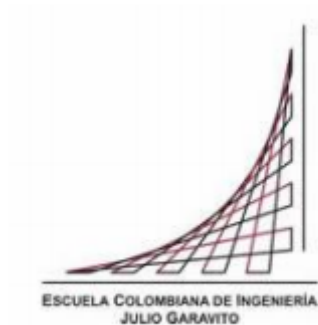


DETERMINANTES DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN LA EDUCACIÓN
MEDIA DE CUNDINAMARCA

JEL: I21

OSCAR EDUARDO HERNANDEZ ANGULO



FACULTAD DE ECONOMÍA

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERIA JULIO GARAVITO

BOGOTÁ, D.C

DICIEMBRE 2015

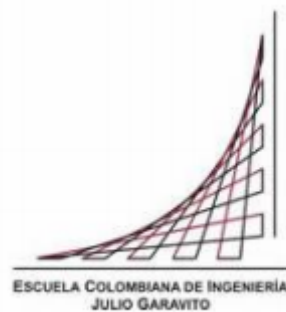
DETERMINANTES DEL RENDIMIENTO ACADÉMICO EN LA EDUCACIÓN
MEDIA DE CUNDINAMARCA

JEL: I21

OSCAR EDUARDO HERNANDEZ ANGULO

Eco. ALVARO HERNANDO CHAVES

DOCENTE ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO



FACULTAD DE ECONOMÍA

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERIA JULIO GARAVITO

BOGOTÁ D.C

DICEIMBRE 2015

AGRADECIMIENTOS

Primeramente le doy gracias a Dios por acompañarme a lo largo de mi vida. También estoy muy agradecido con mi familia. A mi Mamá, a mi Papá y a mi hermano por ser mi motor en cada paso que doy.

Por otro lado quiero agradecer a los profesores que tuve a lo largo de la carrera. Al profesor Álvaro Chaves y la profesora Irma Baquero por sus enseñanzas y contribuciones al presente trabajo. Al Profesor Ivan Moncaleano (Q.E.P.D) por ser un referente en mi vida. Alguien que siempre recordaré.

También quiero agradecerles a mis amigos más cercanos, quienes me han acompañado en esta aventura de la vida.

Finalmente quiero hacer un reconocimiento especial a la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, por darme la oportunidad de cursar mi pregrado con la beca Julio Garavito. Mil gracias!

RESUMEN

En este trabajo se utilizan los resultados obtenidos por los estudiantes en las áreas de matemáticas y lenguaje de las pruebas Saber 11^a del segundo semestre de 2014, como medio para hallar los determinantes del rendimiento académico en el departamento de Cundinamarca. Para ello, se utilizaron modelos multinivel: nivel 1 alumnos y nivel 2 colegios. Los resultados obtenidos dan a conocer la relevancia que tienen las variables socioeconómicas en el desempeño para ambas áreas.

ABSTRACT

In this paper, I use the results obtained by students in their math and language tests Saber 11th during the second half of 2014, the objective is to identify the determinants of academic performance in Cundinamarca (Colombia). I use multilevel models: students Level 1 and Level 2 schools, and find a great relevance of socioeconomic variables in the math and language performance.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	7
• PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	8
• HIPÓTESIS	8
• OBJETIVO GENERAL	9
• OBJETIVOS ESPECIFICOS	9
2. MARCO TEORICO	9
2.1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	11
3. MARCO METODOLÓGICO	14
3.1 DATOS	15
3.2 IDENTIFICACIÓN DE LAS VARIABLES	16
3.3 ESTADISTICAS DESCRIPTIVAS	18
3.4 ANALISIS DESCRIPTIVO	21
3.5 MODELO MULTINIVEL	23
4. RESULTADOS	28
5. CONCLUSIONES	35
BIBLIOGRAFÍA	37
ANEXO 1 – PUNTAJE MEDIO EN CADA PRUEBA CLASIFICADO POR VARIABLE SOCIOECONÓMICA	39
ANEXO 2 - EVALUACIÓN DE AJUSTE GLOBAL DE LOS MODELOS	42

GRÁFICAS

- Gráfico 1 – Modelo integrado de eficacia escolar de Scheerens...10
- Gráfico 2 – Elementos que producen aprendizaje estudiantil y sus interacciones...12
- Gráfico 3 – Género...18
- Gráfico 4 – Estrato Socioeconómico...19
- Gráfico 5 – Ingreso mensual familiar representado en salarios mensuales... 21
- Gráfico 6 – Errores a nivel individual y grupal en un modelo de dos niveles... 25
- Gráfico 7 – Representación gráfica de un modelo de intercepto aleatorio... 27
- Gráfico 8 – Representación gráfica de un modelo con pendiente aleatoria... 28

TABLAS

- Tabla 1 – Variables...16
- Tabla 2 – Composición de los colegios...19
- Tabla 3 – Nivel de educación de los padres...20
- Tabla 4 – Modelo Nulo...29
- Tabla 5 – Parámetros estimados para las variables socioeconómicas por separado... 31
- Tabla 6 – Parámetros estimados para las variables socioeconómicas en conjunto...33
- Tabla 7 – Parámetros estimados en variables de primer y segundo ...34

DIAGRAMAS

- Diagrama 1 – Media Puntaje Lenguaje 2014...22
- Diagrama 2 – Media Puntaje Matemáticas...23

1. INTRODUCCIÓN

Rodríguez (2012) afirma que “Según la perspectiva de capacidades de Sen, es la educación media el nivel educativo mínimo que brinda a la población las capacidades y habilidades necesarias a la hora de escapar o no incurrir en situación de pobreza”. De esta manera, si dentro de la educación media existe una gran dispersión en el rendimiento académico, siendo este último el parámetro de evaluación del conocimiento adquirido en el ámbito escolar, las capacidades y habilidades de aquellos estudiantes que presentan un nivel bajo serán insuficientes para escapar de la pobreza o para participar en el mercado laboral.

Así, se acentúa la informalidad, el desempleo y la desigualdad salarial:

La oferta y demanda de trabajadores con distintas calificaciones educacionales son determinantes en la distribución de ingresos. En términos generales, mientras más equitativamente estén distribuidas las oportunidades de educación, más igualitaria será la distribución de los ingresos... Las carencias de capital humano determinan que la productividad laboral sea insuficiente para generar un nivel adecuado de ingresos. En consecuencia, el trabajo de los pobres será mal remunerado, o bien la productividad de otros activos será muy baja, como en el caso de pequeños propietarios agrícolas o de los microempresarios urbanos. (Larrañaga, 1996)

Ahora, se debe tener en cuenta que para el caso colombiano los conocimientos y competencias de los estudiantes están distribuidos de forma muy heterogénea. La calidad de la educación que reciben los sectores más pobres en Colombia es notoriamente más baja con respecto a los demás. Solo basta observar las diferencias en el desempeño educativo de los estudiantes entre las instituciones educativas oficiales y no oficiales, regiones (Departamentos), áreas urbanas y rurales, y estratos socioeconómicos. (Contraloría General de la República, 2014; Barrera-Osorio, Maldonado y Rodríguez, 2012). Estas son las consecuencias de la brecha de la calidad educativa, definida por la incapacidad del sistema educativo para lograr que individuos de menores condiciones socioeconómicas incorporen efectivamente los conocimientos y competencias que necesitan para participar en la sociedad (Celis, Jiménez y Jaramillo, 2012).

En este estudio, se quiere hallar los determinantes que influyen en el rendimiento académico de la educación media en Cundinamarca a partir de los resultados obtenidos

en las pruebas Saber Once (11°) para el año 2014 por medio de un análisis descriptivo y luego por un modelo multinivel. Así, lo que se quiere demostrar es si las variables socioeconómicas, tales como el nivel de estrato socioeconómico, el nivel de educación de la madre, el nivel de educación del padre y el ingreso familiar mensual, explican en mayor medida las diferencias en el desempeño escolar. De esta manera, se concluye qué tipo de variables (socioeconómicas o del plantel académico) explican las brechas de la calidad educativa en Cundinamarca.

Vale la pena señalar que hasta el momento no se tiene un estudio para Cundinamarca de esta índole como si lo tienen algunas ciudades del país: Cali (Correa, 2004; Sánchez 2012), Barranquilla (Barón, 2010) y Bogotá (Gaviria y Barrientos, 2001). Además, los resultados obtenidos del presente estudio se convierten en un instrumento de análisis para direccionar políticas que busquen el mejoramiento de la calidad educativa.

Este trabajo está compuesto por cinco secciones, de las cuales esta introducción es la primera. En la segunda, se presenta el marco teórico y se realiza una revisión de la literatura en cuanto a los determinantes del rendimiento académico para el caso colombiano; en la tercera, se presentan los datos y el análisis descriptivo de las variables objeto de estudio. En la cuarta sección se exponen los resultados de la metodología econométrica implementada; y por último, se presentan las conclusiones.

Pregunta de Investigación

¿Qué variables socioeconómicas determinan las diferencias en el puntaje obtenido en las áreas de matemáticas y lenguaje, por parte de los estudiantes que presentaron la prueba Saber 11° en Cundinamarca para el año 2014?

Hipótesis

Existen variables socioeconómicas que influyen en el puntaje obtenido en las áreas de Matemáticas y Lenguaje, por parte de los estudiantes que presentaron la prueba Saber 11° en Cundinamarca para el año 2014.

Las variables socioeconómicas consideradas para el presente estudio son: Nivel de estrato socioeconómico, la educación del padre, la educación de la madre y el nivel de ingresos mensual familiar.

Objetivo General

Cuantificar el impacto de las variables socioeconómicas que explican las diferencias en el puntaje obtenido en las áreas de matemáticas y lenguaje, por parte de los estudiantes que presentaron la prueba Saber 11° en Cundinamarca para el año 2014.

Objetivos Específicos

- Identificar las posibles variables socioeconómicas que influyeron en el puntaje obtenido en las áreas de matemáticas y lenguaje, por parte de los estudiantes que presentaron la prueba Saber 11° en Cundinamarca para el año 2014.
- Realizar un análisis descriptivo para estudiar las diferencias y/o similitudes de cada variable (nivel de estrato socioeconómico, nivel de educación de la madre, nivel de educación del padre, ingreso familiar mensual), con respecto a los resultados obtenidos en las competencias de lenguaje y matemáticas de las Pruebas Saber once (11°) del año 2014.
- Cuantificar la incidencia de las variables socioeconómicas y de la caracterización del plantel educativo en el puntaje obtenido en las áreas de matemáticas y lenguaje, por parte de los estudiantes que presentaron la prueba Saber 11° en Cundinamarca para el año 2014 a partir de un modelo multinivel.

2. MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN DE LITERATURA

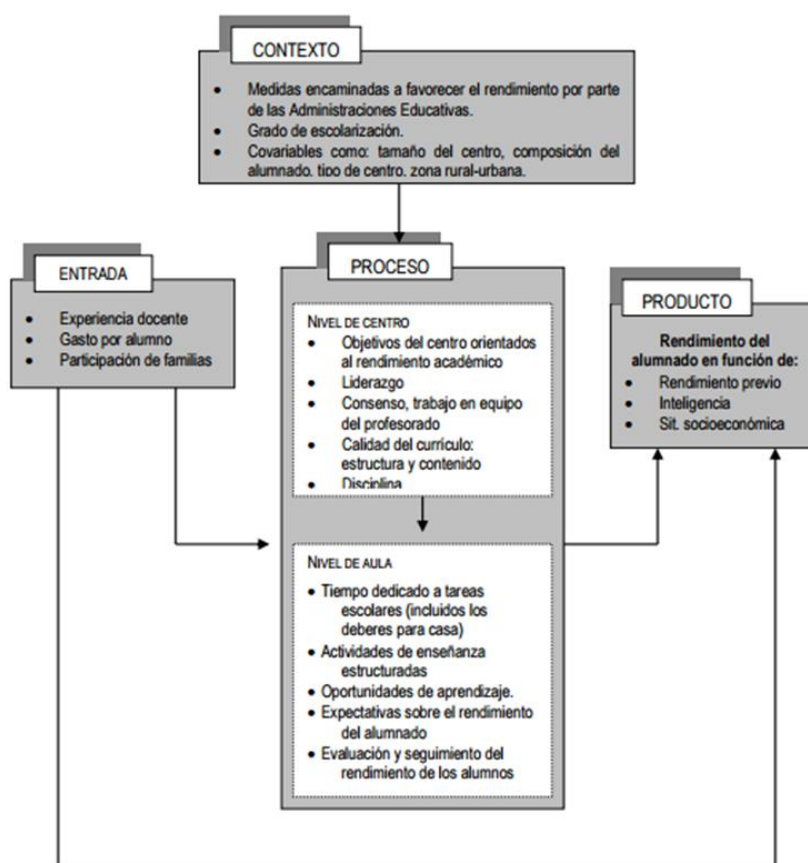
El marco teórico del presente trabajo se fundamenta a partir del modelo integrado de eficacia escolar propuesto por Schereens (1990). Este modelo se da por el desarrollo continuo, teórico, metodológico y estadístico del movimiento de eficacia escolar. La cuestión de cuánto influye la escuela sobre el rendimiento de los alumnos y los factores que generan esas diferencias entre escuelas son los dos grandes temas de interés de la eficacia escolar.

Este movimiento surge a partir de las pesimistas conclusiones del informe de Coleman (1966), quien afirmó que el rendimiento de los alumnos está determinado por su origen social, dejando a un segundo plano el papel relevante de la escuela sobre el mismo. En consecuencia, los primeros estudios de eficacia escolar trataban de identificar la combinación de insumos escolares que lograban maximizar el desempeño de los estudiantes.

Sin embargo, una de las limitaciones más relevante de estos estudios era que asumían variables de entrada, entre ellas el nivel socioeconómico del estudiante, y de salida, sin considerar el proceso educativo al interior de la escuela.

En efecto, la siguiente oleada de trabajos sobre eficacia escolar trató de describir los procesos centrales incluyendo variables tanto a nivel de la escuela como de la enseñanza. De esta manera, la investigación sobre eficacia escolar empezó a ser utilizada para diseñar estrategias de mejoramiento escolar, aunque su concentración en escuelas de ciertos contextos limitaba su extensión. Así, el desarrollo progresivo teórico de dicho movimiento, llevó a una interpretación integral de la forma como interactúan procesos e insumos al explorar los efectos de la escuela en diferentes contextos escolares (Casas, Gamboa y Piñeros, 2002).

Gráfico 1 – Modelo integrado de eficacia escolar de Scheerens



Fuente: Scheerens (1990)

Scheerens (1990) diseñó la primera propuesta de un modelo teórico global de eficacia escolar que pone especial énfasis en el nivel de la escuela y cuya máxima virtualidad reside en permitir que el sistema de indicadores de eficacia funcione como un referente

flexible capaz de acomodar nuevos factores y dimensiones. Murillo (2008b) hizo una descripción del modelo caracterizándolo por:

- Ser un modelo analítico y sistemático que reconoce las variables de contexto, insumo, proceso y producto.
- Poseer un marco multinivel que distingue las características del alumno, el aula, la escuela y el entorno. Los niveles más elevados deben proporcionar condiciones facilitadoras para los procesos centrales en los niveles inferiores.
- Contener diversas perspectivas para ver las interrelaciones entre variables definidas en los diferentes niveles. La eficacia de las estructuras organizativas depende de las características contextuales. Las instituciones educativas no son unidades cerradas sino sistemas en interacción con el ambiente.
- Recoger hallazgos sustantivos de diferentes tipos de investigación sobre Eficacia Escolar.

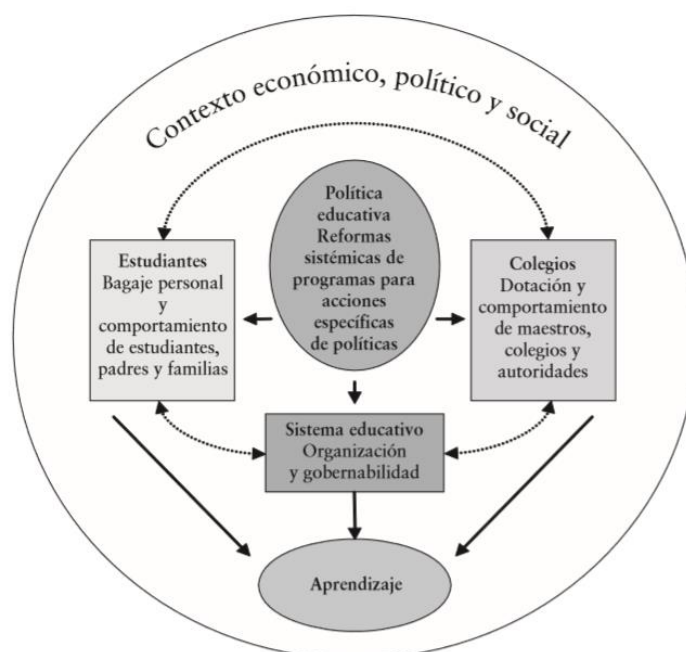
De esta manera, la interacción entre los cuatro grupos de características determina los resultados de los procesos de enseñanza que se dan al interior de la institución educativa.

2.1 Revisión Bibliográfica

No han sido pocos los estudios que han intentado demostrar, de una u otra manera, los efectos de diferentes tipos de variables sobre el desempeño escolar. Para tal fin, es importante tener en cuenta que el sistema educativo está clasificado por diferentes niveles (estudiantes y familia, plantel educativo y sistema) que interactúan para producir resultados educativos.

Vegas y Petrow (2008) clasifican los aspectos que afectan el aprendizaje escolar en: Las características individuales, las condiciones familiares sociales y económicas, los aspectos del plantel educativo y los elementos institucionales. Se resalta el hecho de que las interacciones entre estudiantes y colegios, que se ven afectados por factores institucionales, como también por el contexto económico, social y político, determinan la calidad del aprendizaje. Dicho marco conceptual se asemeja, por lo menos en el esquema que se utiliza para representar la clasificación de variables, al modelo teórico de eficacia escolar integrado elaborado por Scheerens (1990).

Grafico 2- Elementos que producen aprendizaje estudiantil y sus interacciones



Fuente: Vegas y Petrow (2008)

El Banco Mundial (2008) utilizó este marco para examinar la bibliografía existente sobre la calidad educativa y los factores determinantes del aprendizaje. Para el caso colombiano encontró que las características familiares, así como los ingresos y la educación de los padres, son importantes para el aprendizaje escolar. Al nivel de la escuela, la calidad de los profesores, la infraestructura, los materiales académicos y la duración de la jornada escolar manifiestan una repercusión positiva sobre el aprendizaje. Desde un punto de vista institucional, las escuelas privadas y concesionadas tienden a superar en rendimiento a las escuelas públicas.

Aunque es esencial tener presente las variables que afectan el aprendizaje escolar, no es menos importante considerar el modelo econométrico o el análisis que se utiliza para determinar los efectos de dichas variables. En los últimos años los modelos multinivel, que se han desarrollado para analizar datos anidados o con estructuras jerárquicas, han tenido una gran acogida para realizar estudios de esta índole (Piñeros y Rodríguez, 1998; Casas, Gamboa y Piñeros 2002; Correa 2004; López 2010; Celis, Jiménez y Jaramillo 2012; Sánchez 2012; Orjuela 2013).

En efecto, se han realizado estudios con el fin de hallar los determinantes individuales del logro escolar en la educación media para Colombia. Los resultados indican que las

condiciones socioeconómicas y antecedentes familiares tienen el mayor poder explicativo sobre el logro obtenido por el estudiante. Además, se presentan diferencias entre el sector oficial y no oficial (Celis, Jiménez y Jaramillo 2012; Orjuela 2013). Adicionalmente, Piñeros y Rodríguez (1998) realizan un análisis más exhaustivo encontrando efectos atribuibles a aspectos individuales y contextuales del estudiante; efectos atribuibles a variables escolares; y sobre insumos escolares. Una adecuada dotación de las escuelas secundarias tiene un efecto positivo sobre el rendimiento académico de los estudiantes.

Por otro lado, se ha considerado identificar los determinantes individuales del logro escolar en la educación media para ciertas regiones del país. En (Correa, 2004; Sánchez 2012) se plantea dicho objetivo para la ciudad de Cali. Las conclusiones a las que llegan dichos autores no varían significativamente con las obtenidas a nivel nacional. Sin embargo, encuentran que el efecto de las variables asociadas al plantel sobre el rendimiento educativo es significativo. Para el caso de Bogotá, Gaviria y Barrientos (2001) concluyen que además de la importancia de la educación de los padres, los planteles educativos inciden de manera notable sobre el rendimiento.

En otros estudios referentes al uso de modelos multinivel, se estima el porcentaje de la variabilidad del logro atribuible al plantel educativo¹. Dicho porcentaje registró una fuerte caída desde el año 2000, lo que indica que el cambio de metodología y la forma de efectuar las pruebas en dicho año modificó la importancia del colegio en el rendimiento académico de los estudiantes colombianos (Casas, Gamboa y Piñeros 2002; López 2010)

Utilizando otros mecanismos de análisis, Barrera-Osorio et al. (2012) se plantean propuestas de política educativa que permita mejorar la calidad de la educación básica, secundaria y media y así convertirla en una herramienta efectiva de movilidad social. Las propuestas de política son: i) fortalecimiento de la evaluación de la calidad de la educación; ii) fortalecimiento de la capacidad institucional de los colegios públicos; iii) implementación de la jornada escolar completa; iv) implementación de una política de docentes que permita atraer mejores profesionales y mejorar los instrumentos de

¹ Se debe tener presente que el porcentaje de la variabilidad del logro atribuible al plantel educativo es uno de los dos cuestionamiento que se hace el movimiento de eficacia escolar.

evaluación de los docentes; v) participación del sector privado en la provisión de educación.

Por otro lado Chica, Galvis & Ramírez (2009) utilizaron los resultados obtenidos por los estudiantes en las áreas de matemáticas y lenguaje de las pruebas ICFES Saber 11° del segundo semestre de 2009, como medio para identificar los determinantes del rendimiento académico en Colombia a través de un modelo Logit Ordenado Generalizado. Finalmente, se concluyó que a pesar de que las variables institucionales presentan efectos significativos sobre el desempeño de los estudiantes en las pruebas, las variables de tipo socioeconómico, en particular el nivel de ingresos y nivel de escolaridad de los progenitores, tienen un mayor efecto en este resultado.

En Barón (2010) usando una descomposición contra factual, se explicó qué tanto de la brecha de rendimiento en la ciudad de Barranquilla se puede explicar por las diferencias en las características de las instituciones y las diferencias en las características de los estudiantes y sus familias. Los resultados de la descomposición indican que las diferencias en las características personales y familiares son más importantes que las diferencias en las características de los colegios para explicar la brecha de rendimiento entre Barranquilla y Bogotá, para los diferentes niveles de rendimiento.

La investigación sobre los factores determinantes del rendimiento académico para el caso colombiano evidencia que los factores de los estudiantes, en particular los antecedentes socioeconómicos, tienen una clara importancia sobre el logro académico.

3. MARCO METODOLÓGICO

La metodología de análisis para hallar los determinantes que influyen en el rendimiento académico de la educación media en Cundinamarca está dividida en dos partes.

En primera instancia, se hizo un análisis descriptivo teniendo en cuenta las posibles relaciones del puntaje individual obtenido por los estudiantes en las competencias de Matemáticas y Lenguaje² de la Prueba Saber (11°) del año 2014, con respecto a las siguientes variables socioeconómicas. Educación de los padres, ingreso familiar mensual y nivel de estrato socioeconómico.

² La elección de dichas pruebas se argumenta en: Figel, J. (2009). Competencias clave para el aprendizaje permanente. Al Tablero, 1 (52), 9-11

En segundo lugar, se implementó un modelo jerárquico lineal, en el cual determinándose previamente las variables del primer y segundo nivel, características socioeconómicas del estudiante y aspectos del plantel educativo respectivamente, se estableció cuál fue la incidencia de dichas variables sobre las desigualdades del rendimiento académico de la educación media en Cundinamarca para el año 2014.

3.1 Datos

Los datos que se utilizaron en este trabajo se construyeron a partir de la información disponible en el sitio web del ICFES. En éste se encuentran las bases de datos correspondientes a los resultados de las pruebas Saber (11°) desde el año 2000 hasta el año 2014. Para el estudio, se tuvieron en cuenta las pruebas Saber 11° aplicadas en el segundo semestre del año 2014 en el departamento de Cundinamarca. Cada base de datos contiene información del formulario de registro de cada estudiante, el registro de las instituciones y el archivo de resultado de las pruebas Saber 11.

El formulario de registro brinda variables de contexto que permiten caracterizar al estudiante en un entorno socio-económico. Para el estudio, se tuvieron en cuenta las variables: Género, educación de los padres, ingreso familiar mensual y nivel de estrato socioeconómico. Por otro lado, los resultados en las pruebas permiten conocer el desempeño obtenido por cada estudiante en las áreas de interés. Para el presente estudio, se tuvieron en cuenta los resultados en las competencias de matemáticas y lenguaje.

El proceso de depuración de la base de datos se hizo de la siguiente manera. Inicialmente, se eliminaron aquellas observaciones que no tenían la información completa sobre todas las variables de estudio. Además, se consideraron tan solo aquellas instituciones educativas con registros de más de 10 bachilleres. Es decir, aunque una observación haya tenido toda la información disponible para el estudio, si, luego del proceso de depuración, al colegio al que pertenecía el estudiante quedaba con menos de 10 bachilleres, se eliminaba dicha observación y todas las de ese colegio. Otro aspecto que vale la pena mencionar, es que no se está considerando dentro del análisis a aquellas personas que estudian en jornada sabática y dominical.

De esta manera, la base de datos construida para el estudio contiene en total 29.322 registros agrupados en 669 instituciones educativas.

3.2 Identificación de las variables

Las variables retenidas para efectos del análisis se presentan en la Tabla 1, definidas según correspondan al nivel del alumno y de la escuela.

La variable genero corresponde al género del estudiante y toma el valor de cero si el estudiante es hombre y uno si es mujer. La variable estrato corresponde al estrato socioeconómico de la vivienda donde reside el estudiante, esta variable toma valores entre 1 y 6. Las variables educación de la madre y educación del padre capturan el nivel de educación de los padres del estudiante y toma valores entre 0 y 9. La opción del valor inferior (cero) indica que el individuo no tiene ningún nivel de educación, mientras que la opción del valor superior (nueve) indica que el individuo ha hecho algún estudio de postgrado. La variable ingreso captura el ingreso familiar mensual del estudiante expresado en salarios mínimos legales vigentes, esta variable toma valores entre 0 y 6, siendo 0 el nivel más bajo de ingresos (menos de un salario mínimo) y 6 el nivel más alto de ingreso (diez o más salarios mínimos). La variable computador indica si el estudiante posee en su hogar un computador y toma el valor de uno si lo tiene y el valor de cero si no lo tiene. Por último la variable internet indica si el hogar del estudiante cuenta con servicio o conexión de internet y toma el valor de uno si tiene y el valor de cero si no tiene.

Tabla 1 - Variables

Nombre de Variable	Identificación	Tipo	Intervalo
Variables del alumno			
1. Género del estudiante (-) (+)	genero	Catagórica	1 = Mujer 0 = Hombre
2. Estrato socioeconómico (+)	estrato	Discreta	1 a 6
3. Nivel educación de la Madre (+)	educacionmadre	Discreta	0 a 9
4. Nivel educación del Padre (+)	educacionpadre	Discreta	0 a 9
5. Ingreso familiar mensual (+)	ingreso	Discreta	0 a 6
6. Computador (+)	computador	Catagórica	1 = Si 0 = No
7. Acceso a Internet (+)	internet	Catagórica	1 = Si 0 = No
Variables de la escuela			
8. Naturaleza del Colegio (+)	naturalezaC	Catagórica	1 = No Oficial 0 = Oficial
9. Jornada del Colegio (-)	jornadaC	Catagórica	0 = Completa 1 = No completa

Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración Propia.

Los aspectos del plantel educativo están representados en dos variables. En primer lugar, se tiene la naturaleza del colegio y toma el valor de cero si el colegio es oficial y el valor de uno si no es oficial. En segundo lugar, se encuentra la jornada del colegio siendo esta completa u ordinaria, mañana, noche y tarde. Esta variable, toma el valor de cero si el colegio tiene jornada completa u ordinaria, y el valor de uno si el colegio tiene una jornada diferente.

El signo que está junto al nombre de cada variable representa la relación que se espera encontrar entre el logro de los estudiantes y cada variable considerada. Intuitivamente se podría identificar dicha relación. Sin embargo, las relaciones fueron tomadas del trabajo de revisión bibliográfica que hizo el Banco Mundial (2009) para Colombia. A continuación, se hace una leve explicación sobre la relación que existe entre las variables socioeconómicas consideradas en este trabajo y el desempeño en las áreas de matemáticas y lenguaje.

En efecto, la bibliografía colombiana ha indicado que existe una relación negativa entre el desempeño de las mujeres en el área de matemáticas. Más sin embargo, para la prueba de lenguaje la relación es positiva. Para los hombres sucede lo contrario.

Por otro lado, la bibliografía colombiana indica que existe una relación positiva entre el desempeño académico en las dos áreas consideradas y la situación socioeconómica del estudiante. Esta última puede ser expresada por medio de las variables nivel de ingresos familiar mensual y estrato socioeconómico. Las familias con ingresos altos tienen los recursos para enviar a sus hijos a escuelas de alta calidad, contratar profesores particulares y obtener fuentes de educación adicionales. Mientras que, las familias con ingresos bajos matriculan a sus hijos en instituciones que no tienen las mismas características de los colegios de alta calidad. Además, las preocupaciones por la situación socioeconómica pueden afectar negativamente la capacidad para aprender de los jóvenes de bajos recursos.

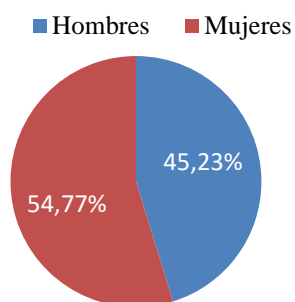
En cuanto a la educación de los padres, la bibliografía colombiana indica que existe una relación positiva con respecto al desempeño en las dos áreas consideradas. Un padre educado, puede exhortar a sus hijos sobre la importancia de mejora en el logro académico, además puede incidir en el rendimiento académico de su hijo evaluando y mejorando su desempeño escolar. Por otro lado, los padres que no culminaron sus

estudios de primaria o secundaria, pueden tener actitudes negativas hacia la educación, además tendrían un nivel de ingresos bajo.

3.3 Estadísticas descriptivas

A continuación se presenta un análisis descriptivo de la base de datos construida con el fin de analizar la consistencia de los datos e identificar previamente las posibles relaciones de causalidad sugeridas por la estadística descriptiva entre la variable de interés y los posibles factores socioeconómicos e institucionales, que serán estimados posteriormente mediante la estimación econométrica de un modelo multinivel.

Gráfico 3
Género



Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014.
Elaboración Propia

En el gráfico 1 se puede observar que el 54,77% de los estudiantes analizados son mujeres y el 45,23% son hombres. La Tabla 2, por su parte, muestra la composición de los colegios, en donde el sector oficial concentra aproximadamente el 61% de los establecimientos educativos.

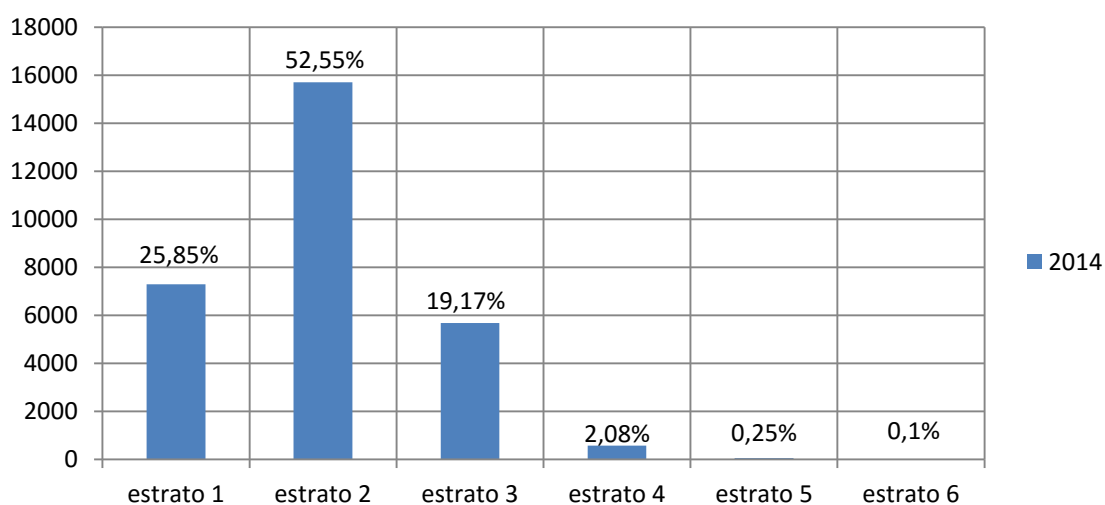
Tabla 2 – Composición de los colegios

Género Colegio	
Masculino	6
Femenino	22
Mixto	641
Naturaleza Colegio	
Oficial	411
No Oficial	258
Jornada Colegio	
Completa u Ordinaria	219
Mañana	339
Tarde	41
Noche	70
Carácter Colegio	
Académico	481
Técnico	99
Académico y Técnico	79
Normalista	10
Total	669

Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración Propia

Como era de esperarse, casi la totalidad de colegios de educación media en el departamento son mixtos. Sobresale el hecho que la jornada ordinaria concentre el 33% del total de colegios. Por último, la modalidad académica concentra más de la mitad de los colegios, seguida por la técnica y la académica – técnica.

**Gráfico 4
Estrato Socioeconómico**



Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración propia

En el gráfico 2 se presenta una de las variables socioeconómicas (estrato socioeconómico) que se utilizará para contrastar las diferencias en el rendimiento académico. De esta se deduce que en el estrato 2 se encuentra concentrada gran parte de la muestra. En los dos primeros estratos se encuentran un poco más de las $\frac{3}{4}$ partes del total de la muestra.

En la tabla 3 se realiza una clasificación del nivel de escolaridad que tienen los padres de los estudiantes que presentaron las pruebas saber 11° en el periodo estipulado. En dicha tabla se puede observar que los rubros más altos están en la educación básica y media. Son pocos los que han llegado a la educación superior. Es preocupante el hecho de que, por un lado, existan padres que no hayan logrado acceder en su momento al sistema educativo colombiano y, por otro lado que, de aquellos que si ingresaron aproximadamente el 37% desertó.

El aspecto positivo radica en que hubo una mejora en términos de movilidad social³, ya que, aproximadamente el 59% de los padres de los 29.322 estudiantes que presentaron la prueba, no alcanzaron a culminar su educación media.

Tabla 3 – Nivel de educación de los padres

Nivel de educación	Padre		Madre	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Ninguno	1161	3,96%	368	1,26%
Primaria Incompleta	6215	21,20%	4849	16,54%
Primaria Completa	6203	21,15%	5760	19,64%
Secundaria (Bachillerato) Incompleta	4742	16,17%	5399	18,41%
Secundaria (Bachillerato) Completa	6618	22,57%	7868	26,83%
Educación Técnica o Tecnología Incompleta	463	1,58%	527	1,80%
Educación Técnica o Tecnología Completa	1503	5,13%	1902	6,49%
Educación Profesional Incompleta	379	1,29%	428	1,46%
Educación Profesional Completa	1773	6,05%	1893	6,46%
Postgrado	265	0,90%	328	1,12%

Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración propia.

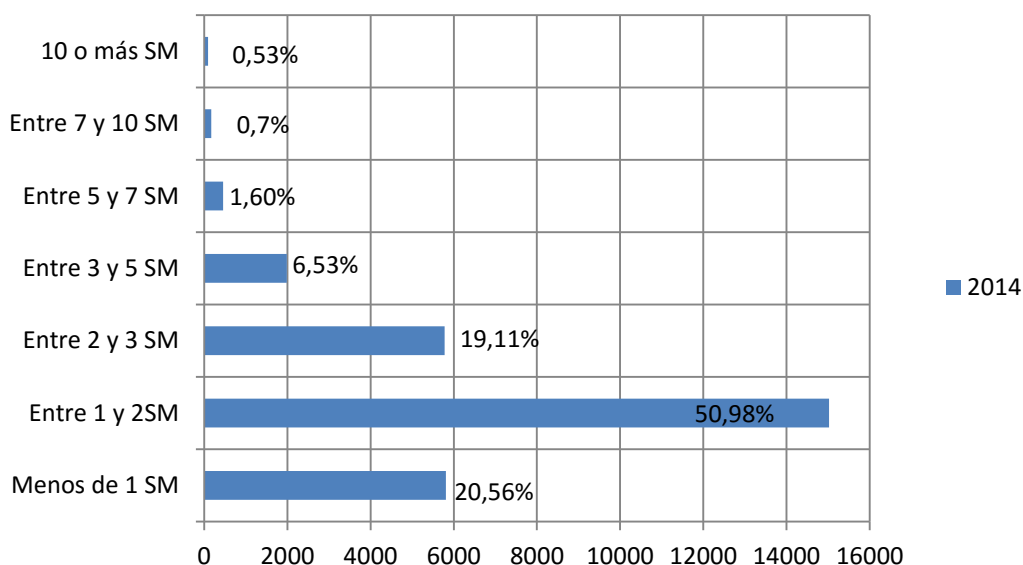
El gráfico 3, por su parte, muestra la clasificación del ingreso mensual familiar representado en salarios mínimos legales vigentes. Este gráfico tiene cierta

³ El concepto de movilidad social tiene su origen en la sociología en donde se inició relacionando la situación de los hijos frente a la de sus padres. Se comparan situaciones ahora con las que tenían los padres en el pasado y con edades equivalentes a las de los hijos. Cuando se observan mejorías en la situación de los hijos existe movilidad social ascendente y viceversa. (Galvis & Roca, 2014)

correspondencia con el gráfico 2, ya que aproximadamente el 50% de la población está concentrada en una sola opción “entre 1 y menos de 2 SM”. Además, se puede observar el esfuerzo de algunos padres al lograr que sus hijos completen el bachillerato con un ingreso mensual menor a un salario mínimo legal vigente. Un poco más del 70% de las familias de los estudiantes percibe un ingreso menor a 2 salarios mínimos legales vigentes

Por último, el 71% del total de estudiantes posee un computador en su hogar y el 53% cuenta con servicio de internet. Sin duda, este hecho tiene repercusiones sobre el logro académico. El puntaje medio en la prueba de matemáticas del año 2014 para aquellos que tienen ordenador es de 52,2, mientras que para los que no tienen es de 48,5. Lo mismo sucede al considerar el servicio de internet. El puntaje medio en la prueba de matemáticas para aquellos que tienen internet es de 52,7 mientras que para los que no tienen es de 49,3. De igual manera sucede para el área de lenguaje.

Gráfico 5 - Ingreso mensual familiar representado en Salarios Mensuales



Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración propia.

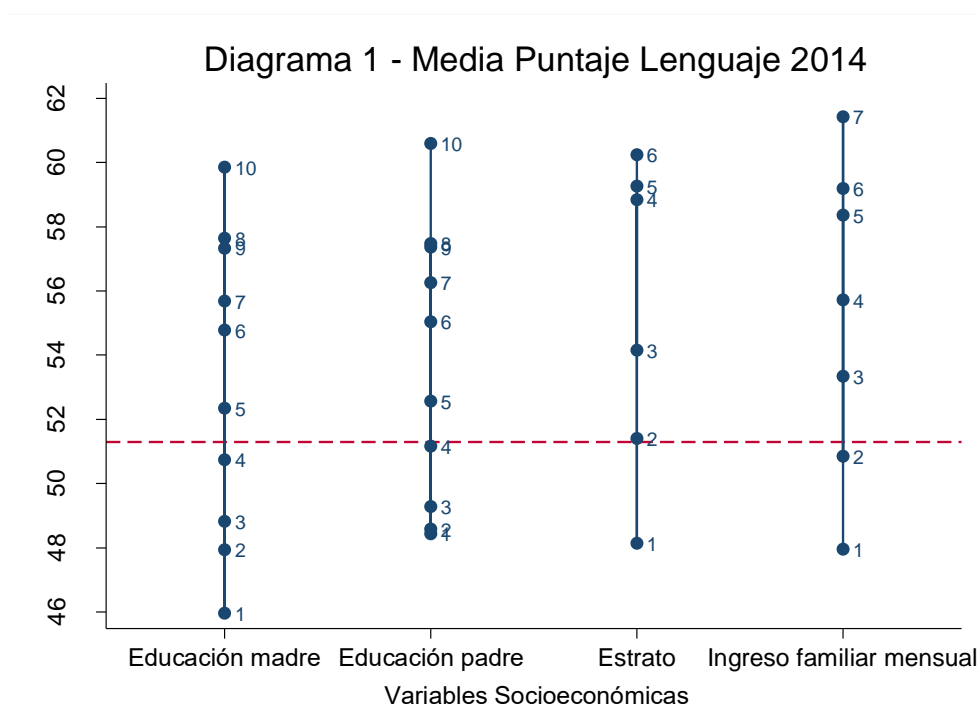
3.4 Análisis Descriptivo

Con el fin de corroborar previamente la hipótesis de que existe un vínculo entre el rendimiento académico de los estudiantes y su nivel socio-económico, se utilizaron diagramas de medias por variables categóricas. Así, la variable dependiente está representada por los resultados de los estudiantes en las competencias de matemáticas y

lenguaje, mientras que entre las variables categóricas se encuentra el estrato socioeconómico, el nivel de educación de los padres y el ingreso mensual familiar representado en salarios mensuales.

En cada diagrama, los círculos pequeños azules expresan la media de los puntajes obtenidos para la clasificación de cada variable socioeconómica en cuestión. Adicionalmente, se traza una línea punteada de color rojo que representa el puntaje medio poblacional.

El puntaje medio poblacional de la prueba lenguaje fue de 51,3. Dado el puntaje medio en la clasificación de cada variable socioeconómica, por debajo de la media poblacional se encuentran, por un lado, las primeras cuatro opciones del nivel de educación de los padres (1. Sin Educación, 2. Educación primaria incompleta, 3. Educación primaria completa y, 4. Educación secundaria incompleta) y por el otro, las primeras dos opciones de la variables Ingreso familiar mensual. Del total de estudiantes analizados, el 51,98% se situó por debajo del puntaje medio poblacional para dicha prueba.

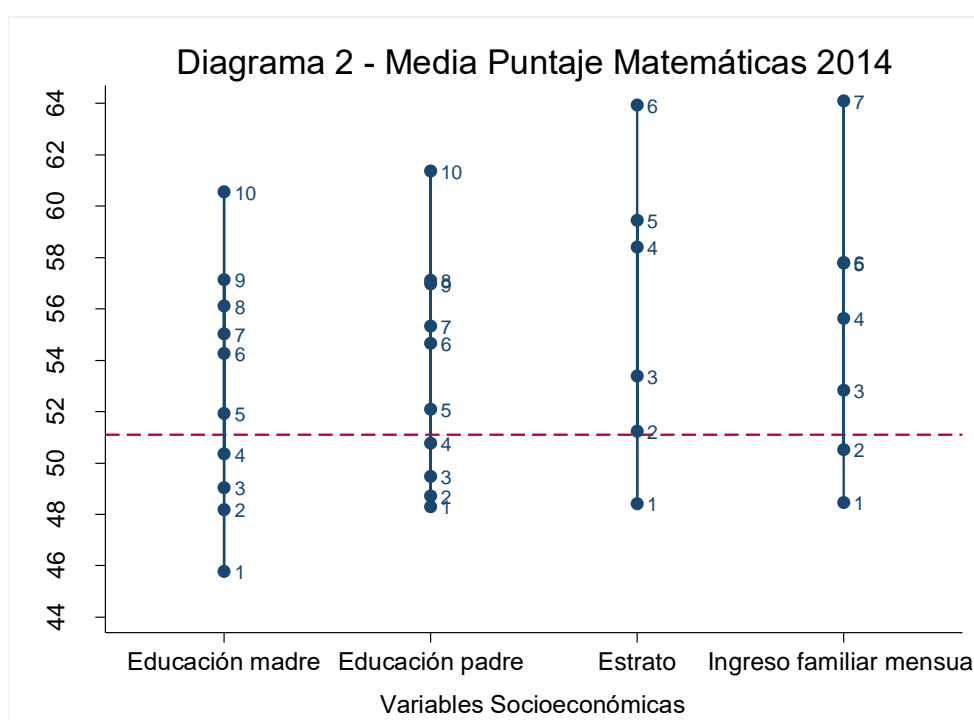


Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración propia.

La grafica 2, por su parte, da a conocer la relación entre el puntaje de matematicas clasificado por las variables socioeconómicas. El puntaje medio poblacional de la prueba de matemáticas para el año 2014 fue de 51,1. Es facil notar que a grandes rasgos

la dos graficas presentan el mismo comportamiento. Del total de estudiantes analizados, el 53,26% se situó por debajo del puntaje medio poblacional para dicha prueba.

Considerando que cada una de las escalas de las variables socioeconómicas está expresada de tal manera que la primera opción sea la más baja y la última la más alta, se concluye que existe una relación intuitivamente positiva entre las variables socioeconómicas y el desempeño académico. Ya que, a medida que se avanza en la escala de cada variable socioeconómica se encuentra una mejora en el puntaje obtenido de los estudiantes en la prueba de matemáticas. Para las pruebas de lenguaje sucede lo mismo. En el anexo 1 se presentan las tablas que corroboran dicha afirmación.



Fuente: Pruebas Saber 11°, 2014. Elaboración propia.

3.5 Modelo Multinivel

“Los modelos multinivel se han desarrollado para analizar datos anidados o con estructuras jerárquicas. Es decir, los datos de más bajo nivel, por ejemplo los individuos, se presentan anidados en unidades de nivel superior” (Gaviria y Castro, 2005). La estructura de los datos utilizados en este estudio es anidada, ya que los estudiantes se encuentran agrupados en salones, que a su vez forman parte de un plantel educativo determinado.

Gaviria y Castro (2005) dan a conocer las ventajas conceptuales de los modelos multinivel. Entre ellas se destaca el hecho de considerar las diferencias contextuales, los individuos y los contextos producen diferencias. Luego se precisan modelos que no reduzcan a los individuos a agregaciones estadísticas y que no limiten los contextos a vagas generalizaciones. Esto permite analizar simultáneamente contextos y la heterogeneidad individual, ya que no sólo se deben considerar las diferencias entre contextos, sino que también las diferencias entre individuos. Finalmente, permite combinar la investigación intensiva con la extensiva. Las conductas y las acciones de los individuos tienen ambos componentes, uno cualitativo (qué ocurre en el micro nivel) y otro cuantitativo (en el macro nivel). Ambos elementos deben considerarse simultáneamente.

Los modelos convencionales de regresión lineal no permiten la interacción entre individuos y contextos, puesto que de entrada ignoran la estructura básica de los datos cuando estos se encuentran jerarquizados o anidados, dándole el mismo “peso” a cada observación⁴.

“En los estudios sobre eficacia escolar se necesita considerar simultáneamente las variables de los alumnos, tales como la situación socioeconómica de las familias, y las variables de la escuela como el clima del centro o su titularidad” (Murillo, 2008a). Así, se considerarán las diferencias en el entorno sin llegar a generalizar las condiciones del colegio incurriendo en un problema de dependencia (ya que se estaría violando el supuesto de independencia entre las observaciones) o por otro lado, resumiendo las características de los estudiantes a nivel de cada colegio perdiendo gran parte de la variabilidad al interior del colegio.

La estimación de un modelo jerárquico exige un análisis sistemático partiendo del más simple de los modelos (el Modelo Nulo, que no incluye predictores y que solo estima la media global del logro) y se va perfeccionando mediante la adición progresiva de variables explicativas, tanto de alumnos como de planteles. Dependiendo del efecto que

⁴ Murillo (2008a) citando a los siguientes autores (Hox, 1995; Hill & Rowe, 1996; Hox, 1998; Goldstein, 2003) afirma que los modelos de regresión lineales descansan en el supuesto de independencia de las observaciones y, como compartir el mismo contexto causa su dependencia, los errores estándar estimados de las pruebas estadísticas tradicionales aparecerán claramente subestimados y ello conducirá irremisiblemente a que la mayoría de los resultados sean significativamente espurios. Ahora, al trabajar con los datos agrupados se pierde una gran cantidad de información, con lo que disminuye la potencia del análisis estadístico. Además, se puede caer en la llamada falacia ecológica por la cual se otorgan incorrectamente las características del contexto a los sujetos.

la adición de las variables tenga sobre la reducción de la varianza total, éstas serán retenidas o eliminadas del modelo. (Piñeros y Rodriguez, 1998)

Modelo Nulo

El modelo nulo contiene únicamente una variable respuesta y la constante. La estimación de esta última será igual a la media poblacional de la variable de interés (puntaje en pruebas). El modelo nulo se establece como línea de base para la estimación de la varianza explicada a partir de la cual se van evaluando las aportaciones de modelos más elaborados.

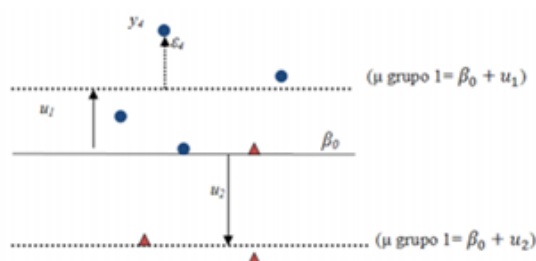
$$\text{Nivel 1: } y_{ij} = \beta_{0j} + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

Donde, y_{ij} es el rendimiento en cualquier variable cognitiva o no - cognitiva, que tiene un alumno i en una escuela j , y ε_{ij} es el error y se distribuye normalmente con una varianza constante e igual a σ^2 , β_{0j} es el promedio de y de la escuela j -ésima, tal como se menciono previamente.

$$\text{Nivel 2: } \beta_{0j} = \beta_0 + \mu_j \quad (2)$$

Donde, β_0 representa el “gran promedio” de y para la población, y μ_j es el efecto aleatorio asociado a la escuela j -ésima y se supone que tiene media cero y una varianza σ^2_{μ} . Es decir el intercepto del modelo nulo, recoge tanto la media del modelo global y las especificades que presenta cada escuela.

Gráfico 6 – Errores a nivel individual y grupal en un modelo de dos niveles



Fuente: Ojeda, Cruz velasco y Tapia (2011)

Los elementos que se estiman son: β_{0j} , σ^2_{μ} (varianza del nivel 2) y σ^2_{ε} (varianza del nivel 1) y la razon de verosimilitud. σ^2_{μ} es la varianza de la verdadera media de la

escuela respecto a la media de todas las escuelas de la muestra (la gran media). La razón de verosimilitud servirá para evaluar cada modelo con respecto al nulo.

El modelo también puede ser expresado, al sumar (1) y (2), de la siguiente forma:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

$$\mu_j \sim N(0, \sigma^2_{\mu})$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\varepsilon})$$

Modelo Ampliado

La introducción de variables adicionales al modelo nulo implica una reducción de la varianza del logro, esto a su vez implica una mayor precisión en la estimación de los diferentes parámetros. Se pueden hallar diferentes tipos de modelos según el número de variables incluidos en cada nivel.

a) Modelo Multinivel de Intercepto Aleatorio

Ahora se añadirá una variable explicativa en el nivel 1 x_{ij} . El subíndice ij en x , indica que los valores de x cambian de observación dentro de un grupo:

$$\text{Nivel 1: } y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

$$\text{Nivel 2: } \beta_{0j} = \beta_0 + \mu_j \quad (5)$$

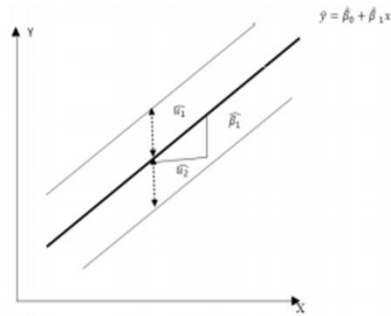
$$\text{Combinado: } y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

$$\mu_j \sim N(0, \sigma^2_{\mu})$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\varepsilon})$$

Este modelo multinivel está compuesto por dos partes: una fija y otra aleatoria. La primera muestra la relación entre la media de y y la variable explicativa. La segunda parte contiene los residuos del nivel 1 y del nivel 2. Usualmente, este modelo se conoce como modelo de intercepto aleatorio, porque el intercepto de la línea de regresión puede variar entre los grupos (colegios), pero la pendiente se asume fija para cada grupo.

Gráfico 7 – Representación gráfica de un modelo de intercepto aleatorio



Fuente: Ojeda, Cruz velasco y Tapia (2011)

b) Modelo Multinivel de Coeficientes Aleatorios

Supongase que la pendiente β_1 no se mantiene fija para todos los grupos sino que esta varía aleatoriamente entre los grupos, lo que conduce a un modelo de pendiente aleatoria.

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \mu_{0j} + \mu_{1j} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

El modelo también puede ser expresado de la siguiente manera:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \mu_{0j} \quad (9)$$

$$\beta_{1j} = \beta_1 + \mu_{1j} \quad (10)$$

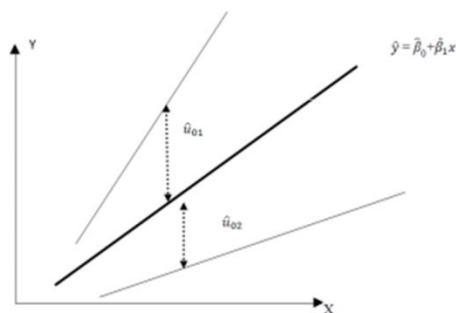
$$\begin{bmatrix} \mu_{0j} \\ \mu_{1j} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega_\mu): \Omega_\mu = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mu_0} & \sigma_{\mu_0\mu_1} \\ \sigma_{\mu_0\mu_1} & \sigma^2_{\mu_1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

Con respecto al modelo anterior, se han agregado nuevos términos a la ecuación, dentro del componente aleatorio. Ahora se tiene $\mu_{1j} x_{ij}$, y se añadió el subíndice 0 al término μ_j . Así mismo, los supuestos se han modificado, pues ahora se asume que los errores μ_{0j} y μ_{1j} , se distribuyen como una normal bivariada con media cero y varianzas $\sigma^2_{\mu_0}$, $\sigma^2_{\mu_1}$ y covarianza $\sigma_{\mu_0\mu_1}$, que es la covarianza entre los interceptos de grupo y las

pendientes. Ahora la pendiente de la línea de regresión global es β_1 y la pendiente para cada grupo (escuela) j es $\beta_1 + \mu_{1j}$.

Gráfico 8 – Representación gráfica de un modelo con pendiente aleatoria



Fuente: Ojeda, Cruz velasco y Tapia (2011)

c) Efectos Contextuales. Variables Explicativas al segundo nivel

Esta variación del modelo permite conocer los efectos que tienen las variables explicativas de grupo a nivel 2 en la variable respuesta. En la estructura de los datos, es importante tener presente que las variables explicativas a nivel 2 tienen un valor constante dentro de cada grupo (colegio). El modelo toma la siguiente forma:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 x_{2j} + \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad (12)$$

x_2 Representa la variable explicadora de nivel 2 y sólo tiene en subíndice j , pues como se mencionó, sus valores no varían de observación en observación dentro de las unidades de nivel 2.

De los modelos que se presentan en la siguiente sección, los primeros cinco se representan por medio de un modelo de intercepto aleatorio. El modelo seis es de efectos contextuales, ya que se le añaden variables explicativas al segundo nivel.

4. RESULTADOS

A continuación se dan a conocer los resultados obtenidos en los modelos multinivel utilizando como variables de respuesta el puntaje obtenido en las competencias de matemáticas y lenguaje de la prueba saber 11 del periodo 2014-2 en el departamento de Cundinamarca . En el nivel 1 (alumnos) se tuvieron en cuenta las siguientes variables: Género del estudiante, nivel educativo de la madre, estrato socioeconómico de la

vivienda donde reside, ingreso familiar mensual, computador y servicio de internet. Para el nivel 2 (colegios) se tuvieron en cuenta las siguientes variables: Naturaleza y Jornada del Colegio.

Ahora, dado que se quiere hallar el impacto de las variables socioeconómicas en el desempeño escolar de cada área considerada, la tabla 5 da a conocer la proporción de varianza total del puntaje explicada en las diferentes áreas a partir de dichas variables por separado. En la tabla 6, por su parte, se muestra el modelo donde se explica el efecto de las variables relacionadas con el individuo en su conjunto. Para finalizar, en la tabla 7 se agregan cinco variables más, tres sobre factores asociados al estudiante y dos con respecto al plantel educativo.

Cada tabla contiene los efectos fijos y aleatorios del modelo. En los primeros, se dan a conocer los valores de los parámetros estimados con su respectivo error estándar. En los segundos, aparece la varianza de cada nivel de agregación, el coeficiente de correlación intraclase (C.C.I)⁵, y el estadístico de verosimilitud útil para la medida del ajuste global del modelo.

Tabla 4 – Modelo Nulo

Variables	Modelo Nulo			
	Matemáticas		Lenguaje	
	Parametro	e.s	Parametro	e.s
Constante	51,099*	0,054	51,28*	0,054
Educación Madre				
Educación Padre				
Estrato				
Ingreso				
ε_{0ij}	70,296	1,361	69,402	1,354
μ_{0j}	12,317	1,289	13,332	1,291
C.C.I	0,1491		0,1611	
T. Verosimilitud	212549,13		212576,313	

* implica coeficientes significativos $p < 0,01$

⁵ El coeficiente de Correlación intraclase (CCI) representa la proporción de la variación total de los residuos que es explicada debido a las diferencias entre los colegios. El coeficiente puede tomar valores entre 0 y 1; si es igual a cero significa que no hay diferencias entre los colegios, si es igual a uno, hay diferencias entre los colegios. Se halla de la siguiente manera:

$$CCI = \frac{\sigma_{\mu_0}^2}{\sigma_{\mu_0}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2}$$

Donde,

$\sigma_{\mu_0}^2$ varianza entre colegios. En cada tabla corresponde al valor de ε_{0ij}

σ_{ε}^2 varianza entre estudiantes. En cada tabla corresponde al valor de μ_{0j}

Como se mencionó en el apartado anterior, el modelo nulo representa el punto de partida de todo el análisis multinivel. Este modelo permite estimar la media general del rendimiento en cada una de las diferentes áreas analizadas. Para nuestro caso, la media grupal en el área de Matemáticas fue de 51,099 y en el área de Lenguaje fue de 51,28. Los dos parámetros resultan ser iguales a las medias obtenidas en el análisis gráfico anterior, y son estadísticamente significativos.

La tabla 4 indica que existe varianza sin explicar en el rendimiento de los alumnos para las dos áreas. La variabilidad del rendimiento es mayor a nivel de los alumnos que de las escuelas. $(\varepsilon_{0ij}) > (\mu_{0j})$

El C.C.I, para este caso, muestra la proporción de la variación total de los residuos que es explicada debido a las diferencias entre los colegios. Así, se tiene que los colegios explican un 14,91 % de la varianza del rendimiento en la prueba de Matemáticas y un 16,11% en lenguaje, el resto es debido a las variables referentes al primer nivel. Este hecho implica una menor importancia del colegio en la explicación del rendimiento de sus propios alumnos.

En la tabla 5, se presentan cuatro modelos diferentes. Cada uno permite conocer los efectos individuales que tiene cada variable socioeconómica en la variación del rendimiento escolar. Efectivamente, todos los parámetros estimados son estadísticamente significativos, es por eso que todas las variables socioeconómicas deben ser tenidas en cuenta si se quiere reducir la varianza no explicada del rendimiento escolar.

Cada una de las variables por separado evidencia una relación positiva sobre el desempeño. En efecto, por cada escalón que aumenta el nivel de estudios de la madre, el alumno incrementa su rendimiento promedio en matemáticas en 1,38 puntos. Para la prueba de lenguaje lo aumenta en 1,482 puntos. Dado que la variable nivel de estudios de la madre toma valores entre cero y nueve, la máxima diferencia en la prueba de matemáticas es de 12,42 puntos entre alumnos cuyas madres tienen estudios de postgrado respecto de aquellas cuyas no tienen estudios⁶. Para la prueba de lenguaje la

⁶ Al tener presente la siguiente ecuación de nivel 1:

$$Puntajemat_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{ij}educaciónmadre_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

Para este caso:

máxima diferencia es de 13,33 puntos. Se debe tener en cuenta que para este modelo se observa una disminución en el valor del puntaje del intercepto, ya que ahora se refiere al rendimiento medio en las pruebas de matemáticas y lenguaje de aquellos estudiantes cuyas madres nunca fueron a la escuela.

Tabla 5 – Parámetros estimados para las variables socioeconómicas por separado

Variables	Modelo 1				Modelo 2			
	Matemáticas		Lenguaje		Matemáticas		Lenguaje	
	Parametro	e.s	Parametro	e.s	Parametro	e.s	Parametro	e.s
Constante	46,434*	0,1	46,272*	0,099	47,247*	0,092	47,125*	0,091
Educación Madre	1,38*	0,025	1,482*	0,025				
Educación Padre					1,257*	0,025	1,356*	0,025
Estrato								
Ingreso								
ε_{0ij}	69,199	1,269	67,822	1,249	69,915	1,285	68,087	1,264
μ_{0j}	5,683	1,16	6,007	1,145	5,937	1,175	6,792	1,163
C.C.I	0,0759		0,0814		0,0783		0,0907	
T. Verosimilitud	209738,616		209319,297		210114,038		209726,462	
Variables	Modelo 3				Modelo 4			
	Matemáticas		Lenguaje		Matemáticas		Lenguaje	
	Parametro	e.s	Parametro	e.s	Parametro	e.s	Parametro	e.s
Constante	45,771*	0,15	45,14*	0,149	48,311*	0,084	48,241*	0,083
Educación Madre								
Educación Padre								
Estrato	2,676*	0,07	3,084*	0,07				
Ingreso					2,288*	0,054	2,494*	0,053
ε_{0ij}	70,621	1,322	69,151	1,3	70,979	1,312	69,598	1,295
μ_{0j}	7,994	1,224	8,29	1,206	6,664	1,205	7,237	1,195
C.C.I	0,1017		0,1070		0,085828729		0,094188846	
T. Verosimilitud	211145,071		210699,372		210792,982		210480,123	

* implica coeficientes significativos $p < 0,01$

En cuanto a la parte aleatoria del modelo 1, se observa un incremento en la varianza explicada con respecto al modelo nulo en la prueba de matemáticas, cerca de un 9%, para la prueba de lenguaje es de un 11%. Se observa también una pequeña reducción en la varianza entre individuos, sin embargo, el cambio más significativo se da en la varianza entre colegios ya que este modelo explica aproximadamente el 54% de dicha

$$Puntajemat_{ij} = \beta_{0j} + 1,38 \text{ educaciónmadre}_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

Dado que la variable nivel de estudios de la madre toma valores entre cero y nueve, la máxima contribución de esta variable al puntaje estimado en el área de matemáticas, es de 12,42 puntos.

$$Puntajemat_{ij} = \beta_{0j} + 1,38 * (9) + \varepsilon_{ij}$$

$$Puntajemat_{ij} = \beta_{0j} + 12,42 + \varepsilon_{ij}$$

De igual manera se realiza para la prueba de Lenguaje y para las demás variables.

varianza en la prueba de matemáticas y el 55% en la prueba de lenguaje⁷. De los cuatro modelos citados en la tabla 5, éste es el que tiene la mayor proporción de la varianza explicada del modelo nulo.

Por otro lado, el modelo 3, que relaciona el puntaje obtenido en cada prueba con el estrato socioeconómico de la vivienda donde reside el estudiante, es el que tiene el mayor impacto absoluto sobre el desempeño. En efecto, por cada escalón que aumenta el estrato socioeconómico, el alumno incrementa su rendimiento promedio en matemáticas en 2,676 puntos, para la prueba de lenguaje lo aumenta en 3,084 puntos.

Aunque es cierto que todas las variables anteriormente citadas actuando por separado alcanzan a disminuir de manera significativa el coeficiente de correlación intraclase para las dos pruebas, se consideró un modelo en el que se incluyan todas las variables socioeconómicas para evaluar en su conjunto la proporción de varianza total que pueden llegar a explicar.

En los resultados del modelo 5 se puede constatar que el efecto conjunto de las variables socioeconómicas tiene un gran impacto sobre la varianza no explicada del modelo nulo. En efecto, la inclusión de las variables socioeconómicas implica una reducción de la varianza del desempeño en el área de matemáticas en un 12%, mientras que para el área de lenguaje es de un 14%. Al descomponer dicha varianza se observa una pequeña reducción en la varianza entre individuos, del 3% para la prueba de matemáticas y del 4% para la prueba de lenguaje. Sin embargo, el cambio más significativo se da en la

⁷ La parte aleatorio del modelo nulo da a conocer la varianza no explicada de los dos niveles (estudiantes y colegio). Cada vez que se realiza un modelo diferente se halla el porcentaje de varianza que puede explicar dicho modelo. Los porcentajes de varianza explicada para cada nivel, por cada modelo, se determinan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{\% de varianza explicada} & \quad \text{\% de varianza explicada} \\ \text{entre estudiantes} & \quad \text{entre colegios} \\ i & \quad j \\ = \frac{\varepsilon^*_{oij} - \varepsilon_{oij}}{\varepsilon^*_{oij}} & \quad = \frac{\mu^*_{oij} - \mu_{oij}}{\mu^*_{oij}} \\ \\ \text{\% de varianza total} & \\ \text{explicada} & \quad ij \\ = \frac{(\varepsilon^*_{oij} + \mu^*_{oij}) - (\varepsilon_{oij} + \mu_{oij})}{\varepsilon^*_{oij} + \mu^*_{oij}} = R^2 = R \end{aligned}$$

Donde,

ε^*_{oij} varianza del desempeño escolar entre estudiantes no explicada. (modelo nulo),
 ε_{oij} varianza del desempeño escolar entre estudiantes explicada por el modelo propuesto,
 μ^*_{oij} varianza del desempeño escolar entre colegios no explicada. (modelo nulo), y
 μ_{oij} varianza del desempeño escolar entre colegios explicada por el modelo propuesto.

varianza entre colegios ya que este modelo explica aproximadamente el 65% de dicha varianza para ambas áreas.

Tabla 6 - Parámetros estimados para las variables socioeconómicas en conjunto

Variables	Modelo 5			
	Matemáticas		Lenguaje	
	Parametros	e.s	Parametros	e.s
Constante	44,436*	0,148	43,75*	0,146
Educación Madre	0,758*	0,033	0,784*	0,033
Educación Padre	0,511*	0,032	0,537*	0,032
Estrato	0,771*	0,079	1,094*	0,079
Ingreso	0,822*	0,063	0,867*	0,062
ε_{0ij}	68,432	1,237	66,37	1,207
μ_{0j}	4,303	1,121	4,671	1,097
C.C.I	0,0592		0,0658	
T. Verosimilitud	208894,451		208200,725	

* implica coeficientes significativos $p < 0,01$

Por último, se consideró un modelo adicional en donde se agregaron las variables, computador y servicio de internet para el primer nivel y naturaleza del colegio y jornada del colegio para el segundo nivel.

La variable computador indica si el estudiante tiene en su hogar un ordenador y toma el valor de uno si lo tiene y el valor de cero si no lo tiene. Mientras que, la variable internet indica si el hogar del estudiante cuenta con servicio o conexión de internet y toma el valor de uno si cuenta con el servicio y cero en caso contrario.

Al considerar los efectos parciales de las cinco variables agregadas, se tiene que por un lado, los -2,335 puntos del parámetro estimado que recoge el efecto del género representan la disminución media en matemáticas entre chicos y chicas. En cambio, para la prueba de lenguaje la diferencia no es tan notoria, el parámetro estimado es de apenas 0,465 puntos. Por otro lado, la variable computador es la que, para los dos casos, tiene el mayor impacto absoluto sobre el desempeño, mientras que la variable servicio de internet tiene un mayor impacto para la prueba de lenguaje.

Con respecto a las variables de segundo nivel, naturaleza y jornada del colegio, los dos parámetros son negativos para ambas áreas. En efecto, los planteles educativos no oficiales tendrán un desempeño más bajo en 0,893 puntos para el área de Matemáticas y

de 0,538 para el área de lenguaje. Por otro lado, los planteles educativos que tienen una jornada diferente a la completa tendrán un desempeño más bajo en 0,975 para el área de matemáticas y de 0,927 para el área de lenguaje.

La inclusión de más variables en el primer y segundo nivel implicó una reducción de la varianza del desempeño en el área de matemáticas en un 14%, mientras que para el área de lenguaje es de un 15%. Al descomponer dicha varianza se observa una pequeña reducción en la varianza entre individuos, del 5% para ambas pruebas. Sin embargo, el cambio más significativo se da en la varianza entre colegios ya que este modelo explica aproximadamente el 64% de dicha varianza para la prueba de matemáticas y el 68% para la prueba de Lenguaje.

En el anexo 2 se presentan la evaluación de ajuste global de los modelos.

Tabla 7 - Parámetros estimados en variables de primer y segundo nivel

Variables	Modelo 6			
	Matemáticas		Lenguaje	
	Parametros	e.s	Parametros	e.s
Constante	46,334*	0,203	43,981*	0,202
Educación Madre	0,715*	0,033	0,719*	0,033
Educación Padre	0,478*	0,032	0,486*	0,032
Estrato	0,636*	0,08	0,856*	0,08
Ingreso	0,71*	0,064	0,693*	0,063
Género	(2,335)*	0,099	0,465*	0,098
Computador	1,083*	0,136	1,187*	0,136
Servicio de Internet	0,402*	0,128	1,056*	0,128
Naturaleza Colegio	(0,893)*	0,141	(0,538)*	0,14
Jornada Colegio	(0,975)*	0,129	(0,927)*	0,128
ϵ_{0ij}	66,513	1,206	65,929	1,193
μ_{0j}	4,424	1,094	4,231	1,082
C.C.I	0,0624		0,0603	
T. Verosimilitud	208159,431		207837,613	

* implica coeficientes significativos $p < 0,01$

5. CONCLUSIONES

En base a los resultados se concluye que existe una relación positiva entre las variables socioeconómicas del estudiante consideradas en el presente estudio y su desempeño en las áreas de matemáticas y lenguaje. Al considerar el efecto individual de cada variable socioeconómica se encontró que el grado de escolaridad de la madre es la variable que tiene la mayor proporción de la varianza explicada entre colegios.

El resultado del coeficiente de correlación intraclase del modelo nulo reveló que el 14,91% y el 16,11% de la variación en el rendimiento en matemática y lenguaje son explicados por el plantel educativo. Al considerar las variables socioeconómicas en su conjunto, el CCI se redujo a 5,92% y 6,58% para las áreas de matemáticas y lenguaje respectivamente. Lo que sugiere que tiene más influencia las características socioeconómicas y familiares del estudiante sobre el rendimiento en dichas competencias.

De lo anterior, se deduce que la relación entre el desempeño obtenido en las áreas consideradas y las características socioeconómicas varía positivamente entre los planteles educativos, lo que a su vez implica que la educación en el departamento de Cundinamarca es inequitativa. En efecto, las diferencias se marcan en el desempeño entre los estudiantes que se sitúan en los niveles superiores de las escalas socioeconómicas y los que se encuentran en la parte inferior de las mismas.

Si se consideran los resultados del último modelo, se observa que la presencia de un computador en el hogar implica un mayor puntaje en las pruebas de matemáticas y lenguaje. Además, al agregar al análisis las variables de segundo nivel (naturaleza y jornada del colegio), encontramos que, por un lado, pertenecer a un colegio público implica mejores resultados en las pruebas consideradas que los colegios privados, esto al descontar el efecto que tienen las variables de primer nivel. Y por otro lado, los estudiantes que pertenecen a colegios con jornada completa tienen un mejor desempeño en la prueba que los estudiantes que estudian en las demás jornadas.

Las recomendaciones de política derivadas de las conclusiones anteriormente presentadas son: 1. No solo debe tenerse presente la educación de los estudiantes al interior del colegio, sino que, en pro de disminuir la inequidad educativa, se deberían realizar programas educativos para los Padres. De esta manera, ellos tendrían las

herramientas para ser un apoyo sustancial para sus hijos y fomentaran la importancia de la educación para el futuro. 2. Adecuar espacios para que jóvenes de bajos recursos logren tener acceso a un computador cerca de su hogar. 3. Llevar a cabo la jornada completa para todas las instituciones educativas.

Para finalizar, vale la pena mencionar que, aunque las variables presentadas en este modelo alcanzaron a explicar el 65% de la varianza entre colegios para ambas áreas⁸, el efecto sobre la varianza entre los estudiantes fue nulo, alrededor del 3% para matemáticas y 4% para lenguaje. De esta manera, si se quiere realizar un análisis más contundente para identificar las diferencias en el puntaje obtenido por los estudiantes en las áreas consideradas se debe incorporar al análisis otro tipo de variables complementarias que den respuesta de una manera más precisa a dichas diferencias. La gran mayoría de los estudios que se han hecho para el caso colombiano sobre la identificación de los determinantes de la educación media en Colombia están condicionados a la información que se recoge en el formulario de inscripción que hace el ICFES para la presentación de las pruebas Saber 11°

⁸ Al tener presente el movimiento de eficacia escolar presentado en el marco teórico, se debe mencionar que este resultado responde a uno de los dos cuestionamientos que se formula dicho movimiento. ¿Qué factores determinan las diferencias en el desempeño escolar entre colegio?

BIBLIOGRAFIA

Banco Mundial. (2009). *La calidad de la educación en Colombia: un análisis y algunas opciones para un programa de política*. Bogotá: Banco Mundial.

Barón, J. (2010). La brecha de rendimiento académico de Barranquilla. Cartagena: *Documentos de Trabajo Sobre Economía Regional*, (137).

Barrera-Osorio, F., Maldonado, D., & Rodríguez, C. (2012) *Calidad de la educación básica y media en Colombia: Diagnóstico y propuestas*. Colombia: Universidad del Rosario.

Casas, A.; Gamboa, L. y Piñeros, L. (2002). El efecto escuela en Colombia: 1999-2000. *Borradores de Investigación*, (27).

Celis M., Jiménez, O., & Jaramillo, J. (2012). ¿Cuál es la brecha de la calidad educativa en Colombia en la educación media y en la superior? *Estudios sobre calidad de la educación en Colombia*, 66-98.

Chica, S., Galvis, D., & Ramírez, A. (2012). Determinantes del rendimiento académico en Colombia. Pruebas ICFES - Saber 11°, 2009. *Revista Universidad EAFIT*, 46(160), 48-72.

Coleman, J., Campbell, E., Hobson, C., McPartland, J., Mood, A., Weinfeld, F & York, R. (1966). Equality of educational opportunity. *Washington, dc*, 1066-5684.

Contraloría General de la República. (2014). *Política educativa y calidad de la educación básica y media en Colombia*. Recuperado de <http://www.contraloriagen.gov.co/>

Correa, J. (2004). Determinantes del rendimiento educativo de los estudiantes de secundaria en Cali: Un análisis multinivel. *Sociedad y Economía*, (6), 81-105.

Figel, J. (2009). Competencias clave para el aprendizaje permanente. *Al Tablero*, 1 (52).

Galvis, L., & Roca, A. (2014). *Aspectos regionales de la movilidad social y la igualdad de oportunidades en Colombia* (No. 011543). BANCO DE LA REPÚBLICA-ECONOMÍA REGIONAL

Gaviria, A., y Barrientos, J. (2001). Calidad de la educación y rendimiento académico en Bogotá. *Coyuntura Social, Fedesarrollo*, (24), 111-126.

- Gaviria, J & Castro, M. (2004). *Modelos jerárquicos-lineales*. Madrid: La muralla.
- Goldstein, H. (2003). *Multilevel Statistical Models*. New York: Arnold
- Hill, P. & Rowe, K. (1996). Multilevel modelling in School effectiveness research. *School Effectiveness and School Improvement*, 17(1), 1-34.
- Hox, J. (1995). *Applied Multilevel Analysis*. Amsterdam: TT-Publikaties
- Hox, J. (1998). Multilevel modeling: when and why. En I. Balderjahn & M. Schader (Eds.), *Classification, data analysis and data highways*, 147-154. New York: Springer Verlag.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación – ICFES -. Bases de datos pruebas Saber.
- Larrañaga, O. (1996). *Educación y superación de la pobreza en América Latina* (No. 144). Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Departamento de Economía.
- López, S. (2010). El efecto colegio en Colombia: tres décadas de estudio. *Revista Equidad y Desarrollo*. (14), 85-101.
- Murillo, J. (2008a). Los modelos multinivel como herramienta para la investigación educativa. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 1, 45-62.
- Murillo, J. (2008b). Hacia un modelo de Eficacia Escolar. Estudio Multinivel sobre los Factores de Eficiencia de las Escuelas Españolas. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 6(1), 4-28.
- Ojeda, M., Velasco, F., Cruz, C. y Tapia P. (2011). *Metodología estadística aplicada a las finanzas públicas*. Veracruz, México.
- Orjuela, J. (2013). Análisis del desempeño estudiantil en las pruebas de Estado para educación media en Colombia mediante modelos jerárquicos lineales. *Revista ingeniería – Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, 2. 54-67.
- Piñeros, L & Rodríguez, A. (1998). *Los insumos escolares en la educación secundaria y su efecto sobre el rendimiento académico de los estudiantes: Un estudio en Colombia*. The world bank. Bogotá, Colombia.
- Rodríguez, M. (2012). *Educación y Pobreza, Un Análisis De Eficiencia Relativa Departamental*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Sánchez, M. (2012). *Calidad de la educación y rendimiento académico en Cali 2009*. Universidad del valle, Cali, Colombia.

Scheerens, J. (1990). School effectiveness research and the development of process indicators of school functioning. *School Effectiveness and School Improvement*, 1(1). 61-80.

Vegas, E. & Petrow, J. (2008). *Incrementar el aprendizaje estudiantil en América Latina el desafío para el siglo XXI*. Bogotá: Mayol ediciones.

Anexo 1 – Puntaje medio en cada prueba clasificado por variable socioeconómica

Media del puntaje en matemáticas clasificada por estrato socioeconómico							
Clasificación	estrato 1	estrato 2	estrato 3	estrato 4	estrato 5	estrato 6	Total
N	7292	15707	5681	572	54	16	29322
%	24,87%	53,57%	19,37%	1,95%	0,18%	0,05%	100%
Media	48,4	51,2	53,4	58,4	59,4	63,9	51,1
Desviación Estandar	8,16	8,89	9,36	11	10,4	15,7	9,09

Media del puntaje en Lenguaje clasificada por estrato socioeconómico							
Clasificación	estrato 1	estrato 2	estrato 3	estrato 4	estrato 5	estrato 6	Total
N	7292	15707	5681	572	54	16	29322
%	24,87%	53,57%	19,37%	1,95%	0,18%	0,05%	100%
Media	48,1	51,4	54,2	58,8	59,3	60,3	51,3
Desviación Estandar	8,55	8,82	8,94	9,35	11,8	12,5	9,09

Media del puntaje en matemáticas clasificada por ingreso familiar mensual								
Clasificación	Menos de 1 SM	Entre 1 y Menos de 2SM	Entre 2 y Menos de 3 SM	Entre 3 y Menos de 5 SM	Entre 5 y Menos de 7 SM	Entre 7 y Menos de 10 SM	10 o más SM	Total
N	5812	15027	5781	1985	453	172	92	29322
%	19,82%	51,25%	19,72%	6,77%	1,54%	0,59%	64,10%	100%
Media	48,5	52,8	52,8	55,6	57,8	57,8	64,1	51,1
Desviación Estandar	8,03	9,22	9,22	10,3	10,4	11,2	14	9,09

Media del puntaje en Lenguaje clasificada por ingreso familiar mensual								
Clasificación	Menos de 1 SM	Entre 1 y Menos de 2SM	Entre 2 y Menos de 3 SM	Entre 3 y Menos de 5 SM	Entre 5 y Menos de 7 SM	Entre 7 y Menos de 10 SM	10 o más SM	Total
N	5812	15027	5781	1985	453	172	92	29322
%	19,82%	51,25%	19,72%	6,77%	1,54%	0,59%	0,31%	100%
Media	47,9	50,8	53,3	55,7	58,4	59,2	61,4	51,3
Desviación Estandar	8,35	8,71	8,92	9,43	9,05	9,54	13,5	9,09

Media del puntaje en matemáticas clasificada por educación del Padre											
Clasificación	Ninguno	Primaria Incompleta	Primaria Completa	Secundaria Incompleta	Secundaria Completa	Educación Tecnica Incompleta	ión tecnica Co	profesional I	Educación Profesional Completa	Postgrado	Total
N	1161	6215	6203	4742	6618	463	1503	379	1773	265	29322
%	3,96%	21,20%	21,15%	16,17%	22,57%	1,58%	5,13%	1,29%	6,05%	0,90%	100%
Media	48,3	48,7	49,5	50,8	52,1	54,7	55,3	57,1	57	61,4	51,1
Desviación Estandar	8,51	8,29	8,52	8,36	8,77	9,53	9,03	9,95	10,2	11,2	9,09

Media del puntaje en Lenguaje clasificada por educación del Padre											
Clasificación	Ninguno	Primaria Incompleta	Primaria Completa	Secundaria Incompleta	Secundaria Completa	Educación Tecnica Incompleta	ión tecnica Co	profesional I	Educación Profesional Completa	Postgrado	Total
N	1161	6215	6203	4742	6618	463	1503	379	1773	265	29322
%	3,96%	21,20%	21,15%	16,17%	22,57%	1,58%	5,13%	1,29%	6,05%	0,90%	100%
Media	48,4	48,6	49,3	51,2	52,6	55	56,3	57,5	57,4	60,6	51,3
Desviación Estandar	8,86	8,5	8,69	8,61	8,57	8,61	8,44	9,21	9,11	9,1	9,09

Media del puntaje en matemáticas clasificada por educación de la madre											
Clasificación	Ninguno	Primaria Incompleta	Primaria Completa	Secundaria Incompleta	Secundaria Completa	Educación Técnica Incompleta	ión técnica Co	profesional	Educación Profesional Completa	Postgrado	Total
N	368	4849	5760	5399	7868	527	1902	428	1893	328	29322
%	1,26%	16,54%	19,64%	18,41%	26,83%	1,80%	6,49%	1,46%	6,46%	1,12%	100%
Media	45,8	48,2	49	50,4	51,9	54,3	55	56,1	57,1	60,5	51,1
Desviación Estandar	7,92	8,14	8,28	8,28	8,79	9,21	9,2	9,33	10,1	10,9	9,09

Media del puntaje en Lenguaje clasificada por educación de la madre											
Clasificación	Ninguno	Primaria Incompleta	Primaria Completa	Secundaria Incompleta	Secundaria Completa	Educación Técnica Incompleta	ión técnica Co	profesional	Educación Profesional Completa	Postgrado	Total
N	368	4849	5760	5399	7868	527	1902	428	1893	328	29322
%	1,26%	16,54%	19,64%	18,41%	26,83%	1,80%	6,49%	1,46%	6,46%	1,12%	100%
Media	46	47,9	48,8	50,7	52,3	54,8	55,7	57,6	57,3	59,9	51,3
Desviación Estandar	8,81	8,47	8,64	8,58	8,5	8,25	8,51	9,08	8,94	9,4	9,09

Anexo 2 - Evaluación de ajuste global de los modelos

El valor de la prueba de verosimilitudes, permite comparar los modelos obtenidos. La diferencia entre los estadísticos de verosimilitud de dos modelos es comparada con una distribución χ^2 con n grados de libertad, siendo n la diferencia entre el número de parámetro que contiene cada modelo.

Cuadro 1 – Evaluación del ajuste global de los modelos para el área de Matemáticas

Comparación	Diferencia entre razones de verosimilitud	Diferencia entre el número de parámetros
M. Nulo vs M. Uno	2810,514	1
M. Nulo vs M. dos	2435,092	1
M. Nulo vs M. tres	1404,059	1
M. Nulo vs M. cuatro	1756,148	1
M. Nulo vs M. cinco	3654,679	4
M. Cinco vs M. seis	735,02	5

Cuadro 2 – Evaluación del ajuste global de los modelos para el área de Lenguaje

Comparación	Diferencia entre razones de verosimilitud	Diferencia entre el número de parámetros
M. Nulo vs M. Uno	3257,016	1
M. Nulo vs M. dos	2849,851	1
M. Nulo vs M. tres	1876,941	1
M. Nulo vs M. cuatro	2096,19	1
M. Nulo vs M. cinco	4375,588	4
M. Cinco vs M. seis	363,112	5

Se observa que, para los dos casos, los cinco modelos realizan una aportación estadísticamente significativa con respecto al modelo nulo. Lo mismo sucede entre el modelo cinco y seis.

Los gráficos de errores que se calcularon para este estudio⁹, se presentan a continuación. Los dos primeros son de la prueba Lenguaje a nivel de alumnos y de establecimientos educativos respectivamente. Los dos últimos corresponden a la prueba de Matemáticas a nivel de alumnos y de establecimientos educativos. Se puede apreciar que para los 4

⁹ Se mostrarán los correspondientes al modelo 6.

casos los datos se ajustan a una línea recta, por lo que corroboran el supuesto de normalidad.

