

# *Desarrollo de una herramienta computacional para conceptualización y elaboración de diagramas momento curvatura en secciones de concreto reforzado*

---

*Development of a computational tool to conceptualize and develop Moment-Curvature relationship curves of reinforced concrete sections.*

Kenny Martín Sánchez Becerra<sup>1</sup>, Sandra Rocío Jerez Barbosa<sup>2</sup>

## RESUMEN

*En los últimos tiempos la ingeniería estructural ha visto la necesidad de incursionar de forma activa en el estudio del comportamiento inelástico de las estructuras, esto, debido a que es la forma en que cualquier estructura convencional, analizada y diseñada bajo los códigos de diseño y construcción actuales, se comportará ante los desplazamientos inducidos por los movimientos sísmicos del terreno. El estudio de la inelasticidad en las estructuras se realiza generalmente por medio de modelos matemáticos de tipo no lineal, en los cuales la plasticidad de toda la estructura se concentra en puntos específicos (rotulas plásticas) los cuales dependen de la configuración de refuerzo y concreto que tengan. La herramienta computacional Momento\_Curvatura V 1.0 nace como respuesta a la problemática de buscar alternativas para la conceptualización y construcción de los diagramas momento curvatura, los cuales representan el comportamiento de las rotulas plásticas durante un análisis inelástico.*

**Palabras clave:** Herramienta computacional, Diagrama momento curvatura, rotula plástica, análisis inelástico, pushover.

## ABSTRACT

*In recent times, the structural engineering has seen the necessity of venture actively in the study of inelastic behavior of structures, this occurs because any conventional structure, that is analyzed and designed under the actual design and construction codes, will behave in an inelastic fashion, when analyzing the displacements generated by the seismic movements of the ground. The study of the inelasticity in structures is generally done by nonlinear mathematic models, in which the plasticity of all the structure will be concentrated in specific joints (plastic hinges), that will be determined according to the concrete-reinforcement configuration that they possess. The computer tool Momento\_Curvatura V1.0 emerged as the solution of having difficulties in finding tools that were able to conceptualize and develop Moment-Curvature relationship curves, those that represent the behavior of plastic hinges during an inelastic behavior.*

**Keywords:** Computational tool, Moment-Curvature relationship curves, plastic hinges, inelastic analysis, pushover.

---

<sup>1</sup> MSc. En estructuras, ECI

<sup>2</sup> Profesor Asociado, ECI

## INTRODUCCIÓN

En diversos códigos de diseño sismo resistente como el del American Concrete Institute, ACI-318-14 (ACI, 2015), el Reglamento colombiano de construcción sismo resistente, NSR-10 (AIS, 2010), o la norma chilena NCh 433 Of1996 Mod.2012 (INN, 2012), la filosofía de análisis y diseño sísmico para la mayoría de los sistemas estructurales está orientada particularmente a la protección de la vida; sin embargo, aunque también se pretende proteger el patrimonio, es aceptable un cierto nivel de daño ante el sismo de diseño, que va a permitir la disipación de la energía a través de deformaciones inelásticas en los elementos del sistema estructural. Por esta razón, si se quiere tener un mejor acercamiento al comportamiento esperado de la estructura, el estudio del comportamiento inelástico tanto en los sistemas estructurales como en los elementos que los componen se vuelve indispensable.

Así mismo, conociendo mejor el comportamiento de la estructura durante un sismo, se puede tener mayor certeza sobre qué elementos requieren mayor atención y detallado, sobre cuáles son los mecanismos de falla esperados y sobre qué mejoras pueden desarrollarse en el diseño sismo resistente.

El estudio del comportamiento inelástico de elementos se lleva a cabo mediante dos tipos diferentes de modelos matemáticos, los de plasticidad distribuida y los de plasticidad concentrada.

### Modelos de plasticidad distribuida

En este modelo las propiedades no lineales de los materiales se describen de forma continua en la longitud total del elemento. Eso significa que el modelo debe ser capaz de identificar la localización en la longitud en la que el comportamiento pasa de ser elástico a inelástico, calcular los esfuerzos normales y cortantes en ese punto e integrarlos en el área para calcular las fuerzas internas (corte, axial, momento).

### Modelos de plasticidad concentrada

En este modelo solo algunos puntos en cada elemento del sistema estructural representan la plasticidad de este, por lo que el analista debe saber a priori en dónde se concentrarán las deformaciones inelásticas.

Estos últimos son los más utilizados en la práctica, debido a que pueden representar de manera confiable la inelasticidad en un sistema estructural a condición de localizar con precisión los puntos en los que ésta se desarrolla. También estos modelos presentan una cierta facilidad a la hora de implementarlos y requieren recursos computacionales reducidos en comparación con los de plasticidad distribuida; todo esto los hace atractivos cuando se trata de sistemas estructurales con un gran número de elementos.

Para realizar el análisis inelástico por medio de un modelo de plasticidad concentrada, es indispensable describir el

comportamiento del elemento en los puntos en los que se concentrará la plasticidad. Es aquí donde los diagramas momento curvatura se hacen necesarios, ya que ellos representan la relación entre el momento flector y la curvatura desarrollados en una sección determinada de un elemento sometido a flexión. Esta relación se describe desde el rango elástico hasta la falla de la sección, lo que permite tener una descripción completa del comportamiento.

El diagrama momento - curvatura puede construirse mediante dos métodos. Manualmente o asistido por computador.

El método manual consiste en analizar la sección transversal sometida a flexión creciente, calculando el momento y la curvatura en cada punto en donde produzcan estados límite de esfuerzos en los materiales; estos estados pueden ser la fisuración por esfuerzos de tensión en el concreto o la fluencia del acero de refuerzo a tensión, por ejemplo.

El método asistido por computador divide la sección transversal en elementos finitos compuestos por materiales cuyas leyes constitutivas se conocen en todo el rango de esfuerzos. Esto permite encontrar el estado de esfuerzos en la sección transversal para valores crecientes de momento flector y a partir de este estado obtener la curvatura de la sección en tantos puntos como el usuario desee.

Los métodos para la construcción del diagrama momento - curvatura tienen los siguientes inconvenientes:

### **Método manual**

Es un procedimiento extenso ya que requiere un cálculo detallado para cada punto del diagrama, aplicando en la mayoría de los casos grandes simplificaciones, reduciendo el diagrama a tan solo 3 o 4 puntos.

Por otro lado, suelen utilizarse modelos constitutivos simplificados (como el elasto-plástico perfecto para el acero) con el fin de simplificar el cálculo de cada punto del diagrama. Esto puede llevar a diferencias importantes en los diagramas, particularmente en los valores de momento último en los que influyen más las curvas reales de los materiales hasta la falla.

### **Método asistido por computador**

Algunos programas comerciales que pueden llevar a cabo estos análisis son los siguientes:

*SAP2000 (CSI, 2010)* Es un programa comercial con licencia de pago que cuenta con una gran variedad de opciones para el análisis elástico e inelástico de estructuras; es uno de los programas más utilizados en las Américas. Sin embargo, la construcción del diagrama momento curvatura de una sección es una tarea muy dispendiosa ya que la opción que da el programa (Section Designer) es aún

precaria en comparación con otras mencionadas más adelante y no permite integrar directamente el diagrama construido al elemento analizado. Por esta razón, muchas veces se prefiere construir los diagramas momento curvatura en otro software y posteriormente usar SAP2000 para completar el análisis. Esto es válido para casi cualquier programa de uso general para análisis de estructuras.

*XTRACT – (TRC, 2007)* Es un programa comercial con licencia de pago, probablemente el más utilizado para análisis de secciones. En éste la modelación de secciones se hace exclusivamente por medio de modelos de fibras obteniendo diagramas de interacción y diagramas momento curvatura para secciones de vigas y columnas en concreto reforzado o acero y muros de concreto. Una de las grandes desventajas tiene que ver con la interfaz, ya que la definición de una sección convencional en ciertos casos puede ser una tarea bastante tediosa, por otro lado, es un software cuya licencia de funcionamiento tiene un costo elevado.

Existen programas de uso libre y código abierto tales como CUMBIA (Montejo L. A., 2007), el cual consiste en una colección de rutinas programadas en MatLab para secciones rectangulares y circulares de concreto reforzado. Construye diagramas momento curvatura y diagramas de interacción P-M; sin embargo, una de sus mayores limitantes es que no cuenta con una interfaz gráfica de usuario lo cual

limita el acceso de un buen número de usuarios, ya que estos deben contar con conocimientos avanzados en programación; además de lo anterior, el número de modelos constitutivos de materiales disponibles en la sección de concreto reforzado es limitado.

Es claro que el método manual es indispensable para entender la relación momento-curvatura y la construcción del diagrama; sin embargo, para obtener grandes volúmenes de diagramas suficientemente confiables, se requiere del método asistido por computador mediante programas especializados.

Se requiere entonces una alternativa para la construcción de diagramas momento curvatura mediante un método asistido por computador y de acceso libre a la comunidad académica, donde se tenga la posibilidad de comparar resultados confiables, teniendo en cuenta diferentes modelos constitutivos de los materiales. Como contribución a una solución con las características mencionadas, se presenta aquí el desarrollo de una herramienta que permite construir diagramas de momento – curvatura para secciones en concreto reforzado, por el método manual paso a paso y también por elementos finitos, para obtener curvas con buenos modelos constitutivos en corto tiempo. De hecho, incorpora también un modelo para el concreto confinado con fibras de tipo FRP (Fiber reinforced polymer).

# HERRAMIENTA MOMENTO CURVATURA V.1.0

La herramienta Momento Curvatura V1.0 está constituida por dos módulos llamados *Conceptualización* y *Ejecución*.

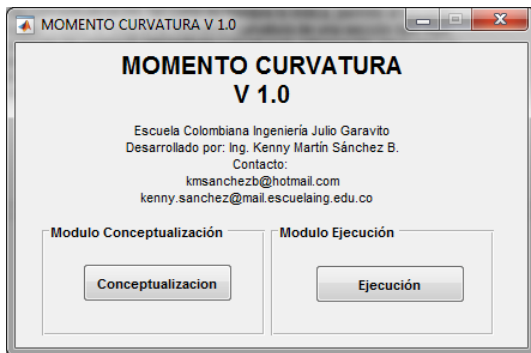


Figura 1. Momento Curvatura V1.0  
Fuente: Elaboración propia

El módulo de conceptualización permite al usuario desarrollar paso a paso el diagrama momento curvatura de una sección tipo viga, guiándolo a través de ventanas interactivas y mostrando información clave para la comprensión de las fuerzas internas que actúan sobre la sección definida, a medida que el momento flector aumenta, y mostrando finalmente cual es el mecanismo de falla para la combinación de refuerzo y dimensiones de sección transversal seleccionadas. En la figura 2 se muestran las características de la sección transversal y en las figuras 2 a 6 se muestran los pasos para el desarrollo del diagrama en dicha sección.

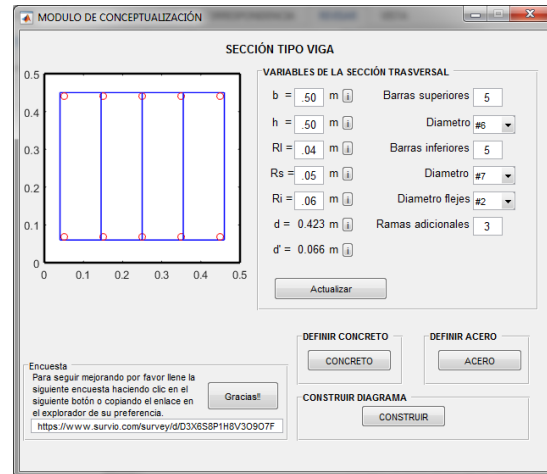


Figura 2. Sección transversal, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

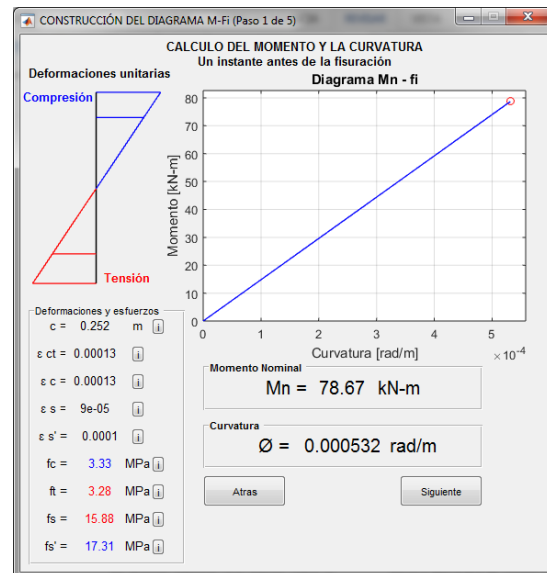


Figura 3. Paso 1 de 5, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

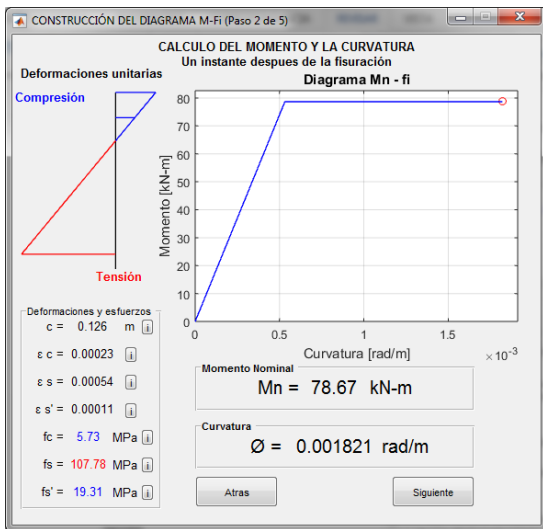


Figura 4. Paso 2 de 5, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

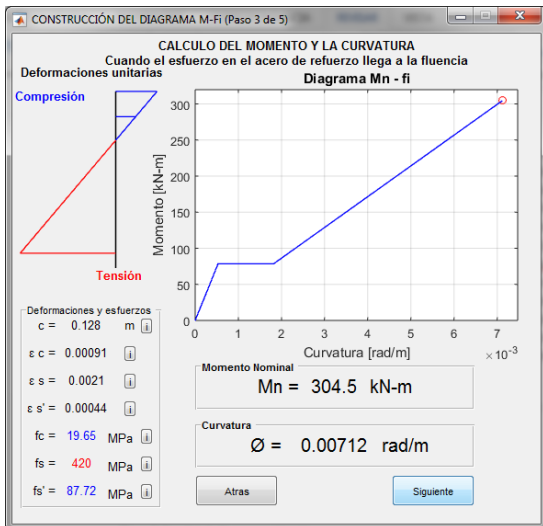


Figura 5. Paso 3 de 5, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

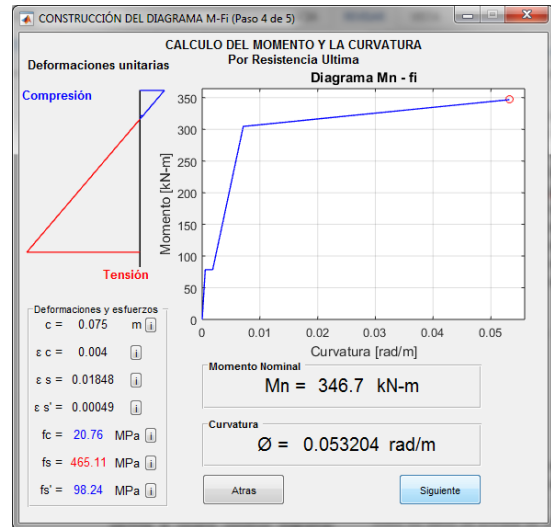


Figura 6. Paso 4 de 5, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

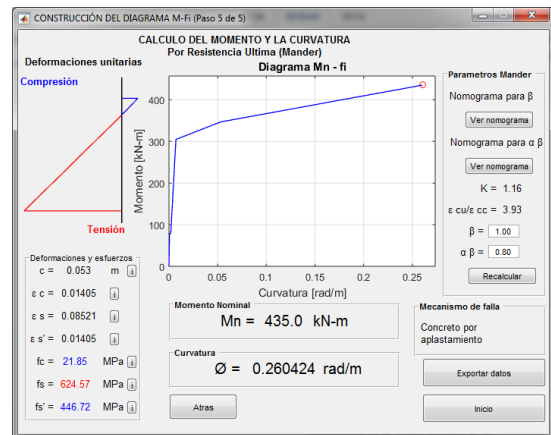


Figura 7. Paso 5 de 5, M. conceptualización  
Fuente: Elaboración propia

Por otro lado, el módulo de ejecución permite al usuario construir diagramas momento curvatura para secciones tipo viga y columna (rectangular y circular), con y sin carga axial constante. Debido a que el módulo de ejecución fue idealizado para generar grandes volúmenes de curvas y posteriormente incorporálas a un análisis de plasticidad concentrada, se incluyó la bilinealización del diagrama para facilitar de esta manera la inserción de las propiedades de las rótulas plásticas en un

programa de análisis para la estructura completa.

En este módulo las curvas se calculan a partir de un modelo de plasticidad distribuida representado por fibras, por lo que el análisis estructural debe llevarse a cabo con una herramienta apropiada. Con este fin, se escogió el software OpenSees (Open System for Earthquake Engineering Simulation) desarrollado en la Universidad de Berkeley. Este es un software de código abierto especialmente diseñado para simular el comportamiento sísmico de sistemas estructurales y geotécnicos, basado en el lenguaje Tcl/Tk.

El módulo en cuestión consta de tres fases:

- ✓ Preprocesamiento
- ✓ Procesamiento
- ✓ Posprocesamiento

La fase de pre procesamiento, se realiza directamente dentro de MatLab y se encarga de recibir, ordenar y guardar todos los datos de entrada de la sección que se analizará; además, construye cada uno de los archivos .tcl que serán analizados posteriormente por OpenSees.

La fase de procesamiento se encarga de analizar la sección definida por medio de los archivos .tcl creados anteriormente. En esta fase OpenSees interpreta la sección como un modelo de fibras y la resuelve por elementos finitos, para luego crear un archivo de salida con los datos del análisis.

La fase de posprocesamiento es la encargada de organizar los datos de salida de la fase de procesamiento, mostrando finalmente al usuario, y de nuevo mediante MatLab, datos como el propio diagrama momento curvatura, el mecanismo de falla de la sección y, para cada material, los esfuerzos y deformaciones máximas en la fibra más alejada del eje neutro durante todo el análisis. La mayoría de los programas de análisis estructural requiere diagramas momento curvatura bilinealizados para caracterizar las rótulas plásticas; por esta razón se realiza la bilinealización del diagrama momento curvatura por medio de la metodología descrita en el documento ATC-40 (ATC, 1996), en la que el área bajo la curva original es igual a la de la curva bilinealizada.

A continuación, se presenta un ejemplo típico y se explica el procedimiento que realiza el módulo de ejecución para la construcción de la curva momento curvatura de una sección tipo viga. Ver figuras 8 y 9.

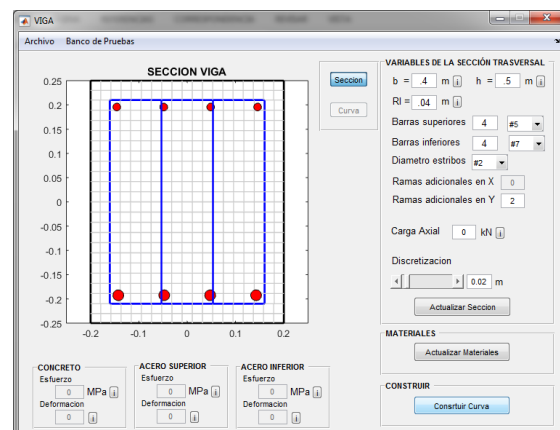


Figura 8. Definición sección, M. ejecución

Fuente: Elaboración propia

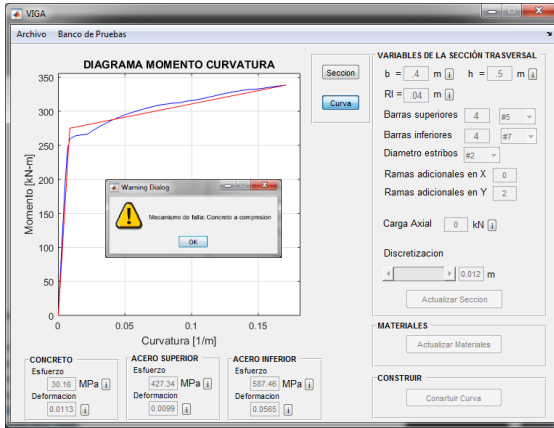


Figura 9. Construcción diagrama  $M-\phi$ ,  $M$ . ejecución

Fuente: Elaboración propia

Debido a que el uso de fibras de carbono y vidrio ha aumentado considerablemente en el sector de la construcción y el reforzamiento de estructuras existentes, se decidió incluir como material adicional de análisis el concreto confinado con fibra FRP, tomando como base el modelo de Lam, Teng, et al. (2009), referenciado ya en el documento ACI 440.2 R 08, Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete (ACI, 2008). Ver figura 9

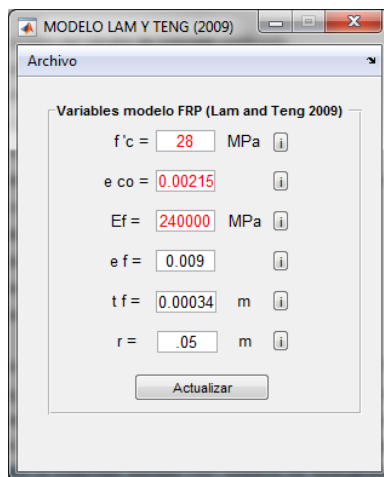


Figura 10. Modelo FRP,  $M$ . ejecución

Fuente: Elaboración propia

## VERIFICACIÓN Y VALIDACIÓN

Para la etapa de verificación se analizaron 60 diferentes secciones en concreto reforzado, considerando diferentes variables que pueden intervenir en la construcción de cada curva. Posteriormente se proporcionaron los datos de las 60 secciones al programa Xtract y se compararon las curvas construidas con los dos programas. La comparación se realizó a través de 2 parámetros característicos del diagrama momento curvatura. Ver figura 10

- ✓ Curvatura máxima
- ✓ Momento máximo

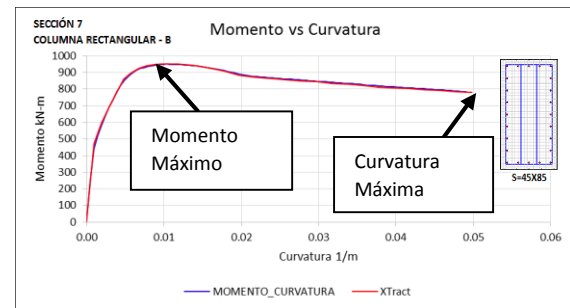


Figura 11. Parámetros característicos,  $M$ . ejecución

Fuente: Elaboración propia

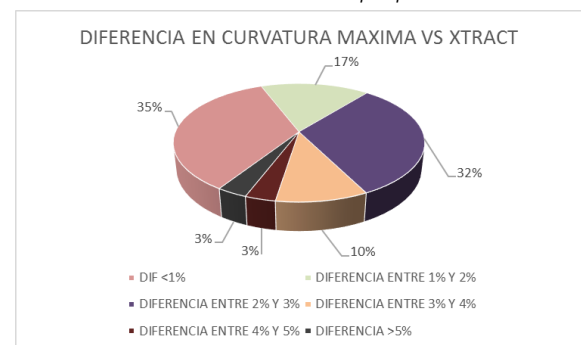


Figura 12. Diferencias en curvatura máxima,  $M$ . ejecución

Fuente: Elaboración propia

Los resultados mostraron que:



- ✓ El 35% de las secciones analizadas presentan una diferencia menor al 1%
- ✓ El 17% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 1% y el 2%
- ✓ El 32% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 2% y el 3%
- ✓ El 10% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 3% y el 4%
- ✓ El 3% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 4% y el 5%
- ✓ El 3% de las secciones analizadas presentan una diferencia mayor al 5%
- ✓ La mayor diferencia correspondió a un 6.76%

- ✓ El 18% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 3% y el 4%
- ✓ El 0% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 4% y el 5%
- ✓ El 7% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 4% y el 5%
- ✓ El 2% de las secciones analizadas presentan una diferencia mayor al 5%
- ✓ La mayor diferencia correspondió a un 5.64%

## CONCLUSIONES

Con el desarrollo de esta nueva alternativa se contribuyó a la conceptualización del comportamiento inelástico de secciones sometidas a flexión, en concreto reforzado, brindando al estudiante de pregrado y postgrado una herramienta didáctica para su fácil entendimiento e incentivando el uso de herramientas informáticas y de código abierto para extender la investigación de problemas en ingeniería estructural.

Se logró preparar para la comunidad académica una herramienta computacional que permite la conceptualización y materialización de diagramas momento curvatura para secciones convencionales de concreto reforzado, los cuales, son base fundamental para el acercamiento al comportamiento real de una estructura que se ve sometida a los efectos que

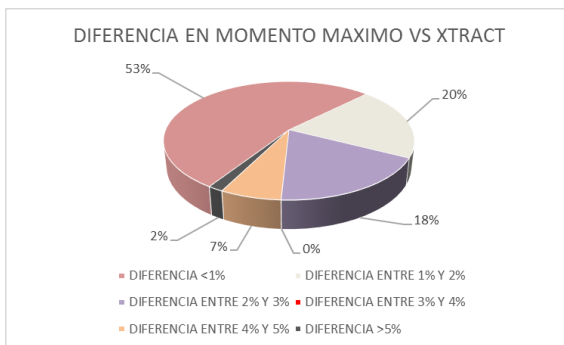


Figura 13. Diferencias en momento máximo, M. ejecución

Fuente: Elaboración propia

- ✓ El 53% de las secciones analizadas presentan una diferencia menor al 1%
- ✓ El 20% de las secciones analizadas presentan una diferencia entre el 2% y el 3%

genera un evento sísmico, claro está, a través de modelos matemáticos de tipo no lineal.

En la construcción de la interfaz gráfica principal (pre-procesamiento y post-procesamiento) se concluyó que MatLab fue una excelente alternativa debido a la sencilla integración con otro software como OpenSees (procesamiento) y a la facilidad en su entorno de programación.

Se incorporó la posibilidad de analizar una sección con confinamiento FRP utilizando el modelo de Lam, Teng, et al. (2009); además, se dejó abierta la posibilidad para definir dentro de la herramienta un gran número de modelos adicionales en caso de llegar a ser requeridos, por ejemplo, al utilizar materiales no convencionales en la sección.

En comparación con los programas que existen actualmente para la construcción de los diagramas en cuestión, se logró implementar una alternativa para aquellos usuarios que no tienen conocimientos profundos en el tema, ayudándolos en la comprensión de los diagramas y posteriormente, gracias a la bilinealización realizada dentro de la herramienta, materializando el diagrama para ser usado de manera rápida y sencilla en un análisis no lineal.

En la etapa de verificación y validación se usó el Software Xtract V3.0.9 para establecer los valores de referencia. Se compararon 60 diferentes secciones transversales de concreto reforzado,

modificando las variables de los diagramas tales como carga axial, cuantía de refuerzo longitudinal y cuantía de refuerzo horizontal, pudiendo concluir para el muestreo seleccionado que el 80% de las muestras presentó un porcentaje de diferencia menor al 3% en los dos parámetros de comparación (momento máximo y curvatura máxima) y tan solo el 3 % de las muestras superó el porcentaje de diferencia en un 5% pero en ningún caso fue superior al 7%. Se concluye entonces que los porcentajes de diferencia mencionados anteriormente se consideran aceptables y en el momento de usar los diagramas momento curvatura dentro de un análisis no lineal no representan una diferencia significativa en las curvas de capacidad de la estructura.

## REFERENCIAS

1. American Concrete Institute (ACI). (2005). *“Building code requirements for structural concrete and commentary.”* ACI-318, Farmington Hills, Mich.
2. American Concrete Institute (ACI). (2008). *“Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures.”* ACI-440 2R, Farmington Hills, Mich.
3. Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS), 2012. *“Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10”*. Ministerio de vivienda, ciudad y territorio. Colombia, Bogotá D.C.

4. CSI, "SAP2000 V14.2.4 (2010), *Integrated Software for Structural Analysis and Design*" Computers and Structures Inc., Berkeley, California.
5. CSI, "ETABS V9.7.2 (2010), *Integrated Software for Structural Analysis and Design*" Computers and Structures Inc., Berkeley, California.
6. J. B. Mander, M. J. N. Priestley and R. Park. (1988). "*Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete*". Journal of Structural Engineering Vol 114 No. 8, August, 1988
7. Kent, D.C., and Park, R. (1971). "*Flexural members with confined concrete.*" Journal of the Structural Division, Proc. of the American Society of Civil Engineers, 97(ST7), 1969-1990.
8. Lam, L., Teng J. G., Jienag T., Luo Y. Z. (2009), "*Refinement of a Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete*". Journal of Composites for Construction, Volume 13 Issue 4 - August 2009
9. Mander, M. J. N. Priestley and R. Park. (1988). "*Over Stress-Strain Behavior of Confined Concrete*", Journal of Structural Engineering, Volume 114 Issue 8 - September 1988
10. MathWorks (2015). MatLab, "Matrix Laboratory", R2015b (2015)
11. Mazzoni, S., & McKenna, F. (2017). "*Open system for earthquake engineering simulation user manual*", Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley
12. Mazzoni, S., & McKenna, F. (2017). OpenSees Wiki. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de [http://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Examples\\_Manual](http://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Examples_Manual)
13. Montejó, L. A., and Kowalsky, M. J., (2007) "*CUMBIA - Set of Codes for the Analysis of Reinforced Concrete Members*" CFL Technical Report No. IS-07-01, Department of Civil Construction and Environmental Engineering, North Carolina State University, Raleigh, NC, 2007, 40 pp.
14. NCh 4333 Of 1996 Mod. 2012 (2012), "*Norma Chilena Oficial – Diseño Sísmico de Edificios*", Instituto nacional de normalización (INN), Santiago, Chile
15. Paulay, T. and Priestley, M.J.N., (1992) "*Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings*", John Wiley & Sons, USA 1992, 744 pp
16. TRC and Charles Chadwell, Ph.D., P.E. XTRACT V3.0.9 (2007), "*Cross section analysis program for structural engineers*"