conjuntos, denotado por $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, está definido por

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha = \{x : x \text{ es una función de } I \text{ en } \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha, \text{ y para todo } \alpha, x(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

Notación:

- Si $x \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, denotaremos $x(\alpha) = x_\alpha$ y lo llamaremos la α-ésima coordenada de x.
- Si $\beta \in I$, al conjunto X_β lo llamaremos el β-ésimo factor del producto $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$.

- La función $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ definida por $\pi_\beta(x) = x_\beta$ será llamada la función *proyección* para el β-ésimo factor, o también simplemente la β-ésima *proyección*.

Definición 6 (Espacios Producto)**.** Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una colección arbitraria de espacios topológicos. La **topología producto** τ sobre el conjunto $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es la topología que tiene como una base todos los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$, donde para cada $\alpha \in I$, U_α es un abierto en X_α, y $U_\alpha \neq X_\alpha$ para una cantidad finita de coordenadas.
A la pareja (X, τ) se le dice **espacio producto**.

Hay que recordar que Andrey N. Tychonoff, en 1930 y posteriormente en 1935, enuncia y demuestra el teorema conocido por su apellido, donde se afirma que el producto de cualquier colección de espacios compactos resulta ser compacto.

Definición 7 (Espacios cociente)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto no-vacío y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva. La colección $\tau_f = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$ es una topología para Y, llamada la **topología cociente** para Y inducida por f. En este caso se dice que (Y, τ_f) es un espacio cociente de (X, τ) y que f es una **función cociente**.

Una propiedad importante es que toda función continua y sobreyectiva que sea o bien cerrada, o bien abierta, resulta ser una **función cociente**. Particularmente, las *proyecciones* al ser funciones continuas, sobreyectivas y abiertas resultan ser funciones de este tipo.

CAPÍTULO 1

Una noción “débil” de compacidad

En esta sección introducimos el concepto que nos interesa estudiar. El comentario (4), posterior a nuestra definición, justifica por qué consideramos que esta es una noción “débil” de compacidad.

Definición 8 (Espacio ***cl-compacto***)**.** Un espacio topológico (X, τ), o simplemente X, es ***cl-compacto*** si para todo $K \subseteq X$, si K es compacto entonces $\overline{K}$ es compacto. Si $Y \subseteq X$, se dice que Y es ***cl-compacto*** si es ***cl-compacto*** como espacio topológico.

Desde luego hay espacios que no son ***cl-compactos*** como se ilustra a continuación.

Ejemplo 1. *(Espacios que no son **cl-compactos**).*

- Sean $X = \mathbb{R}$ y $\tau = \mathcal{C}$. Si $U = [a, +\infty)$, U es compacto pero $\overline{U} = \mathbb{R}$ no lo es, pues si $\{U_\alpha\}$ es un cubrimiento por colas para $\mathbb{R}$ del cual se puede extraer un subcubrimiento finito $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$, como $U_{\alpha_i} = (a_i, +\infty)$, $1 \leq i \leq n$ y $a_i \in \mathbb{R}$, se tendría que $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = (min_{1\leq i\leq n} a_i, +\infty)$, lo cual es ¡imposible!.

- Sean $Y = (0,1)$ y $\tau = \{\emptyset, Y\} \cup \{(0, 1 - \frac{1}{n}) : n = 2, 3, ...\}$. Si $U \in \tau \setminus \{\emptyset, Y\}$, U es compacto, pero $\overline{U} = Y$ no es compacto, pues dado el cubrimiento $\{(0, 1 - 1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es imposible extraer de este un subcubrimiento finito para Y.

El siguiente es un ejemplo de unos espacios topológicos bien conocidos y estudiados en un curso de Topología General que resultan ser ***cl-compactos***.

Ejemplo 2 (Todo espacio regular es ***cl-compacto***)**.** Sean (X, τ) un espacio topológico regular, $K \subseteq X$ compacto y $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto para $\overline{K}$. Veamos que podemos extraer un subcubrimiento finito para $\overline{K}$ a partir del cubrimiento original:

Como $K \subseteq \overline{K}$, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ resulta ser un cubrimiento abierto para K. Por la compacidad de K, existe un subcubrimiento $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$, finito, para K. Sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$. Supongamos que existe $x \in \overline{K} \setminus V = \overline{K} \cap V^c$. Como $\overline{K} \setminus V$ es cerrado, K es compacto y X es regular, existen $F, G \in \tau$, disjuntos, tales que $K \subseteq F$ y $\overline{K} \setminus V \subseteq G$. Pero, como $x \in \overline{K}$, todos los abiertos que contengan a x intersecan a K, en particular $G \in \tau$, luego $G \cap K \neq \varnothing$, ¡Imposible!.

Así, tal x no existe, y por lo tanto, $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$ es un cubrimiento finito para $\overline{K}$.

Comentarios:

1. Un ejemplo de un espacio que no es regular pero que si es ***cl-compacto***: Sea X infinito. El espacio topológico (X, C_F) no es regular, pero todos sus subconjuntos son compactos, luego X resulta ser ***cl-compacto***.

2. Todo espacio métrico es ***cl-compacto***.

3. Los espacios de Hausdorff son ***cl-compactos***, puesto que cualquier subconjunto compacto resulta ser cerrado. Inmediatamente se ve que, a diferencia de los espacios compactos y T_2 donde se sabe que estos resultan ser T_4, si un espacio topológico es ***cl-compacto*** y T_2 este podría no ser siquiera T_3.

4. Ser compacto implica ser ***cl-compacto***, pues cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

5. El recíproco es falso: consideremos el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Es claro que este espacio no es compacto, pero al ser metrizable es ***cl-compacto***.

6. Si (X, τ) es ***cl-compacto*** y si $F \subseteq X$ es finito, entonces $\overline{F}$ es compacto.

7. Si (X, τ) es ***cl-compacto*** y si existe $D \subseteq X$ denso y compacto, entonces (X, τ) es compacto.

Como una primera propiedad de los espacios ***cl-compactos***, tenemos la extensión del siguiente hecho a los espacios ***cl-compactos***. Es conocido que si (X, τ) es un espacio T_0 y compacto, y si $a \in X$, entonces existe $b \in \overline{\{a\}}$ tal que $\{b\}$ es cerrado. Una demostración algebraica de este hecho puede consultarse en [5], y una demostración topológica puede consultarse en [6].

Teorema 1. Sea X un espacio ***cl-compacto*** y T_0. Si $a \in X$, existe $b \in \overline{\{a\}}$ tal que $\{b\}$ es cerrado.

Demostración:

Sea $a \in X$. Como $\{a\}$ es compacto, $\overline{\{a\}}$ es compacto. Por el resultado recién mencionado, como $a \in \overline{\{a\}}$, que es compacto y T_0, existe $b \in \overline{\{a\}}$ tal que $\{b\}$ es cerrado. $\square$

Para los espacios T_1 la propiedad de ***cl-compacidad*** se puede enunciar de una manera ligeramente diferente.

Teorema 2. *Sea X un espacio topológico T_1 y $K \subseteq X$. Entonces:*

1. *K' es un subconjunto cerrado de X.*
2. *Si K es compacto, entonces $\overline{K}$ es compacto si, y solo si, K' es compacto.*
3. *(X, τ) es **cl-compacto** si, y solo si, para todo $K \subseteq X$, si K es compacto entonces K' es compacto.*

Demostración:

1. Sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X \setminus A'$. Existe $U \in \tau$, con $x \in U$, tal que $(U \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$. Veamos que $U \subseteq X \setminus A'$. Sea $z \in U$: Si $z = x$, ya está. Supongamos que $z \neq x$, luego $z \in U \setminus \{x\}$, que es abierto pues X es T_1. Así,

$$((U \setminus \{x\}) \setminus \{z\}) \cap A = (U \setminus \{x, z\}) \cap A \subseteq (U \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$$

   Por lo tanto, $z \in X \setminus A'$ luego $U \subseteq X \setminus A'$. En conclusión, $X \setminus A'$ es abierto.

2. Supongamos que K' es compacto. Como K es compacto y $\overline{K} = K \cup K'$, $\overline{K}$ resulta ser compacto al ser unión finita de conjuntos compactos. Recíprocamente, supongamos que $\overline{K}$ es compacto. Como $\overline{K} = K \cup K'$, $K' \subseteq \overline{K}$. Por el teorema anterior, K' es cerrado, luego K' es compacto al ser un subconjunto cerrado de un compacto. □

CAPÍTULO 2

Subespacios de espacios ***cl-compactos***

En general, subespacios de espacios ***cl-compactos*** no lo son, como se muestra en el siguiente ejemplo. Sin embargo, los subespacios cerrados sí heredan esta propiedad.

Ejemplo 3 (Un subespacio de un espacio ***cl-compacto*** que no lo es)**.** Sean $X = (0,1]$, y $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{(0, 1 - \frac{1}{n}) : n = 2, 3, ...\}$. Si $Y = (0,1)$, Y no es ***cl-compacto*** como se mostró en el ejemplo 2, pero X sí lo es por ser compacto.

Para demostrar que un subespacio cerrado de un espacio ***cl-compacto*** es ***cl-compacto***, necesitamos el siguiente resultado:

Lema 1. Sean (X, τ) es un espacio topológico cualquiera, $Z \subseteq Y \subseteq X$. Entonces, Z es compacto en Y (como subconjunto) si, y solo si, Z es compacto en X.

Demostración:

Supongamos que Z es compacto en Y. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento para Z, por abiertos de X. Como $Z \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha$ y $Z \subseteq Y$, entonces

$$Z \subseteq \left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) \cap Y = \bigcup_{\alpha\in I} (V_\alpha \cap Y)$$

por lo que $\{V_\alpha \cap Y\}_{\alpha\in I}$ es un cubrimiento, por abiertos de Y, para Z. Por la compacidad de Z en Y, existe un subcubrimiento finito $\{V_{\alpha_1} \cap Y, ..., V_{\alpha_n} \cap Y\}$ para Z, es decir, $Z \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n}(V_i \cap Y)$. Pero

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(V_{\alpha_i} \cap Y) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_\alpha\right) \cap Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_\alpha$$

Así, $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$ resulta ser un cubrimiento finito para Z, y por lo tanto Z es compacto en X.

Recíprocamente, supongamos que Z es compacto en X y veamos que Z es compacto en Y. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento para Z por abiertos de Y. Para cada $\alpha \in I$, existe un abierto V_α en X tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$, luego

$$Z \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(V_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) \cap Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha,$$

por lo que $\{V_\alpha\}$ es un cubrimiento para Z por abiertos de X. Por la compacidad de Z en X, existe un subcubrimiento finito $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$ para Z, luego $Z \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$, con lo que

$$Z \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}\right) \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n}(V_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i},$$

Así, $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ es un cubrimiento finito para Z. $\square$

Demostraremos ahora que los subespacios cerrados de un espacio ***cl-compacto*** son ***cl-compactos***.

Teorema 3. Sea (X, τ) un espacio topológico ***cl-compacto*** y sea $Y \subseteq X$, Y cerrado. Entonces Y es ***cl-compacto***.

Demostración:

Sea $K \subseteq Y$ compacto en Y. Por el lema anterior, K es compacto en X. Tenemos que $K \subseteq adh_Y(K) = adh_X(K) \cap Y$. Como Y es cerrado en X, $adh_X(K) \cap Y$ es cerrado en X, pero $adh_X(K)$ es el más pequeño de los cerrados en X que contienen a K, y como $adh_Y(K) \subseteq adh_X(K)$, entonces $adh_Y(K) = adh_X(K)$. Como X es ***cl-compacto*** y K es compacto en X, $adh_X(K)$ es compacto en X, luego $adh_Y(K) = adh_X(K)$ es compacto en Y. Así, Y resulta ser ***cl-compacto***. $\square$

CAPÍTULO 3

Propiedades funcionales de los espacios *cl-compactos*

Es sabido que la imagen continua de un espacio compacto es compacta: ¿Sucede lo mismo con los espacios ***cl-compactos***? El siguiente ejemplo nos muestra que, en general, esto no sucede. Como demostraremos más adelante, las imágenes perfectas de espacios ***cl-compactos*** son ***cl-compactas***.

Ejemplo 4 (Una función continua y sobreyectiva de un espacio ***cl-compacto*** en un espacio que no lo es)**.** Sean $X = \mathbb{R}$ y $f : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \mathcal{C})$ la función identidad. Claramente f es continua y sobreyectiva, pero $(X, \mathcal{C})$ no es ***cl-compacto***, como se mostró en el **Ejemplo 1**.

Definición 9. Una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ es *perfecta* si es continua, sobreyectiva, cerrada y si para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto en X.

Antes de proceder a demostrar que la imagen perfecta de un espacio ***cl-compacto*** lo es, necesitamos enunciar el siguiente resultado cuya demostración aparece en [2, pág. 216].

Teorema 4. Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ una función perfecta. Si K es compacto en Y, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto en X.

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente teorema:

Teorema 5. Imagen perfecta de un espacio ***cl-compacto*** es ***cl-compacta***.

Demostración:

Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ una función perfecta y sea X un espacio ***cl-compacto***. Sea $L \subseteq Y$ compacto. Como L es compacto en Y, $f^{-1}(L)$ es compacto en X puesto que f es perfecta, luego $\overline{f^{-1}(L)}$ es compacto en X. Dado que f es continua y $L \subseteq \overline{L}$, tenemos que

$$f^{-1}(L) \subseteq f^{-1}\left(\overline{L}\right) = \overline{f^{-1}\left(\overline{L}\right)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{L}\right)$$

lo cual implica que

$$L \subseteq f\left(\overline{f^{-1}(L)}\right) \subseteq \overline{L}$$

por lo que $f\left(\overline{f^{-1}(L)}\right) = \overline{L}$, pues $\overline{L}$ es el más pequeño de los cerrados de Y que contiene a L.

Así, $\overline{L}$ es compacto, puesto que $f\left(\overline{f^{-1}(L)}\right)$ lo es. $\square$

Teorema 6. Sean (X, τ) un espacio ***cl-compacto***, (Y, β) un espacio de Hausdorff y $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ una función continua. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces $f(K) = f\left(\overline{K}\right)$. En particular, si $a \in X$, $\{f(a)\} = f(\{a\}) = f\left(\overline{\{a\}}\right)$. Si, además, f es inyectiva, entonces (X, τ) es T_1 y todo subconjunto compacto de X es cerrado.

Demostración:

Sea $K \subseteq X$ compacto. Como $K \subseteq \overline{K}$, $f(K) \subseteq f\left(\overline{K}\right)$. Por otra parte, como f es continua, $f(K)$ resulta ser compacto, luego cerrado pues Y es T_2. Así, $f\left(\overline{K}\right) \subseteq \overline{f(K)} = f(K)$.

Si $a \in X$, como $f(\{a\}) = f(\overline{\{a\}})$ y f es inyectiva, se tiene que $\{a\} = \overline{\{a\}}$, lo que implica que (X, τ) es T_1. Más generalmente, si $K \subseteq X$ es compacto, como $f(K) = f(\overline{K})$ y f es inyectiva, se tiene que $K = \overline{K}$, luego K es cerrado. $\square$

Ya estudiadas algunas propiedades de las imágenes continuas de espacios ***cl-compactos***, revisaremos ahora qué sucede con las imágenes recíprocas, a través de funciones continuas, de estos espacios.

Teorema 7. Si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ es una función continua y *compacta* (imagen recíproca de un compacto es compacta) y si Y es ***cl-compacto***, entonces X es ***cl-compacto***.

Demostración:

Sea $K \subseteq X$, compacto. Como f es continua, $f(K)$ es compacto en Y, por lo que $\overline{f(K)}$ lo es, y además $f(\overline{K}) \subseteq \overline{f(K)}$. Aplicando imagen recíproca obtenemos que

$$\overline{K} \subseteq f^{-1}\left(f(\overline{K})\right) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(K)}\right),$$

donde $f^{-1}\left(\overline{f(K)}\right)$ es compacto puesto que f es una *función compacta*. Como $\overline{K}$ es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, $\overline{K}$ resulta ser compacto. $\square$

CAPÍTULO 4

Productos de espacios ***cl-compactos***

En esta sección veremos si la propiedad enunciada en el Teorema de Tychonoff (en donde un producto arbitrario de espacios topológicos es compacto si, y solo si, cada factor lo es) se conserva para espacios ***cl-compactos***. En esta sección demostraremos que este hecho es cierto, es decir, que un producto de espacios topológicos es ***cl-compacto*** si, y solo si, cada espacio factor lo es, para lo cual haremos uso del siguiente resultado:

Lema 2. Sean $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una colección arbitraria no vacía de espacios topológicos y $A_\alpha \in X_\alpha$, $A_\alpha \neq \varnothing$, para cada $\alpha \in I$. Entonces,

$$\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}.$$

Demostración: (Tomada de [3, pág. 132] o de [4, pág 140])
Veamos que $\prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha}$. Sea $x \in \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$ y sea U_x una vecindad abierta para x. Existe un abierto básico $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ tal que $x \in \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \subseteq U_x$. Como $x_\beta = \pi_\beta(x) \in \overline{A_\beta}$,

tenemos que $U_\beta \cap A_\beta \neq \emptyset$, para cada $\beta \in I$, y así,

$$\prod_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap A_\alpha) = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha \bigcap \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq U_x \bigcap \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$$

luego $x \in \overline{\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha}$.
Recíprocamente, como cada proyección π_β es continua, para cada $\beta \in I$ tenemos que

$$\pi_\beta\left(\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha}\right) \subseteq \overline{\pi_\beta\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha\right)} = \overline{A_\beta}$$

y como para cualquier $A \subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ se tiene que $A \subseteq \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$, entonces

$$\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha\left(\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha}\right) \subseteq \prod_{\alpha\in I} \overline{\pi_\alpha\left(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha\right)} = \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha},$$

por lo que $\overline{\prod_{\alpha\in I} A_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$. □

El siguiente resultado es una versión del Teorema de Tychonoff para espacios ***cl-compactos***.

Teorema 8. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una colección no vacía de espacios topológicos. Entonces $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es ***cl-compacto*** si, y solamente si, cada X_α es ***cl-compacto***.

Demostración:

Supongamos que $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es una colección no vacía de espacios ***cl-compactos***. Veamos que X es ***cl-compacto***. Sea $K \subseteq X$ compacto. Como cada proyección π_β es continua, $\pi_\beta(K)$ es compacto en X_β por lo que $\overline{\pi_\beta(K)}$ es compacto en X_β, puesto que, para cada $\beta \in I$, X_β es ***cl-compacto***. Así, por el teorema de Tychonoff, $\prod\limits_{\alpha\in I} \overline{\pi_\alpha(K)}$ es compacto en X. Además, como para todo $A \subseteq X$ se tiene que $A \subseteq \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(A)$,

$$\overline{K} \subseteq \prod_{\alpha\in I} \pi_\alpha(\overline{K}) \subseteq \prod_{\alpha\in I} \overline{\pi_\alpha(K)}$$

luego $\overline{K}$ es compacto al ser un subconjunto cerrado de un compacto.

Recíprocamente, supongamos que $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ es ***cl-compacto***. Sea $\beta \in I$, arbitrario pero fijo, y tomemos $K_\beta \subseteq X_\beta$ compacto. Sean $\gamma \in I \setminus \{\beta\}$ y $x_\gamma \in X_\gamma$. Ahora, definamos $K_\gamma = \{x_\gamma\}$. Por el teorema de Tychonoff, $\prod_{\alpha\in I} K_\alpha$ es compacto en X. Como X es ***cl-compacto***, $\overline{\prod_{\alpha\in I} K_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \overline{K_\alpha}$ resulta ser compacto, y de nuevo, por el teorema de Tychonoff, $\overline{K_\beta}$ resulta ser compacto. $\square$

CAPÍTULO 5

Cocientes de espacios ***cl-compactos***

En esta sección final del trabajo veremos que, en general, dada una función cociente si el dominio es ***cl-compacto*** el codominio no lo es, y que si el codominio es ***cl-compacto*** el dominio no necesariamente resulta serlo.

Ejemplo 5 (Una función cociente de un espacio ***cl-compacto*** en uno que no lo es)**.** Sea $f : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{Z}, \tau_f)$ la función *parte entera*, donde τ_f es la topología cociente para $\mathbb{Z}$ inducida por f, a saber, $\tau_f = \{\varnothing, \mathbb{Z}\} \cup \{(-\infty, n) \cap \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$.

El espacio $(\mathbb{Z}, \tau_f)$ no es ***cl-compacto*** pues $\overline{\{0\}} = [0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$ no es compacto, pero $\{0\}$ si lo es.

Ejemplo 6 (Una función cociente de un espacio que no es ***cl-compacto*** en uno que si lo es). Sea $f : (\mathbb{R}, \mathcal{C}) \longrightarrow (\{-1,0,1\}, \tau_f)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad x < 0 \\ 0, & \text{si} \quad x = 0 \\ 1, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

donde se sabe que $(\{-1,0,1\}, \tau_f)$ es un espacio ***cl-compacto*** pues es finito, pero el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{C})$ no es ***cl-compacto*** (véase el **Ejemplo 1**).

Por supuesto, lo siguiente sería preguntarse si $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \beta)$ es una función cociente, qué condiciones hacen falta para que si (X, τ) es ***cl-compacto*** entonces (Y, β) lo sea, y qué condiciones se necesitan para que si (Y, β) es ***cl-compacto*** entonces (X, τ) sea ***cl-compacto***. Afortunadamente, ya se estudiaron las "*Propiedades funcionales de los espacios **cl-compactos***" en el **capítulo 3**, luego para estas preguntas basta con estudiar las respuestas obtenidas en tal capítulo.

Bibliografía

[1] Davis, S.W. *Topology*. Mc-Graw Hill. 2005.

[2] Kasriel, R.H. *Undergraduate Topology*. W. B. Sauders Company. 1971

[3] Munkres, J.R. *Topology*. Prentice Hall Incorporated, 2002.

[4] Rubiano, G.N. *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. 3ª edición. 2010.

[5] Acosta, L. y Lozano, E. 'Una caracterización de las topologías compactas T_0". *Boletín de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia* Nueva serie, Volumen VI No. 2 (1999): 77-84

[6] Pachón, N.R., "Acerca de los espacios compactos y T_0". *Boletín de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia* Nueva serie, Volumen IV No. 1 (1999): 39-42