Geometría y propiedades del hiperespacio euclidiano con la métrica de Hausdorff

Diego Alexander Cardona Castañeda

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Departamento de matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Geometría y propiedades del hiperespacio euclidiano con la métrica de Hausdorff

Diego Alexander Cardona Castañeda

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
Yesid Esteban Clavijo Penagos

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2019

Agradecimientos

Agradezco a mi tutor el profesor Yesid Esteban Clavijo por estar tan presente en todo el proyecto, por las buenas ideas, por la paciencia, la empatía, por todas las correcciones y por haberme enseñado tanto.

Gracias a los profesores y al programa de matemáticas que me acompañaron desde el inicio. Agradezco haber estado en esta universidad y especialmente haberme formado como matemático.

Resumen

Sea (X, d) un espacio métrico. La métrica de Hausdorff h en el espacio $\mathcal{H}(X)$ cuyos elementos son subconjuntos compactos no vacíos de X, define un espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$, al cual se le llama hiperespacio.

La idea en este trabajo es estudiar y abordar conceptos como segmentos, convexidad, la propia distancia entre los elementos del hiperespacio $\mathcal{H}(X)(\mathbb{R}^n)$. Naturalmente existirán semejanzas con la geometría en $\mathbb{R}^n$, pero así mismo señalaremos las diferencias.

La estructura del documento inicia con las definiciones previas y las bases para empezar a orientar conceptualmente el tema a tratar, las cuales son definiciones de métrica, espacio métrico, hiper espacio, entre otros. Posteriormente se introduce la métrica de Hausdorff. Aquí aparecerán las primeras similitudes y diferencias.

En los capítulos siguientes se enfoca en un hiper espacio específico encontrando los resultados más importantes de este trabajo. Finalmente, indirectamente se generan ideas y preguntas para futuras investigaciones y un camino por donde continuar.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Definicones Previas

En este capitulo aparecerá los conceptos necesarios para poder inicar con el tema principal de este trabajo.

Definición 1.1. *Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, es llamada una* ***función distancia*** *o* ***metrica para X*** *si para todo $x, y, z \in X$ se tiene que:*

i) $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0$ *sii* $x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Llamamos a $d(x, y)$ la distancia entre x y y

Definición 1.2. *Sea X un conjunto. Decimos que es un* ***espacio métrico*** *si d es una métrica pra X y lo escribimos como (X, d)*

Definición 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que (X, d) es un* ***espacio métrico completo*** *si toda sucesión de Cauchy es también una sucesión convergente.*

Como nuestro objetivo es introducir la métrica de Hausdorff, entonces es necesario dar las siguientes definiciones (comentario para diego de diego:quiza se abueno extender mas este parrafo)

Definición 1.4. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ y $x \in X$. La* ***distancia de*** *x* ***al conjunto*** *A es y se denota como:*

$$d(x, A) = inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Definición 1.5. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \subseteq X$ con $A, B \neq \emptyset$, entonces la* ***distancia de*** *A* ***a*** *B es y se denota como:*

$$d(A,B) = sup\{d(a,B) : a \in A\}$$

La distancia que se definió anteriormente no es general una distancia en el sentido usual de metrica, es decir que en general no cumple los requisitos necesarios para ser una metrica de un conjunto (el punto ii) de la definición 1.1). Mostraremos mas adelante un ejepmlo de esto.

Con estas definiciones podemos demostrar el primer teorema que será clave para continuar con nuestro tema.

Teorema 1.1. *Si (X,d) es un espacio métrico. $x \in X$ y $A, B \subseteq X$ compactos y no vacios, entonces:*

1. $d(x,A) = \min_{a\in A}\{d(a,b)\}$
2. $d(A,B) = \max_{a\in A}\{d(a,B)\}$

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico, $A, B \subseteq X$ compactos y no vacios y sea $x \in X$, entonces

1. Sea $P = \{d(x,a) : a \in A\}$. La idea es probar que existe $infP$ y que pertenece a P. Como $A \neq \emptyset$, entonces $P \neq \emptyset$, además se tiene que $d(x,a) \geq 0$ para tod $a \in A$, entonces P está acotado inferiormente por 0, luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $t = infP$ Si mostramos que P es compacto entonces $t \in P$ con lo cual concluiríamos la primera parte.

   Sea

   $$\begin{gathered} f : x \times A \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,a) \longrightarrow d(x,a) \end{gathered}$$

   Ya que f es función y además continu (ver NOTAS, pág xxx), se tiene que $f(\{x\} \times A) = P$ es compacto, puestol que $\{x\}$ y A son compactos. Así $t \in P$, es decir,

   $$d(x,A) = min_{a\in A}\{d(x,a)\}$$

2. Sea $C = \{d(a,B) : a \in A\}$. Cómo $A, B \neq \emptyset$ entonces $C \neq \emptyset$. Veamos que C es compacto.

   Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de C, entonces existe para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ un $a_n \in A$ tal que $c_n = d(a_n, B)$. Así tenemos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A y de la misma manera existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de B tal que $d(a_n, b_n) = d(a_n.B)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Como A es compacto, entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que converge a $a_0 \in A$. Además $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ genera otra subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como B es compactto, existe una subsucesión $\left\{b_{n_{k_r}}\right\}_{r=1}^{\infty}$ de $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a $b_0 \in B$.

Notese que $\left\{b_{n_{k_r}}\right\}_{r=1}^{\infty}$ hace que exista la subsucesión $\left\{a_{n_{k_r}}\right\}_{r=1}^{\infty}$, y como $a_{n_k} \longrightarrow a_0$, entonces $a_{n_{k\,r}} \longrightarrow a_0$. De esta manera tenemos que,

$$\begin{aligned} c_{n_r} &= d(a_{n_{k_r}}, b_{n_{k_r}}) \\ \lim_{r\to\infty} c_{n_r} &= \lim_{r\to\infty} d(a_{n_{k_r}}, b_{n_{k_r}}) \\ &= d(\lim_{r\to\infty} a_{n_{k_r}}, \lim_{r\to\infty} b_{n_{k_r}}) \\ &= d(a_0, b_0) \in C \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que $d(A,B) = \max_{a\in A}\{d(a,B)\}$.

$\square$

Con el teorema anterior y las definiciones ya dadas podemos establecer algunas propiedades de estas distancias.

Propiedades 1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ y $x, y \in X$, entonces tenemos que las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

a) Si $A \subseteq B$, entonces $d(x,B) \leq d(x,A)$

b) Si $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

c) Si A y B son compactos, entonces $d(A,B) = 0$ si y solo si $A \subseteq B$

Demostración. .

a) Supongamos que $A \subseteq B$ y sea $x \in X$. Por definición tenemos que $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ y $d(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$, entonces $d(x,B) \leq d(x,b)$ para todo $b \in B$. Como $A \subseteq B$ entonces $d(x,B) \leq d(x,a)$ para todo $a \in A$, luego $d(x,B)$ es una cota inferior para $\{d(x,a) : a \in A\}$, entonces $d(x,B) \leq d(x,A)$.

b) Como se tiene que:

i) $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a), \forall a \in A$

ii) $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a), \forall a \in A$

Además para todo $a \in A$, entonces se tiene que $d(x, A) \leq d(x, a)$ y $d(y, A) \leq d(y, a)$, entonces $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$ y $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, a)$. Luego $d(x, A) - d(y, A) \leq d(y, a) - d(x, a)$ y por ii) concluimos que $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Así $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

c) Supongamos que A y B son compactos.
$\rightarrow$) Sea $a \in A$. Como $d(A, B) = 0$ y A es compacto, entonces $d(A, B) = \max_{z \in A}\{d(z, B)\} = 0$.Así $d(a, B) = 0$. Como B es compacto existe $b \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b) = 0$.Luego $a = b$, por lo tanto $A \subseteq B$.
$\leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq B$, entonces $d(a, B) = 0$, para todo $a \in A$. Por lo tanto $d(A, B) = 0$.

$\square$

Según como definimos $d(A, B)$ podemos mostrar que esta función no cumple con la propiedad ii) de la definicion 1.1 para ser una metrica (ver figura 1.1).

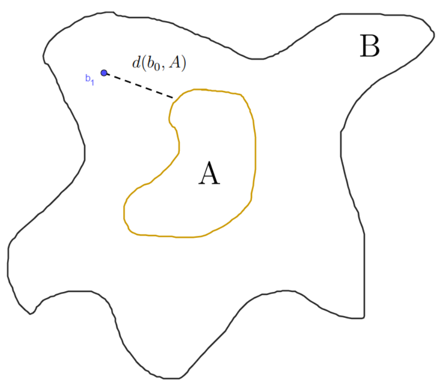

Figura 1.1: $d(A, B) \neq d(B, A)$

Notese que si A está estrictamente contenido en B, entonces existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \notin A$ y sabemos que $d(A, B) = 0$, pero $d(b_0, A) > 0$ luego $d(B, A) \geq d(b_0, A) > d(A, B)$. Así $d(A, B) \neq d(B, A)$

Entonces para poder hablar de la **distancia entre** el conjutno A y el conjunto B es necesario introducir una función distancia que sí satisfaga la **definición 1.1**.

Capítulo 2

Métrica de Hausdorff

En el Capitulo anterior se mostro que la distancia de la definicion 1.5 no es una función distancia y por ende no se podria considerar un espacio metrico. En este capitulo vamos a introducir la metrica de Hausdorff que permite hablar de **la distancia entre el conjunto A** y **el conjunto B**.

Definición 2.1. *Sea X un conjunto. Definimos a $\mathcal{H}(X)$ como el conjutno cuyos elementos son los **subconjuntos compactos no vacios de X**, es decir*

$$\mathcal{H}(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto } \}$$

Definición 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Definimmos la **función h** como:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (A, B) & \longmapsto & \max\{d(A, B), d(B, A)\} \end{array}$$

Teorema 2.1. *La función h definida anteriormente es una métrica pra $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. Sean A, B y $C \in \mathcal{H}(X)$

i) Como $d(A, B) = \max_{a \in A}\{d(a, b)\}$ y $d(a, B) = \min_{b \in B}\{d(a, b)\}$, y (X, d) es un espacio métrico, entonces $d(a, b) \geq 0$, para todo $a \in A$ y $b \in B$, luego $d(a, b) \geq 0$. Así $d(A, B) \geq 0$. Se procede del mismo modo para probar que $d(B, A) \geq 0$. Por lo tanto $h(A, B) \geq 0$, Veamos que $h(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.

$\rightarrow$) Supongamos que $h(A, B) = 0$, entonces $d(A.B) = 0$ y $d(B, A) = 0$, luego por (c) de las **propiedades 1.1**, tenemos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Así $A = B$.

$\leftarrow$) Supongamos que $A = B$. Luego $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, y por (c) de las **propiedades 1.1** tenemos que $d(A.B) = 0$ y $d(B, A) = 0$. Así $h(A, B) = 0$.

ii)

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \max\{d(A,B), d(B,A)\} \\ &= \max\{d(B,A), d(A,B)\} \\ &= h(B,A) \end{aligned}$$

iii) Sea $a \in A$ arbitrario. Como B es compacto, entonces existe $b_a \in B$ tal que $d(a, B) = d(a, b_a)$. De la misma manera existe $c_{b_a} \in C$ talque $d(b_a, C) = d(b_a, c_{b_a})$. Por la desigualdad trianular en (X, d) tenemos que

$$\begin{aligned} d(a,C) &\leq d(a, c_{b_a}) \leq d(a, b_a) + d(b_a, c_{b_a}) = d(a,B) + d(a,C) \\ &\leq d(a,B) + d(a,C) \leq d(A,B) + d(B,C) \end{aligned}$$

Como a es arbitrario entonces la desigualdad anterior se mantiene para $\hat{a} \in A$ tal que $d(A, C) = d(\hat{a}, C)$, luego

$$\begin{aligned} d(A,C) &\leq d(A,B) + d(B,C) \\ &\leq h(A,B) + h(B,C) \end{aligned}$$

Del mismo modo podemos probar que $d(C, A) \leq h(C, B) + h(B, A)$. Así tendriamos que

$$h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$$

Gracias a este teorema concluimos que $(\mathcal{H}(X), h)$ es ún espacio métrico. A la métrica h se le conoce como la **métrica de Hausdorff.**

□

Definición 2.3. *Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son dos espacios métricos, una **isometría** es una función $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que para todo $(x, y) \in X_1 \times X_1$ se tiene que $d_1(x, y) = d_2(\phi(x), \phi(y))$*

Notese que todo espacio métrico (X, d) posee una copia en su respectivo hiperespacio $(\mathcal{H}(X), h)$, es decir que existe una ismoetria de X a $\mathcal{H}(X)$. En efecto, la función

$$\begin{array}{rcl} i:(X,d) & \longrightarrow & (\mathcal{H}(X),h) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

Es una isometría.

Esta definición se volvera a usar en capítulos posteriores cuando entremos a estudiar la convexidad.

Ejemplo 2.1. *1) Sea $X = \mathbb{R}$. Sean $A = [x_0, y_0]$ y $B = [x_1, y_1]$, entonces $h(A, B) = \max\{|x_0 - x_1|.|y_0 - y_1|\}$.*

En efecto, si suponemos sin perdida de genralidad que $x_0 \leq x_1$, entonces si $A \cap B = \emptyset$ tenemos que $d(a, B) > 0$ y $d(a, B) = |a - x_1|$, para todo $a \in A$. Como $x_0 \leq a$, entonces $|x_0 - x_1| \geq |a - x_1|$ para todo $a \in A$. Así $d(A, B) = |x_0 - x_1|$. Del mismo modo se ve que $d(B.A) = |y_0 - y_1|$. Luego $h(A, b) = \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}$.

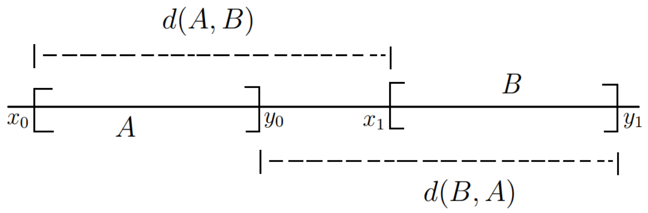

Figura 2.1: $A \cap B = \emptyset$

Si $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $C = A \cap B$. Para todo $z \in C$ se tiene que $d(z, B) = 0$ y $d(z, A) = 0$. Así $d(A, B) = |x_0 - x_1|$ y $d(B, A) = |y_0 - y_1|$. Luego $h(A, B) = \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}$.

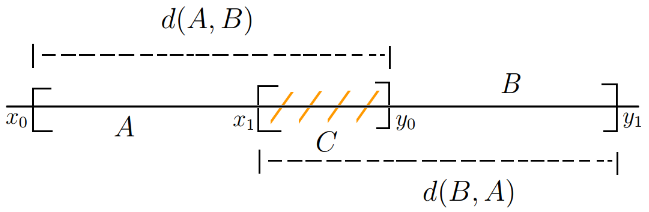

Figura 2.2: $A \cap B \neq \emptyset$

2) Sea $B = \{b\}$ y sea $A \in \mathcal{H}(X)$, entonces $h(A, B) = d(A, B)$. En efecto, ya que como A y B son compactos, entonces

$$d(A,B) = \max_{a\in A}\{d(a,B)\} = \max_{a\in A}\{d(a,b)\} \ y$$
$$d(B,A) = \min_{a\in A}\{d(b,a)\}$$

Luego $d(A,B) \geq d(B,A)$. *Así* $h(A,B) = d(A,B)$.

3) Sea $X = \mathbb{R}^2$ *y sean* $B = \{(x_0, y_0)\}$ *y* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b$ $, \ x_1 \leq x \leq x_2\}$. *Entonces*

$$h(A,B) \ = \ \max\left\{\begin{array}{c} \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - (ax_1 + b))^2} \\ \\ y \\ \\ \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - (ax_2 + b))^2} \end{array}\right\}$$

*En efecto esto es claro ya que B es un conjunto con un unico elemento y A,B son compactos entonces por **(2)** se tiene que*
$h(A,B) = d(A,B) \max\{d[(x_0,y_0),(x_1,ax_1+b)], d[(x_0,y_0),(x_2,ax_2+b)]\}$

Capítulo 3

Espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$

En esta parte del trabajo vamos a trabajar el tema de la geometria enn $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Para eso necesitamos teer en cuaneta las siguientes definiciones.

Definición 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $r > 0$, entonces definimos*

1. ***La vecindad abierta de radio r*** *alrededor de un elemento $b \in X$: es el conjunto*

$$N_r(b) = \{x \in X : d(x, b) < r\}$$

2. ***La Frontera*** *de la vecindad de radio r alrededor de un elemento $b \in X$: es el conjunto*

$$\delta N_r(b) = \{x \in X : d(x, b) = r\}$$

3. ***La Clausura*** *de $N_r(b)$ es el conjunto*

$$\overline{N_r(b)} = \{x \in X : d(x, b) \leq r\}$$

Como en el espacio $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), h)$ los elementos de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ son subconjutnos compactos y no vacios de $\mathbb{R}^n$, entonces usaremos una notación deiferente con respecto a las vecindades.

En el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y con la métrica h podemos analizar y concluir que esta distancia cumple las siguientes propiedades.

Proposición 3.1. *(Propiedades de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$)*

Para todo $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:

a) $h(x+A, x+B) = h(A,B)$

b) $h(\lambda A, \lambda B) = h(A,B)$

Donde $x + A := \{x + a \in \mathbb{R}^n : a \in A\}$ *y* $\lambda A := \{\lambda a \in \mathbb{R} : a \in A\}$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entones

a) Veamos que $d(a+x, x+B) = d(a,B)$. Sea $a \in A$.
Como B es compato, entonces existe $b^* \in B$ tal que $d(a,B) = d(a,b^*)$, luego tenemos que

$$d(a,B) = d(a,b^*) \quad \leq \quad d(a,b) \qquad ,\forall b \in B$$

$\Longleftrightarrow$

$$d(a+x, b^*+x) \quad \leq \quad d(a+x, b+x) \qquad ,\forall b \in B$$

$\Longleftrightarrow$

$$d(a+x, b^*+x) = d(a,b^*) = d(a+x, x+B)$$

Veamos ahora que $d(A,B) = d(x+A.x+B)$. Como A es compato, tenemos que existe $a \in A$ tal que $d(A,B) = d(a^*, B)$, luego

$$d(A,B) = d(a^*,B) \quad \geq \quad d(a,B) \qquad ,\forall a \in A$$

$\Longleftrightarrow$

$$d(a^*+x, x+B) \quad \geq \quad d(a+x, x+B) \qquad ,\forall a \in A$$

$\Longleftrightarrow$

$$d(a^*+x, x+B) = d(x+A, x+B) = d(A,B).$$

De esta manera podemos concluir que

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \text{máx}\{d(A,B), d(B,A)\} \\ &= \text{máx}\{d(x+A, x+B), d(x+B, x+A)\} \\ &= h(x+A.x+B) \end{aligned}$$

b) De la misma manera podemos afirmar que $d(\lambda a, \lambda B) = d(a,B)$ y $d(\lambda A, \lambda B) = d(A,B)$. Así

$$\begin{aligned} h(A,B) &= \text{máx}\{d(A,B), d(B,A)\} \\ &= \text{máx}\{d(\lambda A, \lambda B), d(\lambda B, \lambda A)\} \\ &= h(\lambda A, \lambda B) \end{aligned}$$

□

Esto quiere decir que con las propiedades (a) y (b) podemos afirmar que la distancia h es invariante, ya sea por traslación o por producto escalar.

Definición 3.2. *Sea* $r \in \mathbb{R}^+$ *y sea* $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$*, entonces denotamos como* $C_r(B)$ *al circulo de radio r centrado en el elemento B y a* $D_r(B)$ *como el disco abierto de radio r centrado en B , es decir,*

$$C_r(B) = \{A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) : h(A, B) = r\}$$

y

$$D_r(B) = \{A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) : h(A, B) < r\}.$$

Veamos un ejemplo de como deberián ser los elementos de tal manera que estén en $C_r(B)$.

Ejemplo 3.1. *Sea* $B = \{b\}$ *y supongamos que* $A \in C_r(B)$*. Si* $d(a, b) > r$ *para algún* $a \in A$*, entonces* $d(A, B) > r$*, por lo tanto* $h(A, B) > r$ *así* $A \notin C_r(B)$ *(parte (2) del ejemplo 2.1). Luego para cada* $a \in A$ *se debe tener que* $d(a, b) \leq r$*.*

Para que $h(A, B) = r$ *entonces se debe tener que* $d(A, B) = r$ *luego debe existir* $a' \in A$ *talque* $r = d(a', b) \geq d(a, b)$*, para todo* $a \in A$*. Por lo tanto* $C_r(B)$ *es la colección de los subconjuntos no vacios y compactos de* $\mathbb{R}^n$ *que están contenidos dentro* $N_r(b)$ *y interseca a* $\delta N_r(b)$ *en uno o mas puntos.*

La **figura 3.1** muestra posibles opciones para conjuntos A de tal manera que pertenescan a $C_r(B)$. Se puede ver como todas las posibles distacias $d(b, A)$ son menores que o iguales a r, y como cada A interseca a $\delta N_r(b)$ en uno o mas puntos.

Con este ejemplo podemos tener una idea para caracterizar o describir algunas propiedades que deben tener los conjuntos A para que está en $C_r(B)$.

Antes de enunciar el teorema, vamos a probar un lema, el cual usaremos y será de gran ayuda para nuestro objetivo.

Lema 3.1. $\delta(\bigcup_{b\in B} N_r(b)) = \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) - \bigcup_{b\in B} N_r(b)$

Demostración. $\supseteq$): sea $x \in (\bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) - \bigcup_{b\in B} N_r(b))$.

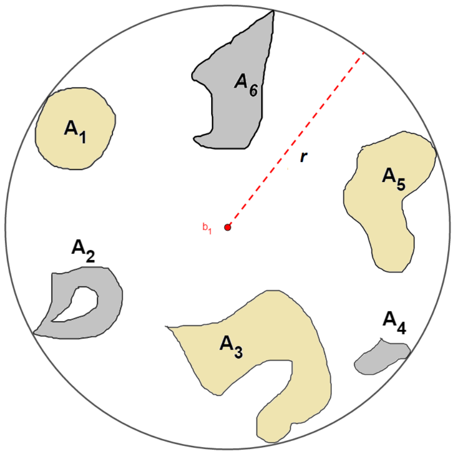

Figura 3.1: $A \in C_r(B)$

Sea $\epsilon > 0$. Como $x \in \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$, entonces existe $b^* \in B$, tal que, $x \in \delta N_r(b^*)$, luego existe $y \in N_\epsilon(x)$ tal que $y \in N_r(b)$. Así $y \in \bigcup_{b\in B} N_r(b)$

Nótese que debe existir $z \in N_\epsilon(x)$ tal que $z \notin \bigcup_{b\in B} N_r(b)$ ya que de lo contrario tendríamos que $N_\epsilon(x) \subseteq \bigcup_{b\in B} N_r(b)$ luego $x \in \bigcup_{b\in B} N_r(b)$, pero esto contradice la hipótesis. Por lo tanto $x \in \delta(\bigcup_{b\in B} N_r(b))$.

$\subseteq$): Sea $x \in \delta(\bigcup_{b\in B} N_r(b))$. Como para cada $b \in B$, $N_r(b)$ es abierto, entonces $\bigcup_{b\in B} N_r(b)$ es abierto, luego $x \notin \bigcup_{b\in B} N_r(b)$.

Veamos que $x \in \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$. Como B es compacto, entonces existe $b^* \in B$ tal que $d(x, B) = d(x, b^*) = \min_{b\in B}\{d(x, b)\}$. Como $x \notin \bigcup_{b\in B} N_r(b)$, entonces $x \notin N_r(b^*)$, luego $d(x, b^*) \geq r$. Supongamos que $d(x, b^*) > r$, es decir, $d(x, b^*) = r + \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$. Sean $y \in N_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ y $b \in B$, entonces su cumple la siguiente desigualdad.

$$d(y, b) + d(y, x) \geq \ d(x, b) \geq \ d(x, b^*) = r + \epsilon$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d(y,b) &\geq d(x,b) - d(y,x) \\ &\geq d(x,b^*) - d(y,x) = r + \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = r + \frac{\epsilon}{2} > r \end{aligned}$$

Así $y \notin \bigcup_{b\in B} N_r(b)$ puesto que b es arbitrario. Entonces $N_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \subseteq (\bigcup_{b\in B} N_r(b))^c$ lo que contradice el que $x \in \delta(\bigcup_{b\in B} N_r(b))$ y esto pasó por suponer que $d(x,b^*) > r$. Por lo tanto podemos concluir que $x \in \delta N_r(b^*) \subseteq \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$.

Así $x \in (\bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) - \bigcup_{b\in B} N_r(b))$.

$\square$

Con este lema vamos a poder demostrar las características que debe tener un conjunto A tal que $A \in C_r(B)$.

Teorema 3.1. *Sea $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.*

Entonces $A \in C_r(B)$ si y solo si $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y

a) $A \subseteq \bigcup_{b\in B} \overline{N_r(b)}$

b) $A \cap \overline{N_r(b)} \neq \emptyset$, para cada $b \in B$

c) ya sea que $A \cap \delta \left(\bigcup_{b\in B} N_r(b) \right) \neq \emptyset$, o que existe $b \in B$ tal que $A \cap \delta N_r(b) \neq \emptyset$ y $A \cup N_r(b) = \emptyset$.

Demostración. ($\longrightarrow$) Supongamos que $A \in C_r(b)$, luego $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $(a), (b)$ y (c) se cumplen.

a) Sea $a \in A$. Como $r = h(A,B) \geq d(A,B) \geq d(a,B)$. Como B es compacto, entonces existe $b^* \in B$ tal que $d(a,B) = d(a,b^*) \leq r$, luego $a \in \overline{N_r(b^*)} \subseteq \bigcup_{b\in B} \overline{N_r(b)}$

b) Supongamos que existe $b \in B$ tal que $A \cap \overline{N_r(b)} = \emptyset$, i.e, que para todo $a \in A$ se tiene que $d(b,a) > r$, luego $r = h(A,B) \geq d(B,A) \geq d(b.A) \geq r$.

c) Supongamos que $A \cap \delta\left(\bigcup_{b\in B} N_r(b)\right) \neq \emptyset$. Entonces terminamos.

Supongamos que $A \cap \delta\left(\bigcup_{b\in B} N_r(b)\right) = \emptyset$. Tenemos que concluir que existe $b^* \in B$ tal que $A \cap \delta N_r(b^*) \neq \emptyset$ y $A \cap N_r(b^*) = \emptyset$.

Tenemos por el **Lema 3.1** y la hipótesis que

$$A \cap \left(\bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) - \bigcup_{b\in B} N_r(b)\right) = \emptyset$$

Lo que es equivalente a

$$\left(A \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)\right) - \bigcup_{b\in B} N_r(b) = \emptyset \tag{*}$$

Nótese que $A \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) \neq \emptyset$, ya que como $A \in C_r(B)$, entonces $h(A, B) = r$.

* Supongamos que $h(A, B) = d(A, B) = r$. Luego existe $b \in B$ tal que $d(b, A) = r$ y también existe $b \in B$ tal que $d(a, b) = r$. De esta manera $a \in \delta N_r(b) \subseteq \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$
* Supongamos que $h(A, B) = d(A, B) = r$. Luego existe $b \in B$ tal que $d(b, A) = r$ y así existe $a_b \in A$ tal que $d(b, a_b)$. Así $a_b \in \delta N_r(b) \subseteq \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$ por lo tanto $A \cap a_b \in \delta N_r(b) \subseteq \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b) \neq \emptyset$.

Para que $(*)$ se cumpla, se debe tener que, para cada $x \in \left(A \cap \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)\right)$ existe $y_x \in B$ tal que $x \in N_r(y_x)$

Supongamos que para todo $b \in B$ siempre que $a \in A \cap \delta N_r(b)$ se tiene $A \cap \delta N_r(b) \neq \emptyset$.

Sea $b \in B$, entonces existe $a_b \in A$ tal que $d(a_b, b) = r$ y existe $a \in A$ tal que $d(b, a) < r$, entonces $d(b, A) \leq d(b.a) < r$, para todo $b \in B$ luego $d(B, A)$. Por lo tanto $h(A, B) = d(A, B) = r$.

Así existe $a^* \in A$ tal que $d(a^*, B) = r$, luego existe $y_{a^*} \in B$ tal que $d(a^*, y_{a^*}) < r = d(a^*, B)$

$(\longleftarrow)$ Supongamos que $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y que se tiene $a)b)yc)$ Sea $a \in A$. Por $a)$ tenemos que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq r$, luego $d(a, B) \leq r$, para todo $a \in A$.Entonces $d(A, B) \leq r$.

Sea $b \in B$, entonces por $b)$ tenemos que existe $a \in A$ tal que $d(b, a) \leq r$, luego $d(b, A) \leq r$, para todo $b \in B$ entonces $d(B, A) \leq r$. Con lo que podemos concluir que $h(A, B) \leq r$. Vamos a usar la condición $c)$ de tal manera que podamos probar la igualdad.

* Supongamos que $A \cap \left(\bigcup_{b \in B} \delta N_r(b) \right) \neq \emptyset$, luego sea $a \in \left(A \cap \bigcup_{b \in B} \delta N_r(b) \right)$ entonces existe $b' \in B$ tal que $d(a, b' = r)$ y además para todo $b \in B$ (lema, igualdad), entonces $d(a, B) = r$, así $d(A, B) = r$.
* Supongamos que existe $b \in B$ tal que, existe $a' \in A$ con $d(b, a') = r$ y para todo $a' \in A$ tenemos que $d(b, a') \geq r$. Entonces $d(b, a') = d(b, A) = r$. Así $d(B, A) = r$. Por lo tanto $A \in C_r(B)$

$\square$

La siguiente definición es de gran importancia en el estudio de la geometría de $\mathcal{H}$

Definición 3.3. *Sean $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $r > 0$, se define* ***la dilatación de B por r****, como el conjunto $(B)_r$ de tal manera que*

$$(B)_r := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, b) \leq r \text{ para algún } b \in B\}$$

A este conjunto tambien se le conoce como el collar de B de radio r.

Con base en esta definición tenemos las siguientes propiedades de $(B)_r$

Proposición 3.2. *Sean $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $r, s > 0$, entonces*

a) Si $r \leq s$, entonces $(B)_r \subseteq (B)_s$

b) $((B)_r)_s = (B)_{r+s}$

c) $(B)_r = \bigcup_{b \in B} \overline{N_r(b)}$

Demostración. Sean $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $r, s > 0$, entonces

a) Si $r \leq s$, entonces $0 < d(x,b) \leq r \leq s$, para algún $b \in B$. Luego $x \in (B)_s$

b)

c) $(\subseteq)$: Sea $x \in (B)_r$, entonces existe $b^* \in B$ tal que $d(x, b^*) \leq r$. Luego $x \in \overline{N_r(b^*)} \subseteq \bigcup_{b \in B} \overline{N_r(b)}$.

$(\supseteq)$: Sea $x \in \overline{N_r(b^*)} \subseteq \bigcup_{b \in B} \overline{N_r(b)}$, luego existe $b^* \in B$ tal que $x \in \overline{N_r(b^*)} \subseteq (B)_r$

□

Acontinuación se muestra un contra ejemplo para un conjuto B tal que cumple que $\delta\left(\bigcup_{b \in B} N_r(b)\right) \neq (B)_r$ ya que debido al lema 3.1, definición de collar y a la proposición anterior puede generar una idea erronea de que la igualdad se cumpla.

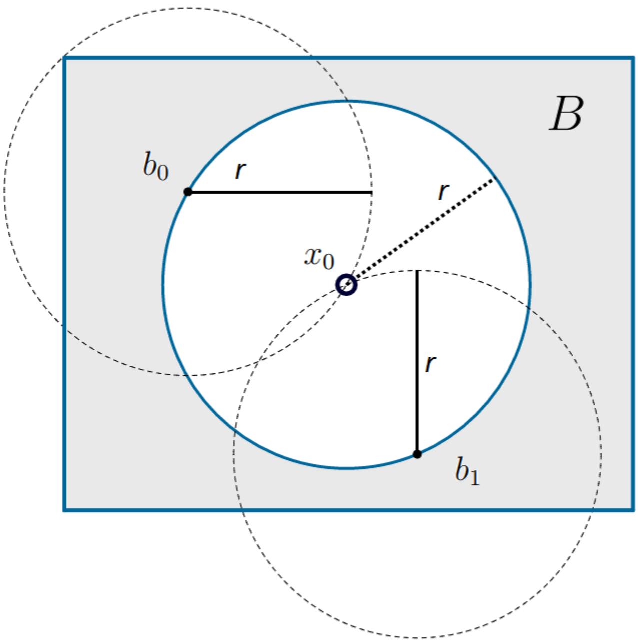

Figura 3.2: Contra-ejemplo

Si consideramos el collar de B de radio r, entonces es claro que $x_0 \in \delta(B)_r$ puesto si $0 < \epsilon < r$ entonces no existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \in (N_\epsilon(x_o) \cap ((B)_r)^c)$. Por otro lado existe $b_1 \in B$ tal que $x_0 \in \delta N_r(b_1)$ y $x_0 \notin \bigcup_{b \in B} N_r(b)$. De esta manera concluimos que $\delta\left(\bigcup_{b \in B} N_r(b)\right) \neq \delta(B)_r$.

Teorema 3.2. *Sea $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y sea $r > 0$, entonces $(B)_r \in C_r(B)$ y para todo $C \in C_r(B)$ se tiene que $C \subseteq (B)_r$.*

Demostración. Sean $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $r > 0$.

* Veamos primero que $(B)_r \in C_r(B)$, para eso es necesario empezar con demostrar que $(B)_r \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

* Como $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, entonces B es acotado, luego existe $M > 0$ tal que $N_M(0) \supseteq B$, es decir que para todo $b \in B$ se tiene que $d(0, b) \leq M$. Sea $x \in (B)_r$, entonces existe $b_x \in B$ tal que $d(x, b_x) \leq r$ así $d(x, 0) \leq d(x, b_x) + d(b_x, 0) \leq M + r$, y como x es arbitrario, entonces podemos afirmar que $(B)_r$ es acotado.

* Veamos que $(B)_r$ es cerrado. Sean $x \in (B_r)$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $(B)_r$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $b_n \in B$ tal que $d(x_n, b_n) \leq r$. Entonces tenemos una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de B. como B es compacto, existe una sub sucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $b_{n_k} \longrightarrow b$, con $b \in B$. Ya que B es cerrado, la sub sucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ genera la sub sucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_{n_k} \longrightarrow x$.

  De esta manera tenemos las siguientes afirmaciones verdaderas:

$$
\begin{aligned}
1) \qquad \lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, b_{n_k}) &= d(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}, \lim_{k \to \infty} b_{n_k}) \\
&= d(x, b)
\end{aligned}
$$

y

$$2) \qquad d(x, b) = \lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, b_{n_k}) \leq \lim_{k \to \infty} r = r$$

  Con base a esto podemos concluir que $x \in (B)_r$ y así tenemos que $(B_r) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

* Veamos ahora que $h(B,(B)_r)=r$.

Como $(B_r) = \bigcup_{b\in B} \overline{N_r(b)}$, entonces tenemos que para todo $b \in B$ se tiene que $(B)_r \cap \delta N_r(b) \neq \emptyset$ y $(B)_r \cap N_r(b) = \emptyset$. Además si $x \in \delta\left(\bigcup_{b\in B} N_r(b)\right)$ entonces $x \in \bigcup_{b\in B} \delta N_r(b)$, luego $x \in \bigcup_{b\in B} \overline{N_r(b)} = (B_r)$, es decir $(B)_r \cap \delta\left(\bigcup_{b\in B} N_r(b)\right) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, por el teorema 3.1 se tiene que $(B)_r \in C_r(B)$.

Por ultimo sea $C \in C_r(B)$, entonces por (a) del teorema 3.1 se tiene que $C \subseteq \bigcup_{b\in B} \overline{N_r(b)} = (B)_r$

Este teorema quiere decir que el elemento $(B)_r$ de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es el más grande que está a una distancia r de B.

$\square$

Un tema interezante y inporatnte de este trabajo, sabiendo que estamos trabajando con un espacio cuyos elementos son subconjutos (Compactos y no vacios) de $\mathbb{R}^n$ y una distacina entre dos conjutnos que ya pudimos caracterizar a una distacia fija es el concepto de lineas, particularmente SEGMENTOS.

Tenemos las bases para definir lo que van a ser segmentos en nustro hiperespacio. Una vez dada esta definicion abordaremos comparaciones que se presenta con los segmentos en $\mathbb{R}^n$ (corregir redacción)

Definición 3.4. *Dados $A,B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ se define el* ***segmento con extremos*** *A y B denotado como $\overline{AB}$ como la coleccion de todos los $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen*

$$h(A,B) = h(A,C) + h(C,B)$$

Notese que si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ en tonces todos los C que pueden pertenecer a $\overline{AB}$ son los $C = \{c_0\}$ tales que $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$ donde **d** es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$.

En efecto si $C \neq \{c_0\}$ y pertenece a $\overline{AB}$ con $h(A,B) = r > 0$, entonces existe $c_1 \in \mathbb{R}^n$ talque $c_1 \in C$ y además tenemos que:

i) $h(A,C) = s$, con $s > 0$

ii) $h(C,B) = r - s$

Luego por (a) del **teorema 3.1** tenemos que $C \subseteq (a)_s$ y $C \subseteq (b)_{r-s}$, pero esto es falso puesto que si suponemos sin perdidad de generalidad que $c_0 \in \overline{ab}$ entonces se tiene que $c_1 \in (a)_s$ ó $c_1 \in (b)_{r-s}$ y esto contradice ya sea **i)** o **ii)**.

Con esta ultima afirmación podemos concluir que todas los segmentos euclideanos poseen una copia en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Analicemos cuales serían los conjuntos C que pertenecen a $\overline{AB}$ done $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b\}$. La figura 4.2 supone que $h(A, B) = d(a_1, b) = r$. Nótese que si algún elemento de C está en $(a_1)_s$, entonces $C \notin \overline{AB}$ ya que $h(C, B) > r - s$. Los posibles conjuntos C deben estar contenidos en la sombra **P** y debe intersecarse con las fronteras de $(a_2)_s$ y $(b)_{r-s}$ y adicionalmente contener al punto c_1. Cualquier conjunto que cumpla con las condiciones anteriors va a estar en $\overline{AB}$ y esto es cierto puesto que C va a cumplir con el teorema 3.1 tanto para A como para B.

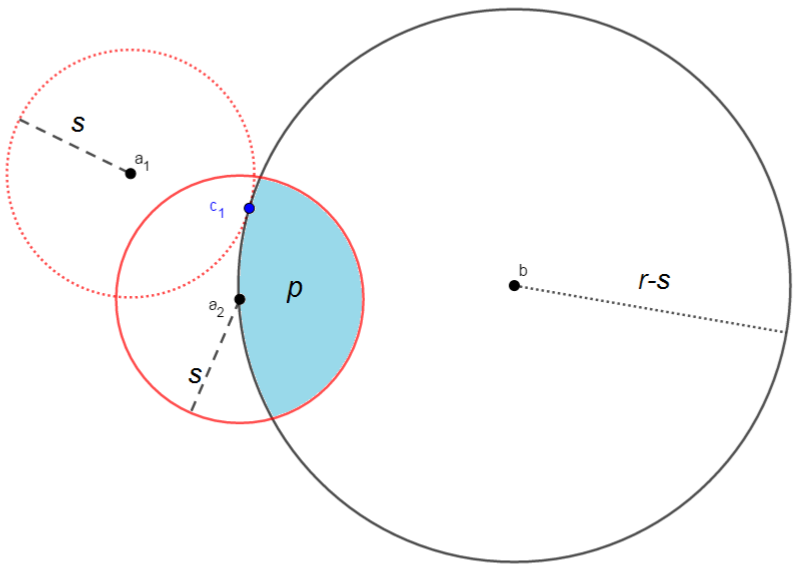

Figura 3.3:

A continuación se define un nuevo conjunto, llamado C_s el cual jugará el papel principal de ahora en adelante.

Lema 3.2. *Sean $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $h(A, B) = r > 0$ y sea $C_s = (A)_s \cap (B)_{r-s}$ paraca cada $s \in [0, r]$. Entonces $h(A, C_s) = s$ y $h(C_s, B) = r - s$*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $h(A,B) = r > 0$, un $s \in [0,r]$ fijo pero arbitrario y sea $C_s = (A)_s \cap (B)_{r-s}$.

Veamos que $h(A, C_s) = s$.

Es claro que $C_s \subseteq (A)_s$. Como h(A,B)=r, entonces para cada $a \in A$ existe $b_a \in B$ tal que $d(a,B) = d(a,b_a) \leq r$. Segun lo anterior, es cierto que $N_s(a) \cap N_{r-s}(b_a) \neq \emptyset$. Luego, para cada $a \in A$ se tiene que $C_s \cap \overline{N_s(a)} \neq \emptyset$.

Por ultimo, sean $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tal que $h(A,B) = d(a_0,b_0) = r$, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \in \left(\overline{N_s(a_0)} \cap \overline{N_{r-s}(b_0)}\right)$. Ademas, si $x_0 \neq x \in N_s(a_0)$, entonces $x \notin N_{r-s}(b_0)$ y como $h(A,B) = d(a_0,b_0)$, tenemos que $x \notin N_{r-s}(b)$ para todo $b \in B$.

Por lo anetrior y por el **teorema 3.1** tenemos que $h(A, C_s) = s$. De la misma manera se puede probar que $h(C_s, B) = r - s$. □

En este momento hay una intuición sobre si dado un $s \in [0,r]$ fijo, existen mas de un conjunto tal que esté en $\overline{AB}$. De hecho en la **figura 3.1** es posible dibujar otros conjutnos tales que estén en $\overline{AB}$ dado un s fijo. A contuniacion se demuestra que esta afirmación es cierta para todo $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.3. *Sean $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, con $h(A,B) = r$. Si existe $a \in A$ tal que $d(a,B) < r$ o $b \in B$ tal que $d(b,A) < r$, entonces hay una infinidad de elementos $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen que está en $\overline{AB}$ y $h(A,C) = s$ para un $s \in (0,r)$ dado.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $s \in (0,r)$ fijo, con $h(A,B) = r$. Sin perdida de generalidad supongamos que existe $a \in A$ tal que $d(a,B) < r$, y que hay un número finito de elementos $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ que están en $\overline{AB}$.

Sea $b_a \in B$ tal que $d(a,b_a) = d(a,B) < r$, entonces existen infinitos puntos en $N_s(a) \cap N_{r-s}(b_a)$. Luego para cada $x \in (N_s(a) \cap N_{r-s}(b_a))$ se define $C_x = C_s - \{x\}$. Notese que C_x está en $\overline{AB}$. Por lo tanto se contradice el hecho que hay una cantidad finita de elementos $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ que están en $\overline{AB}$.

□

Es importante señalar que este hecho no tiene lugar en los segmentos de $\mathbb{R}^n$. Además otra conclusion gracias al lema y teorema anterior es que, así como $(B)_r$ es el conjunto mas grande que está a una disrancia r de B, C_s es el conjunto mas grande que está en $\overline{AB}$ donde $h(A,B) = r$ y $s \in [0,r]$, es decir, si $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ está en $\overline{AB}$, entonces $C \subseteq C_s$.

Ampliando la teoria sobre segmentos en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la siguiente propisción

Proposición 3.3. *Sean $A, B, D \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ tal que $D \in \overline{AB}$. Si $C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $C \in \overline{AD}$, entonces $C \in \overline{AB}$.*

Demostración. Sean $A, B, D, C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ tal que $D \in \overline{AB}$. Supongamos que $C \in \overline{AD}$ y $C \notin \overline{AB}$, entonces D y C cumplen lo siguente respectivamente:

$$h(A, B) = h(A, D) + h(D, B)$$
$$h(A, D) = h(A, C) + h(C, D)$$
$$h(A, B) > h(A, C) + h(C, B)$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} h(A, B) &= h(A, D) + h(D, B) \\ &= h(A, C) + h(C, D) + h(D, B) \\ &\geq h(A, C) + h(C, B) \\ &> h(A, B) \qquad (Contradicción) \end{aligned}$$

Esto fue de suponer que $C \notin \overline{AB}$. Por lo tanto podemos conluir que $C \in \overline{AB}$. □

Notese que en esta proposicion solo se está mencionando una implicaión la cual es cierta en todos los espacios metricos, pero el reciproco no es cierto en el hiper espacio.

Una teoria fuerte en $\mathbb{R}^n$ cuando se introduce los segemntos es poder definir lo que signifa ser convexo. Hasta el momento ya definimos y expandimos los segmentos en el hiper espacio, entonces es automatico pensar a partir de este momentos si es posible subir este concepto a $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 4

Convexidad en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$

Definición 4.1. *Una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es " **completamente Hausdorff convexa**"(**CHC**) si, dados $A, B \in \mathcal{F}$ el segmento de hausdorff $\overline{AB}$ está contenido $\mathcal{F}$*

Definición 4.2. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ no vacia. Decimos que la colección $\mathcal{F}$ es " **fuertemente Hausdorff convexa** " (**FHC**) si para todo par $A, B \in \mathcal{F}$ y $s \in (0, r)$, el elemento c_s pertenece a $\mathcal{F}$.*

La definición 4.1 quiere decir que el conjunto de todos los C que pertenecen a $\overline{AB}$ debe ser un subconjunto de $\mathcal{F}$.

Ejemplo 4.1.

1) Para todo $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F} = \overline{AB}$ es CHC

2) La coleccion $\mathcal{F} = \{C(0,t) : t > 0\}$ de todas las circunferencias de radio positivo, centradas en el origen de $\mathbb{R}^2$, es una colección CHC.

En efecto:

1) Sean $C, D \in \overline{AB}$.Sin perdida de generalidad supongammos que $h(A, C) < h(A, D)$. Si $P \in \overline{CD}$, entonces Por la proposición 3.3 tenemos que $P \in \overline{AD}$ y por la misma proposcion de nuevo colnluimos que $P \in \overline{AB}$. De esta manera $\overline{CD} \subseteq \mathcal{F}$

2) Sean $A = C(0, r_1)$, $B = C(0, r_2)$ en $\mathcal{F}$, y supongamos $r_1 < r_2$. Notese que todos los C que pertenecen a $\overline{AB}$ con $h(A, C) = s$ debe ser igual a C_s, y $C_s = C(0, r_1 + s)$. Por lo tanto $\overline{AB} \subseteq \mathcal{F}$

La siguiente gráfica ilustra la última afirmación del ejemplo anterior.

Propiedades 4.1. *Propiedades de los conjuntos CHC.*

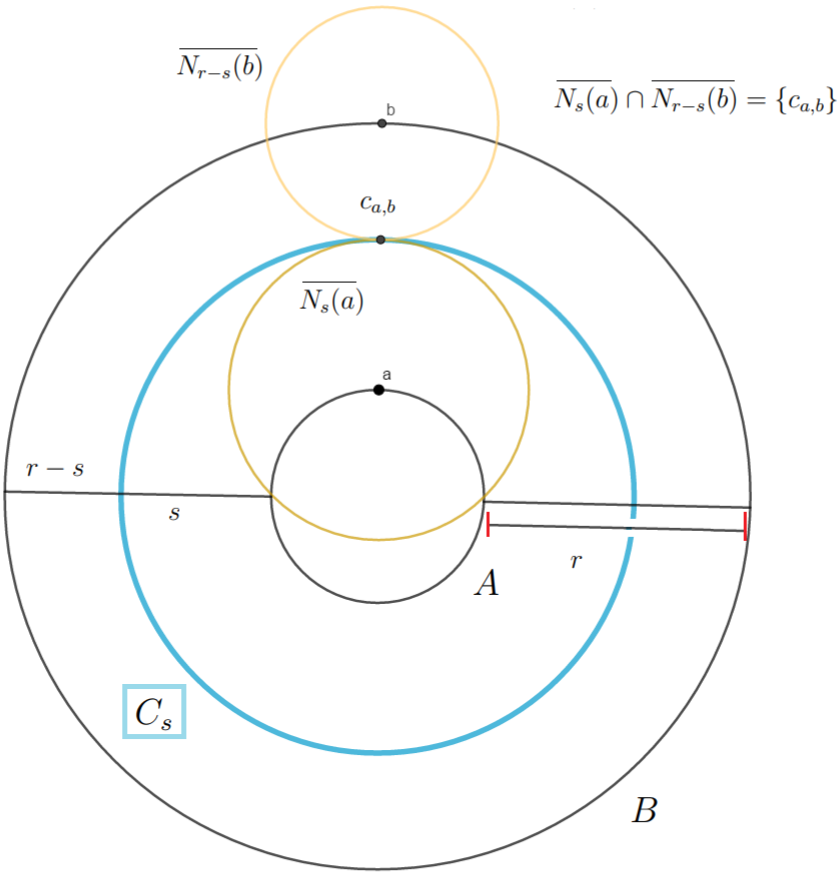

Figura 4.1: Si $C \neq C_s$, $r < h(A,C) + h(C,B)$ y así $C \notin \overline{AB}$.

I) *El conjunto vacío* ($\emptyset$) *es* CHC

II) $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *es* CHC.

III) *La colección* $\mathcal{F}$ *tal que* $\mathcal{F} = \{A\}$, *para todo* $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *son* CHC.

IV) *Dada una familia* $\{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ *de subconjuntos* CHC *de* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, *entonces su intersección* $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ *es también* CHC.

V) *La unión de conjuntos* CHC *en general no tiene porque ser* CHC.

Demostración. Es claro para I, II, III y IV que es cierto.

v) Consideremos las colecciones $\mathcal{F} = \{C((x_0, y_0), t) : t > 0\}$ y $\mathcal{G} = \{C((x_1, y_1), t) : t > 0\}$, circunferencias de radio positiva centradas en (x_0, y_0) y (x_1, y_1) respectivamente. Por el ejemplo 4.1 (2) sabemos que tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ son CHC, pero el conjunto $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ no es CHC.

$\square$

La siguiente proposición describe la colección de conjuntos las cuales no son CHC o FHC.

Proposición 4.1. *Las siguientes colecciones de conjuntos no son CHC o FHC.*

- *Cualquier colección $\Im = \{A, B\} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ con $A \neq B$ no es CHC ni FHC.*
- *Si la colección $\mathcal{F}$ (diferente a los singueton) es finita, entonces $\mathcal{F}$ no es CHC.*
- *Si $\mathcal{F}$ tiene infinitos conjuntos de elementos finitos, $\mathcal{F}$ no es CHC.*

Proposición 4.2. *Sean i la isometría dada por $i(x) = \{x\}$ y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto no vacío. Si K es convexo entonces $i(K) \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es CHC.*

Propiedades 4.2. *Toda colección completamente Hausdorff Convexa es fuertemente Hausdorff Convexa.*

Ejemplo 4.2. *Sea $D = D(0, k)$ un disco cerrado centrado en el origen de radio k, y sea $F = \{N(0, t) : 0 < t \leq k\}$ la colección de todos los discos cerrados de radio positivo, contenidos en D, centrados en el origen de $\mathbb{R}^2$. Esta colección es FHC, pero considerando la figura siguiente se ve que la colección no es CHC. (ver la figura 4.2)*

En $\mathbb{R}^n$ cuando se habla de convexidad también se puede hablar de envolventes convexas. Entonces naturalmente podremos pensar en envolventes convexas para el hiper espacio y que como se definieron dos tipos convexidad exista la necesidad de introducir más de una envolvente.

Definición 4.3. *Dado $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ arbitrario, se define la* ***hausdorff envolvente fuerte convexa*** *(**FHC**$(\mathcal{L})$) como la intersección de todas las colecciones FHC que contiene a $\mathcal{L}$.*

Definición 4.4. *Dado $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ arbitrario, se define la* ***hausdorff envolvente completamente convexa*** *(**CHC**$(\mathcal{L})$) como la intersección de todas las colecciones CHC que contiene a $\mathcal{L}$.*

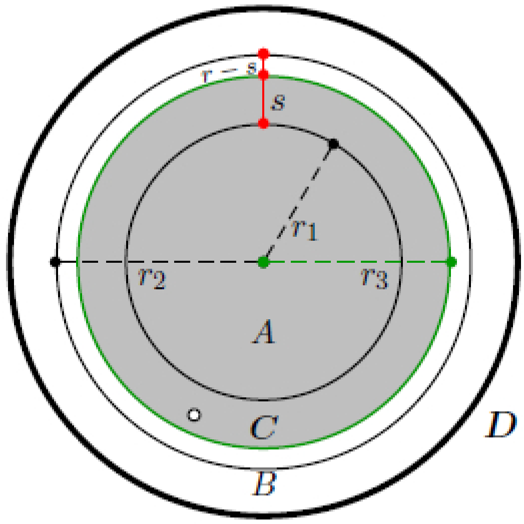

Figura 4.2: Si C es igual a C_s sin el interior del pequeño disco, entonces C pertenece $\overline{AB}$, luego F no es CHC.

Nótese que tanto $CHC(\mathcal{L})$ y $FHC(\mathcal{L})$ son diferentes de $\emptyset$ puesto que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es $\emptyset$.

Ademas:

- Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ y $G = CHC(\mathcal{L})$ entonces $G = FHC(\mathcal{L})$
- Si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es CHC, entonces $\mathcal{L} = CHC(\mathcal{L}) = FHC(\mathcal{L})$
- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es FHC, entonces $\mathcal{L} = FHC(\mathcal{L})$

Una colección que sea fuertemente Hausdorff Convexa no necesariamente es completamente Hausdorff Convexa.

Propiedades 4.3.

- *Cualquier colección* $\Im = \{A, B\} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ *con* $A \neq B$ *no es CHC ni FHC.*
- *Si la colección* $\mathcal{F}$ *(diferente a los singueton) es finita, entonces* $\mathcal{F}$ *no es CHC.*
- *Si* $\mathcal{F}$ *tiene infinitos conjuntos de elementos finitos,* $\mathcal{F}$ *no es CHC.*

Bibliografía

[1] D. Braun, J. Mayberry, A. Powers, S. Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, August 25, 2003.

[2] G. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer- Verlag, 1990.

[3] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Segunda edicion, Academic Press, 1988.