Planeación táctica y asignación de vehículos en un sistema de transporte masivo mediante el uso de modelos de programación entera mixta y métodos heurísticos.

(Tactical planning and vehicle allocation in a mass transit system using mixed integer programming models and heuristic methods)

Santiago Andrés Diaz Villamil
Estudiante de Ingeniería Industrial
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Decanatura de Ingeniería Industrial

santiago.diaz-v@mail.escuelaing.edu.co

Angélica Sarmiento Lepesqueur
Ing. Industrial Magister en Gerencia de Operaciones.
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Profesor de planta
Centro de Estudios en Optimización

angelica.sarmiento@escuelaing.edu.co

Fecha Recepción Artículo: (01/30/2023)

Temática abarcada por el artículo: IO en Transporte, Logística y cadena de suministro.

Tipo de Artículo: Articulo de Investigación Científica y Tecnológica.

RESUMEN.

El transporte masivo en las ciudades se enfrenta a un gran problema, lograr cumplir con los requerimientos de la demanda operando con bajos costos y a su vez, considerando el tiempo de permanencia del usuario dentro de las instalaciones. En particular, el presente artículo busca solventar este problema para sistemas de transporte que funcionen bajo la modalidad de agendamiento de boletos; algunos ejemplos son sistemas de transporte intermunicipal, tranvía, aéreo y marítimo. Se aborda esta situación desde un enfoque táctico al planear la red de transporte y sus rutas haciendo uso de modelos de programación entera mixta, así como también desde un enfoque operativo al asignar vehículos a horas de salida y trayectos o rutas preestablecidas utilizando métodos heurísticos. Durante el proyecto se trabajó con una distribución de demanda sintética bimodal para simular el comportamiento real de un sistema de transporte común. El objetivo de los dos modelos en conjunto es reducir costos de mano de obra contratada, de mantenimiento de la flota, de incumplimiento en el nivel de servicio, de operación de la flota, tiempo de espera de los usuarios dentro de las instalaciones y el costo de mantener asientos vacíos en los recorridos. Se evalúan múltiples escenarios al variar la ponderación de cada costo y examinar su impacto en el costo total.

PALABRAS CLAVES

Formulación matemática
Logística y optimización de Transporte
Modelos mixtos

Modelos de asignación de rutas
Sistemas de transporte

ANALYTICAL SUMMARY

The mass transport in the cities faces a big problem, to be able to meet the requirements of the demand operating with low costs and considering the user's permanence time within the facilities. This article seeks to solve this problem for transport systems that work under the ticket scheduling modality; some examples are inter-municipal, tram, air and maritime transport systems. This situation is faced from a tactical approach when planning the transport network and its routes using mixed integer programming models, as well as from an operational approach when assigning vehicles to pre-established departure times and routes or tours using heuristic methods. During the project, a bimodal synthetic demand distribution was used to simulate the real behavior of a common transport system. The objective of the two models together is to reduce the costs of hired labor, fleet maintenance, non-compliance in the level of service, fleet operation, waiting time within the facilities and the cost to keep empty seats on tours. Multiple scenarios are evaluated by varying the weight of each cost and examining its impact on total cost.

KEYWORDS

mathematical formulation

Logistics and Transport optimization

mixed models

Routing models

Transportation systems

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de transporte masivo tienen a cargo la tarea de transportar diariamente una cantidad de usuarios desconocida desde puntos inciertos y también hacia destinos desconocidos. La toma de decisiones en un sistema como estos se convierte en un problema complejo, intentar asignar los recursos disponibles de manera óptima a partir de información muy variable e incierta requiere el uso de herramientas propias de la ingeniería para encontrar solución a temas necesarios, como lo son:

- Asignación de personal
- Asignación de rutas
- Asignación de trayectos para las rutas
- Mantenimiento de la flota de vehículos.

Claramente se observa las implicaciones de la buena o mala gestión de las operaciones de un sistema de transporte masivo. Un sistema que no conoce su demanda no puede garantizar la eficiencia en la asignación de buses, lo que implica tiempos de espera largos para los usuarios y/o costos innecesarios por la asignación de buses y personal en momentos en los que la demanda pasa por un valle.

La gestión de los recursos se puede abordar desde distintos niveles en un sistema de transporte:

1. Planeación estratégica: Este nivel se enfoca en la toma de decisiones relacionadas con la ubicación de las estaciones que conformarán el sistema de transporte, teniendo en cuenta criterios como concentración de la población, vías disponibles, fuentes de financiación, viabilidad financiera de los proyectos de construcción, entre otros.

2. Planeación táctica: El enfoque de este nivel toma como información de entrada lo planteado en el nivel estratégico, para lograr definir la forma en que se particionará el conjunto de estaciones para que todas estas queden conectadas al sistema a través de rutas (conformadas por calles que conectan dos o más estaciones) por las que transitará la flota de vehículos. Se puede tener en cuenta información como demanda esperada, concentración de la población, distancia entre estaciones para cada ruta planteada, topología de los trayectos y la relación con el consumo de los recursos del vehículo, etc.

3. Planeación operativa: Las decisiones en este nivel están enfocadas en la gestión diaria y por horas del sistema. Mediante la asignación de rutas, personal, mantenimiento y demás factores se debe garantizar que los usuarios dentro del sistema sean atendidos en la menor brevedad posible sin llegar a desperdiciar recursos por el uso mínimo de la capacidad disponible y también que la capacidad de los vehículos sea utilizada en niveles aceptables sin que los usuarios deban esperar por largos periodos de tiempo dentro del sistema.

Este artículo abordará el problema desde un contexto absolutamente teórico en los niveles táctico y operativo, esperando que los resultados obtenidos sean suficientes para motivar una futura investigación, poniendo a prueba el modelo planteado en un contexto real. Se buscará crear una herramienta estandarizada, que logre leer los datos de un sistema de transporte tanto teórico como real y que a partir de su lectura y procesamiento brinde opciones claras que sirvan de soporte para la toma de decisiones.

MODELOS MATEMÁTICOS Y FORMULACIÓN

Para presentar la solución al problema planteado se crearán dos modelos, el primero abordará el nivel de toma de decisiones táctico y el segundo tomará estos resultados como fuente de información para plantear una solución a nivel operativo.

1. Modelo de Programación Entera Mixta para la solución al problema de asignación de rutas en un sistema de transporte masivo.

Para el planteamiento de este problema se tuvo en cuenta la siguiente información como conocida.

- Ubicación de las estaciones del sistema.
- Distancia entre las estaciones del sistema a través de los trayectos disponibles.
- Estaciones finales o portales dentro del sistema. Estas estaciones funcionan con un nodo inicial o final para un recorrido, pero nunca intermedio.
- Conocimiento del nivel de demanda o de ocupación de la capacidad de cada estación del sistema.

Para detallar el contexto sobre el cual se desarrolla el problema se realizará una generalización del mismo; con esto se espera dar claridad en las entradas del modelo a partir de las decisiones que abarcan el planteamiento del sistema de transporte masivo a nivel estratégico.

*Sea **R** un conjunto de **N** puntos, **m** la cantidad total de conexiones entre dos puntos (arcos) disponibles de **R** y $\boldsymbol{m}_i$ la cantidad de conexiones que parten del nodo i hacia cualquier otro nodo de **R**. Sea también* $0 \leq \boldsymbol{q}_i \leq 1$ *el tamaño del nodo i y* $\boldsymbol{e}_i \in \{0, 1\}$ la clasificación del nodo i como transitorio o no transitorio para todo $i \in \boldsymbol{R}$.

Se debe cumplir entonces lo siguiente:

- Todos los nodos deben estar conectados al sistema.

$$1 \leq m_i \leq N - 1, \forall i \in R \qquad (1)$$

$$\therefore N \leq m \leq N(N-1) \qquad (2)$$

- La suma de las conexiones de cada nodo compone el total de conexiones del sistema.

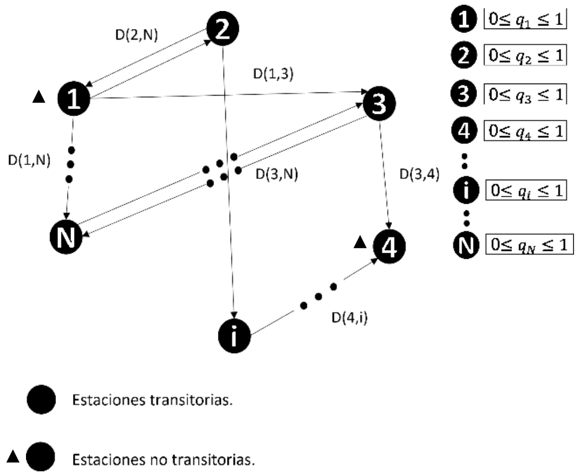
$$m = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \qquad (3)$$

Esta definición general sirve como soporte para el modelamiento del problema. A continuación, las equivalencias con el problema real:

- Los nodos son las estaciones que componen el sistema de transporte.
- Los arcos o conexiones representarán las posibles vías que conectan una estación con otra y que podrían llegar a ser usadas para que una ruta pase por ellas.
- El tamaño q de cada estación representará el nivel de demanda o de uso de cada estación dentro del sistema.
- La clasificación entre estaciones transitorias y no transitorias será la clasificación entre estaciones finales y no finales dentro del Sistema de Transporte Masivo (STM).

La representación gráfica de lo anteriormente mencionado es la siguiente:

FIGURA 1. Representación gráfica de un STM.



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se presenta la formulación algebraica del modelo planteado:

<u>*Conjuntos*</u>

R: Conjunto que representa las rutas con las que se espera que el sistema cuente.
I: Conjunto de las estaciones planteadas en el nivel de decisión estratégico.
Q: Alias de R.
J: Alias de I.

<u>*Parámetros*</u>

DE_{ij}: Matriz que contiene las distancias entre las estaciones i y j en kilómetros.

CE_{ij}: Matriz que contiene el costo de recorrer un kilómetro entre las estaciones i y j.

CM_{ij}: Costo por la contratación de mano de obra por kilómetro entre la estación i y j.

CD_{ij}: Costo por incumplir la demanda de un usuario entre las estaciones i y j.

EF_i: Matriz de cubrimiento que clasifica las estaciones entre las "estaciones finales" y las que no lo son.

ND_i: Nivel de demanda de la estación i.

Variables de decisión

x_{ijr}: 1 si la ruta r pasa de la estación i a la estación j durante su recorrido.

u_i: Variable entera auxiliar para la eliminación de subrutas.

C_{rqij}: 1 si alguna de las rutas (r y/o q) va desde la estación i hasta la estación j durante su recorrido.

T: Costo por la asignación de rutas dentro del sistema de transporte masivo.

Ecuaciones

La ecuación (4) garantiza que ninguna estación no final funcione como última parada de una ruta.

$$\forall_{r,i\in EF_i=0} \sum_j x_{ijr} = 1 \qquad (4)$$

La ecuación (5) y (6) garantizan que sólo exista una estación final de llegada en cada recorrido y una de salida por ruta. También garantizan que estas estaciones se conecten a una sola estación cada una.

$$\forall_r \sum_j \sum_{i\in EF_i>0} x_{ijr} = 1 \qquad (5)$$

$$\forall_r \sum_j \sum_{i\in EF_i>0} x_{jir} = 1 \qquad (6)$$

La ecuación (7) permite asegurar que todo el sistema esté conectado, esto es, que cada estación se encuentre en al menos uno de los trayectos de las rutas.

$$\forall_i \sum_r \sum_j x_{ijr} + x_{jir} \geq 1 \qquad (7)$$

La ecuación (8) es una condición lógica que garantiza que una ruta no pueda ir a la misma estación de la que sale.

$$\forall_{i,r}\, x_{iir} = 0 \qquad (8)$$

La ecuación (9) asegura que exista continuidad en los recorridos internos de cada ruta, esto es, que cada estación no final perteneciente a una ruta tenga dos conexiones, una de entrada a la estación y una de salida. A su vez, asegura que las estaciones que no pertenecen a una ruta no estén conectadas.

$$\forall_{r,i\in EF_i=0} \textstyle\sum_j x_{ijr} + x_{jir} = 2\sum_j x_{ijr} \qquad (9)$$

$$\forall_{r,i\in EF_i>0} \textstyle\sum_j x_{ijr} + x_{jir} \leq 1 \qquad (10)$$

La ecuación (10) asegura que las estaciones finales sólo se utilicen como estaciones de salida o estaciones de entrada, pero no ambas.

$$\forall_{r,j,i\,\in\, EF_i\,>\,0} u_j \geq u_i + 1 - M\left(1 - x_{ijr}\right) \qquad (11)$$

La ecuación (11) garantiza que no se puedan crear subrutas dentro de los recorridos. El valor M es un número lo suficientemente grande como para no acotar el problema.

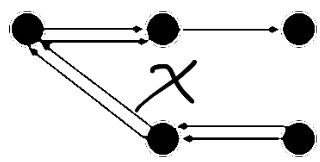
$$\forall_{r,q\neq r} 1 \leq \textstyle\sum_j \sum_i c_{rqij} - x_{ijr} \qquad (12)$$

$$\forall_{r,q,i,j}\, x_{ijr} + x_{ijq} \geq c_{rqij} \qquad (13)$$

$$\forall_{r,q,i,j}\, x_{ijr} + x_{ijq} \leq 2c_{rqij} \qquad (14)$$

Las ecuaciones (12 – 14) garantizan que no exista la posibilidad de que una ruta contenga a otra en su totalidad, es decir, que no comparta todos los puntos, nodos o estaciones que conforman la ruta (Ver figura 2).

FIGURA 2. Representación gráfica de la contenencia entre rutas.



Fuente: Elaboración propia.

2. Modelo heurístico para la planeación operativa de un STM: Planeación de la asignación de vehículos en las rutas.

En la literatura se encuentra frecuentemente modelos en los que la variable de decisión principal es la frecuencia de asignación de los vehículos por cada ruta. En este artículo se enfocarán los esfuerzos en determinar cuál debe ser la ruta por asignar y en qué momento debe partir el vehículo desde el origen, pues el asignar frecuencias de envío de los vehículos se podrían generar desperdicios y costos adicionales al pasar de una hora pico a una hora valle.

Los supuestos asumidos en este segundo modelo son:

- La demanda $(D(a,b,l))$ es conocida y se define para cada par de estaciones $a,b \in R$ durante cada intervalo del día $l \in \{l_1,\ l_2, \cdots, l_{k-1},\ l_k\} = I$.
  Donde:

  1. Se define la hora de apertura del servicio en el STM como A y la hora de cierre como B $(B > A)$.

  2. Cada intervalo se define como sigue $l_p = [t_{p-1}, t_p] = \{x \mid t_{p-1} \leq x \leq t_p\}$, es decir, se define como un intervalo en los números reales conformado por dos instantes de tiempo.

  3. Los instantes de tiempo que definen un intervalo deben estar comprendidos entre las horas de servicio del STM.

  $$\forall\ u \in \{\ 1, \dots, k-1\}: A \leq t_u \leq B,$$
  $$t_0 = A, t_k = B$$

  4. Todos los intervalos son disjuntos de a pares.

  $$\bigcup_{j=1}^{j=k} \{l_j \cap l_r \mid r\ \in \{1, \cdots, k\}\} = \emptyset \quad (15)$$

  5. La unión de todos los intervalos da como resultado el intervalo que comprende todas las horas de servicio del día.

  $$\bigcup_{j=1}^{j=k} l_j = [A, B] \quad (16)$$

  6. Todos los intervalos de tiempo comprenden espacios de tiempo iguales en duración (equipotentes).

  $$\forall\ u, v \in \{1, 2, \cdots, k\}: |l_u| = |l_v| \quad (17)$$

  En particular las condiciones 2, 3 y 4 conforman un cubrimiento de conjuntos equipotentes, lo que es suficiente para garantizar que se cubra cada instante del día en intervalos de tiempo iguales y que estos no se crucen entre sí.

- La demanda tendrá una distribución bimodal a lo largo de las A - B horas del día.

- Se permitirán los transbordos, siempre y cuando estos conecten los trayectos de 2 rutas como máximo (el primer tramo de este transbordo se asumirá con una duración de 2.5 horas); las demandas que requieran la conexión de más de tres rutas para ser satisfechas se despreciarán.

- La flota de vehículos con la que se trabajará es una flota homogénea.

- El costo de mantenimiento de la flota es directamente proporcional al factor de demanda de cada estación.

- La velocidad con la que se desplazan los vehículos de la flota es constante.

2.1. Proceso lógico detrás de la heurística.

El proceso lógico funciona bajo la premisa de que siempre hay los suficientes vehículos como para poder asignar uno más a cualquiera de las rutas (sin importar cuál sea su estación o su hora de inicio).
El modelo debe primero decidir cuál de todas las posibles rutas debe asignar y en qué momento del día. Posteriormente debe calcular los usuarios que permanecerán dentro del vehículo durante cada parte del recorrido de acuerdo con la demanda en cada estación y su capacidad.
Una vez que se haya definido la asignación que genere el menor costo se reduce la demanda según los usuarios transportados. Este proceso se sigue de forma indefinida hasta que el sistema haya alcanzado un nivel de servicio **NS** deseado y previamente considerado.

A continuación, se expone el proceso lógico general que sigue la metaheurística teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- $\alpha, \beta\ y\ \gamma$ son valores entre 0 y 1 que representan la ponderación o importancia que se le está dando a cada costo. Estos valores cumplen que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

- $C_{op}, C_{espera}\ y\ C_{p_{vacios}}$ son los tres costos tenidos en cuenta para el cálculo del costo de asignación de un nuevo vehículo en una ruta. C_{op} representa el costo propio de la operación del vehículo a lo largo del trayecto que seguirá (por tener velocidad constante y demanda determinística este valor es una constante para cada ruta r).
  C_{espera} representa el costo en el que se incurre por tener usuarios esperando por un bus que los lleve a su respectivo destino.
  $C_{Pvacios}$ es el costo asociado a tener puestos vacíos o no utilizar la capacidad completa que ofrece el vehículo.

- La variable $Demanda$ corresponde al valor actual de la demanda para cada intervalo t y cada par de estaciones (i, j). la variable $Demanda_0$ representa la demanda inicial dentro de cada intervalo t para cada par de estaciones (i, j).

- El valor M representa un costo lo suficientemente grande como para ser mayor que cualquier costo de cualquier asignación (para evitar sesgar la solución). Este puede ser escrito como:

$$M = 1 + Max(\{Costo_{rt} | r \in Rutas, t \in Intervalos\})$$

- Las variables $Costo_{Min}$, $Ruta_{Asignada}$ y $t_{asignado}$ son las encargadas de guardar la información correspondiente a la mejor asignación a medida que se realizan las iteraciones.

- La expresión escrita como $Calc\_recorrido(r, t, Demanda)$ es una abreviación para el proceso de cálculo de subidas y bajadas de usuarios en cada estación del recorrido, los puestos vacíos, el tiempo de espera y sus costos asociados. Todo lo que se encuentre marcado con el símbolo $*$ representa una salida de ese proceso.

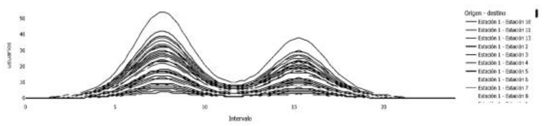
```
Mientras que Demanda > (NS)Demanda_0
 |.
 |Costo_Min ← M
 |Ruta_asignada ← Aleatorio(Rutas)
 |t_asignado ← A
 |.
 |  Para t ∈ Intervalos hacer
 |  |
 |  | Para r ∈ Rutas hacer
 |  |  |
 |  |  | * ← Calc_recorrido(r, t, Demanda)
 |  |  |
 |  |  | C_operación ← *
 |  |  | C_espera    ← *
 |  |  | C_pvacios   ← *
 |  |  |
 |  |  | Costo_rt ← αC_op + βC_espera + γC_pvacíos
 |  |  |
 |  |  | Si Costo_rt < Costo_Min entonces
 |  |  |  |
 |  |  |  | Costo_Min ← Costo_rt
 |  |  |  | Ruta_asignada ← r
 |  |  |  | t_asignado ← t
 |  |  |  | Usuarios ← *
 |  |  |  |
 |  |  |  Fin Si
 |  |  |
 |  |  Fin Para
 |  |
 |  Fin Para
 |.
Fin Mientras que
```

3. Uso de los modelos en un escenario de prueba.

Para lograr poner a prueba los dos modelos planteados se utilizaron programas distintos. GAMS (General Algebraic Modeling System) se utilizó para poder poner a prueba el modelo a nivel táctico, teniendo en cuenta la capacidad de este software para resolver problemas de Programación Entera Mixta. Para la heurística se utilizó el lenguaje de programación Python 3.7.14 dentro del entorno colaborativo Google Colab y Jupyter Notebook. Se adaptó el código del segundo para poder importar las salidas del primer modelo e interpretarlas.

El escenario que se planteó fue el de un sistema compuesto por 13 estaciones. La demanda se modeló de forma aleatoria pero siempre siguiendo la distribución bimodal planteada desde un comienzo. Con base en esta demanda se calcularon los niveles de demanda esperados.

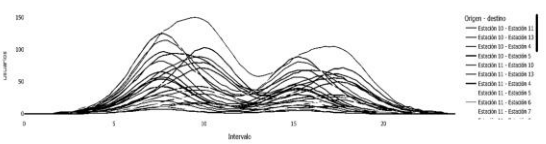
FIGURA 3. Demanda inicial escenario ficticio.



Fuente: Elaboración propia.

Inicialmente se planteó la demanda para cada par de estaciones en cada uno de los intervalos de tiempo (ver figura 3). Posterior a esto, se eliminaron los valores de demanda que no podían ser satisfechos por el sistema con dos o menos transbordos. Para los usuarios que debían realizar un transbordo se seleccionó aleatoriamente una de las posibles rutas que podían seguir y se modificó la demanda, como se muestra en la figura 4.

FIGURA 4. Demanda posterior a los ajustes por transbordos, escenario ficticio.

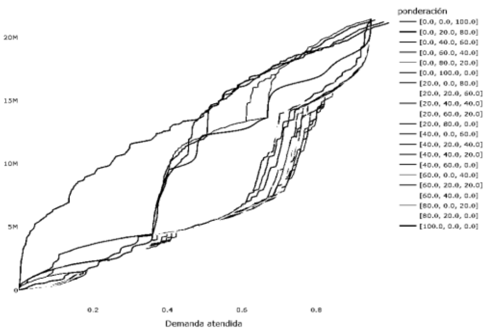


Fuente: Elaboración propia.

El desplazamiento lateral que se observa en algunas de las curvas es debido a las 2.5 horas que se supuso iba a durar el recorrido del primer tramo del transbordo.

Una vez realizado este proceso se crearon múltiples instancias en donde se les daba pesos distintos a cada costo, con el objetivo de observar el cambio total en el costo a medida que se cubría la demanda.

FIGURA 5. Comportamiento de los costos contra la demanda atendida en valor porcentual.

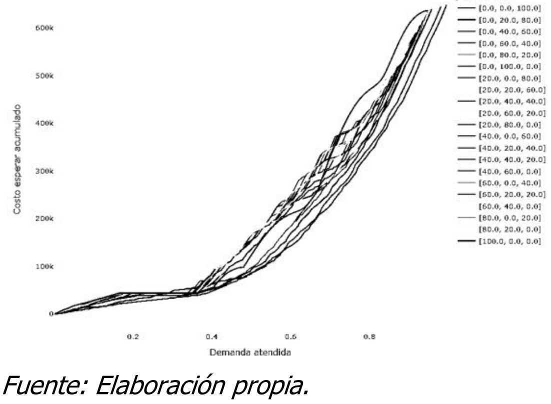


Fuente: Elaboración propia.

En la figura 5 se observa el comportamiento del costo total contra el nivel de servicio alcanzado.

Los costos de operación y por puestos vacíos tienen un comportamiento muy similar al costo total, sin embargo, el costo de espera tiene una tendencia exponencial (ver figura 6). Esto se podría explicar basado en la decisión del algoritmo cuando la demanda por atender es muy pequeña $(NS \rightarrow 100\%)$; este decide dejar que pase el tiempo y que los usuarios sigan esperando por un vehículo antes que enviarlo y que en su recorrido tenga una gran cantidad de puestos vacíos.

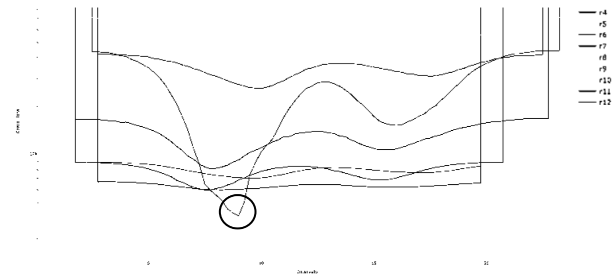
FIGURA 6. Comportamiento de los costos de espera contra la demanda atendida en valor porcentual.



Fuente: Elaboración propia.

Como anotación final, en la figura 7 se observa el proceso interno que sigue el algoritmo para lograr determinar la asignación de menor costo. En el gráfico se observa la evaluación de los costos de cada ruta asignando un vehículo para iniciar su recorrido dentro de cada una de las horas del día (cada 15 minutos). Mientras calcula cada uno de estos costos, la heurística se encarga de definir cuál es la asignación que le implica un costo total menor y así toma la decisión de la asignación final en cada una de las iteraciones.

FIGURA 7. Costo total de la asignación de una ruta en un instante de tiempo específico y selección del algoritmo como la menos costosa.



Fuente: Elaboración propia.

4. Análisis de resultados

De acuerdo con los gráficos obtenidos a partir de las iteraciones realizadas con el modelo, se obtiene la siguiente información:

- El costo total de asignación de rutas a lo largo del día depende fuertemente del nivel de servicio que se quiera obtener. Es necesario entender cuál debe ser el nivel de servicio esperado para poder garantizar un costo bajo de acuerdo con la ponderación de costos seleccionada.

- Para niveles de servicio altos el costo para cada ponderación de costos converge a un mismo valor. Entonces cuando se quiera suplir una gran parte de la demanda la ponderación de costos pierde sentido.

- Se encontró un comportamiento exponencial en los costos por espera de los usuarios. Se esperaba que para ponderaciones muy grandes de este costo se obtuviera la misma tendencia para el costo total, esto sucede para algunas ponderaciones, pero es posible que el costo unitario de cada uno de los tres costos tenidos en cuenta esté afectando la ponderación fuertemente.

5. CONCLUSIONES

De acuerdo con la manera como se abordó el problema se considera que:

- Se desarrolló una herramienta capaz de interpretar los datos de la demanda y consideraciones topológicas de un sistema de transporte masivo y a partir de estos alimentar al algoritmo que garantice una reducción en el costo durante cada iteración. Durante la investigación se tuvo esto siempre como objetivo principal, pues garantiza que el modelo sea aplicable a cualquier STM.

- Se logró dar una solución factible al problema planteado. Si bien no se garantizó el valor óptimo de costo, se obtiene un acercamiento bajo la premisa de que el costo se reducirá si en cada iteración se reduce el costo por asignación.

- Aunque la herramienta ya esté lista para su uso, hay mucho más por delante en este proyecto, como el desarrollo de un modelo de Programación Entera Mixta que garantice llegar al costo mínimo y que reemplace al algoritmo actual, la evaluación de este modelo en un contexto real que permita observar principalmente sus salidas, pero también algunos aspectos pasados por alto como el tiempo que tarda el modelo en entregar el resultado de un turno y la cantidad de recursos utilizados o requeridos para tener una buena ejecución.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abara, J. (1989). Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem. *Journal of INFORMS*.

Dipl.-Wirtsch, I. G. (2011). Analyse und Optimierung von öffentlichen Straßenverkehrsnetzen auf Basis einer objektorientierten, logistischen Betrachtungsweise.

Douglas O. Santos, E. C. (2015). Taxi and Ride Sharing: A Dynamic Dial-a-Ride Problem with Money as an Incentive.

Duarte Sergio, B. D. (s.f.). Un Modelo de Asignación de Recursos a Rutas en el Sistema de Transporte Masivo Transmilenio.

Hartl, S. N.-F. (2012). Models and algorithms for the heterogeneous dial-a-ride problem with driver-related constraints.

Jacek Żak, A. J. (2010). Multiple criteria optimization method for the vehicle assignment problem in a bus transportation company. *Journal Of Advanced Transportation*.

Mursulí, D. A. (2010). Modelación matemática y técnicas cuantitativas en un procedimiento para la organización y racionalidad del transporte.