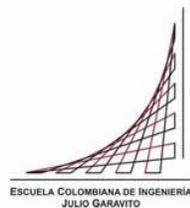


**Maestría en Ingeniería Civil**

**Generación Espacial de Series Sintéticas de Lluvia**

**Leonardo Andrés Guayara Calderón**

**Bogotá, D.C., día 29 de enero de 2019**



# **Generación Espacial de Series Sintéticas de Lluvia**

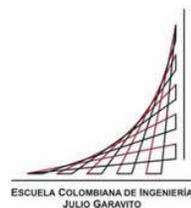
**Tesis para optar al título de magíster en Ingeniería Civil, con  
énfasis en recursos hidráulicos y medio ambiente**

**German Ricardo Santos Granados**

**Nelson Obregón Neira**

**Directores**

**Bogotá, D.C., 29 de enero de 2019**



La tesis de maestría titulada “Generación Espacial de Series Sintéticas de Lluvia”, presentada por Leonardo Andrés Guayara Calderón, cumple con los requisitos establecidos para optar al título de Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en recursos hidráulicos y medio ambiente.

Director de la tesis

German Ricardo Santos Granados

Co-director de la tesis

Nelson Obregón Neira

Jurado

German Acero Riveros

Bogotá, D.C., 29 de enero de 2019

La tesis de maestría titulada “Generación Espacial de Series Sintéticas de Lluvia”, presentada por Leonardo Andrés Guayara Calderón, cumple con los requisitos establecidos para optar al título de Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en recursos hidráulicos y medio ambiente.

Director de la tesis

---

German Ricardo Santos Granados

Director de la tesis

---

Nelson Obregón Neira

Jurado

---

German Acero Riveros

Bogotá, D.C., 29 de enero de 2019

## **Agradecimientos**

Agradezco a mis directores Ingenieros Germán Ricardo Santos y Nelson Obregón por sus enseñanzas y paciencia, y a mi amigo Andrés Velasco sin cuyas contribuciones no hubiera sido posible realizar el proyecto de grado.

Adicionalmente agradezco al Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales – IDEAM y al Instituto Distrital de Gestión de Riesgos y Cambio Climático – IDIGER por suministrar los datos para el desarrollo del proyecto.

## Resumen

La modelación de la lluvia con alta resolución temporal e interrelacionada espacialmente provee un insumo interesante con aplicaciones en caracterización y análisis de series de tiempo, modelación hidrológica, gestión del riesgo de inundaciones, entre otros. Desde hace algunos años, las técnicas de análisis y modelación hidrológicas evolucionan de un enfoque que describe la naturaleza de manera determinista, hacia uno que tiene en cuenta explícitamente las probabilidades de ocurrencia de los fenómenos naturales como una característica intrínseca de los mismos, el enfoque estocástico (o probabilista).

El presente trabajo explora la aplicación y evaluación del desempeño de un modelo de construcción propia, con base probabilística para la generación de lluvia sintética acoplada espacialmente, y de alta resolución temporal en el territorio colombiano.

Para dar alcance a la tarea, se desarrolla la teoría del modelo de Neyman-Scott de soporte espacial, el cual aborda la descripción de las lluvias en un área del territorio, en función de distribuciones de probabilidad que están asociadas con características físicas del proceso de ocurrencia de las lluvias. Como parte del proceso de construcción del modelo, se calibra para una zona instrumentada con pluvios de alta resolución temporal, mediante la obtención del conjunto de los parámetros que definen las distribuciones de probabilidad empleadas por la teoría para describir la ocurrencia y comportamiento de la lluvia en dicha zona: Se construyó el modelo y se calibró para una zona del sur de la ciudad de Bogotá, empleando para ello series de observadas provenientes de 4 pluvios con 11 años de longitud de registro en resolución horaria.

Con el modelo calibrado se procede a la generación estocástica de series de lluvias sintéticas simultáneas en todos los pluvios del área de interés, se busca que las series generadas preserven parámetros estadísticos obtenidos de las series de lluvias observadas que fueron empleadas para la calibración del modelo.

Así mismo, se proponen mecanismos para estimar el grado de preservación de los estadísticos entre las series observadas y los conjuntos de series sintéticas que fueron generados mediante un proceso estocástico: Se encontró que para algunos periodos, el modelo puede generar series sintéticas con buen grado de representatividad a pesar de la poca densidad espacial de registros y la escasa longitud de los mismos.

## Índice general

Agradecimientos	5
Resumen	6
1 Introducción	14
1.1 Contexto	14
1.2 Objetivos	15
1.3 Organización del documento	15
2 Marco Teórico	17
2.1 El enfoque	17
2.1.1 El enfoque estocástico en contraste con el determinista.	17
2.1.2 Ventajas del enfoque estocástico sobre el determinista.	22
2.2 La lluvia y el modelo de Neyman-Scott	24
2.2.1 Neyman-Scott para un punto en el espacio	25
2.2.2 Neyman-Scott de soporte espacial	27
2.3 El modelo estocástico de Neyman-Scott y sus propiedades	31
3 Metodología	35
3.1 Calibración del modelo en el área de estudio	36
3.1.1 Descripción general del proceso de calibración	36
3.1.2 Paso a paso del proceso de calibración	38
4 Aplicación del método	40
4.1 Recopilación de los datos y selección de la zona de estudio	40
4.1.1 Verificación de la homogeneidad espacial de los datos.	45
4.2 Cálculo de los estadísticos observados	49
4.3 Estimación de los parámetros para el modelo	57
4.3.1 Parámetros para el conjunto de estaciones.	57
4.4 Generación sintética de series espaciales	63

4.5 Conclusiones (análisis de resultados)	81
5 Medición del desempeño del modelo calibrado	83
5.1 Correlación cruzada	83
5.2 Preservación de la varianza	86
5.3 Análisis regional de frecuencia	88
6 Conclusiones	91
6.1 Conclusiones generales	91
6.2 Líneas de trabajo futuro	93
7 Referencias	95

## Índice de tablas

Tabla 2-1 Parámetros Neyman-Scott puntual	27
Tabla 2-2 Parámetros Neyman-Scott en el espacio	30
Tabla 4-1 Resumen análisis ANOVA	47
Tabla 4-2 Medias mensuales de las series originales (sin normalizar)	50
Tabla 4-3 Varianzas mensuales de las series originales (sin normalizar)	51
Tabla 4-4 Estadísticos mensuales de las series normalizadas.	52
Tabla 4-5 Correlación cruzada enero	53
Tabla 4-6 Correlación cruzada febrero	53
Tabla 4-7 Correlación cruzada marzo	53
Tabla 4-8 Correlación cruzada abril	54
Tabla 4-9 Correlación cruzada mayo	54
Tabla 4-10 Correlación cruzada junio	54
Tabla 4-11 Correlación cruzada julio	55
Tabla 4-12 Correlación cruzada agosto	55
Tabla 4-13 Correlación cruzada septiembre	55
Tabla 4-14 Correlación cruzada octubre	56
Tabla 4-15 Correlación cruzada noviembre	56
Tabla 4-16 Correlación cruzada diciembre	56
Tabla 4-17 Valores obtenidos para parámetros agregados	58
Tabla 4-18 Valores obtenidos parámetro $\Theta$	59
Tabla 4-19 Comparación de estadísticos observados y calculados	60

## Índice de figuras

Figura 2-1 Resultado enfoque determinista	20
Figura 2-2 Resultados enfoque estocástico. Distribución del error	21
Figura 2-3 Resultados enfoque estocástico. Variable aleatoria	21
Figura 2-4 Fundamentos del modelo de Neyman-Scott. (Favre et al., 2004)	26
Figura 2-5 Modelo de Neyman-Scott en el espacio (Munroe, 2004).	28
Figura 3-1 Proceso general de aplicación del modelo.	35
Figura 4-1 Régimen estacional Sierra Morena	41
Figura 4-2 Régimen estacional San Benito	42
Figura 4-3 Régimen estacional Quiba	42
Figura 4-4 Régimen estacional Doña Juana	43
Figura 4-5 Régimen estacional UAN Usme	43
Figura 4-6 Régimen estacional Juan Rey	44
Figura 4-7 Régimen estacional Micaela	44
Figura 4-8 Zona de estudio y estaciones	48
Figura 4-9 Comparación correlación cruzada observados y obtenidos	62
Figura 4-10 Realizaciones aleatorias enero	63
Figura 4-11 Realizaciones aleatorias febrero	64
Figura 4-12 Realizaciones aleatorias marzo	64
Figura 4-13 Realizaciones aleatorias abril	64
Figura 4-14 Realizaciones aleatorias mayo	65
Figura 4-15 Realizaciones aleatorias junio	65
Figura 4-16 Realizaciones aleatorias julio	65
Figura 4-17 Realizaciones aleatorias agosto	66
Figura 4-18 Realizaciones aleatorias septiembre	66
Figura 4-19 Realizaciones aleatorias octubre	66
Figura 4-20 Realizaciones aleatorias noviembre	67
Figura 4-21 Realizaciones aleatorias diciembre	67
Figura 4-22 Convención para los mapas de lluvia en mm	68
Figura 4-23 Episodio aleatorio de lluvia observada enero	69
Figura 4-24 Episodio aleatorio de lluvia sintética enero	69

Figura 4-25 Episodio aleatorio de lluvia observada febrero	70
Figura 4-26 Episodio aleatorio de lluvia sintética febrero	70
Figura 4-27 Episodio aleatorio de lluvia observada marzo	71
Figura 4-28 Episodio aleatorio de lluvia sintética marzo	71
Figura 4-29 Episodio aleatorio de lluvia observada abril	72
Figura 4-30 Episodio aleatorio de lluvia sintética abril	72
Figura 4-31 Episodio aleatorio de lluvia observada mayo	73
Figura 4-32 Episodio aleatorio de lluvia sintética mayo	73
Figura 4-33 Episodio aleatorio de lluvia observada junio	74
Figura 4-34 Episodio aleatorio de lluvia sintética junio	74
Figura 4-35 Episodio aleatorio de lluvia observada julio	75
Figura 4-36 Episodio aleatorio de lluvia sintética julio	75
Figura 4-37 Episodio aleatorio de lluvia observada agosto	76
Figura 4-38 Episodio aleatorio de lluvia sintética agosto	76
Figura 4-39 Episodio aleatorio de lluvia observada septiembre	77
Figura 4-40 Episodio aleatorio de lluvia sintética septiembre	77
Figura 4-41 Episodio aleatorio de lluvia observada octubre	78
Figura 4-42 Episodio aleatorio de lluvia sintética octubre	78
Figura 4-43 Episodio aleatorio de lluvia observada noviembre	79
Figura 4-44 Episodio aleatorio de lluvia sintética noviembre	79
Figura 4-45 Episodio aleatorio de lluvia observada diciembre	80
Figura 4-46 Episodio aleatorio de lluvia sintética diciembre	80
Figura 5-1 Comparación correlación cruzada observados, obtenidos y simulados	85
Figura 5-2 Varianza realizaciones vs varianza serie observada abril	86
Figura 5-3 Varianza realizaciones vs varianza serie observada mayo	87
Figura 5-4 Varianza realizaciones vs varianza serie observada junio	87
Figura 5-5 Varianza realizaciones vs varianza serie observada julio	88
Figura 5-6 Curvas de frecuencia en datos horarios	89
Figura 5-7 Curvas de frecuencia en datos diarios	90

## Índice de Anexos

Anexo 1. Gráficas de series observadas horarias	97
Anexo 2. Gráficas de series observadas acumuladas	121
Anexo 3. Resultados de la optimización por pasos	133

## Introducción

### 1.1 Contexto

El agua constituye el recurso natural más importante para el desarrollo de la vida. Así mismo, la precipitación es una de las variables más importantes en análisis hidrológico y diseño de obras en ingeniería (prevención de inundaciones, producción de escorrentía, políticas de manejo de recursos hídricos, diseño de estructuras hidráulicas, decisiones operativas de aprovechamientos hidráulicos para generación de energía eléctrica). Tanto las mediciones puntuales como las remotas de la precipitación han mostrado que los campos de lluvia son altamente variables y su descripción es sensible a los cambios en resoluciones espacial y temporal de manera que se han hecho grandes esfuerzos científicos para caracterizar y modelizar el fenómeno.

La modelación de series de lluvia con alta resolución temporal e interrelacionada espacialmente brinda un insumo para la modelación hidrológica. Desde hace algunos años, las técnicas de análisis y modelación hidrológicas ha venido cambiando, partiendo de un enfoque determinista para describir la naturaleza, hacia un enfoque probabilista, el cual tiene en cuenta las probabilidades de ocurrencia de los fenómenos naturales como una característica propia de los mismos. Dentro del enfoque probabilista, se destaca la técnica de describir la lluvia como un proceso de Poisson (Calenda and Napolitano, 1999), uno de los modelos que aplica dichas técnicas, es el modelo de Neyman-Scott de soporte espacial, el cual aborda la descripción de las lluvias en el territorio, en función de distribuciones de probabilidad que están asociadas con características físicas del proceso.

El modelo de Neyman-Scott requiere series de alta resolución de registro con longitudes grandes (más de 20 años preferiblemente). Ya que en Colombia existen

series en resolución subdiaria, este proyecto aborda la posibilidad de realizar modelación estocástica con las series disponibles (del orden de 10 años).

## **1.2 Objetivos**

El principal objetivo de esta tesis es el de crear un mecanismo para la generación sintética de campos de lluvia espaciales en resolución temporal subdiaria y conocer su desempeño.

De esta manera, en primera medida se debe construir un generador sintético de campos de lluvia mediante calibración del modelo de Neyman-Scott de soporte espacial para una zona del país.

Una vez creado el generador de lluvia sintética, se procede a evaluar su desempeño mediante verificación de su capacidad para preservar los parámetros estadísticos de las series observadas que fueron empleadas en el proceso de calibración.

## **1.3 Organización del documento**

El documento está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico, allí se introduce la descripción y justificación del enfoque probabilístico y la descripción del modelo de Neyman-Scott de soporte espacial.

En el capítulo 3 se explica la metodología empleada para la realización de la investigación, desde la descripción de las ecuaciones constitutivas del modelo, hasta la descripción del mecanismo de obtención de los valores de los parámetros para la generación sintética de las series.

En el capítulo 4 se explica la aplicación de la metodología para la generación sintética de series de lluvia desde la organización de los datos, la selección del

área de estudio mediante análisis de varianza, el cálculo de los estadísticos de las series observadas, la obtención de los parámetros de las distribuciones de probabilidad, hasta la generación de series sintéticas de lluvia.

En el capítulo 5 se proponen mecanismos para la estimación del grado de preservación de los estadísticos observados en los conjuntos de series sintéticas generadas.

En el capítulo 6 se presentan conclusiones generales del documento, y se proponen futuras líneas de investigación.

## Capítulo II

### Marco Teórico

#### 2.1 El enfoque

Uno de los criterios para clasificar los análisis, modelos, pronósticos, etc., en hidrología es aquel del enfoque. Para lograr comprensión, es necesario explorar las diferencias y similitudes entre el enfoque determinista y el estocástico (también llamado probabilístico).

##### 2.1.1 El enfoque estocástico en contraste con el determinista.

Como se expone en Dalen (2016), el enfoque determinista, puede describirse de manera sencilla pensando en una fórmula: Se tiene  $A+B=C$ , este modelo tiene dos entradas: A y B, y una salida: C; una vez se tienen las entradas, se ejecuta una operación matemática: suma, y en consecuencia el modelo arroja la salida. Si los valores de entrada son siempre  $A=1$ , y  $B=2$ , entonces la salida C será siempre igual a 3. En general, los modelos deterministas pueden ser mucho más complejos que la ejecución de una suma, pero todos conservan la característica de entregar en cada ejecución, la misma respuesta si las entradas permanecen constantes.

Los modelos deterministas han sido de especial utilidad en la descripción por ejemplo de leyes físicas (mecanicistas). Aplicando dichos modelos los esfuerzos se concentran en (i) desarrollar la teoría que da fundamento al modelo en suficiente detalle, (ii) determinar las condiciones iniciales y (iii) evitar errores de medición. Todas las discrepancias entre la teoría y las observaciones, así como las incertidumbres en la predicción de un fenómeno físico han sido atribuidas a las limitaciones humanas. Ahora bien, el concepto de incertidumbre (introducido por la teoría cuántica) no se concibe como un elemento que proviene únicamente de las limitaciones humanas, sino que es también una característica intrínseca de la

materia misma. Ese concepto ha puesto de manifiesto que la probabilidad no es únicamente una herramienta para lidiar con un “ruido” en las leyes de la naturaleza, sino que es una herramienta para la formulación de las leyes mismas (Ezzedine, 2005).

Se llega de esta manera a la formulación de modelos estocásticos, en los cuáles se incorporan uno o más elementos probabilísticos, lo que significa que la salida que arrojan, puede estar expresada como un intervalo de confianza con una estimación que será la más probable: retomando el ejemplo anterior, el modelo  $A+B=C$  tendrá al menos una entrada probabilística, digamos B pueden ser un conjunto de números aleatorios (que pueden seguir una distribución de probabilidad) y por lo tanto, la salida C conservará la característica probabilística heredada de la entrada del mismo tipo. Dichos modelos intentan describir, la probabilidad de que ocurra un evento o una serie de eventos -una salida del modelo- (Dalen, 2016). Generalmente la componente determinista (A) del modelo, se asume como una “tendencia general”, mientras que el elemento probabilístico (B) puede ser interpretado como “error o ruido (blanco)” (Ezzedine, 2005).

Ahora bien, en ambos enfoques, existen diferencias entre las predicciones de los modelos y los datos observados, Bierkens and van Geer (2012) comentan que para los modelos hidrológicos, las causas de dichas diferencias pueden ser entre otras:

- Errores en las observaciones: Es poco común que se puedan efectuar observaciones de variables hidrológicas sin un cierto error. Generalmente factores externos ejercen influencia sobre las observaciones, por ejemplo: cambios en la temperatura y la presión del aire durante la observación de niveles de agua.
- Errores en las condiciones de frontera, condiciones iniciales y entradas: Los modelos en hidrología describen parcialmente la realidad. En las fronteras de los mismos, las variables hidrológicas deberían ser conocidas

y no siempre puede ser así (por ejemplo los flujos en un modelo de aguas subterráneas), de igual forma, si un modelo describe la evolución en el tiempo de sistemas hidrológicos, es necesario conocer el estado del sistema en el paso de tiempo cero, lo cual no es posible al menos en todas las localizaciones del modelo; tanto en el caso de condiciones iniciales como de frontera, algunos los valores de las variables deben en la práctica ser asumidos (con el consecuente error). Finalmente, las observaciones espaciales de algunas variables (que son entradas a los modelos), como la precipitación o la evaporación se realiza a partir de observaciones puntuales o indirectas, en consecuencia, las estimaciones de las entradas a los modelos tienen también una incertidumbre.

- Heterogeneidad desconocida de los parámetros: Las propiedades como por ejemplo las del suelo y el subsuelo son altamente heterogéneas. Los parámetros asociados con dichas características, no puede ser medidos en todas partes, en consecuencia, los mismos son asumidos como homogéneos o, a lo sumo se representan mediante interpolaciones con base teórica o proveniente de otro lugar. Obviamente, esta imperfecta representación de la realidad induce errores en los resultados de los modelos.
- Discrepancias en escala: Muchos modelos en hidrología consisten en aproximaciones de soluciones a ecuaciones diferenciales parciales usando métodos de elementos finitos o bien de diferencias finitas. Estas técnicas ignoran la variación al interior de la resolución seleccionada generando diferencias con los datos observados.
- Errores del modelo o del sistema: Todos los modelos son simplificaciones de la realidad, es decir, la física de los procesos reales difiere un poco de la del modelo lo cual causa lógicamente diferencias entre los resultados del modelo y las observaciones.

En modelos hidrológicos, los dos enfoques abordan de manera diferente el manejo de los errores en las salidas:

**Modelos deterministas:** Los errores se tienen en cuenta de una manera un tanto primitiva, durante la calibración de los modelos. En esta fase, se trata de encontrar los valores óptimos de los parámetros, es decir, aquellos que hacen mínima la diferencia entre las salidas del modelo y un conjunto de observaciones. Durante la operación del modelo, los errores no se tienen ya en cuenta de manera explícita: se ignoran.

**Modelos estocásticos:** Además de tratar de predecir valores de variables hidrológicas, se emplea el modelo para intentar cuantificar los errores en las salidas. Por supuesto, en la práctica no conocemos los valores exactos de los errores de las predicciones de nuestro modelo (si las conociéramos, podríamos ajustarlo para que fuera totalmente exacto). Aquello que conocemos usualmente a partir de algunas mediciones, **es la distribución de los errores**.

Para hacer más clara la diferencia, podemos considerar una variable hidrológica  $z$ , cuyo valor es estimado en un determinado lugar y tiempo por un modelo:  $z^{\wedge}$ , así mismo establecemos el error como  $e = z^{\wedge} - z$ . No conocemos el valor del error, pero sabemos que sigue una cierta distribución de probabilidad. En el caso del enfoque determinista, obtendremos como respuesta del modelo el valor  $z^{\wedge}$  (ver Figura 2-1), mientras que en el enfoque estocástico tendremos en cuenta también la distribución del error (ver Figura 2-2). Figuras tomadas de Bierkens and van Geer (2012).

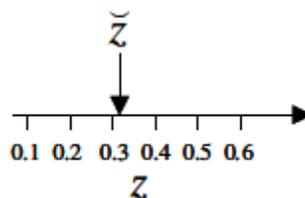


Figura 2-1 Resultado enfoque determinista

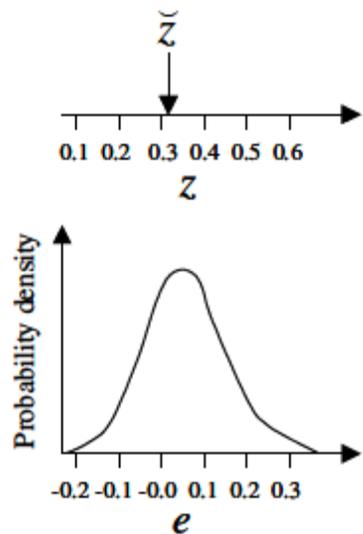


Figura 2-2 Resultados enfoque estocástico. Distribución del error

También se puede asumir que la misma variable  $z$  es una variable aleatoria cuyo valor no conocemos, pero si podemos calcular la distribución de probabilidad de los valores que toma. En la Figura 2-3 se puede ver que, aunque no sabemos el valore de  $z^{\wedge}$  con exactitud, si sabemos que estará alrededor de 0.3, muy probablemente entre 0.2 y 0.5. Así mismo, basados en la distribución de probabilidad es posible usualmente obtener la denominada mejor predicción de  $z^{\wedge}$  que es aquella para la que los errores son mínimos en promedio. No sobra mencionar que la mejor predicción no es necesariamente la misma salida que arroja el modelo determinista.

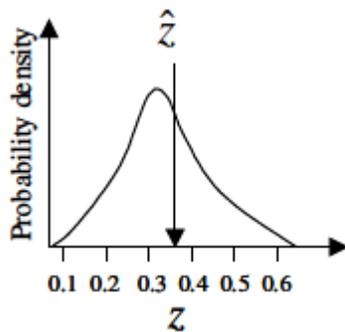


Figura 2-3 Resultados enfoque estocástico. Variable aleatoria

### 2.1.2 Ventajas del enfoque estocástico sobre el determinista.

Hay un conjunto de ventajas claras en la elección del enfoque estocástico sobre el determinista (Bierkens and van Geer, 2012):

- Los modelos deterministas presentan una representación de la realidad bastante suavizada. Lo anterior puede ser un problema cuando el interés se enfoca en valores extremos: Los modelos deterministas usualmente subestiman la probabilidad de ocurrencia de valores extremos. Usando simulaciones estocásticas es posible producir realizaciones que incluyan valores extremos.
- Tal y como se mencionó en el numeral anterior, la mejor predicción de  $z^{\wedge}$  del modelo estocástico, no es necesariamente la misma salida que arroja el modelo determinista. Esto se da particularmente cuando la relación entre las entradas del modelo o sus parámetros y la salida del modelo es no lineal. En tales casos, los modelos estocásticos pueden proveer su mejor estimación a partir de la distribución de probabilidad de las salidas, mientras que los modelos deterministas no pueden y serán por lo tanto menos precisos.
- Muchas veces, existe correlación con el tiempo en las diferencias que hay entre los datos observados y los modelados. Los modelos estocásticos pueden aprovechar esta información para mejorar sus predicciones relacionadas con el tiempo (empleando modelación de series temporales o geo-estadística). En cambio, en los modelos deterministas pueden producirse errores sistemáticos en la fase de calibración, si las diferencias entre los datos observados y modelados están altamente correlacionadas.
- Teniendo en cuenta explícitamente las incertidumbres de nuestros modelos, estamos en capacidad de tomar mejores decisiones. Un ejemplo típico es aquel de asociar las probabilidades de ocurrencia de falsos positivos o falsos negativos para minimizar de manera consciente y trazable los costos y riesgos para la toma de decisiones.

- Hay métodos estocásticos para establecer la relación entre la incertidumbre de las salidas de los modelos y el número de observaciones requeridas para parametrizar o para calibrar los modelos. Si estas relaciones pueden ser establecidas, el método puede ser usado para el diseño de redes de monitoreo de variables hidrológicas, optimizando cantidad, localización y registro.
- Relacionada con la anterior, los modelos estocásticos nos permiten determinar las variables de entrada cuyos errores son los que más contribuyen con los errores en las salidas. De esta manera, los esfuerzos para reducir las incertidumbres en las salidas pueden incluir la optimización económica.

En cuanto al enfoque se refiere, el estocástico (también llamado probabilístico) provee elementos que conllevan a un avance en los análisis, modelos y pronósticos con respecto a la aplicación del enfoque determinista. Tener en cuenta explícitamente la incertidumbre de entradas y salidas de los modelos, etc., implica métodos más complejos, pero contribuye a una comprensión más profunda de los procesos físicos y por lo tanto a un conocimiento mayor de la naturaleza y así mismo a la toma de decisiones con mayor conciencia e información.

Particularmente, el enfoque probabilista, empleado en modelos estocásticos basados en series de tiempo de lluvia relacionadas en el espacio, permite un análisis estadístico más completo y por lo tanto provee herramientas más robustas para el análisis hidrológico en sus múltiples aplicaciones con respecto al enfoque determinista.

## 2.2 La lluvia y el modelo de Neyman-Scott

En hidrología la precipitación constituye una de las variables más importantes, ya que es el insumo fundamental de los modelos hidrológicos para sus diversas aplicaciones. Las mediciones puntuales de la lluvia han permitido establecer su alta variabilidad espacial y temporal, por lo que gran número de proyectos de investigación han sido llevados a cabo para la representación de las series de tiempo de lluvia y su distribución en el espacio; dentro de los esfuerzos realizados está el modelo de *Neyman-Scott* que simula la estructura celular de los campos de lluvia en el marco de un enfoque estocástico (Riccardi, 2005).

El modelo de *Neyman-Scott* es un modelo estocástico de procesos puntuales, que está basado en procesos de Poisson: Un proceso de Poisson es un proceso estocástico de tiempo continuo de eventos que se presentan (arribos) en donde el tiempo entre eventos (inter-arribo) tiene una distribución exponencial y cada uno de los tiempos de inter-arribo es independiente de los demás. Los procesos de Poisson son empleados para describir diversos fenómenos como la emisión de partículas por una sustancia radioactiva, la llegada de llamadas a una central telefónica, el número de accidentes de tránsito en una zona en particular, la ocurrencia de fallas en un proceso o las llegadas sucesivas de clientes a un centro comercial. Al aplicar la teoría a la modelación de la lluvia, estamos conceptualizando la ocurrencia de la precipitación como un fenómeno que sucede de manera aleatoria por “agrupaciones” de lluvia, de manera que el tiempo entre la ocurrencia de las agrupaciones de lluvia sigue una distribución de probabilidad.

El proceso de agrupamiento (cluster) de *Neyman-Scott* es un proceso de agrupamiento de Poisson de modo que un número aleatorio de puntos están distribuidos independientemente alrededor del centro del agrupamiento de acuerdo a una determinada función de distribución de la distancia (este proceso de agrupamiento fue introducido por J. Neyman y E. Scott en 1958 para el estudio de problemas de cosmología) (Riccardi, 2005).

En este trabajo se plantea la aplicación del modelo de Neyman-Scott cuya formulación se describe brevemente en los capítulos siguientes.

### **2.2.1 Neyman-Scott para un punto en el espacio**

Para lluvias en un punto geográfico, el modelo de Neyman-Scott asume que los eventos de lluvia son originados por un mecanismo disparador que es el (i) “origen del evento” (también llamado “padre”) cuya ocurrencia es representada como un proceso de Poisson, luego a partir de cada “padre”, se genera (ii) un número aleatorio de celdas de lluvia descrito por una distribución geométrica cuya (iii) distancia temporal al origen de la tormenta a la que pertenece es descrita por una distribución exponencial, así mismo la (iv) duración de cada pulso o celda de lluvia es descrita por una distribución exponencial, también (v) la intensidad de cada celda de lluvia se describe por una distribución exponencial, de manera que la intensidad total en el tiempo es la suma de los aportes individuales de cada celda activa en esa agregación temporal (Favre et al., 2004) ver Figura 2-4.

Cada una de las características anteriores están conceptualizadas como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y desde la (i) hasta la (v) están descritas a partir de cinco distribuciones de probabilidad, que a su vez están definidas por sus cinco parámetros característicos. En la Tabla 2-1 se resumen los parámetros que definen cada una de las distribuciones de probabilidad asociadas con las características.

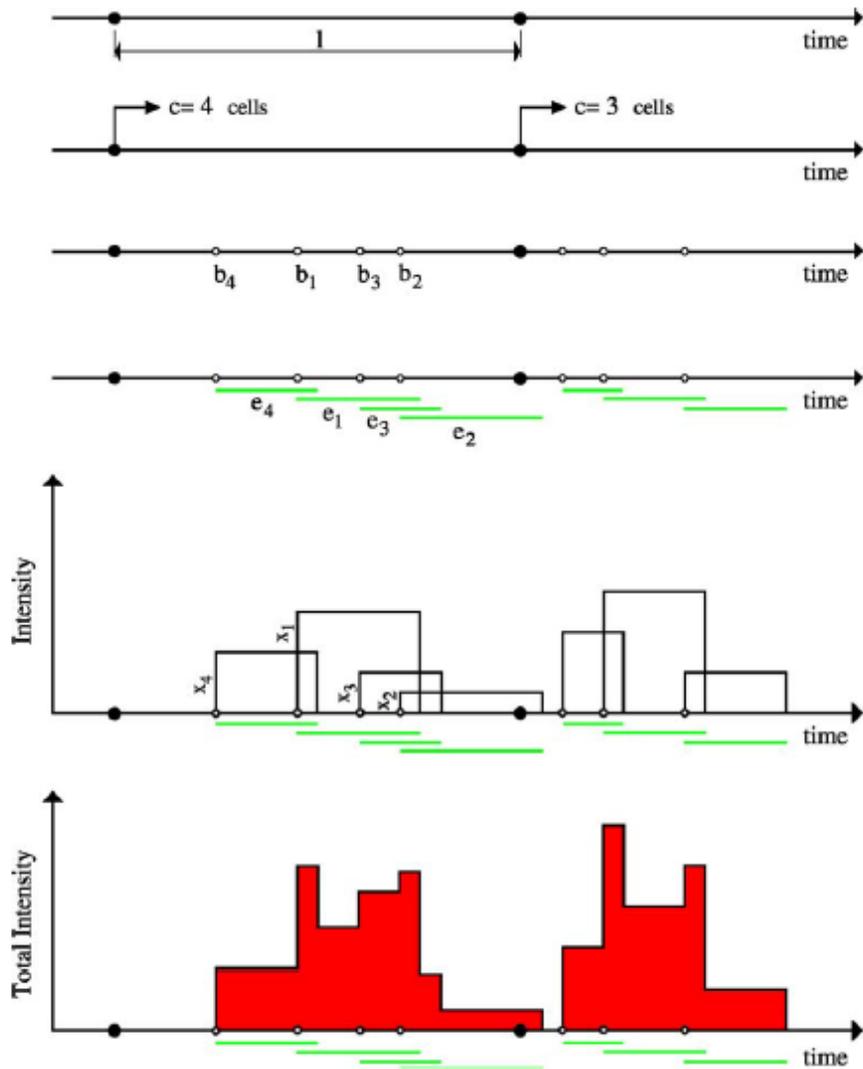


Figura 2-4 Fundamentos del modelo de Neyman-Scott. (Favre et al., 2004)

Tabla 2-1 Parámetros Neyman-Scott puntual

Nomenclatura	Característica asociada	Distribución de probabilidad típica	Parámetro de la distribución de probabilidad
Te	Tiempo entre orígenes de tormentas (padres)	Poisson o Exponencial	$\lambda$
N (Se usa la transformación $C=N-1$ para garantizar que se genera al menos una celda)	Cantidad de celdas de lluvia para cada tormenta	Poisson o Geométrica	$\mu_c$
Tc	Tiempo de inicio de cada celda de lluvia con respecto a su padre	Exponencial	$\beta$
L	Tiempo de duración de cada celda de lluvia	Exponencial	$\eta$
X	Intensidad de cada celda de lluvia	Exponencial	$\xi$

### 2.2.2 Neyman-Scott de soporte espacial

El modelo de Neyman-Scott de soporte espacial aplica la misma filosofía descrita en la sección anterior pero extendida a otros puntos geográficos de manera que se generan campos de lluvia espaciales, es decir que se efectúa la generación sintética para varios puntos geográficos relacionándolos simultáneamente de

manera que se conserve la autocorrelación temporal puntual y la autocorrelación espacial cruzada (Tarpanelli et al., 2012).

Para la extensión a otros puntos del territorio, se debe tener en cuenta que para el modelo de soporte espacial, las celdas de lluvia tienen un tiempo de duración (igual que en el caso puntual), pero además ejercen una influencia en el espacio (dos dimensiones espaciales). De acuerdo con lo anterior, se introduce la característica del “radio de la celda de lluvia”, en la Figura 2-5 se ilustra a la izquierda la construcción de la serie de lluvia a través del tiempo, y a la derecha los radios de influencia de las diferentes celdas de lluvia para un instante de tiempo (Munroe, 2004). Los centros de las celdas de lluvia coinciden con la localización de los pluvios que registran las series observadas empleadas para la calibración del modelo.

Para la agregación de las celdas de lluvia, además de tener en cuenta las celdas activas en el tiempo (como en el caso de lluvias puntuales), se tiene en cuenta si la celda activa ejerce influencia sobre los otros pluvios, caso en el cual las contribuciones de todos los pluvios se suman. Es claro de esta manera que los datos modelados para un pluvio pueden afectar la lluvia modelada en otros pluvios estableciéndose así una relación de influencia que dependerá de la autocorrelación espacial cruzada interpretada por el modelo a partir de las series observadas simultáneamente de los diferentes pluvios.

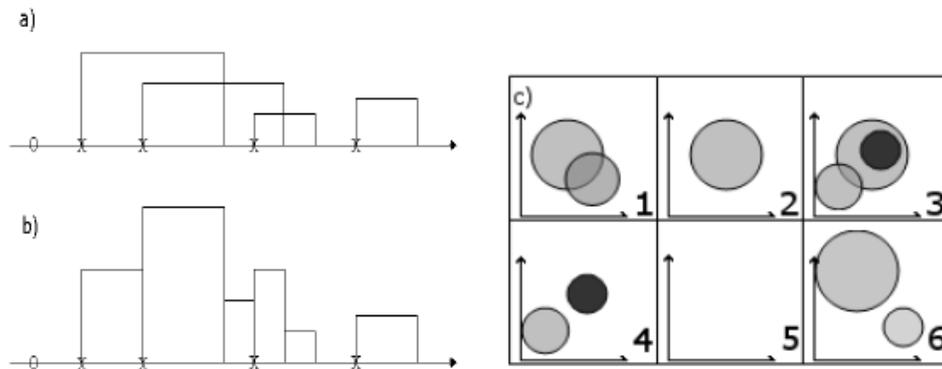


Figura 2-5 Modelo de Neyman-Scott en el espacio (Munroe, 2004).

La caracterización de las distribuciones de probabilidad es un poco diferente en el modelo de soporte espacial, ya que se incluye el concepto del radio de la celda de lluvia, introduciendo un parámetro adicional y además se reemplaza la distribución exponencial de la intensidad de la lluvia por una distribución de Weibull caracterizada por dos parámetros (parámetro de escala y parámetro exponencial). De esta forma se llega a una descripción con 6 distribuciones de probabilidad que requieren de 7 parámetros para su caracterización. Ver Tabla 2-2

Tabla 2-2 Parámetros Neyman-Scott en el espacio

Nomenclatura	Característica asociada	Distribución de probabilidad típica	Parámetro de la distribución de probabilidad
Te	Tiempo entre orígenes de tormentas (padres)	Poisson o Exponencial	$\lambda$
N (Se usa la transformación $C=N-1$ para garantizar que se genera al menos una celda)	Cantidad de celdas de lluvia para cada tormenta	Poisson o Geométrica	$\mu_c$
Tc	Tiempo de inicio de cada celda de lluvia con respecto a su padre	Exponencial	$\beta$
L	Tiempo de duración de cada celda de lluvia	Exponencial	$\eta$
X	Intensidad de cada celda de lluvia	Weibull	$\alpha$
			$\theta$
R	Radio de cada celda de lluvia	Exponencial	$\phi$

La modelación de la lluvia de soporte espacial, puede ser muy útil para el análisis en zonas con poca o inexistente información meteorológica, así mismo puede enriquecer el análisis para el completado de datos con enfoque estocástico en

zonas monitoreadas con herramientas de medición indirecta como el radar meteorológico.

### 2.3 El modelo estocástico de Neyman-Scott y sus propiedades

Se presenta la formulación del modelo que es estacionario en espacio y tiempo, con lo que los parámetros resultantes se consideran constantes. Como consecuencia de lo anterior, los datos deben ser transformados a series estacionarias o alternatively, el modelo debe ser calibrado a subconjuntos que puedan considerarse estacionarios.

- Para asegurar la estacionariedad temporal, el ejercicio se realiza en conjuntos de datos mensuales.
- Para aproximarse a la estacionariedad espacial, los datos son escalados dividiendo por la media mensual de cada sitio.

Las consideraciones anteriores derivan en un conjunto de 12 valores estimados para cada parámetro que tienen en cuenta las variaciones estacionales de la lluvia.

Teniendo en cuenta la nomenclatura para los parámetros mostrada en la Tabla 2-2, las propiedades matemáticas del modelo son las siguientes (Cowpertwait et al., 2002):

Para cada tormenta, el número de celdas de lluvia  $C$  que se traslapan en un punto del área seleccionada es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con la siguiente media:

$$\mu_C = 2\pi\varphi/\phi^2 \quad (1)$$

y

$$\mu_h = E\{Y_k^{(h)}(\mathbf{x})\} = \lambda\mu_C\mu_X h/\eta_1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{x,y,h,l} &= \text{Cov}\{Y_k^{(h)}(\mathbf{x}), Y_{k+l}^{(h)}(\mathbf{y})\} \\ &= \gamma_{x,x,h,l} - \lambda\{1 - P(\phi, d)\}\mu_C E(X^2)A(h, l)/\eta^3\end{aligned}\quad (3)$$

En donde:

$$\begin{aligned}\gamma_{x,x,h,l} &= \gamma_{y,y,h,l} = \lambda\eta^{-3}A(h, l) \\ &\cdot \{2\mu_C E(X^2) + \mu_X^2\beta^2 E(C^2 - C)/(\beta^2 - \eta^2)\} \\ &- \lambda\mu_X^2 B(h, l)E(C^2 - C)/\{\beta(\beta^2 - \eta^2)\}\end{aligned}\quad (4)$$

$$A(h, 0) = (h\eta + e^{-\eta h} - 1); B(h, 0) = (h\beta + e^{-\beta h} - 1)\quad (5)$$

$$A(h, l) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\eta h})^2 e^{-\eta h(l-1)}\quad (6)$$

$$B(h, l) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\beta h})^2 e^{-\beta h(l-1)}\quad (7)$$

Así mismo, la distancia entre dos puntos  $x$  y  $y$  se define por:

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (8)$$

Y la probabilidad de que una celda tenga influencia sobre un punto  $x$ , dado que tienen su centro en un punto  $y$  y separado una distancia  $d$  es:

$$P(\phi, d) \approx \frac{1}{30} \sum_{i=1}^4 \left\{ 2f\left(\frac{2\pi i}{20}\right) + 4f\left(\frac{2\pi i + \pi}{20}\right) \right\} - \frac{1}{30}f(0)\quad (9)$$

La función para el tercer momento es:

$$\begin{aligned}E\{Y_k^{(h)}(\mathbf{x}) - \mu_h\}^3 &= 6\lambda\mu_C E(X^3)(\eta h - 2 + \eta h e^{-\eta h} + 2e^{-\eta h})/\eta^4 \\ &+ 3\lambda\mu_X E(X^2)E\{C(C - 1)\}f(\eta, \beta, h) \\ &/\{2\eta^4\beta(\beta^2 - \eta^2)^2\} + \lambda\mu_X^3 \\ &\cdot E\{C(C - 1)(C - 2)\}g(\eta, \beta, h) \\ &/\{2\eta^4\beta(\eta^2 - \beta^2)(\eta - \beta)(2\beta + \eta)(\beta + 2\eta)\}\end{aligned}\quad (10)$$

En donde las funciones f y g están dadas por:

$$\begin{aligned}
 f(\eta, \beta, h) = & -2\eta^3\beta^2e^{-\eta h} - 2\eta^3\beta^2e^{-\beta h} + \eta^2\beta^3e^{-2\eta h} + 2\eta^4\beta e^{-\eta h} \\
 & + 2\eta^4\beta e^{-\beta h} + 2\eta^3\beta^2e^{-(\eta+\beta)h} - 2\eta^4\beta e^{-(\eta+\beta)h} - 8\eta^3\beta^3h \\
 & + 11\eta^2\beta^3 - 2\eta^4\beta + 2\eta^3\beta^2 + 4\eta\beta^5h + 4\eta^5\beta h - 7\beta^5 \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\eta, \beta, h) = & 12\eta^5\beta e^{-\beta h} + 9\eta^4\beta^2 + 12\eta\beta^5e^{-\eta h} + 9\eta^2\beta^4 \\
 & + 12\eta^3\beta^3e^{-(\eta+\beta)h} - \eta^2\beta^4e^{-2\eta h} - 12\eta^3\beta^3e^{-\beta h} - 9\eta^5\beta \\
 & - 9\eta\beta^5 - 3\eta\beta^5e^{-2\eta h} - \eta^4\beta^2e^{-2\beta h} - 12\eta^3\beta^3e^{-\eta h} \\
 & + 6\eta^5\beta^2h - 10\beta^4\eta^3h + 6\beta^5\eta^2h - 10\beta^3\eta^4h + 4\beta^6\eta h \\
 & - 8\beta^2\eta^4e^{-\beta h} + 4\beta\eta^6h + 12\beta^3\eta^3 - 8\beta^4\eta^2e^{-\eta h} - 6\eta^6 \\
 & - 6\beta^6 - 2\eta^6e^{-2\beta h} - 2\beta^6e^{-2\eta h} + 8\eta^6e^{-\beta h} \\
 & + 8\beta^6e^{-\eta h} - 3\beta\eta^5e^{-2\beta h} \quad (12)
 \end{aligned}$$

En donde C es una variable aleatoria, de manera que:

$$E\{C(C-1)\} = \mu_c^2 \quad (13)$$

Y

$$E\{C(C-1)(C-2)\} = \mu_c^3 \quad (14)$$

En lo sucesivo se empleará la siguiente notación para la varianza, el coeficiente de variación, la autocorrelación (de rezago 1), la correlación cruzada y el sesgo respectivamente, así como los parámetros de los que dependen:

$$\sigma_h^2(\lambda, \beta, \eta, \mu_C, \alpha, \theta) = \gamma_{x,x,h,0} \quad (15)$$

$$v_h(\lambda, \beta, \eta, \mu_C, \alpha) = \sigma_h / \mu_h \quad (16)$$

$$\rho_h(\beta, \eta, \mu_C, \alpha) = \gamma_{x,x,h,1} / \sigma_h^2 \quad (17)$$

$$\rho_{x,y,h,l}(\beta, \eta, \mu_C, \alpha, \phi) = \gamma_{x,y,h,l} / \sigma_h^2 \quad (18)$$

$$\kappa_h(\lambda, \beta, \eta, \mu_C, \alpha) = E\left(\{Y_k^{(h)}(\mathbf{x}) - \mu_h\}^3\right) / \sigma_h^3 \quad (19)$$

El parámetro  $\Phi$  es característico de cada uno de los lugares (pluvios) y se obtiene de manera individual, mientras que los otros seis parámetros se calculan para los datos agregados de todas las estaciones de la zona de estudio.

## Capítulo III

### Metodología

Para el desarrollo del trabajo se tomó como referencia la metodología descrita en Cowpertwait et al (2002): “*Space-Time Neyman-Scott Model for Rainfall: Empirical Analysis of Extremes*”. El proceso se puede resumir en tres pasos: (i) la calibración del modelo, que consiste en encontrar los valores de los parámetros que definen las distribuciones de probabilidad que describen estocásticamente el proceso físico, (ii) la generación de series sintéticas de lluvia espacial, que consiste en operar el modelo con los parámetros obtenidos en el paso anterior, el ejercicio se repite en múltiples oportunidades generando conjuntos de realizaciones de series sintéticas de manera, que se obtienen datos susceptibles de tratamiento estadístico (método de Montecarlo), y finalmente (iii) la verificación de la bondad del modelo, es decir la medición del grado de preservación de estadísticos observados en las series simuladas. En la Figura 3-1 se esquematiza el proceso general.

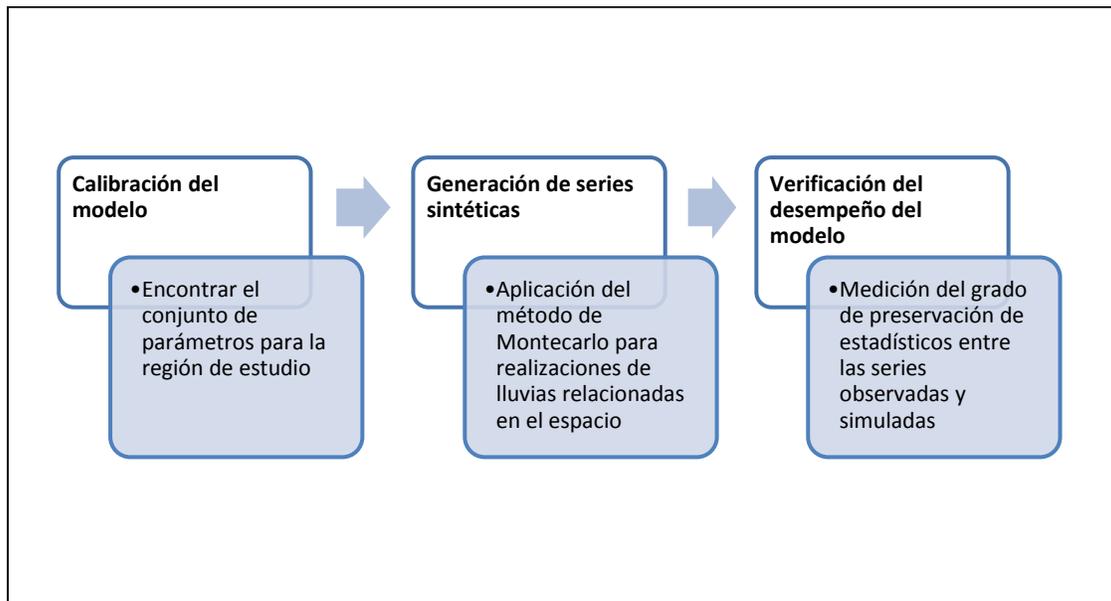


Figura 3-1 Proceso general de aplicación del modelo.

Se describe el primer paso del proceso general de aplicación del modelo.

### **3.1 Calibración del modelo en el área de estudio**

Para el cálculo del conjunto de parámetros que caracterizan las distribuciones de probabilidad que componen el proceso de la lluvia en el modelo, se establecen los siguientes criterios (Coppertwait et al., 2002):

- Se emplean estadísticos regionales adimensionales para calibrar el modelo con datos agregados sobre una región homogénea.
- Las diferencias entre sitios se modelan usando el parámetro de escala calibrado con la media de la muestra para cada sitio.
- Se usan momentos de hasta tercer orden para calibrar el modelo asegurando una buena representación de los valores extremos.
- La variación estacional se tiene en cuenta calibrando el modelo para conjuntos de datos mensuales.
- El proceso se lleva a cabo en pasos, lo cual permite emplear casos especiales del modelo. Esto significa que se minimizan varias funciones objetivo en lugar de una sola. Este procedimiento puede resultar más eficiente, ya que los parámetros se buscan en espacios reducidos lo que implica un menor costo computacional.

#### **3.1.1 Descripción general del proceso de calibración**

Como se ha mencionado en el Marco Teórico, el modelo estocástico es estacionario en espacio y tiempo de manera que para datos normalizados por la media y en agrupaciones mensuales se aplica el método de los momentos, es decir se calculan los estadísticos de las series observadas y se igualan a los valores teóricos de los mismos que a su vez están relacionados mediante la teoría del modelo de Neyman-Scott con los parámetros que definen las distribuciones de

probabilidad. Finalmente, se buscan mediante optimización numérica los valores de los parámetros que hacen mínima la diferencia entre los estadísticos observados y los estimados con las expresiones del modelo: minimización de funciones objetivo.

Se calcula la media de la muestra para cada pluvio y mes con la siguiente expresión:

$$\bar{x}_{ik}^{(1)} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(l,k)} x_{yikl}^{(1)} / Nn(1, k), \quad i = 1, \dots, M; k = 1, \dots, 12 \quad (20)$$

Se calculan los estadísticos adimensionales (en datos normalizados por la media), mediante la agregación de los datos mensuales para todos los años y pluvios con las siguientes expresiones:

$$\hat{\sigma}_{h,k}^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)} \left( x_{yikl}^{(h)} / \bar{x}_{ik}^{(1)} - h \right)^2 / MNn(h, k) \quad (21)$$

$$\hat{\gamma}_{h,k} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)-1} \left( x_{yikl}^{(h)} / \bar{x}_{ik}^{(1)} - h \right) \cdot \left( x_{yikl+1}^{(1)} / \bar{x}_{ik}^{(1)} - h \right) / MN\{n(h, k) - 1\} \quad (22)$$

$$\hat{\kappa}_{h,k} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)} \left( x_{yikl}^{(h)} / \bar{x}_{ik}^{(1)} - h \right)^3 / \hat{\sigma}_{h,k}^3 MNn(h, k) \quad (23)$$

$$\hat{\rho}_{xy,h,k} = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)} \left( x_{yikl}^{(h)} - \bar{x}_{ik}^{(h)} \right) \left( x_{yjk}^{(h)} - \bar{x}_{jk}^{(h)} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)} \left( x_{yikl}^{(h)} - \bar{x}_{ik}^{(h)} \right)^2 \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n(h,k)} \left( x_{yjk}^{(h)} - \bar{x}_{jk}^{(h)} \right)^2}} \quad (24)$$

El modelo se calibra usando momentos de hasta tercer orden y la función de correlación cruzada en datos horarios por pasos.

### 3.1.2 Paso a paso del proceso de calibración

Paso 1: Se calculan los parámetros  $(\lambda, \beta, \eta, \mu_c)$  asumiendo que el parámetro exponencial de la intensidad es  $(\alpha=1)$ . Se hace la estimación a partir del coeficiente de variación diario y horario, y la función de autocorrelación minimizando la siguiente suma de cuadrados:

$$F_A = (1 - v_1/\hat{v}_{1,k})^2 + (1 - \rho_1/\hat{\rho}_{1,k})^2 + (1 - v_{24}/\hat{v}_{24,k})^2 + (1 - \rho_{24}/\hat{\rho}_{24,k})^2 \quad (25)$$

La idea es obtener unos buenos valores iniciales de  $(\lambda, \beta, \mu_c)$  y determinar el valor de  $\eta$ .

Paso 2: A la función del paso 1 se añade la función de correlación cruzada horaria par estimar el parámetro del radio de celda ( $\Phi$ ) y reestimar el parámetro ( $\beta$ ):

$$F_B = F_A + \sum_{x=1}^M \sum_{y=x+1}^M \left(1 - \rho_{x,y,1,k}/\hat{\rho}_{x,y,1,k}\right)^2 \quad (26)$$

Paso 3: S reestiman los valores de  $(\lambda, \eta, \mu_c)$  asumiendo nuevamente que  $(\alpha=1)$ , minimizando la función  $F_A$ .

Paso 4: Se estima el valor de  $(\alpha)$  y se reestima el valor de  $(\mu_c)$  a partir del coeficiente de variación horario y el sesgo a partir de la minimización de la suma de cuadrados:

$$F_D = (1 - v_1/\hat{v}_{1,k})^2 + (1 - \kappa_1/\hat{\kappa}_{1,k})^2 \quad (27)$$

Paso 5: Se reestima el valor del parámetro ( $\Phi$ ) minimizando la expresión:

$$F_E = \sum_{x=1}^M \sum_{y=x+1}^M \left(1 - \rho_{x,y,1,k}/\hat{\rho}_{x,y,1,k}\right)^2 \quad (28)$$

Paso 6: A partir de los resultados anteriores y la media horaria de la muestra, se calcula  $\Theta$  para cada sitio.

$$\hat{\theta}_{ik} = \{\bar{x}_{ik}^{(1)} \hat{\gamma}_k / \hat{\lambda}_k \Gamma(1 + \hat{\alpha}_k) \hat{\mu}_{CK}\}^{1/\hat{\alpha}_k}, i = 1, \dots, M \quad (29)$$

Mediante la metodología descrita, se obtienen los valores de los parámetros. uno para cada mes, agregado para todos los sitios para los parámetros  $(\lambda, \beta, \eta, \mu_c, \alpha, \Phi)$ , y adicionalmente un valor del parámetro  $\Theta$  para cada mes e individualmente para cada sitio.

### 3.2 Generación de series y verificación del desempeño

Una vez obtenidos los parámetros del modelo se procede con la generación de realizaciones de lluvia (método de Montecarlo) y finalmente con la verificación del desempeño del modelo (preservación de parámetros estadísticos entre la serie observada y las series sintéticas) cuyas explicaciones se abordan en los capítulos siguientes respectivamente.

## Capítulo IV

### Aplicación del método

Una vez establecidas las bases teóricas y la metodología a seguir, se aplica el método a un área de la ciudad de Bogotá en donde se encontraron datos de lluvias de resolución horaria con 11 años de longitud de registro.

#### 4.1 Recopilación de los datos y selección de la zona de estudio

Se consultaron dos fuentes de información que proporcionaron datos para el proyecto:

- La base de datos de estaciones automáticas consolidadas por el Instituto de Hidrología y Estudios Ambientales – IDEAM: 260 estaciones en Colombia con una longitud de registro media de 6.9 años entre los años 2005 y 2014 y una proporción media de faltantes de 28% y resolución de registro de 5 y 10 minutos.
- La base de datos del Instituto de Gestión de Riesgos y Cambio Climático - IDIGER en la ciudad de Bogotá: Son 11 estaciones con resolución de registro de entre 5 y 10 minutos, con fecha de inicio desde el año 2000 para algunas de ellas.

Se efectuó un análisis de la aplicabilidad de los datos de las estaciones a partir de la localización de las mismas para determinar la densidad espacial de instrumentación y la longitud común de registros por zonas. Se decidió utilizar los registros de las estaciones automáticas que tiene el Instituto de Gestión de Riesgos y Cambio Climático - IDIGER en la ciudad de Bogotá ya que en comparación con las series provenientes del IDEAM, la longitud de registro es mayor, y la proporción de datos faltantes es menor, empleando agregación horaria.

De esta manera se seleccionaron 7 estaciones en la zona del Río Tunjuelo: Sierra Morena, San Benito, Quiba, Doña Juana, Universidad Antonio Nariño – UAN Usme, Juan Rey y Micaela.

A partir de los registros, se examinó el régimen estacional de la lluvia en cada estación, encontrando que Sierra Morena, San Benito, Quiba, Doña Juana y UAN Usme tienen regímenes de precipitación muy similares, con dos épocas húmedas bien diferenciadas del resto del año, la primera en abril y la segunda entre octubre y noviembre; en cambio para Juan Rey y Micaela, la primera temporada húmeda se presenta entre junio y julio y la segunda (aunque menos marcada en Micaela), se presenta hacia el mes de noviembre (ver Figura 4-1 a Figura 4-7). Las diferencias en el régimen estacional de la lluvia pueden deberse a la orografía de la zona.

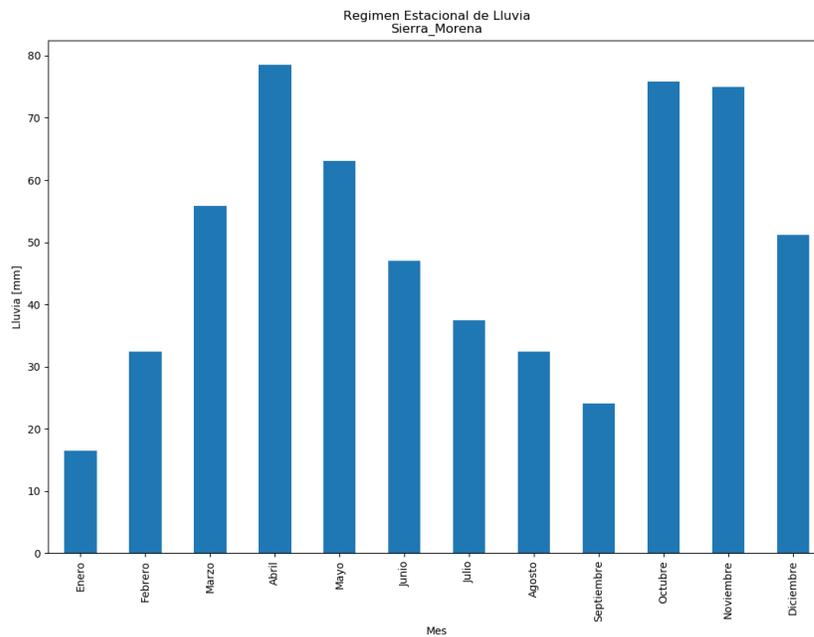


Figura 4-1 Régimen estacional Sierra Morena

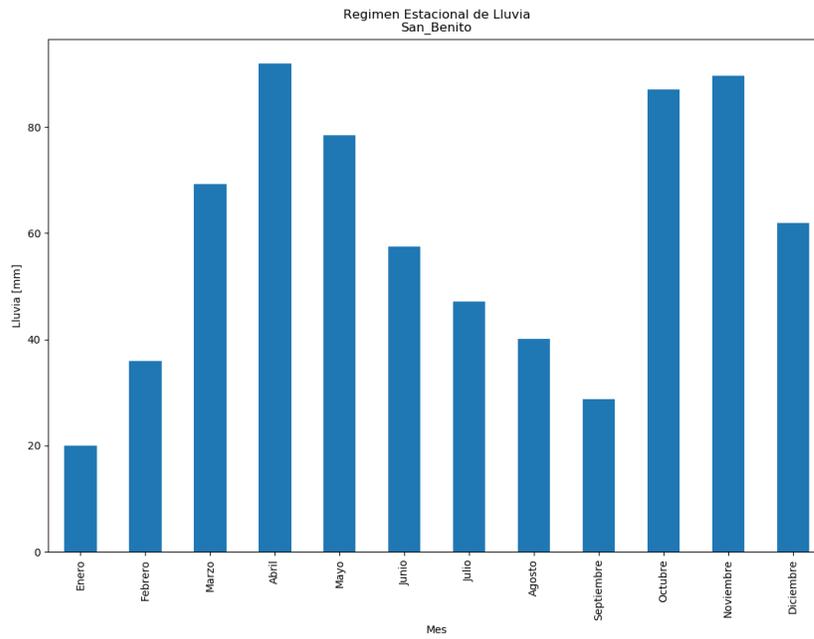


Figura 4-2 Régimen estacional San Benito

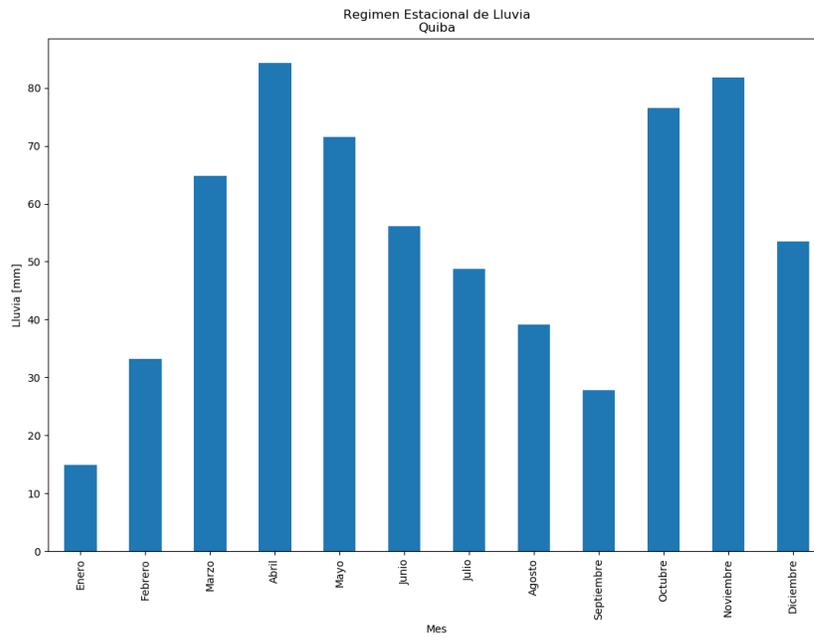


Figura 4-3 Régimen estacional Quiba

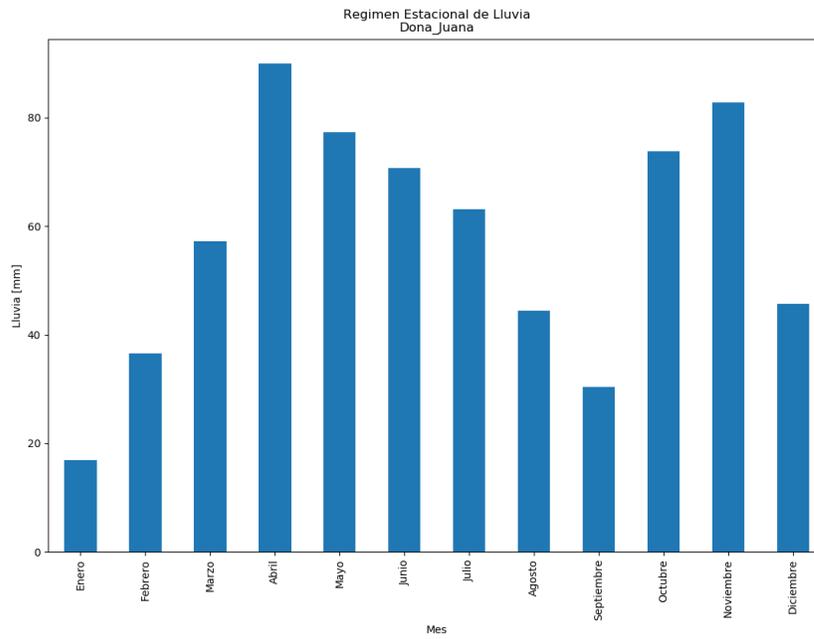


Figura 4-4 Régimen estacional Doña Juana

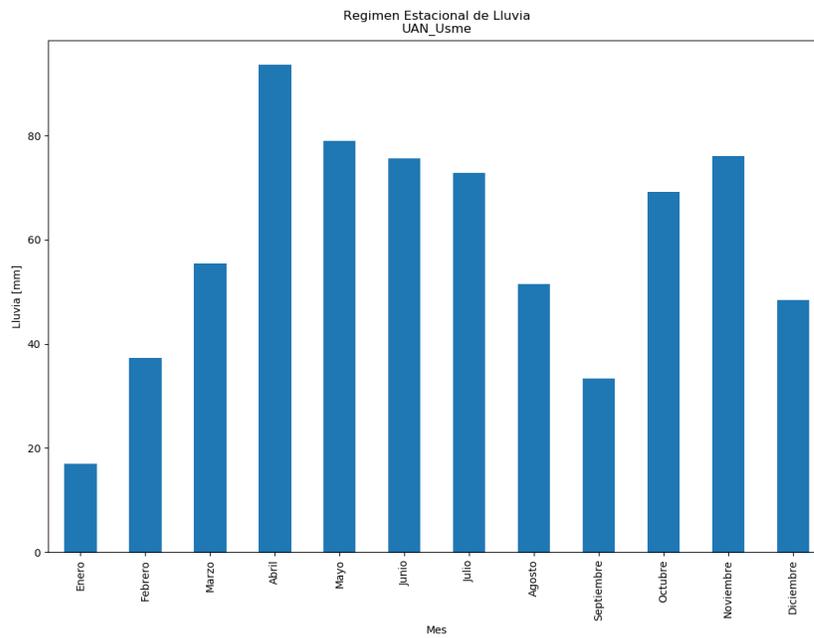


Figura 4-5 Régimen estacional UAN Usme

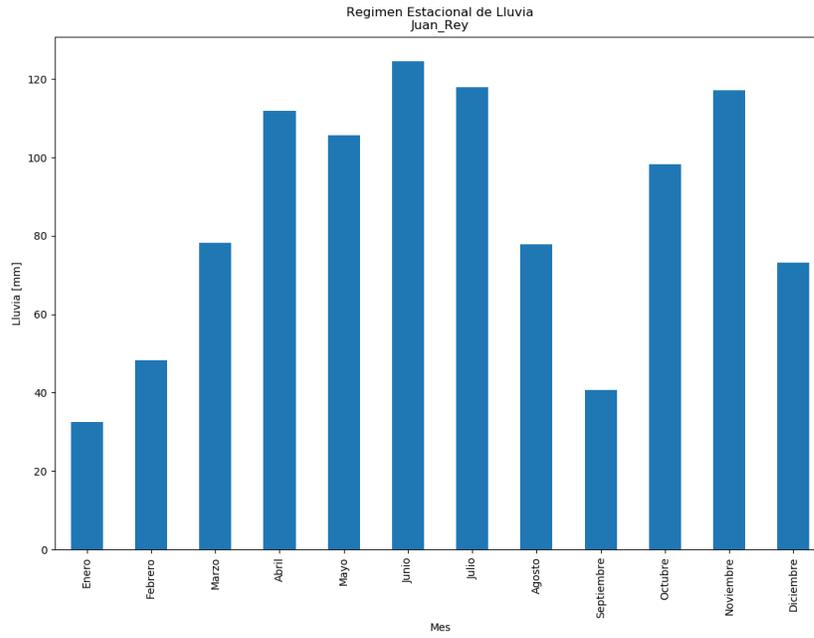


Figura 4-6 Régimen estacional Juan Rey

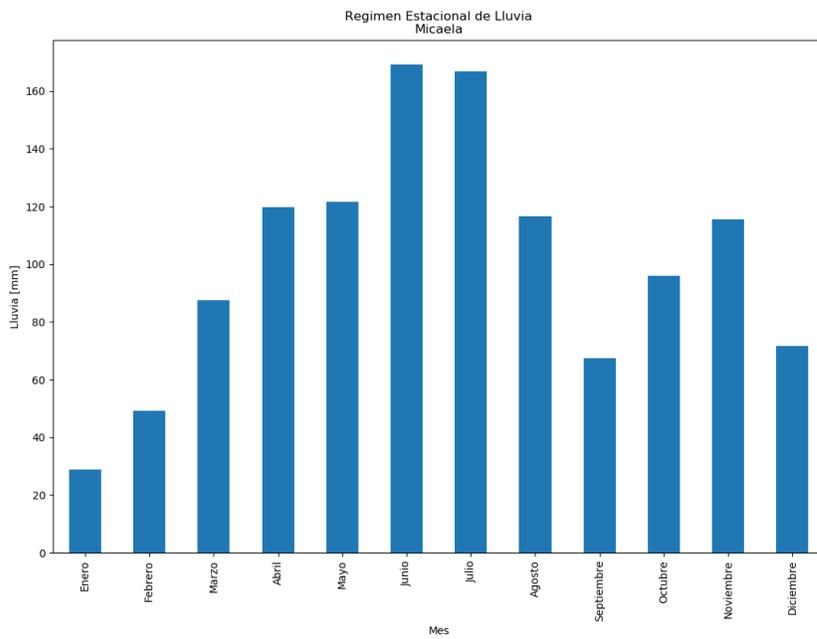


Figura 4-7 Régimen estacional Micaela

Por las diferencias en el régimen estacional, es posible que las estaciones Juan Rey y Micaela no deban ser tenidas en cuenta, este supuesto se pone a prueba en la siguiente sección.

#### **4.1.1 Verificación de la homogeneidad espacial de los datos.**

Se procede con un análisis para determinar hasta qué punto se puede considerar que las series observadas de las diferentes estaciones son homogéneas espacialmente (requisito de la metodología) y de esta manera se elige el conjunto de estaciones que cumpla con dicha condición.

Se procedió con un análisis ANOVA sobre los datos, organizando las estaciones inicialmente en dos conjuntos diferentes:

- Conjunto 7 estaciones: Las 7 estaciones seleccionadas inicialmente
- Conjunto 5 estaciones: Se excluyeron Juan Rey y Micaela por las diferencias en el régimen estacional

Posteriormente y por los resultados parciales del análisis ANOVA, se estableció un tercer conjunto:

- Conjunto 4 estaciones: Del conjunto de 5 estaciones se excluyó la estación Sierra Morena.

En la en la Tabla 4-1 se reporta el análisis efectuado en agregaciones horaria, diaria y mensual, en donde la Hipótesis Nula fue la siguiente:

H<sub>0</sub>: Las medias de las muestras son iguales.

A partir de los resultados se establece que un análisis ANOVA es relevante en datos diarios y se selecciona el conjunto de 4 estaciones para el desarrollo del

proyecto, las cuales se muestran en azul en la Figura 4-8, para la cuenca del Río Tunjuelo:

- San Benito
- Doña Juana
- Quiba
- UAN Usme

Tabla 4-1 Resumen análisis ANOVA

<b>Frecuencia de datos</b>	<b>Cantidad de estaciones del conjunto</b>	<b>P-valor</b>	<b>Nivel de confianza para rechazar la hipótesis nula</b>	<b>Comentarios</b>
Horaria	7	9.96E-251	100.0%	Debería rechazarse la hipótesis nula en todos los casos con un nivel de confianza de por lo menos 98%. Se concluye que es una resolución muy fina para el análisis.
	5	1.82E-09	100.0%	
	4	0.017	98.3%	
Diaria	7	1.78E-91	100.0%	Se rechaza la hipótesis nula con más del 99% de nivel de confianza. Es una extensión espacial muy grande para el análisis.
	5	0.001	99.9%	
	4	0.259	74.1%	No puede rechazarse la hipótesis nula ya que el nivel de confianza estaría por debajo de 75%. Se acepta la hipótesis nula y se considera que los datos son homogéneos en la región.
Mensual	7	2.05E-26	100.0%	No podría rechazarse la hipótesis nula desde el análisis con 5 estaciones ya que el nivel de confianza estaría por debajo del 85%. Se concluye que es una resolución muy gruesa para el análisis.
	5	0.159	84.1%	
	4	0.705	29.5%	
	5	1.97E-13	100.0%	
	4	3.61E-07	100.0%	

La zona de estudio se presenta en la Figura 4-8. La extensión aproximada de una zona rectangular que contiene las estaciones es de 34 km<sup>2</sup>.

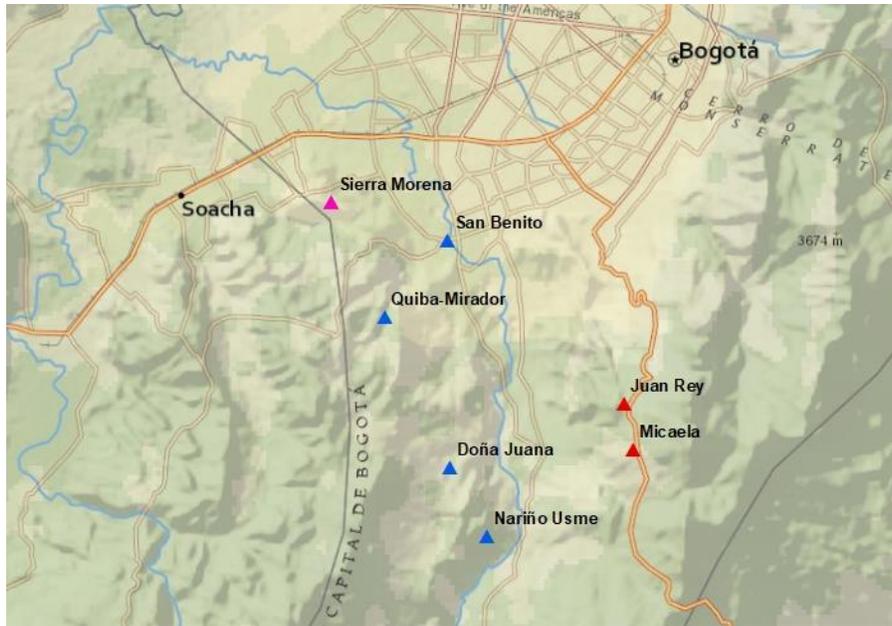


Figura 4-8 Zona de estudio y estaciones

Las gráficas de las series registradas en las estaciones consideradas, tienen un periodo común de 11 años de registros continuos: 2007 al 2017 y se presentan en el Anexo 1. Se aprecia allí la textura de las series observadas en resolución horaria, la misma que intenta ser reproducida mediante la generación de series sintéticas.

En el Anexo 2 se presentan las gráficas de las series observadas acumuladas para cada mes. Se aprecia que en los meses más lluviosos (abril, octubre y noviembre) se presenta también una gran variabilidad de lluvias acumuladas históricas para todo el mes. La variedad de lluvias totales en el mes supone que el modelo deberá ser capaz de generar lluvias sintéticas que también puedan ser bastante diferentes de una realización a otra.

## 4.2 Cálculo de los estadísticos observados

Como se mencionó en la metodología, el modelo de Neyman-Scott de soporte espacial está completamente determinado una vez se consiguen los valores de los siete parámetros que caracterizan las seis distribuciones de probabilidad que permiten la generación de lluvia sintética cuyas características siguen dichas distribuciones (ver Tabla 2-2).

Para las series de lluvia horarias recopiladas, se calculan estadísticos que las caracterizan: media, varianza, correlación cruzada, etc. **Estos son los momentos observados.**

El cálculo de los valores de los parámetros se efectúa aplicando el método de los momentos, es decir equiparando los valores de los momentos observados con sus correspondientes en las expresiones teóricas que a su vez están formuladas en función de los valores de los parámetros que caracterizan las distribuciones del modelo Neyman-Scott (ver las expresiones en el numeral 3.1).

De la metodología, recordamos que una vez planteado el sistema de ecuaciones no lineales, se resuelve mediante la minimización de una función objetivo definida por la suma de los residuos normalizados entre los momentos teóricos y los observados (Riccardi, 2005). Así mismo, y para poder considerar válida la hipótesis de estacionariedad en el espacio, los datos son previamente normalizados, es decir divididos por la media de cada estación, adicionalmente el modelo supone estacionariedad de las series observadas, por lo tanto, el procedimiento se hace una vez para cada mes de manera que también se pueda considerar válida esta segunda hipótesis.

En las Tablas 4-2 y 4-3 se presentan los valores de la media y la varianza de las series originales (sin normalizar) que son el primer insumo para el cálculo de los parámetros del modelo.

Tabla 4-2 Medias mensuales de las series originales (sin normalizar)

<b>Mes</b>	<b>San_Benito</b>	<b>Dona_Juana</b>	<b>Quiba</b>	<b>UAN_Usme</b>
<b>1</b>	0.026	0.020	0.019	0.022
<b>2</b>	0.053	0.054	0.049	0.055
<b>3</b>	0.093	0.077	0.087	0.075
<b>4</b>	0.128	0.125	0.117	0.130
<b>5</b>	0.107	0.105	0.097	0.107
<b>6</b>	0.080	0.098	0.078	0.105
<b>7</b>	0.064	0.085	0.066	0.098
<b>8</b>	0.054	0.060	0.053	0.070
<b>9</b>	0.040	0.042	0.039	0.046
<b>10</b>	0.118	0.100	0.104	0.094
<b>11</b>	0.125	0.115	0.114	0.106
<b>12</b>	0.084	0.062	0.072	0.065

Tabla 4-3 Varianzas mensuales de las series originales (sin normalizar)

<b>Mes</b>	<b>San_Benito</b>	<b>Dona_Juana</b>	<b>Quiba</b>	<b>UAN_Usme</b>
<b>1</b>	0.173	0.054	0.102	0.067
<b>2</b>	0.228	0.205	0.197	0.242
<b>3</b>	0.419	0.227	0.382	0.192
<b>4</b>	0.547	0.375	0.467	0.457
<b>5</b>	0.419	0.294	0.333	0.331
<b>6</b>	0.222	0.263	0.179	0.223
<b>7</b>	0.149	0.157	0.145	0.186
<b>8</b>	0.172	0.112	0.146	0.127
<b>9</b>	0.103	0.105	0.101	0.104
<b>10</b>	0.593	0.315	0.401	0.239
<b>11</b>	0.531	0.433	0.472	0.307
<b>12</b>	0.373	0.193	0.302	0.233

En la Tabla 4-4 se reportan los estadísticos de las series normalizadas. Las mismas son empleadas en el proceso de optimización para la estimación de los parámetros del modelo.

Tabla 4-4 Estadísticos mensuales de las series normalizadas.

Mes	Varianza	Auto covarianza _lag1	Cv	Autocorr	Asimetria	cv24	Autocov24_lag1	autocorr24
<b>1</b>	199.076	36.853	14.109	0.225	16.686	3.724	853.714	0.080
<b>2</b>	78.557	19.601	8.863	0.269	13.264	2.568	784.529	0.155
<b>3</b>	42.671	14.101	6.532	0.347	11.018	2.081	491.467	0.125
<b>4</b>	29.624	11.337	5.443	0.419	9.377	1.806	350.154	0.172
<b>5</b>	31.976	14.145	5.655	0.457	9.211	1.963	412.881	0.037
<b>6</b>	27.908	12.644	5.283	0.485	9.101	1.758	236.830	0.120
<b>7</b>	27.856	11.446	5.278	0.420	9.326	1.706	233.828	0.130
<b>8</b>	41.986	15.958	6.480	0.410	10.386	2.075	312.424	0.073
<b>9</b>	59.724	23.930	7.728	0.388	11.616	2.415	117.253	0.023
<b>10</b>	34.743	13.396	5.894	0.395	9.475	1.896	304.935	0.132
<b>11</b>	32.725	11.132	5.721	0.363	9.791	1.809	281.485	0.178
<b>12</b>	54.246	16.556	7.365	0.301	11.441	2.299	236.485	0.116

Así mismo se calculó la correlación cruzada entre los datos de las estaciones. En las Tablas 4-5 a 4-16 se presentan los resultados para cada mes.

Tabla 4-5 Correlación cruzada enero

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.335	0.795	0.174
Dona_Juana	0.335	1.000	0.439	0.760
Quiba	0.795	0.439	1.000	0.328
UAN_Usme	0.174	0.760	0.328	1.000

Tabla 4-6 Correlación cruzada febrero

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.241	0.655	0.201
Dona_Juana	0.241	1.000	0.278	0.697
Quiba	0.655	0.278	1.000	0.222
UAN_Usme	0.201	0.697	0.222	1.000

Tabla 4-7 Correlación cruzada marzo

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.480	0.549	0.338
Dona_Juana	0.480	1.000	0.600	0.686
Quiba	0.549	0.600	1.000	0.337
UAN_Usme	0.338	0.686	0.337	1.000

Tabla 4-8 Correlación cruzada abril

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.481	0.646	0.380
Dona_Juana	0.481	1.000	0.498	0.713
Quiba	0.646	0.498	1.000	0.417
UAN_Usme	0.380	0.713	0.417	1.000

Tabla 4-9 Correlación cruzada mayo

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.555	0.714	0.498
Dona_Juana	0.555	1.000	0.601	0.851
Quiba	0.714	0.601	1.000	0.539
UAN_Usme	0.498	0.851	0.539	1.000

Tabla 4-10 Correlación cruzada junio

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.622	0.858	0.558
Dona_Juana	0.622	1.000	0.645	0.826
Quiba	0.858	0.645	1.000	0.619
UAN_Usme	0.558	0.826	0.619	1.000

Tabla 4-11 Correlación cruzada julio

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.645	0.833	0.595
Dona_Juana	0.645	1.000	0.719	0.869
Quiba	0.833	0.719	1.000	0.645
UAN_Usme	0.595	0.869	0.645	1.000

Tabla 4-12 Correlación cruzada agosto

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.591	0.771	0.545
Dona_Juana	0.591	1.000	0.721	0.825
Quiba	0.771	0.721	1.000	0.597
UAN_Usme	0.545	0.825	0.597	1.000

Tabla 4-13 Correlación cruzada septiembre

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.517	0.689	0.508
Dona_Juana	0.517	1.000	0.607	0.818
Quiba	0.689	0.607	1.000	0.497
UAN_Usme	0.508	0.818	0.497	1.000

Tabla 4-14 Correlación cruzada octubre

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.414	0.701	0.386
Dona_Juana	0.414	1.000	0.547	0.773
Quiba	0.701	0.547	1.000	0.497
UAN_Usme	0.386	0.773	0.497	1.000

Tabla 4-15 Correlación cruzada noviembre

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.455	0.735	0.422
Dona_Juana	0.455	1.000	0.577	0.698
Quiba	0.735	0.577	1.000	0.440
UAN_Usme	0.422	0.698	0.440	1.000

Tabla 4-16 Correlación cruzada diciembre

	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
San_Benito	1.000	0.438	0.695	0.373
Dona_Juana	0.438	1.000	0.467	0.697
Quiba	0.695	0.467	1.000	0.332
UAN_Usme	0.373	0.697	0.332	1.000

### 4.3 Estimación de los parámetros para el modelo

Se aplican las ecuaciones del modelo de Neyman-Scott (ver numeral 3.1) de soporte espacial que relacionan valores de estadísticos teóricos con parámetros de las distribuciones de probabilidad que brindan los números aleatorios para generar lluvia sintética.

Se emplea el método de los momentos y se minimizan las funciones objetivo descritas en la metodología (ver numeral 3.1.2) para estimar los valores de los parámetros pertenecientes a cada una de las distribuciones de probabilidad (Calenda and Napolitano, 1999), (Cowpertwait et al., 2002).

El método de optimización empleado fue SLSQP: “*Sequential Least Squares Programming*” implementado en Python. Se definieron los límites de búsqueda de los parámetros para valores realistas de los mismos, partiendo de valores iniciales (semilla) centrada dentro del rango de búsqueda. Si no se lograba convergencia, se modificaban los valores iniciales manteniéndolos siempre dentro del rango de búsqueda inicial. En el Anexo 3 se reportan los resultados de la optimización en cada uno de los pasos descritos en el capítulo de metodología para cada mes. En los pasos 1, 3 y 4 los valores de la función objetivo son prácticamente “0”, en cambio en los pasos 2 y 5 podrían ser mejores para algunos meses.

#### 4.3.1 Parámetros para el conjunto de estaciones.

Los resultados para el conjunto de 4 estaciones con homogeneidad espacial se presentan en la Tabla 4-17 y Tabla 4-18.

Tabla 4-17 Valores obtenidos para parámetros agregados

<b>Mes</b>	$\lambda$	$\mu_c$	$\beta$	$\eta$	$\alpha$	$\Phi$
<b>1</b>	0.004	5.580	0.010	2.996	1.451	1.440
<b>2</b>	0.005	151.211	0.014	2.569	3.721	2.092
<b>3</b>	0.012	166.348	0.017	1.915	4.081	1.371
<b>4</b>	0.014	443.669	0.024	1.561	4.904	1.174
<b>5</b>	0.017	296.119	0.417	2.182	4.249	1.913
<b>6</b>	0.025	186.802	0.035	1.259	4.590	0.399
<b>7</b>	0.024	100.585	0.052	1.593	3.950	0.334
<b>8</b>	0.010	189.446	0.254	3.322	3.598	1.237
<b>9</b>	0.014	17.428	0.595	2.551	2.287	1.846
<b>10</b>	0.017	169.239	0.025	1.657	4.236	0.993
<b>11</b>	0.013	364.926	0.026	1.896	4.583	0.998
<b>12</b>	0.010	43.708	0.133	3.212	2.717	1.813

Tabla 4-18 Valores obtenidos parámetro  $\Theta$

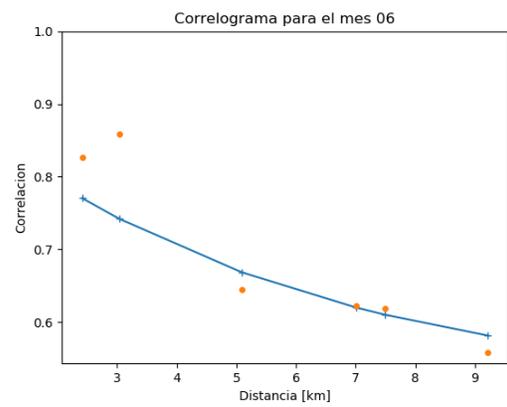
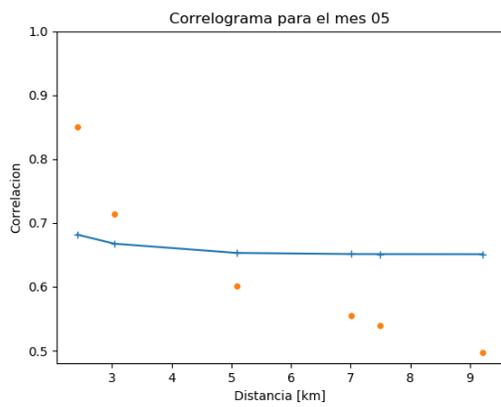
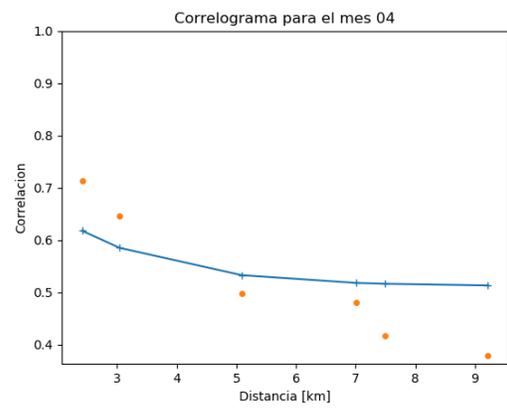
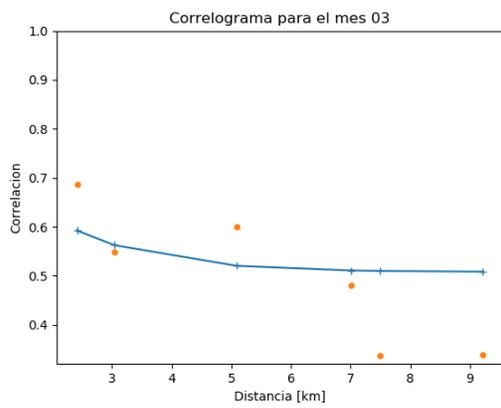
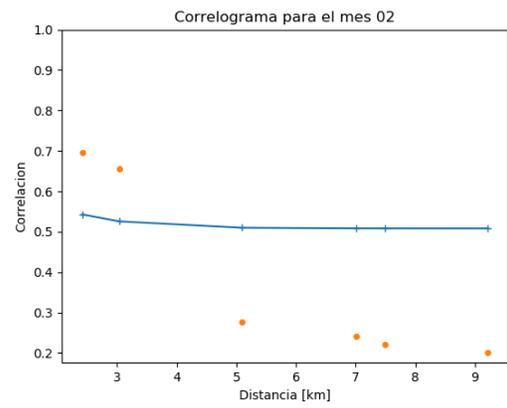
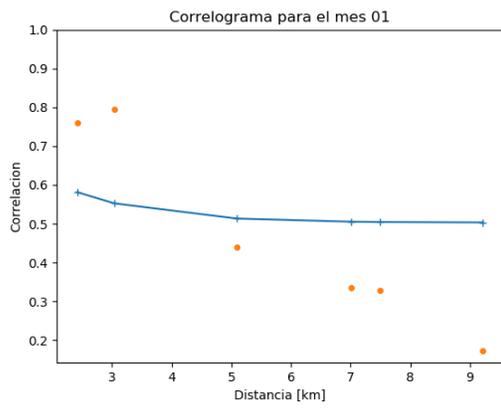
Mes	San_Benito	Dona_Juana	Quiba	UAN_Usme
<b>1</b>	1.989	1.692	1.638	1.787
<b>2</b>	0.294	0.295	0.288	0.297
<b>3</b>	0.245	0.234	0.241	0.232
<b>4</b>	0.194	0.194	0.191	0.195
<b>5</b>	0.209	0.208	0.204	0.209
<b>6</b>	0.178	0.186	0.177	0.189
<b>7</b>	0.204	0.219	0.205	0.227
<b>8</b>	0.252	0.259	0.250	0.270
<b>9</b>	0.445	0.456	0.439	0.475
<b>10</b>	0.231	0.222	0.224	0.218
<b>11</b>	0.212	0.208	0.208	0.204
<b>12</b>	0.500	0.447	0.473	0.456

Con los valores de los parámetros obtenidos se calculan los valores de los parámetros estadísticos teóricos cuya comparación con los observados da una idea de la bondad de la estimación. Se presentan en la Tabla 4-19.

Tabla 4-19 Comparación de estadísticos observados y calculados

Mes	niu1_obs	niu1_fitted	rho1_obs	rho1_fitted	k1_obs	k1_fitted	niu24_obs	niu24_fitted	rho24_obs	rho24_fitted
1	14.11	14.12	0.22	0.23	16.69	16.69	3.72	3.62	0.08	0.08
2	8.86	8.87	0.27	0.27	13.26	13.27	2.57	2.47	0.15	0.16
3	6.53	6.54	0.35	0.35	11.02	11.04	2.08	1.92	0.12	0.13
4	5.44	6.11	0.42	0.42	9.38	9.43	1.81	1.93	0.17	0.15
5	5.65	5.66	0.46	0.46	9.21	9.21	1.96	1.93	0.04	0.04
6	5.28	5.36	0.48	0.48	9.10	9.11	1.76	1.78	0.12	0.12
7	5.28	5.28	0.42	0.42	9.33	9.33	1.71	1.71	0.13	0.13
8	6.48	6.48	0.41	0.38	10.39	10.39	2.07	2.28	0.07	0.07
9	7.73	7.73	0.39	0.39	11.62	11.61	2.41	2.36	0.02	0.02
10	5.89	5.90	0.39	0.40	9.48	9.48	1.90	1.82	0.13	0.14
11	5.72	5.87	0.36	0.36	9.79	9.80	1.81	1.81	0.18	0.17
12	7.37	7.37	0.30	0.29	11.44	11.45	2.30	2.42	0.12	0.11

En la Figura 4-9 se muestra para cada mes el desempeño para la correlación cruzada. Los valores unidos con una línea azul son los obtenidos con los parámetros y los puntos naranja corresponden con la correlación de los valores observados.



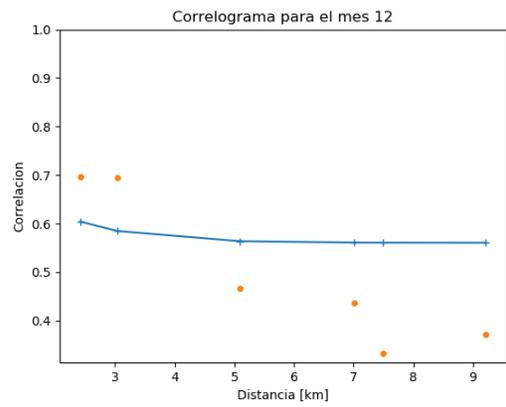
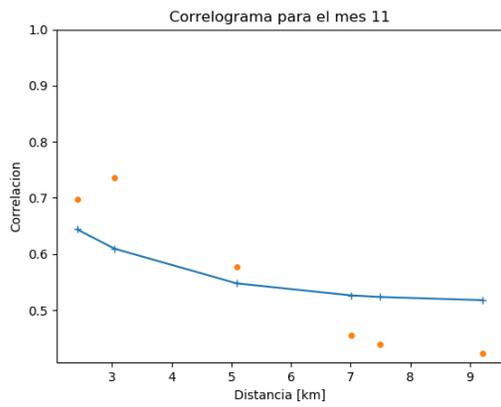
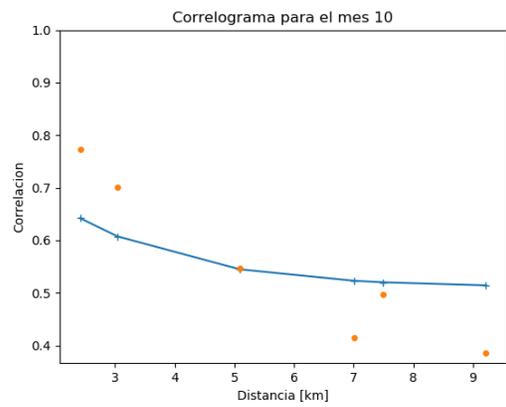
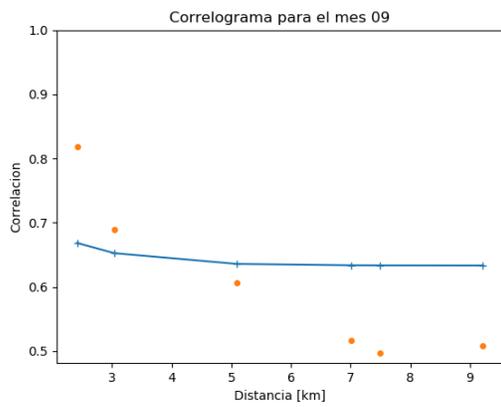
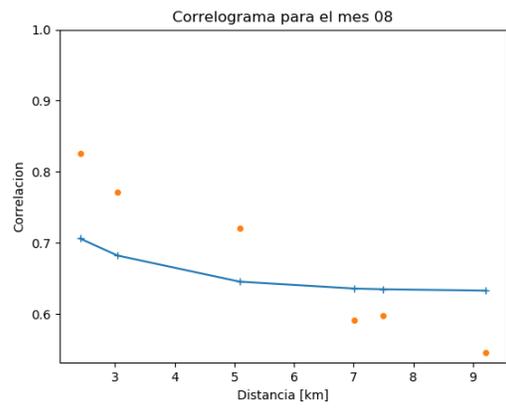
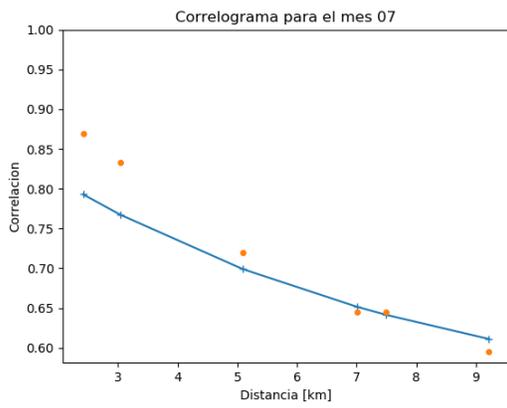


Figura 4-9 Comparación correlación cruzada observados y obtenidos mediante parámetros optimizados

#### 4.4 Generación sintética de series espaciales

Con el conjunto de parámetros encontrado en el paso previo se generan campos espaciales de lluvia sintética mediante el método de Monte Carlo (Calenda and Napolitano, 1999). Para el ejercicio se desarrollaron rutinas en Python que emplean los parámetros propios de cada mes, para generar series sintéticas de 11 años de lluvia simultánea en las 4 estaciones (misma longitud de la serie observada). Este ejercicio se repitió 10 veces obteniendo 10 series sintéticas de 11 años de lluvia simultánea en las 4 estaciones en resolución horaria, o lo que es lo mismo, se obtuvieron 110 realizaciones de lluvia para cada mes.

Se presentan en la Figura 4-10 a la Figura 4-21 algunas realizaciones típicas generadas para cada mes, seleccionadas al azar del conjunto de 110 realizaciones:

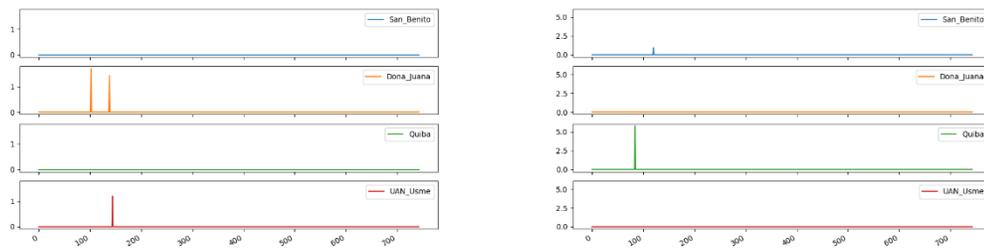


Figura 4-10 Realizaciones aleatorias enero. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

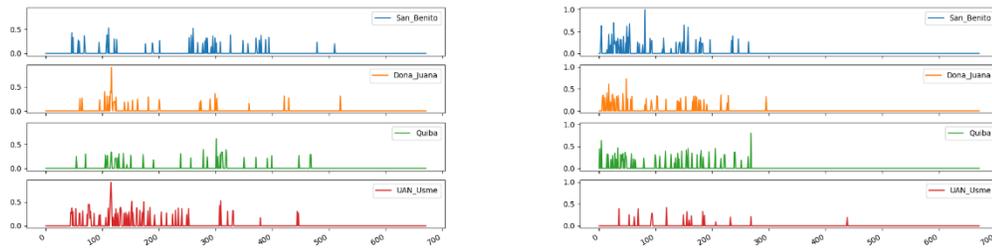


Figura 4-11 Realizaciones aleatorias febrero. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

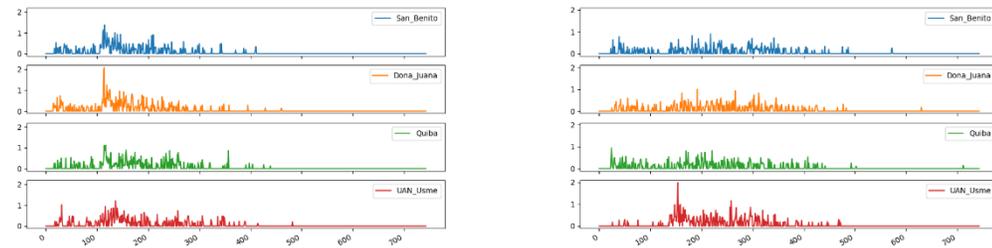


Figura 4-12 Realizaciones aleatorias marzo. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

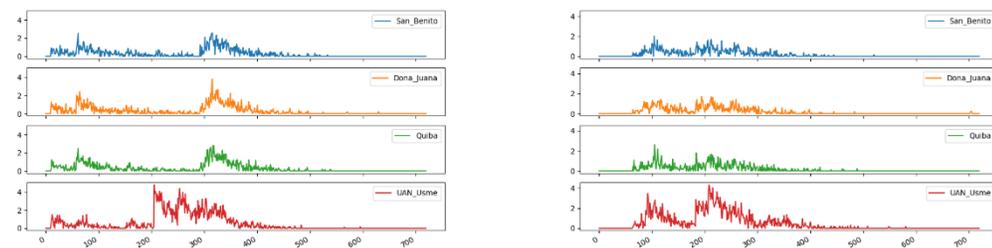


Figura 4-13 Realizaciones aleatorias abril. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

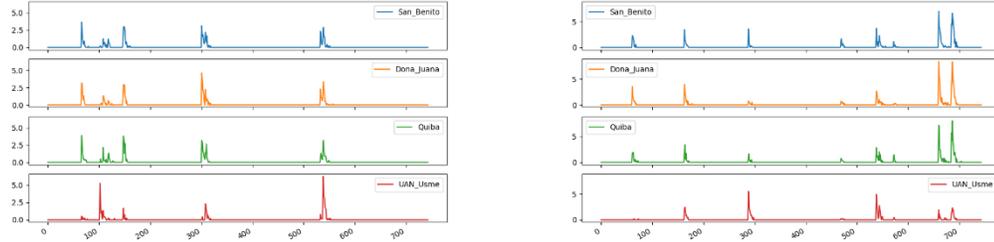


Figura 4-14 Realizaciones aleatorias mayo. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

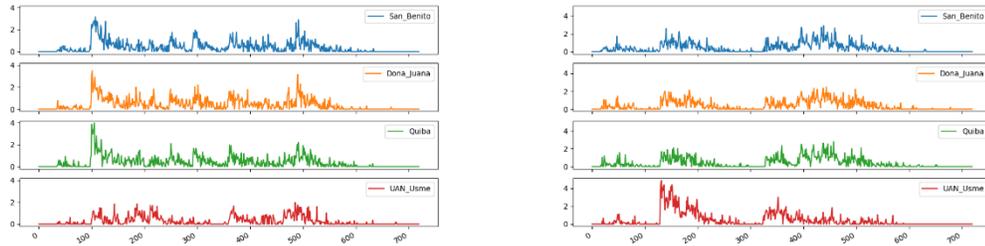


Figura 4-15 Realizaciones aleatorias junio. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

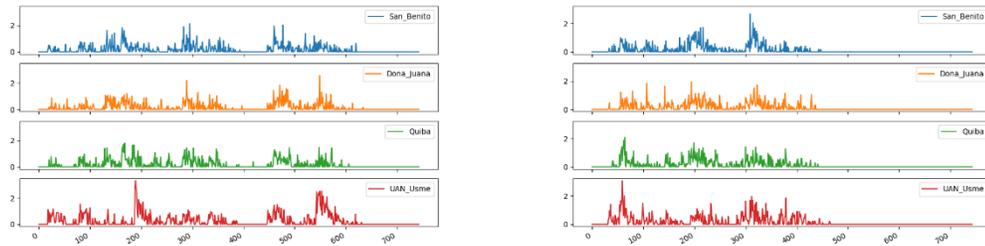


Figura 4-16 Realizaciones aleatorias julio. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

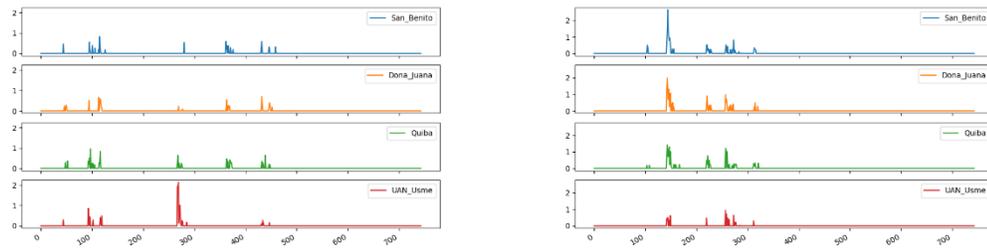


Figura 4-17 Realizaciones aleatorias agosto. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

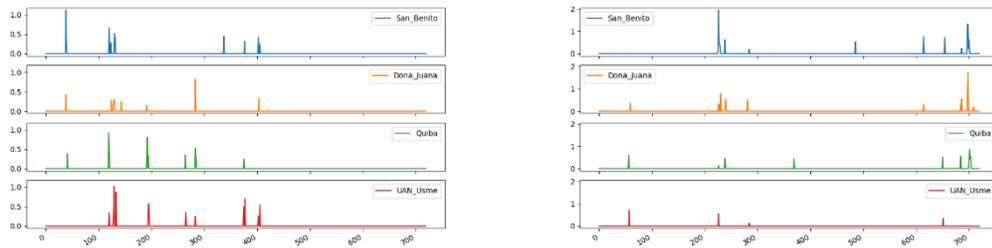


Figura 4-18 Realizaciones aleatorias septiembre. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

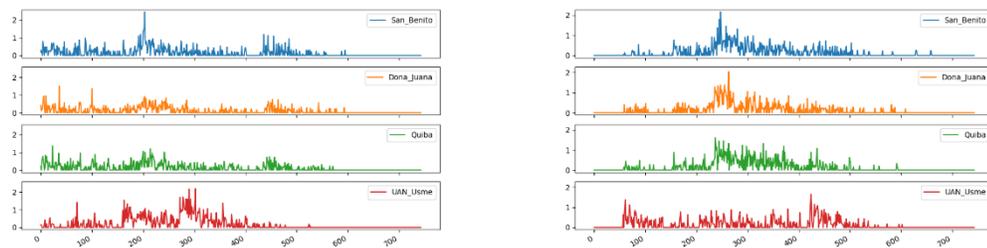


Figura 4-19 Realizaciones aleatorias octubre. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

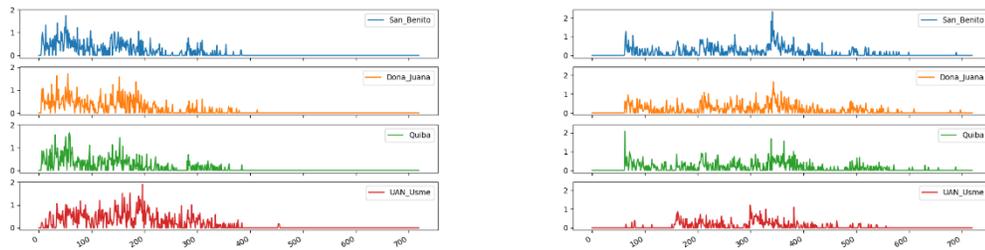


Figura 4-20 Realizaciones aleatorias noviembre. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

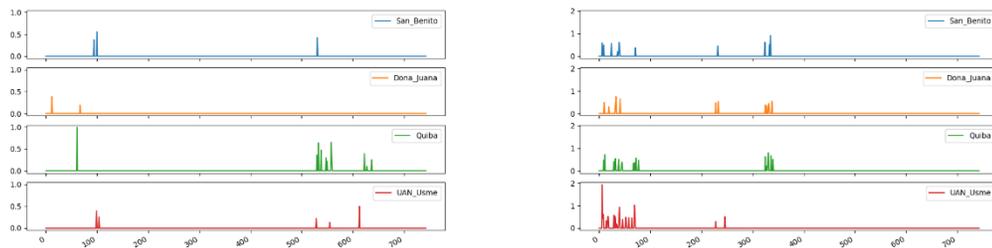


Figura 4-21 Realizaciones aleatorias diciembre. Abscisas: tiempo (h), Ordenadas: lluvia (mm)

Para visualizar espacialmente las lluvias observadas y generadas, se incluyen en la Figura 4-23 a la Figura 4-46, mapas de algunos episodios seleccionados aleatoriamente observados y sintéticos generados de manera simultánea mediante la metodología aplicada. Los mapas presentan la lluvia durante una hora y se muestran en secuencia hora a hora durante el episodio de lluvia. Los mapas fueron realizados en Python mediante interpolación de las lluvias puntuales horarias, la interpolación se hizo con el método *Inverse Distance Weighting*. Para todos los casos la convención para la lluvia en milímetros se presenta en la Figura 4-22.



Figura 4-22 Convención para los mapas de lluvia en mm

Se aclara que la metodología empleada no pretende reproducir episodios de lluvias observadas sino generar muchos escenarios de cuyos parámetros estadísticos mensuales sean preservados. Los mapas de lluvias sintéticas que se presentan a continuación son una muestra aleatoria de las múltiples realizaciones del modelo y se acompañan de mapas de lluvia observada solo para tener una idea de la capacidad de la metodología para reproducir episodios similares. El desempeño del método es evaluado en el capítulo siguiente.

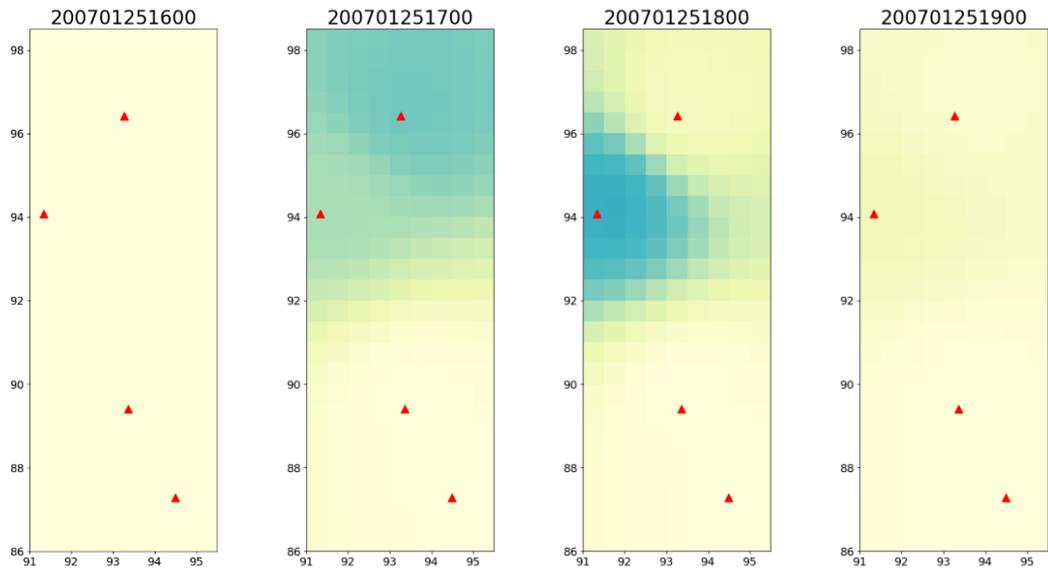


Figura 4-23 Episodio aleatorio de lluvia observada enero

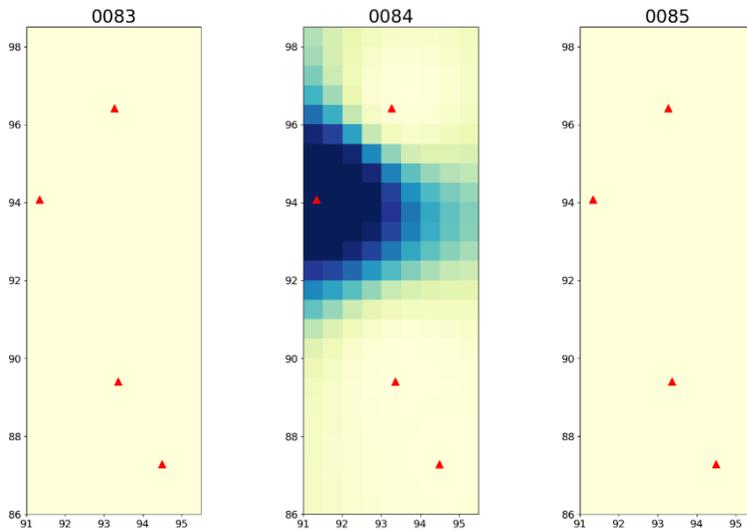


Figura 4-24 Episodio aleatorio de lluvia sintética enero

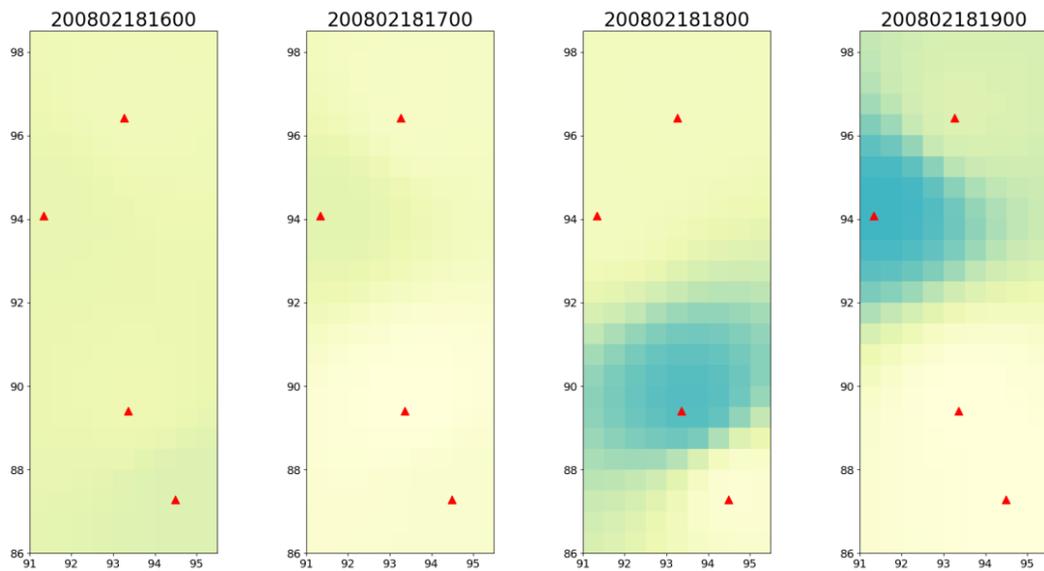


Figura 4-25 Episodio aleatorio de lluvia observada febrero

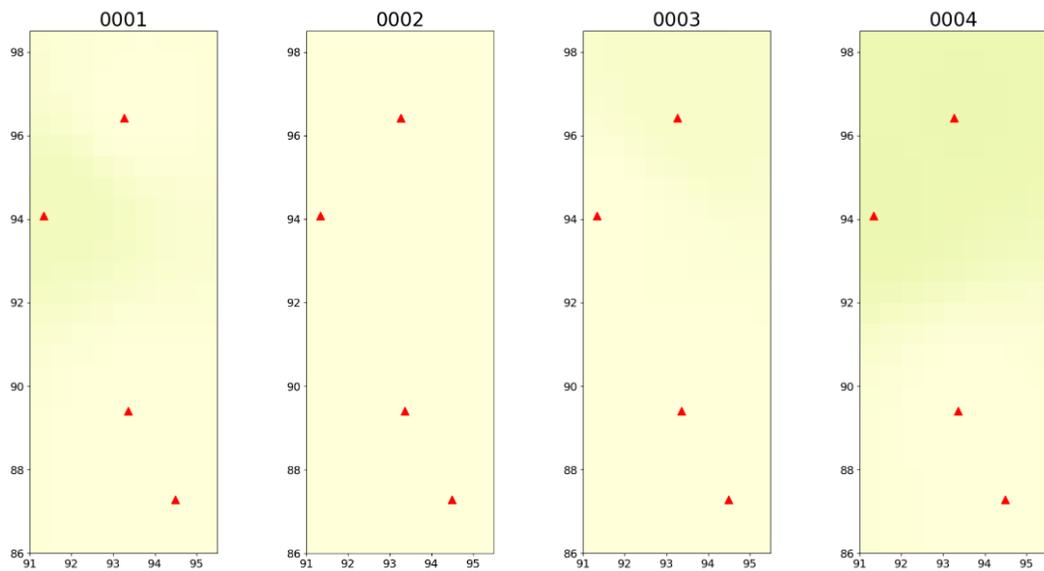


Figura 4-26 Episodio aleatorio de lluvia sintética febrero

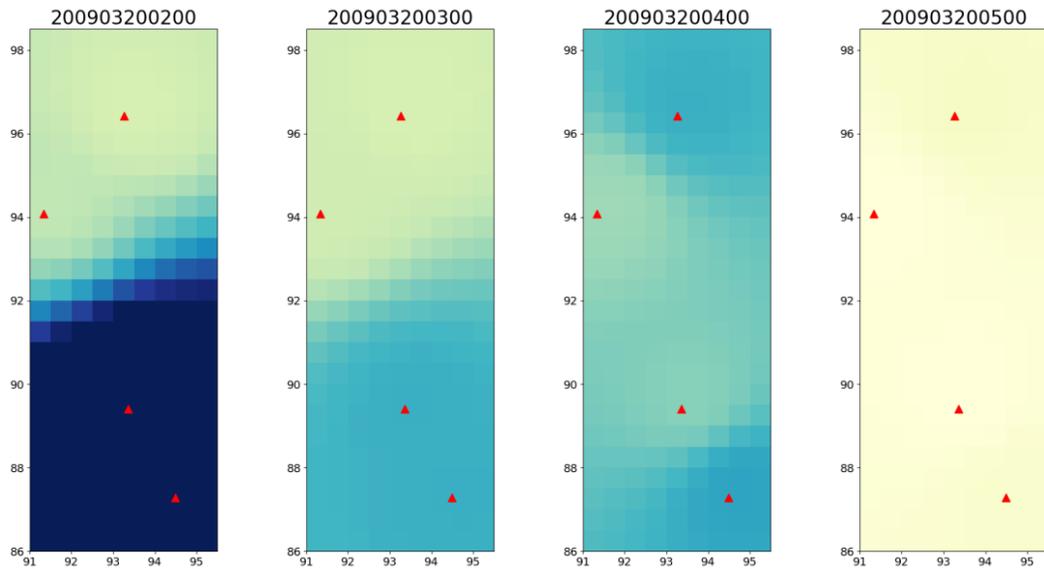


Figura 4-27 Episodio aleatorio de lluvia observada marzo

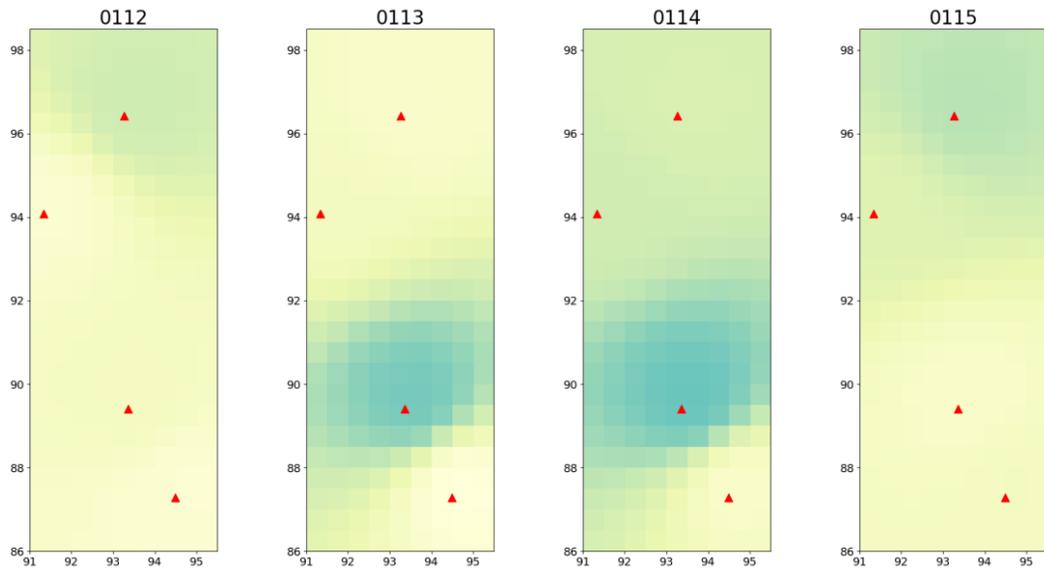


Figura 4-28 Episodio aleatorio de lluvia sintética marzo

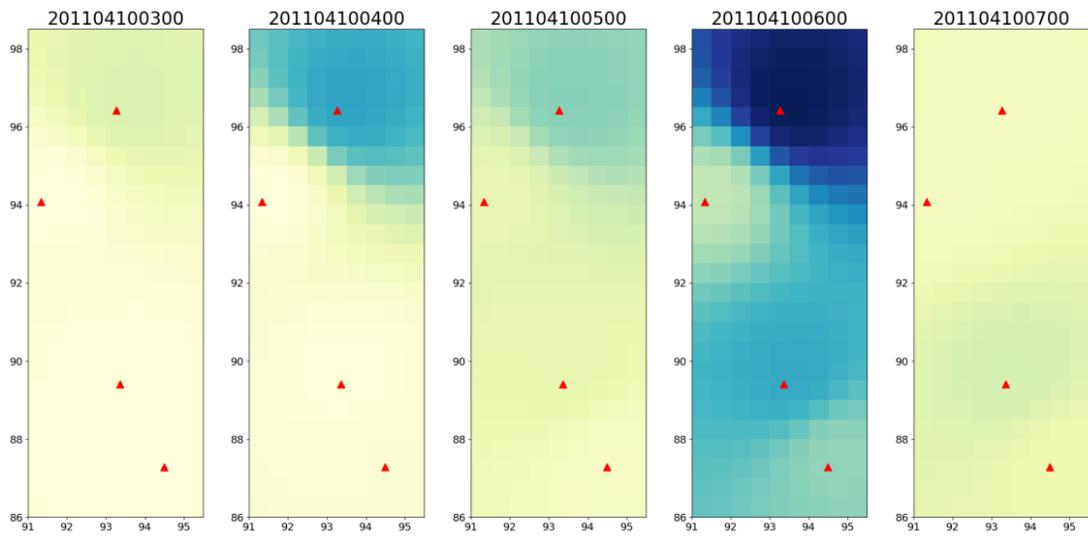


Figura 4-29 Episodio aleatorio de lluvia observada abril

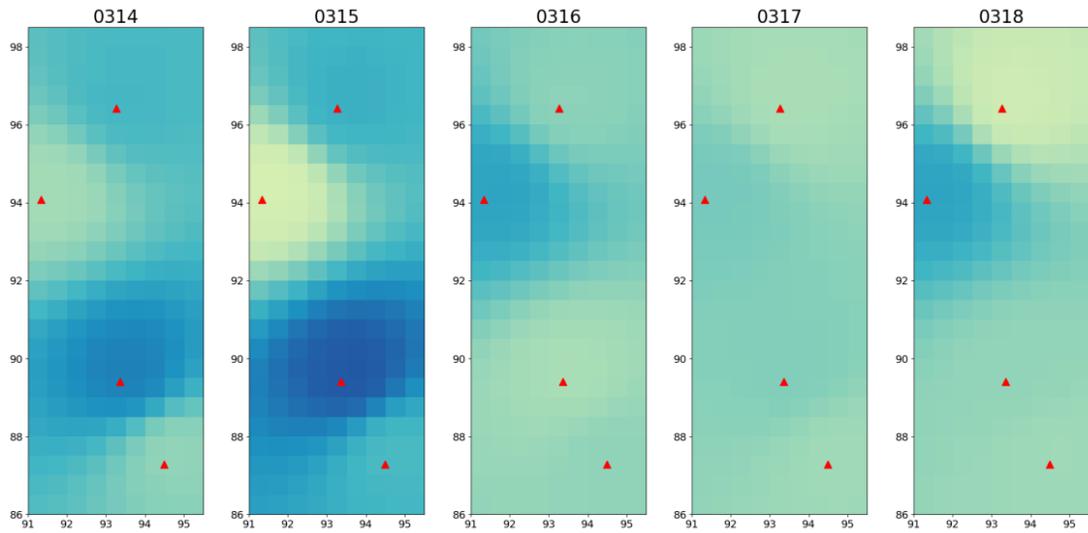


Figura 4-30 Episodio aleatorio de lluvia sintética abril

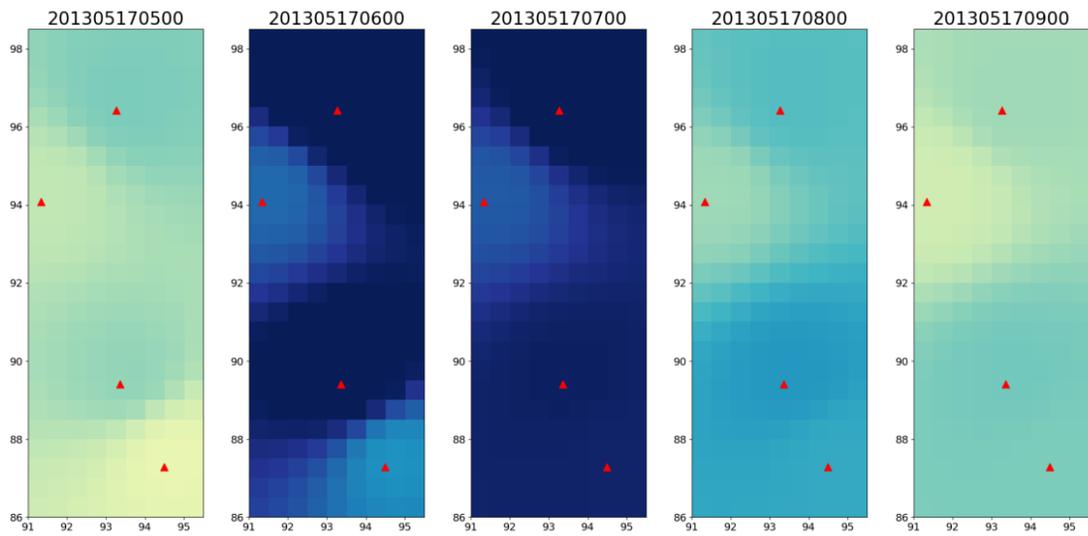


Figura 4-31 Episodio aleatorio de lluvia observada mayo

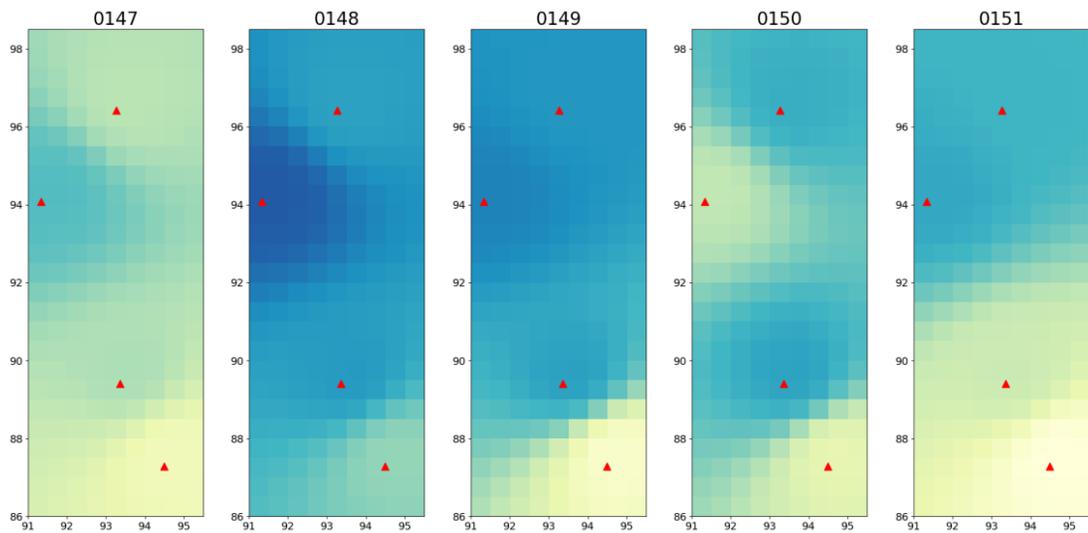


Figura 4-32 Episodio aleatorio de lluvia sintética mayo

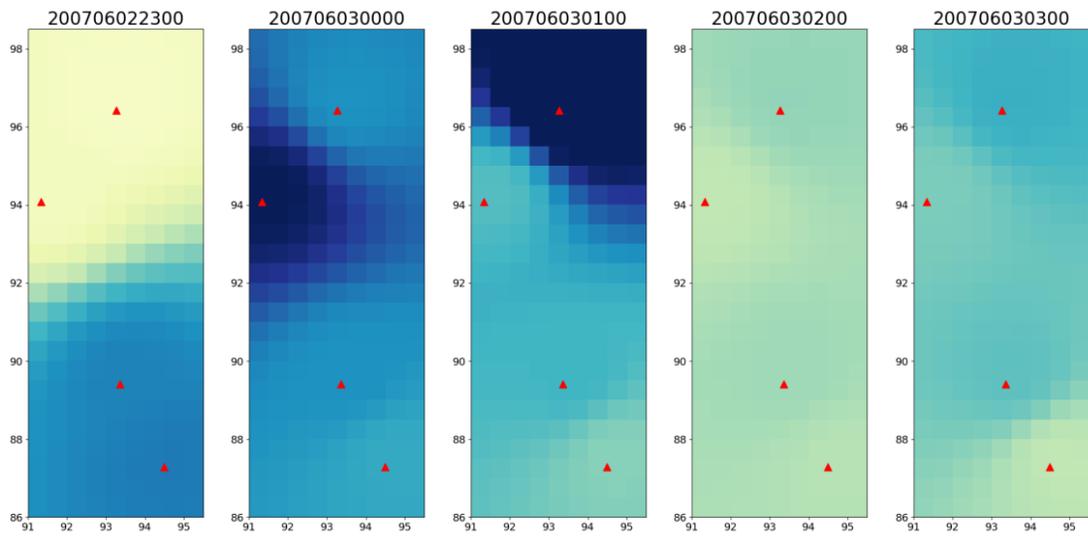


Figura 4-33 Episodio aleatorio de lluvia observada junio

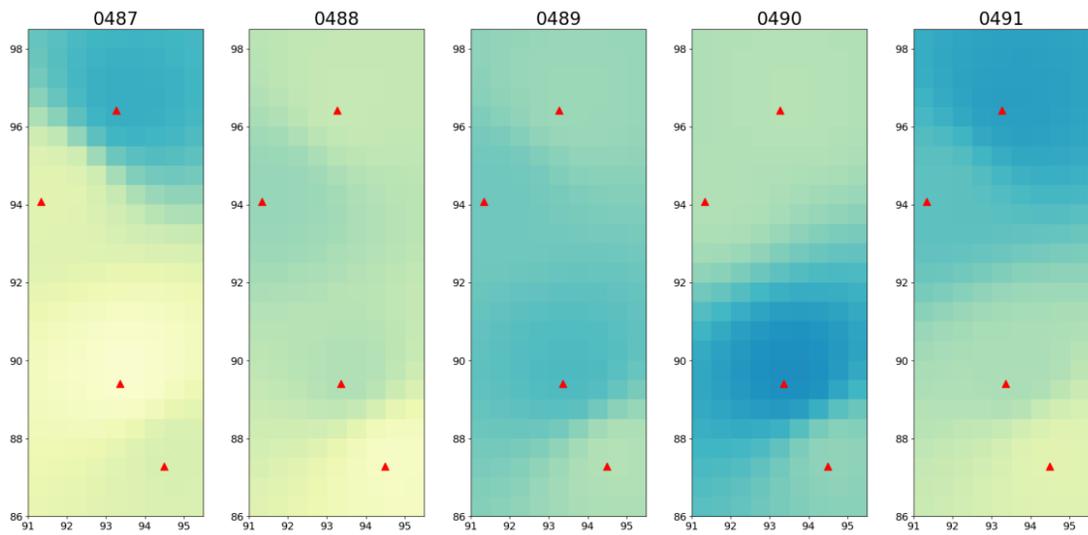


Figura 4-34 Episodio aleatorio de lluvia sintética junio

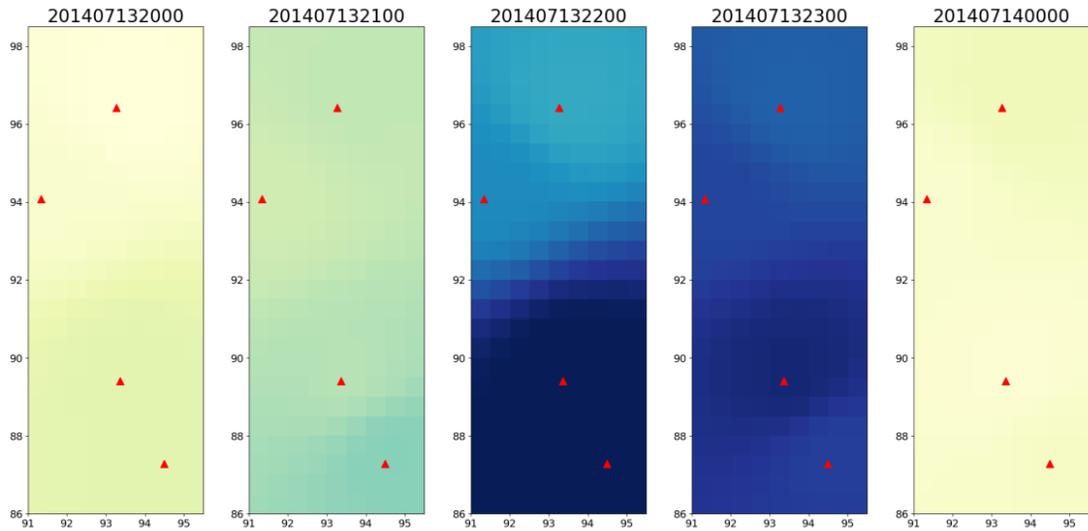


Figura 4-35 Episodio aleatorio de lluvia observada julio

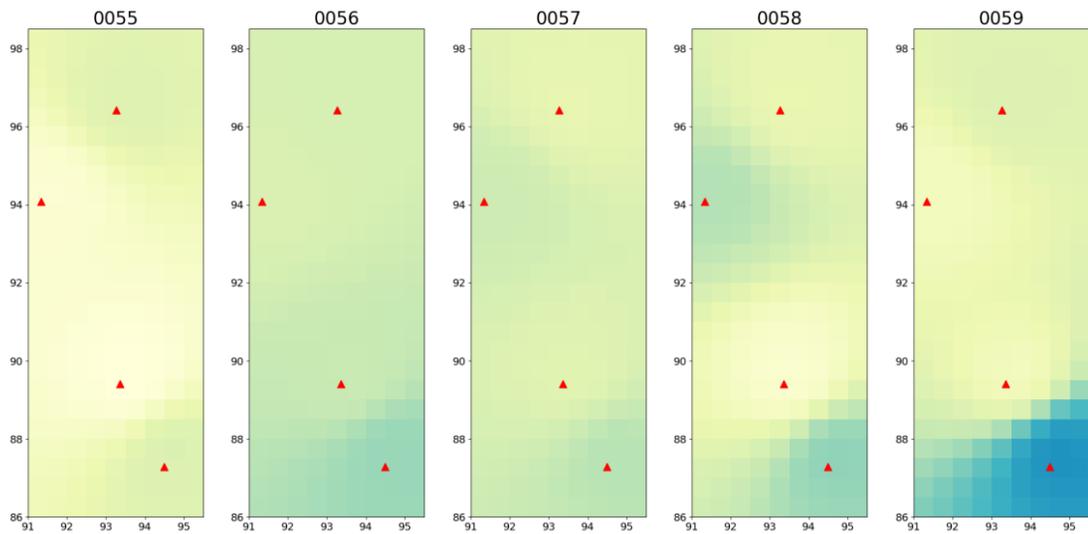


Figura 4-36 Episodio aleatorio de lluvia sintética julio

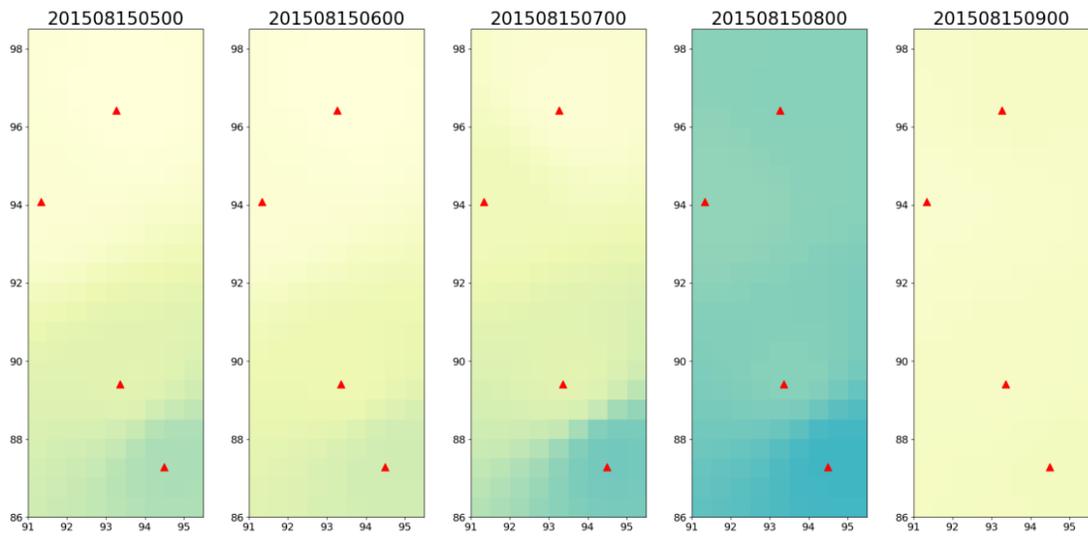


Figura 4-37 Episodio aleatorio de lluvia observada agosto

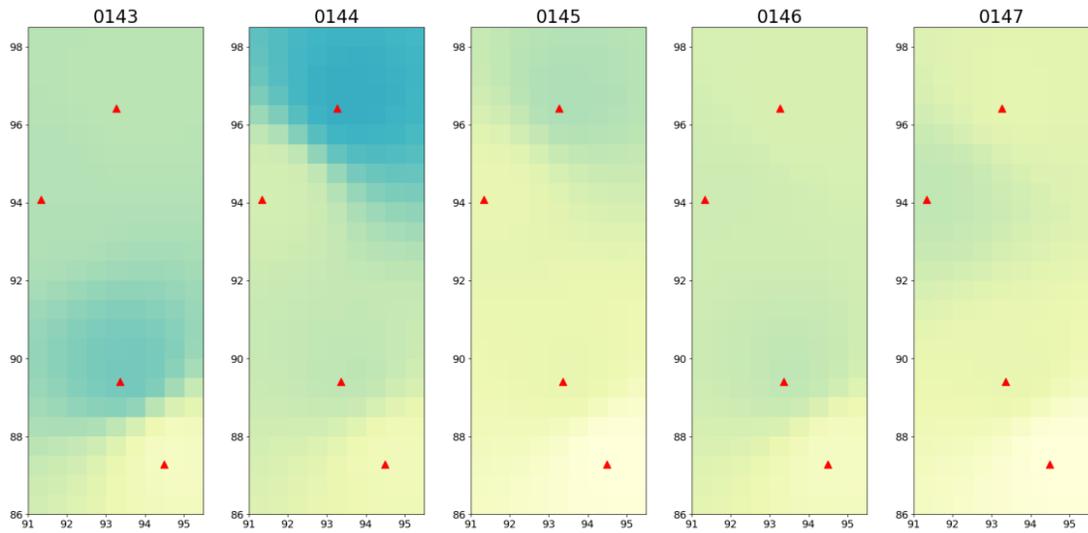


Figura 4-38 Episodio aleatorio de lluvia sintética agosto

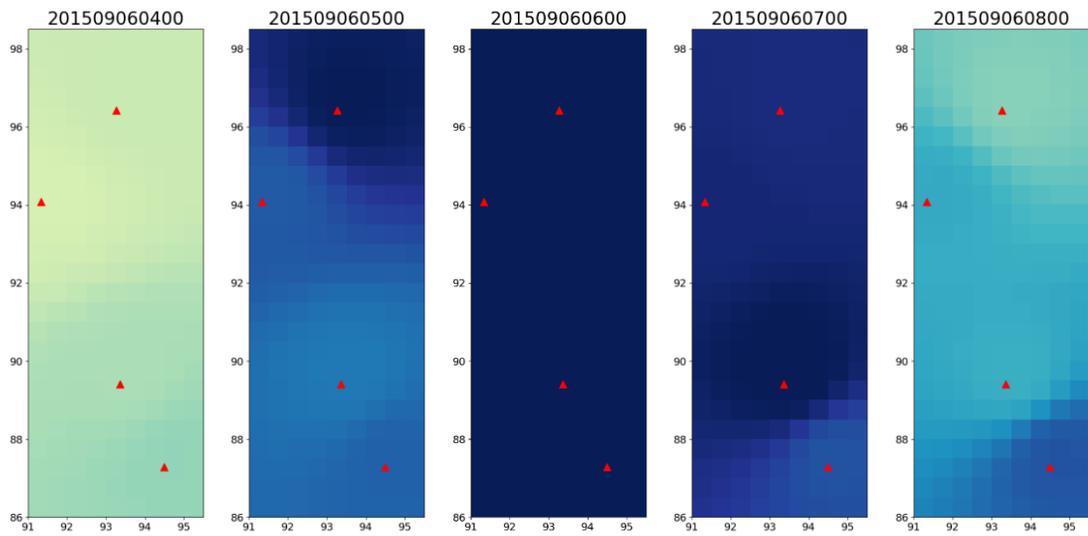


Figura 4-39 Episodio aleatorio de lluvia observada septiembre

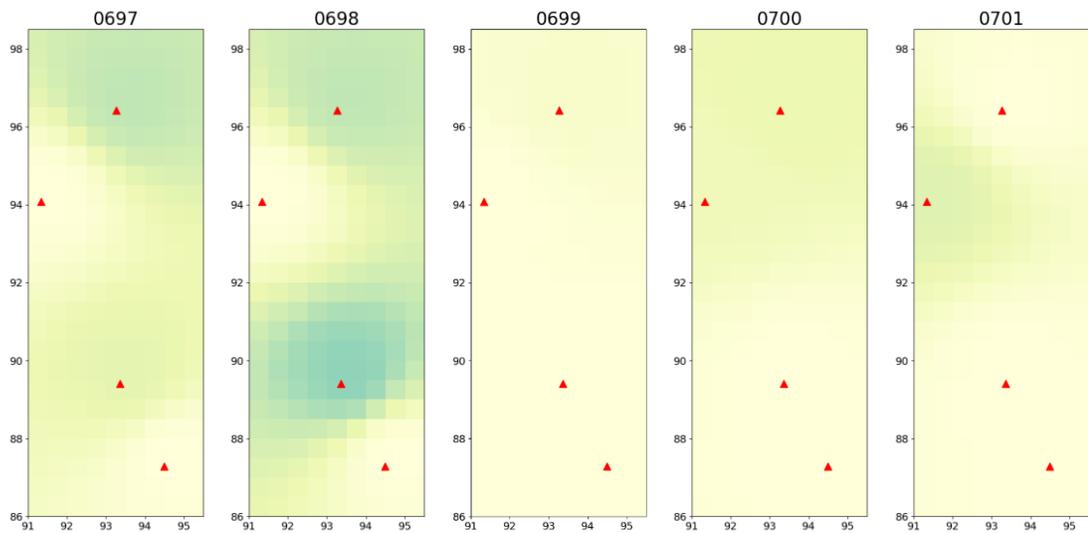


Figura 4-40 Episodio aleatorio de lluvia sintética septiembre

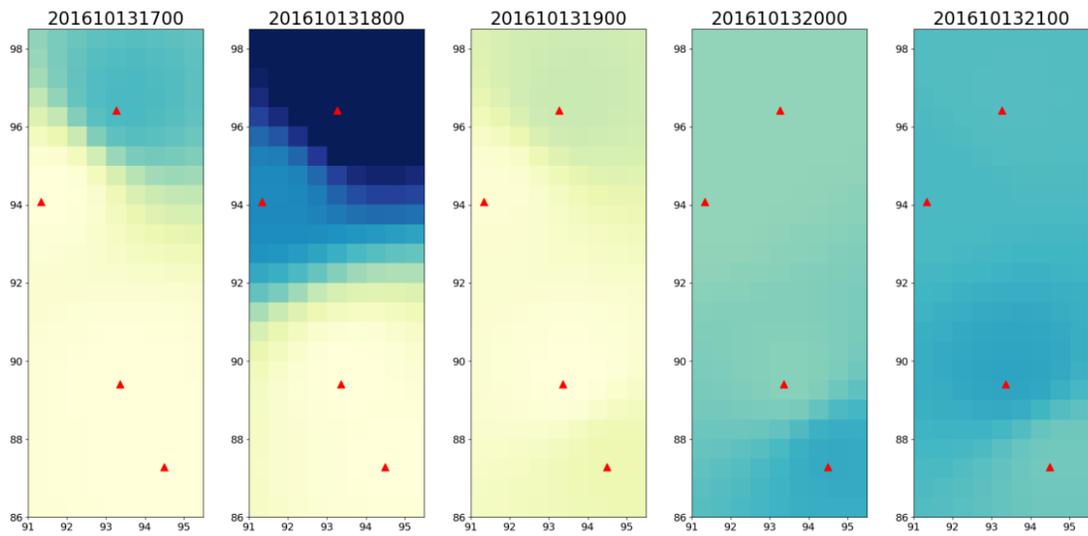


Figura 4-41 Episodio aleatorio de lluvia observada octubre

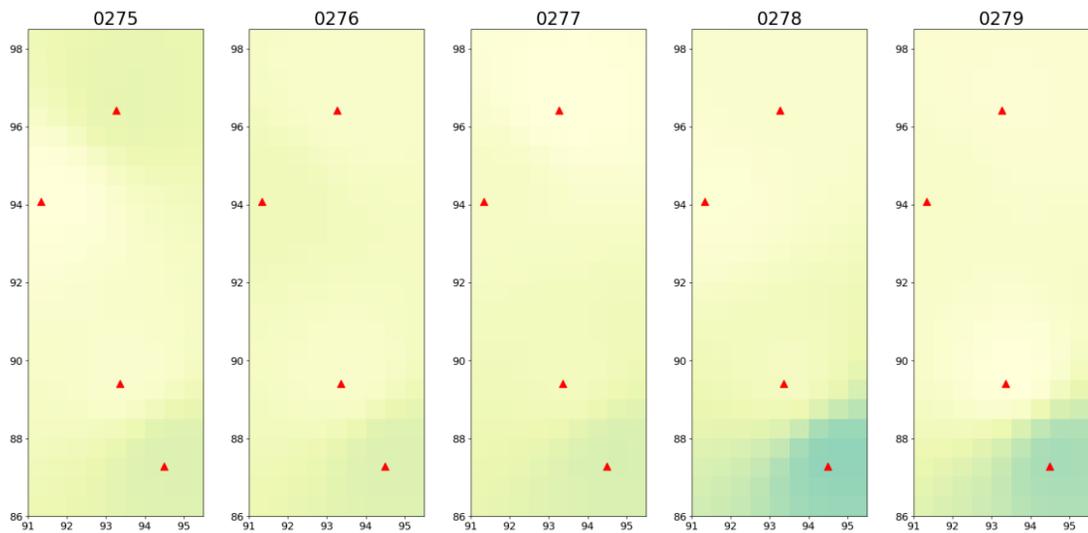


Figura 4-42 Episodio aleatorio de lluvia sintética octubre

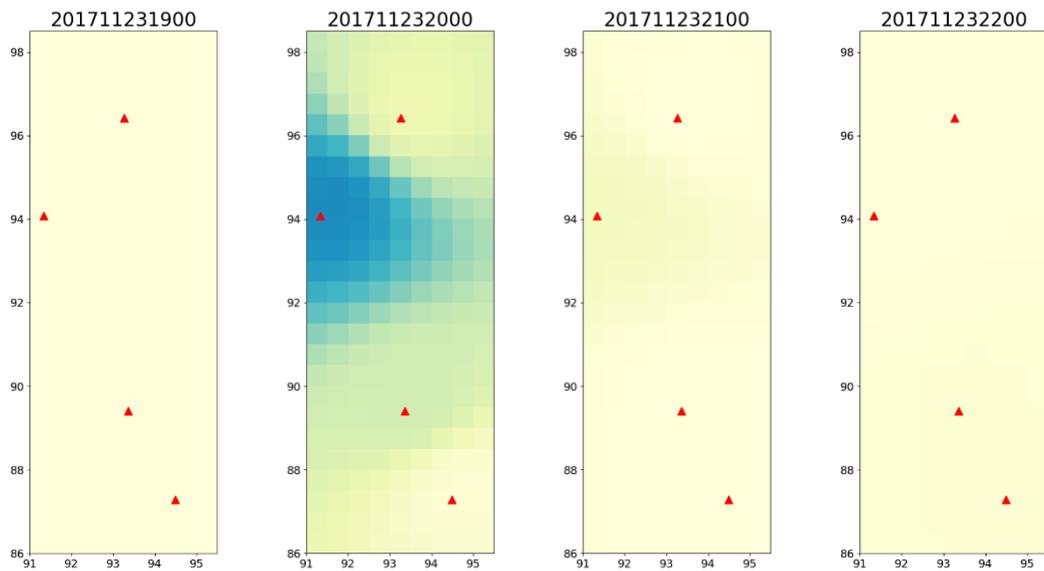


Figura 4-43 Episodio aleatorio de lluvia observada noviembre

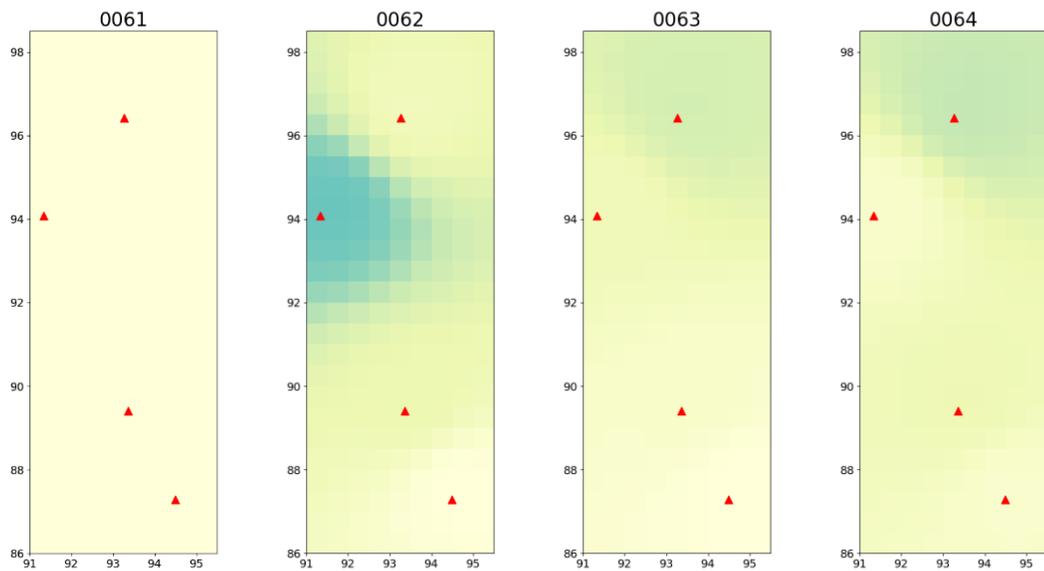


Figura 4-44 Episodio aleatorio de lluvia sintética noviembre

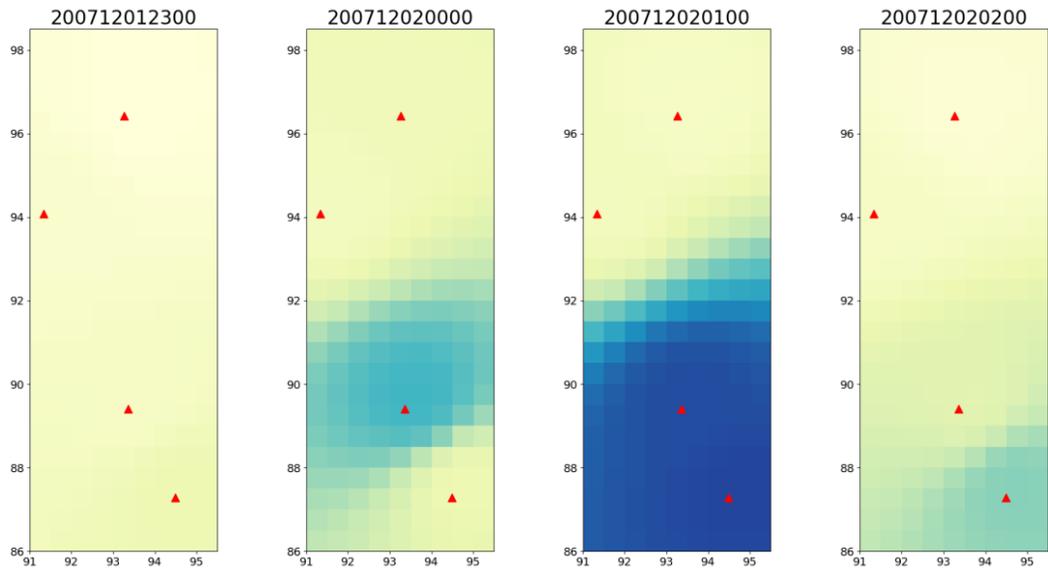


Figura 4-45 Episodio aleatorio de lluvia observada diciembre

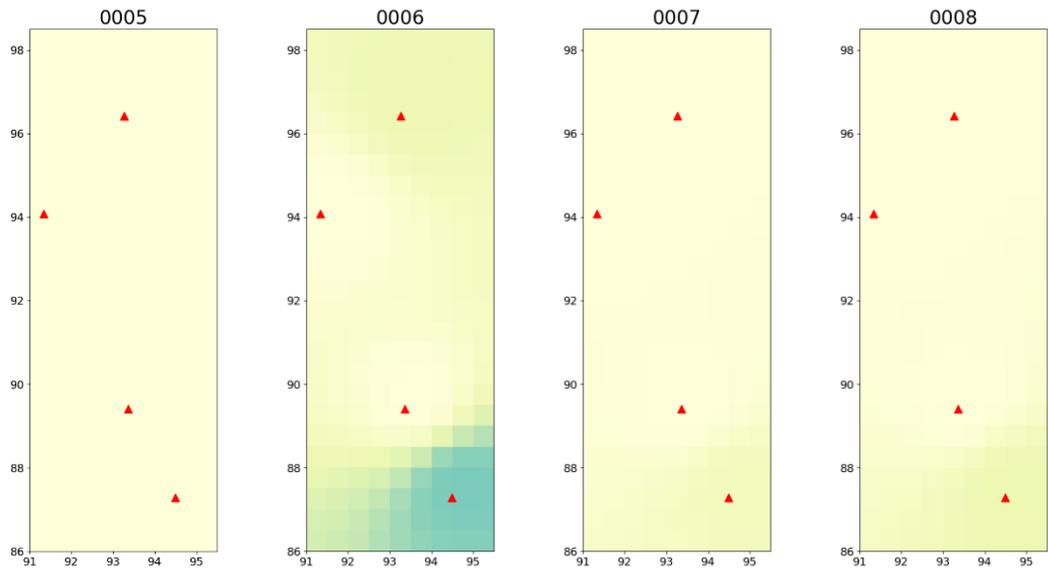


Figura 4-46 Episodio aleatorio de lluvia sintética diciembre

En diciembre, enero, febrero y marzo se presentan lluvias bastante puntuales y aisladas por estaciones, el modelo es capaz de generar sintéticamente las lluvias con esas características en enero bastante bien y no tanto así en febrero, marzo y diciembre.

En abril, mayo y junio las lluvias son más prolongadas e intensas que el trimestre precedente, así mismo parece que los campos de lluvia observado cubren un campo más amplio de manera que las lluvias en las diferentes estaciones parecen darse de manera simultánea en más ocasiones, el modelo es capaz de generar sintéticamente lluvias con esas características en los tres meses aunque la capacidad para reproducir las intensidades de junio parece limitada.

En el mes de julio el modelo tiene dificultades para replicar lluvias sintéticas con la misma intensidad de las lluvias observadas, aunque parece interpretar bien su relación espacial.

En agosto y septiembre se presentan lluvias bastante puntuales, el modelo es capaz de generar sintéticamente las lluvias con esas características en agosto, pero muy difícilmente en septiembre.

En octubre y noviembre las lluvias son más prolongadas e intensas que el trimestre precedente, el modelo reproduce bien la relación espacial pero no tanto así la intensidad en octubre y noviembre.

#### **4.5 Conclusiones (análisis de resultados)**

Se realizó un análisis ANOVA sobre las lluvias históricas en agregación diaria. Se encontró que para el conjunto de las 4 estaciones seleccionadas, el área puede considerarse homogénea ya que no puede rechazarse la hipótesis nula ( $H_0$ : las medias de las muestras son iguales), ya que el nivel de confianza para hacerlo es bajo (por debajo de 75%). Se acepta la hipótesis nula y se considera que los datos son homogéneos en la región.

Se puede ver que los valores de los estadísticos siguen una variación estacional:  
(i) los valores de  $\lambda$  y  $\mu_c$  son pequeños en los meses de pocas lluvias y viceversa,  
(ii) los valores de  $\alpha$  representan lluvias más intensas en los meses con mayores acumulados de precipitación.

Con los valores de los parámetros obtenidos se logró tener una buena aproximación a los valores de los estadísticos de las series observadas para todos los meses (ver Tabla 4-19), sin embargo, para la correlación cruzada se obtuvo un buen ajuste primordialmente para los meses con mayores lluvias (ver Figura 4-9), con lo cual se espera que la generación sintética presente mejor desempeño entre abril y julio.

Los resultados del proceso de optimización son buenos en su mayoría, obteniéndose un conjunto de parámetros con valores realistas. Sin embargo, existe campo para mejorar los resultados de la optimización con la exploración de diferentes metodologías y criterios.

En general, las lluvias sintéticas generadas mediante el método empleado son menos intensas y más continuas que las lluvias observadas.

Revisando episodios de lluvia observados y generados sintéticamente para los diferentes meses, se observa que las lluvias sintéticas reproducen la correlación espacial mejor de lo esperado en los meses secos ya que no se esperaba un buen desempeño debido al ajuste logrado por la modelación para la correlación cruzada.

## Capítulo V

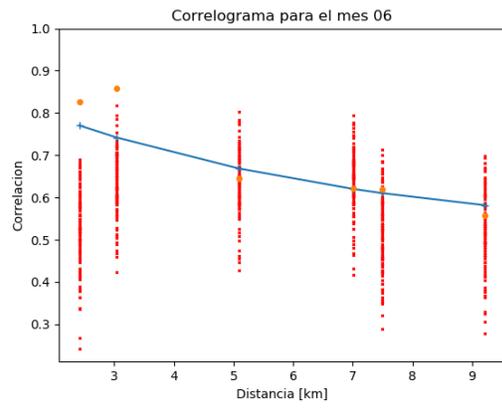
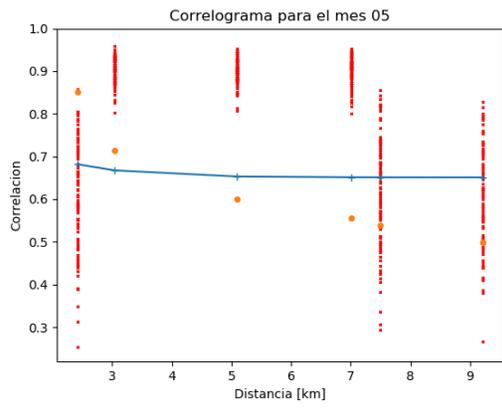
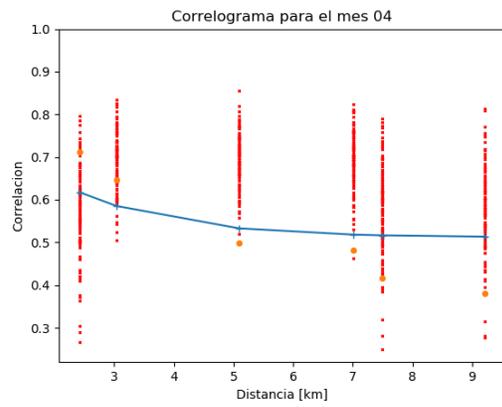
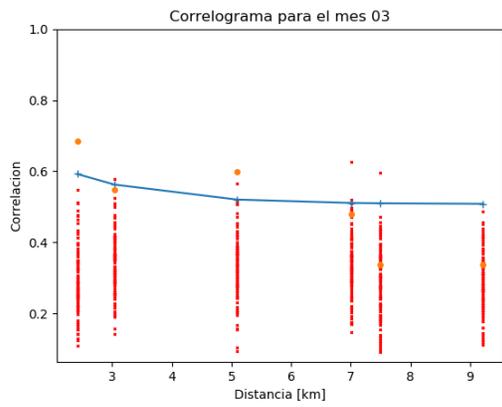
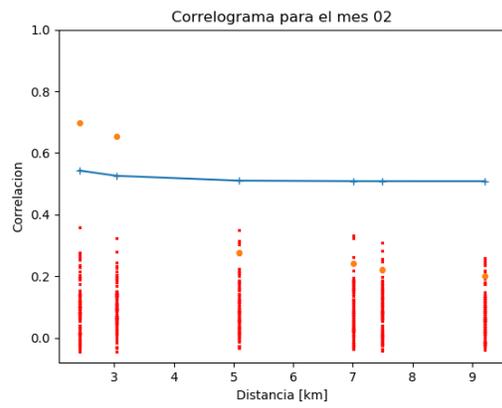
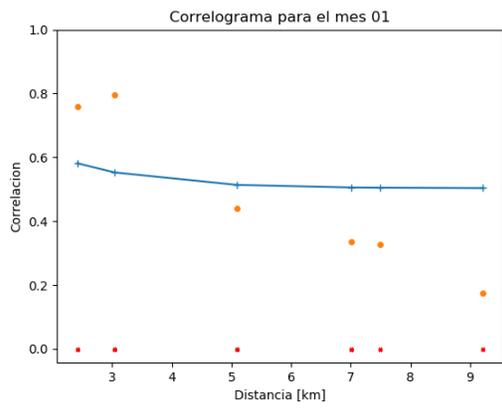
### Medición del desempeño del modelo calibrado

Se evalúa el desempeño del generador sintético de campos de lluvia en la reproducción de la variación espacio-temporal de los mismos.

Como se explicó en el capítulo anterior, se realizaron 110 realizaciones de lluvia para los doce meses del año en todas las estaciones de la zona de estudio.

#### 5.1 Correlación cruzada

Para iniciar con la estimación de la bondad del método para generar lluvia que preserve las características estadísticas de las series observadas, se presenta la Figura 5-1 en donde se muestra la comparación de la correlación cruzada de los de los datos observados (puntos anaranjados), con el ajuste obtenido en la parametrización del modelo (línea azul) y con los datos simulados (cruces rojas).



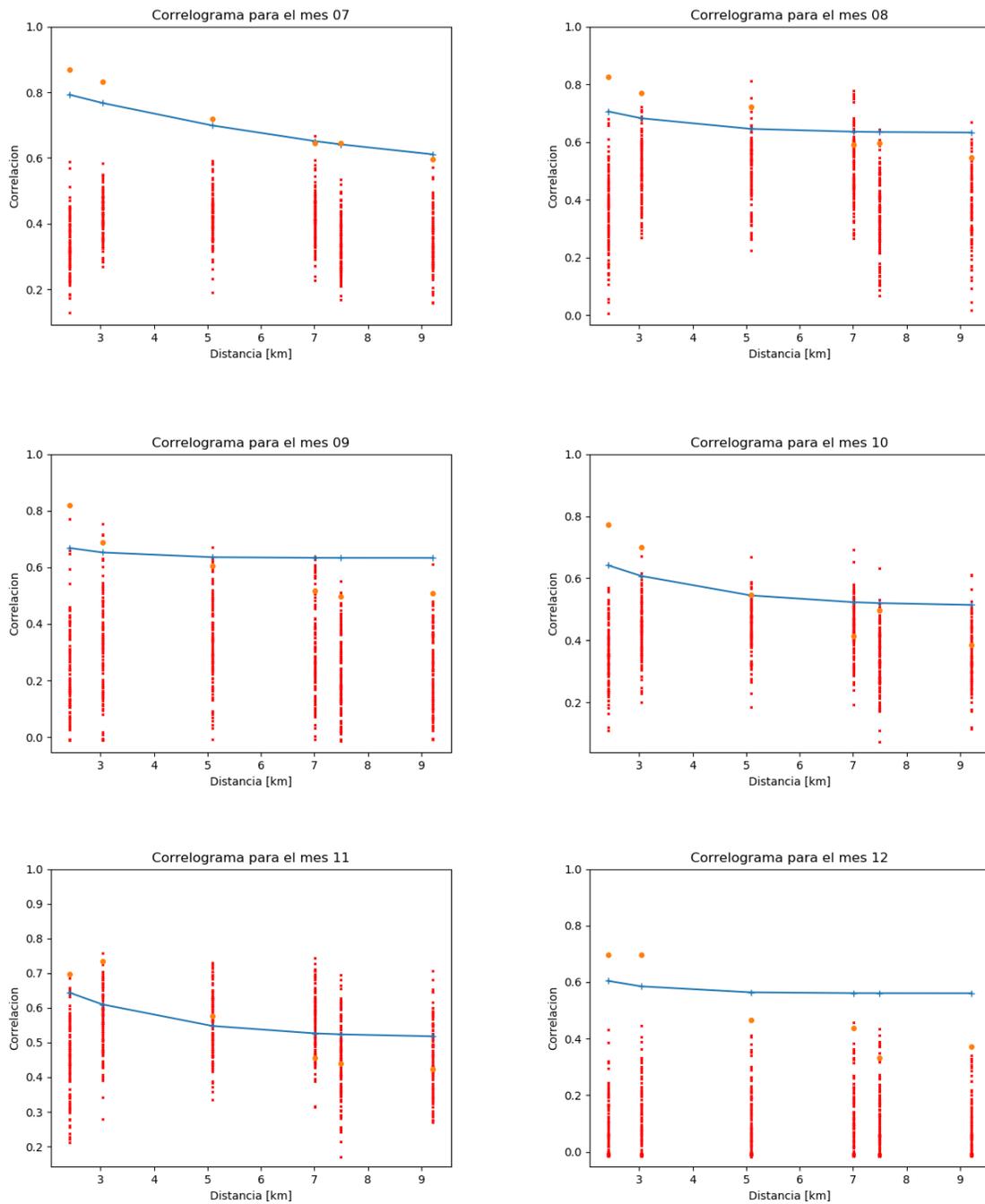


Figura 5-1 Comparación correlación cruzada observados, obtenidos y simulados

En los meses de abril, junio y noviembre el modelo produce realizaciones que presentan correlaciones que están alrededor de las correspondientes a los datos observados inclusive si el ajuste obtenido para la parametrización del modelo no parece tan cercano a la misma referencia.

## 5.2 Preservación de la varianza

Para establecer el grado de preservación de la varianza en los sitios puntuales se muestran *box-plot* (Figura 5-2 a Figura 5-5) con la varianza de las realizaciones y puntos azules con la varianza de la serie observada.

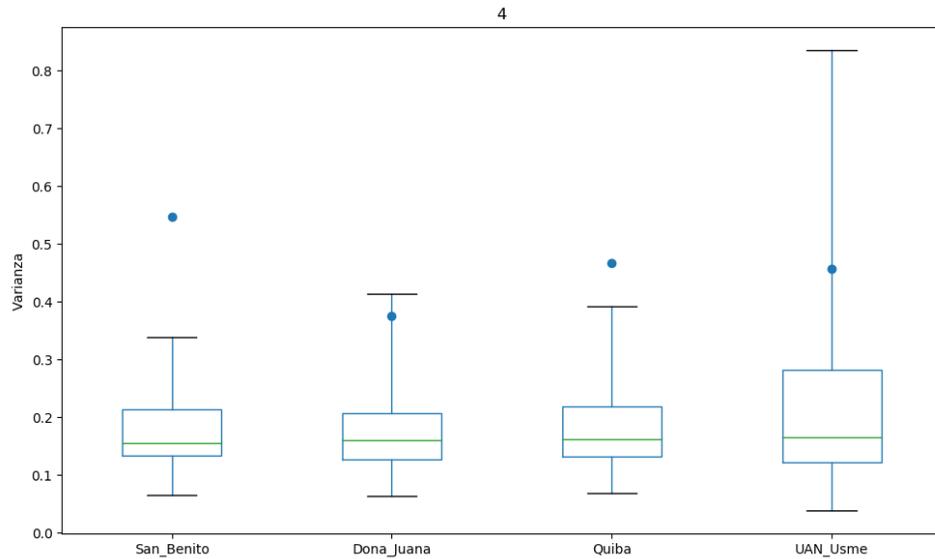


Figura 5-2 Varianza realizaciones vs varianza serie observada abril

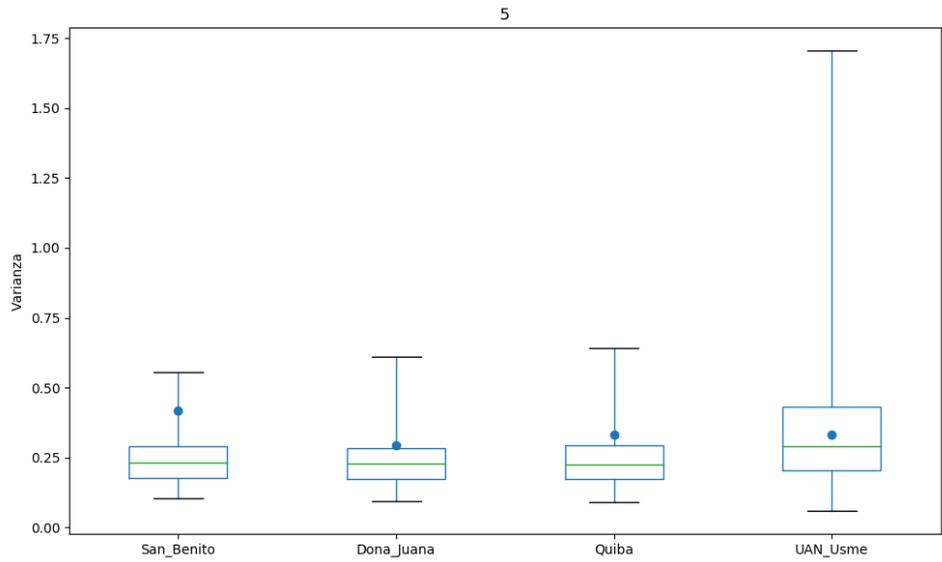


Figura 5-3 Varianza realizaciones vs varianza serie observada mayo

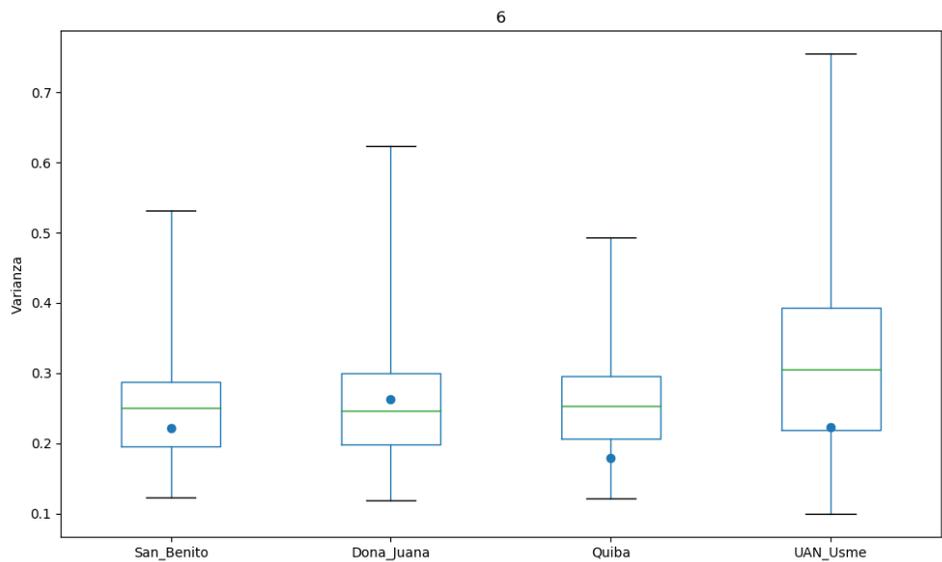


Figura 5-4 Varianza realizaciones vs varianza serie observada junio

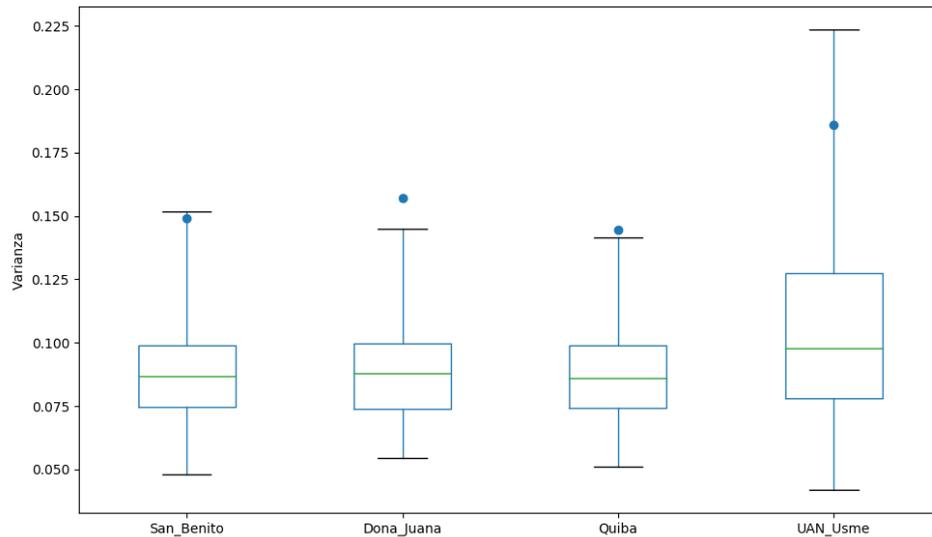


Figura 5-5 Varianza realizaciones vs varianza serie observada julio

Para los meses de mayo (Figura 5-3) y junio (Figura 5-4), el modelo logró preservar la varianza; específicamente para el mes de junio las varianzas de la serie observada están dentro de los percentiles 25 y 75 de las series simuladas en 3 de 4 estaciones, para abril (Figura 5-3) y julio (Figura 5-4) las varianzas observadas no difieren significativamente de la distribución de las varianzas simuladas. Entre enero y marzo, y entre agosto y diciembre, el modelo preservó la varianza en menor medida, es decir alejándose de los percentiles (por encima del percentil 75).

### 5.3 Análisis regional de frecuencia

Para estimar el desempeño del modelo en la generación de episodios con valores extremos se efectuó el procedimiento explicado en el capítulo anterior, es decir: empleando los parámetros propios de cada mes, se generaron series sintéticas de 11 años de lluvia simultánea en las 4 estaciones (misma longitud de la serie observada). Este ejercicio se repitió 10 veces obteniendo 10 series sintéticas de 11

años de lluvia simultánea en las 4 estaciones en resolución horaria (en total se obtuvieron 110 realizaciones de lluvia para cada mes). Luego se siguió la metodología descrita en el artículo de referencia (Cowpertwait et al., 2002) que consiste en efectuar un análisis de frecuencia regional (agregado para todas las estaciones en resolución horaria y diaria: Se extraen los eventos máximos anuales de la lluvia observada para cada una de la 4 estaciones, se ordenan y estandarizan dividiéndolos por la mediana y finalmente se agregan y organizan de menor a mayor obteniendo series de 44 valores. El mismo procedimiento se repite para cada una de las 10 simulaciones de 11 años de lluvias sintéticas con lo que se obtienen 10 conjuntos de series sintéticas agregadas de 44 valores cada una.

Los datos obtenidos se ajustan a una distribución de valores extremos, en este caso Gumbel y se grafican contra diferentes periodos de retorno, para datos horarios en la Figura 5-6, y para datos diarios en la Figura 5-7, en donde los datos históricos están representados por diamantes azules y los datos de los escenarios simulados por puntos negros.

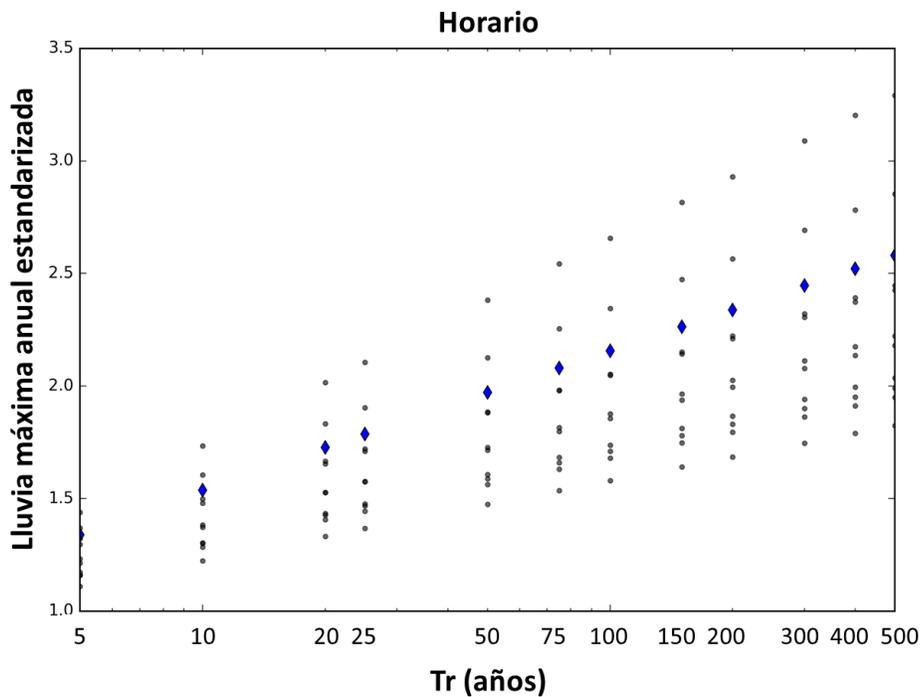


Figura 5-6 Curvas de frecuencia en datos horarios

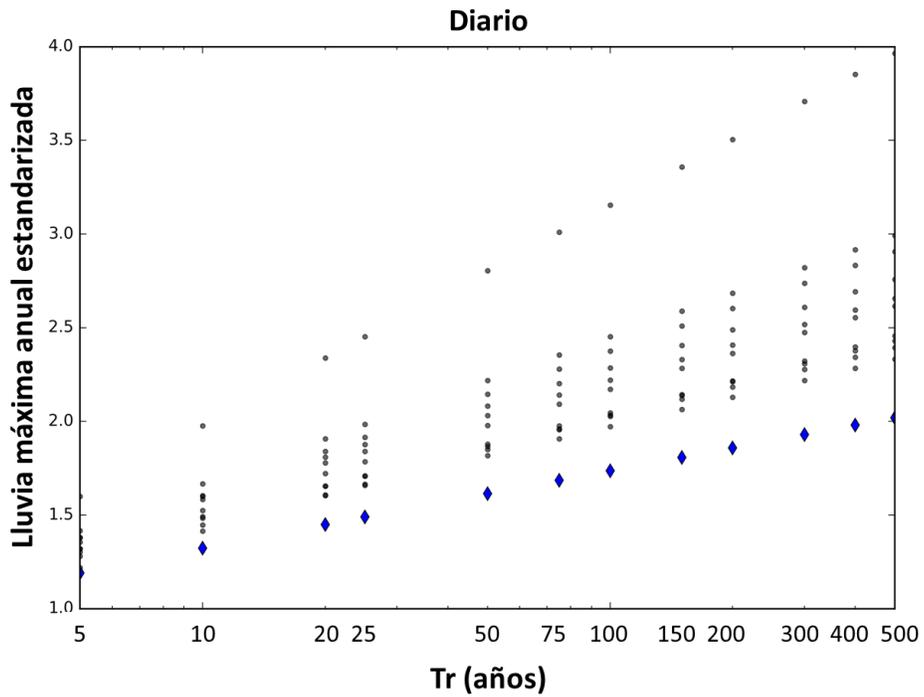


Figura 5-7 Curvas de frecuencia en datos diarios

Como se aprecia, hay una muy buena representación de valores extremos para datos horarios ya que los datos históricos están bastante centrados en la nube de datos simulados. En cambio, para datos diarios se ve que los datos históricos están en la parte inferior de la nube de puntos de datos simulados, lo que muestra que la representación de las simulaciones para valores extremos en esta resolución temporal puede estar segada.

## Capítulo VI

### Conclusiones

Se presentan algunas conclusiones acerca del proceso realizado y de los resultados obtenidos.

#### 6.1 Conclusiones generales

El enfoque estocástico (también llamado probabilístico) provee elementos que conllevan a un avance en los análisis, modelos y pronósticos con respecto a la aplicación del enfoque determinista. Tener en cuenta explícitamente la incertidumbre de entradas y salidas de los modelos, etc., implica métodos más complejos, pero contribuye a una comprensión más profunda de los procesos físicos y por lo tanto a un conocimiento mayor de la naturaleza y así mismo a la toma de decisiones con mayor conciencia e información

El enfoque probabilista, empleado en modelos estocásticos basados en series de tiempo de lluvia relacionadas en el espacio, presentan ventajas sobre el enfoque determinista en tanto permiten un análisis estadístico más completo en consecuencia proveen herramientas más robustas para el análisis hidrológico en sus múltiples aplicaciones: monitoreo de la lluvia, análisis y completado de series, diseño de embales, estudios de avenidas, diseño de sistemas de drenaje urbano, etc.

En la aplicación del método se realizó un análisis ANOVA sobre las lluvias históricas en agregación diaria. Se encontró que para las estaciones seleccionadas el área puede considerarse homogénea: Se acepta la hipótesis nula, de manera que se consideró que los datos son homogéneos en la región instrumentada por las estaciones San Benito, Quiba, Doña Juana y UAN Usme.

Se puede ver que los valores de los estadísticos que definen las distribuciones de probabilidad siguen una variación estacional: (i) los valores de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu_c$  son pequeños en los meses de pocas lluvias y al contrario en los meses más húmedos, (ii) los valores de  $\alpha$  representan lluvias más intensas en los meses con mayores acumulados de precipitación como era de esperarse.

Con los valores de los parámetros obtenidos se logró tener una buena aproximación a los valores de los estadísticos de las series observadas para todos los meses, sin embargo, para la correlación cruzada se obtuvo un buen ajuste primordialmente para los meses con mayores lluvias con lo cual era de esperarse que la generación sintética presentara mejor desempeño entre abril y julio.

En los meses más secos (enero, febrero, marzo, agosto, septiembre y diciembre) se presentan lluvias por lo general puntuales y aisladas por estaciones, el método presenta un buen desempeño para enero y agosto y menor desempeño para los meses de febrero, marzo, septiembre y diciembre.

En abril, mayo y junio las lluvias sintéticas en la zona son generalmente más prolongadas e intensas que en el trimestre precedente, así mismo los campos de lluvia observada cubren un espacio más amplio de manera que las lluvias se registran simultáneamente en varias estaciones. El modelo tiene un buen desempeño en los tres meses, aunque con algunas limitaciones en el mes de junio.

En el mes de julio el modelo tiene dificultades para replicar lluvias sintéticas con la misma intensidad de las lluvias observadas, aunque parece interpretar bien la relación espacial de la misma entre las diferentes estaciones.

En meses húmedos como octubre y noviembre las lluvias son prolongadas e intensas. El método tiene un buen desempeño para replicar la relación espacial de la lluvia, pero un menor desempeño para reproducir la intensidad en este periodo.

Analizando por episodios, se observa que las lluvias sintéticas reproducen la correlación espacial mejor de lo esperado en los meses secos ya que no se esperaba un buen desempeño debido al ajuste logrado para la correlación cruzada.

Se logró calibrar el modelo de Neyman-Scott para una cuenca del territorio colombiano y se establecieron mecanismos para estimar su desempeño. Se obtuvieron resultados aceptables, sin embargo la parametrización mostró poca capacidad para reproducir la correlación espacial. Es posible que empleando datos con mayores longitudes de registro o zonas con mayor densidad de instrumentación (o ambas) se logren mejores resultados.

Para los meses de mayo y junio el modelo logra preservar la varianza, específicamente para el mes de junio las varianzas de la serie observada están dentro de los percentiles 25 y 75 de las series simuladas en 3 de 4 estaciones, para abril y julio las varianzas observadas no difieren significativamente de la distribución de las varianzas simuladas. Entre enero y marzo, y entre agosto y diciembre, el modelo preservó la varianza en menor medida.

El modelo tiene un muy buen desempeño para la representación de valores extremos para datos horarios. En cambio, para datos diarios la representación de las simulaciones para valores extremos puede estar segada, esta última característica está dada por la naturaleza de las simulaciones obtenidas en donde se observó que las tormentas simuladas son en general menos intensas y más continuas que las lluvias observadas.

## **6.2 Líneas de trabajo futuro**

Los resultados obtenidos muestran una potencialidad de la modelación estocástica con el modelo Neyman-Scott en el territorio colombiano, sin embargo, es necesario disponer de series de alta resolución con mayor longitud de registro para continuar

con los análisis que conduzcan a una aplicabilidad práctica en las cuencas del país.

Puede resultar interesante dar continuidad al trabajo realizado efectuando el análisis en agregaciones mayores a la agregación horaria para verificar la evolución del desempeño del modelo en la medida que crece el tiempo de agregación hasta la agregación diaria.

Los resultados del proceso de optimización para la obtención de los parámetros que definen las distribuciones de probabilidad del modelo son buenos en su mayoría, obteniéndose un conjunto de parámetros con valores con tendencia estacional. Sin embargo, existe oportunidad para mejorar el desempeño explorado metodologías y criterios para los procesos de optimización.

La modelación de la lluvia relacionada en el espacio, puede ser muy útil para el análisis en zonas con poca o inexistente información meteorológica, así mismo podría resultar muy útil para el completado de series con enfoque estocástico en regiones monitoreadas con herramientas de medición espacial de la lluvia como el radar meteorológico.

Es de particular interés, explorar la aplicación de modelos estocásticos de lluvia en el diseño de obras hidráulicas, particularmente en sistemas de drenaje urbanos.

## Capítulo VII

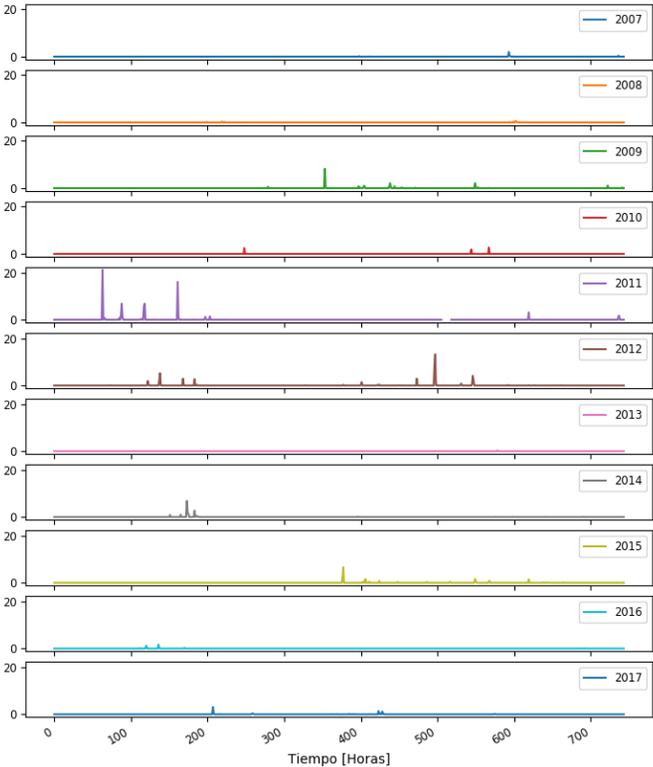
### Referencias

- Bierkens, M.F., van Geer, F., 2012. Stochastic Hydrology [WWW Document]. URL [http://www.earthsurfacehydrology.nl/wp-content/uploads/2012/01/Syllabus\\_Stochastic-Hydrology.pdf](http://www.earthsurfacehydrology.nl/wp-content/uploads/2012/01/Syllabus_Stochastic-Hydrology.pdf) (accessed 8.11.18).
- Calenda, G., Napolitano, F., 1999. Parameter estimation of Neyman–Scott processes for temporal point rainfall simulation. *J. Hydrol.* 225, 45–66. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(99\)00133-X](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(99)00133-X)
- Cowpertwait, P.S.P., Kilsby, C.G., O’Connell, P.E., 2002. A space-time Neyman-Scott model of rainfall: Empirical analysis of extremes. *Water Resour. Res.* 38, 6–1–6–14. <https://doi.org/10.1029/2001WR000709>
- Dalen, P., 2016. Understanding the Differences Between Deterministic and Stochastic Models [WWW Document]. URL <https://www.linkedin.com/pulse/understanding-differences-between-deterministic-stochastic-paul-dalen> (accessed 8.11.18).
- Ezzedine, S.M., 2005. Stochastic Modeling of Flow and Transport in Porous and Fractured Media, in: Anderson, M.G., McDonnell, J.J. (Eds.), *Encyclopedia of Hydrological Sciences*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- Favre, A.-C., Musy, A., Morgenthaler, S., 2004. Unbiased parameter estimation of the Neyman–Scott model for rainfall simulation with related confidence interval. *J. Hydrol.* 286, 168–178.
- Munroe, D., 2004. A space-time Neyman-Scott model for the, in: *Institute of Information & Mathematical Sciences Massey University at Albany, Auckland, New Zealand*.
- Riccardi, G.A., 2005. Evaluación del modelo de Neyman-Scott para simulación de lluvia en un punto geográfico. *Ing. Agua* 12, 161–172.

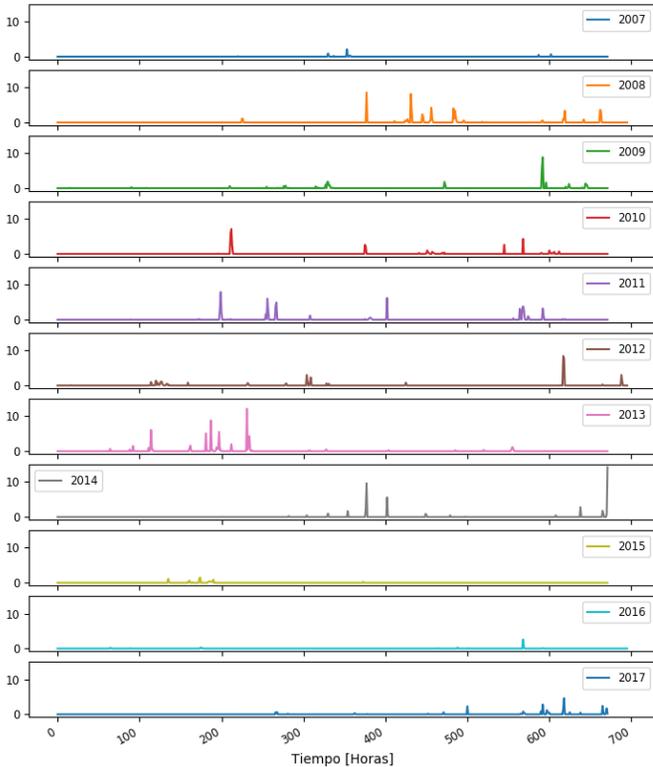
Tarpanelli, A., Franchini, M., Brocca, L., Camici, S., Melone, F., Moramarco, T., 2012. A simple approach for stochastic generation of spatial rainfall patterns. *J. Hydrol.* 472–473, 63–76. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.09.010>

# Anexo 1. Gráficas de series observadas horarias

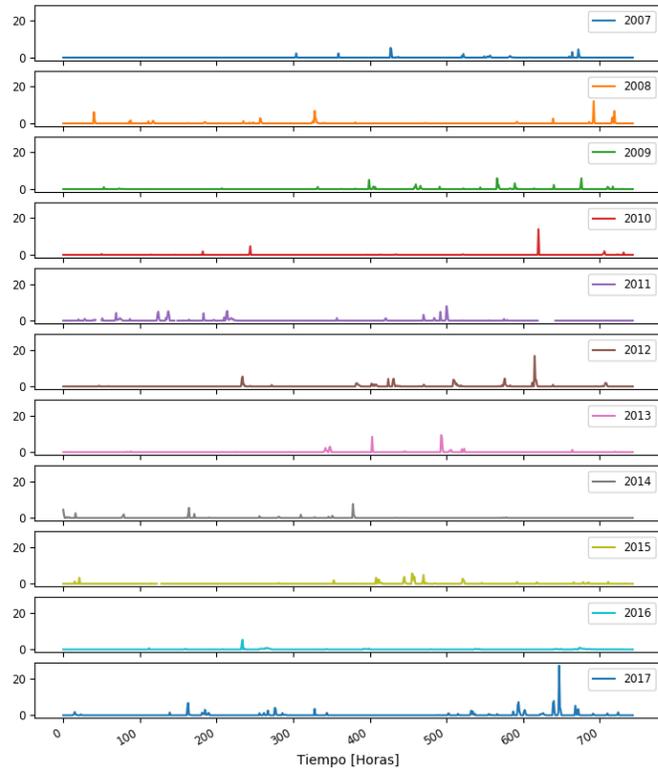
Lluvia observada  
San\_Benito - Enero  
[mm/h]



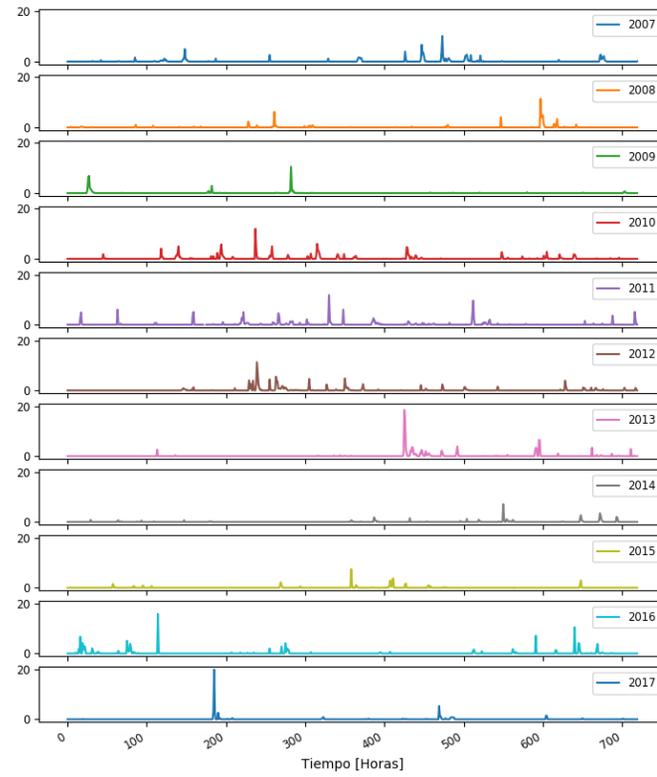
Lluvia observada  
San\_Benito - Febrero  
[mm/h]



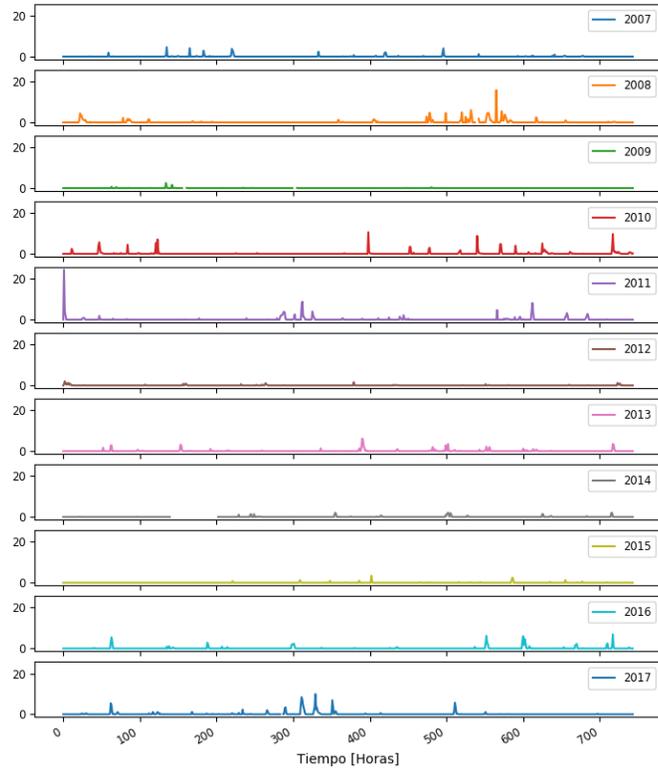
Lluvia observada  
San\_Benito - Marzo  
[mm/h]



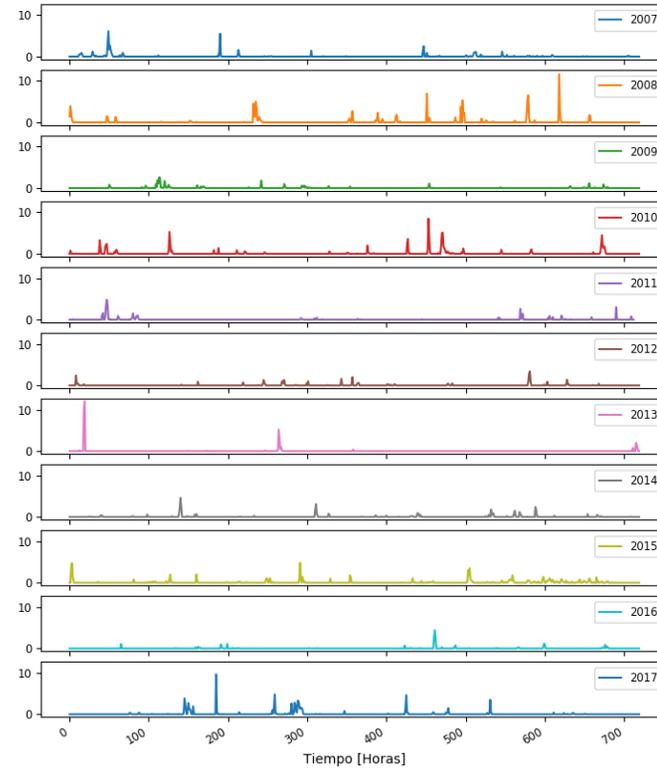
Lluvia observada  
San\_Benito - Abril  
[mm/h]



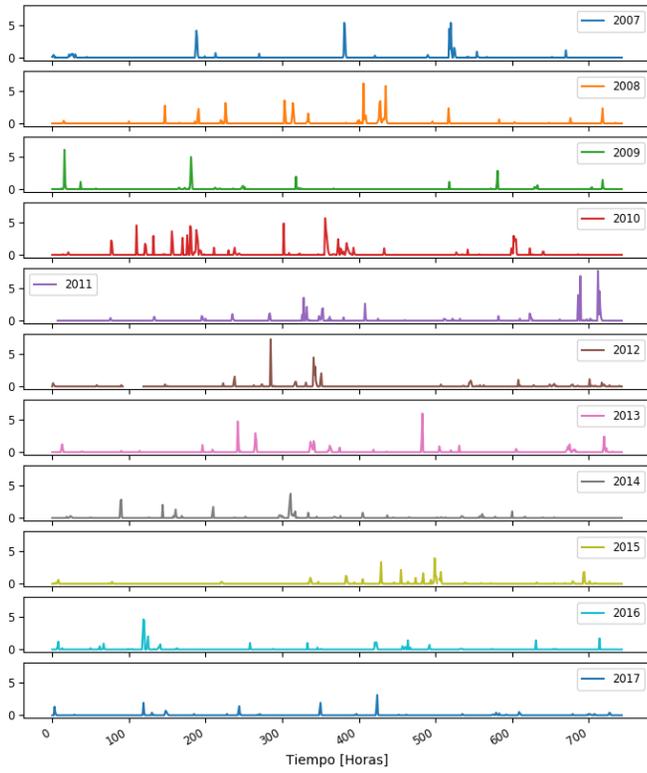
Lluvia observada  
San\_Benito - Mayo  
[mm/h]



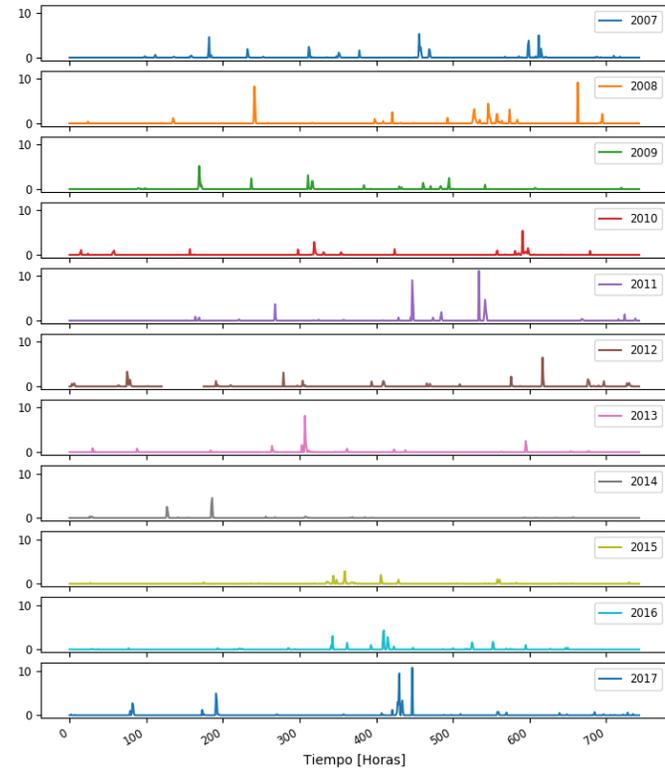
Lluvia observada  
San\_Benito - Junio  
[mm/h]



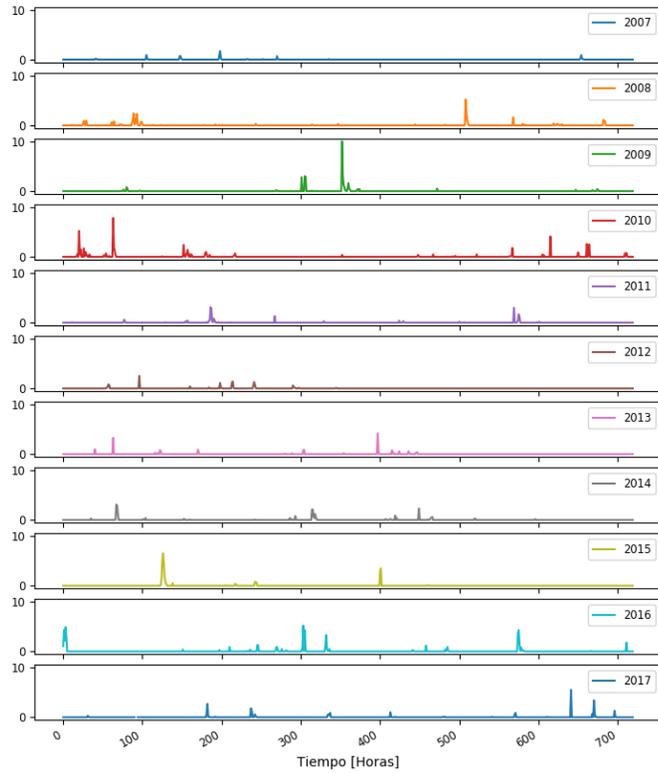
Lluvia observada  
San\_Benito - Julio  
[mm/h]



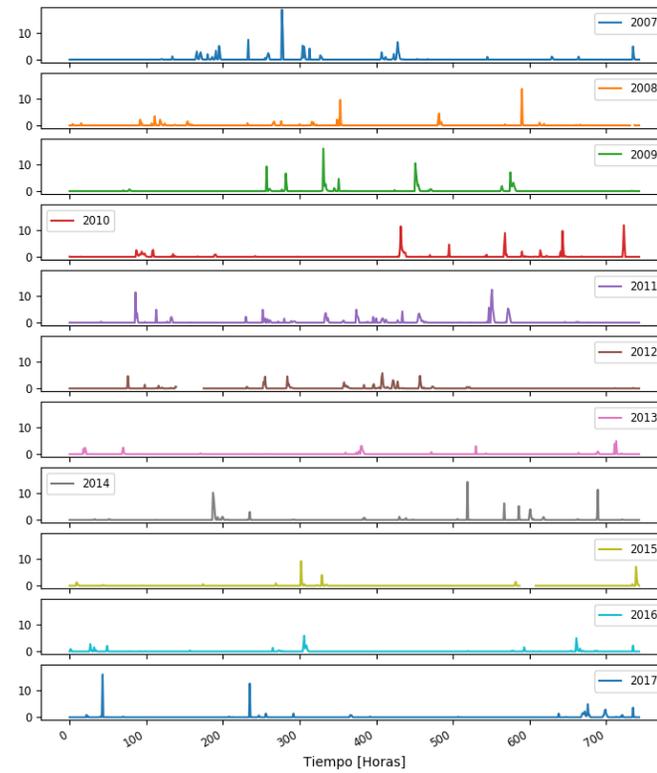
Lluvia observada  
San\_Benito - Agosto  
[mm/h]



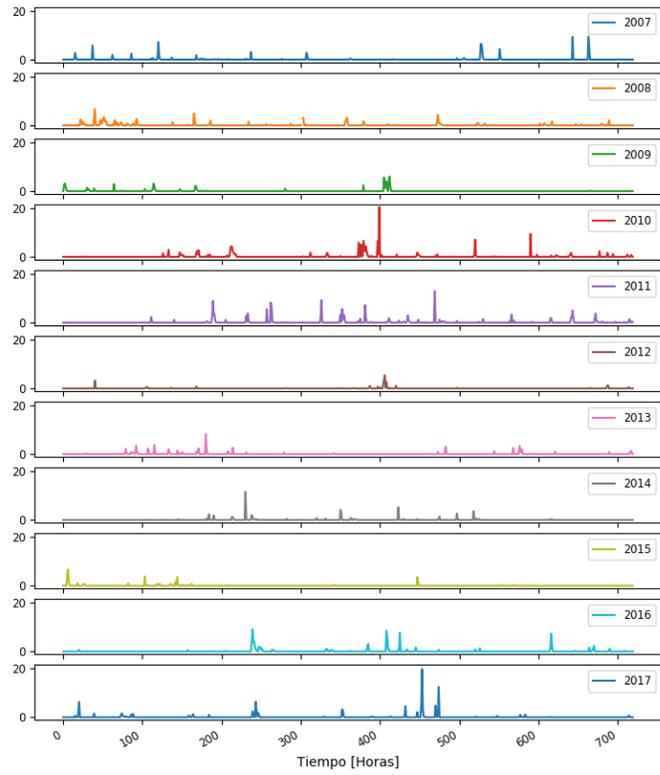
Lluvia observada  
San\_Benito - Septiembre  
[mm/h]



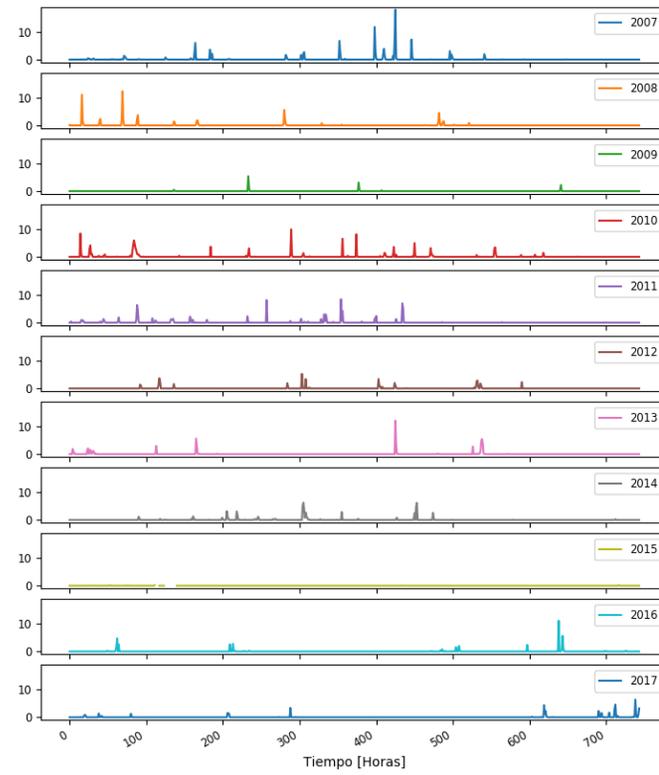
Lluvia observada  
San\_Benito - Octubre  
[mm/h]



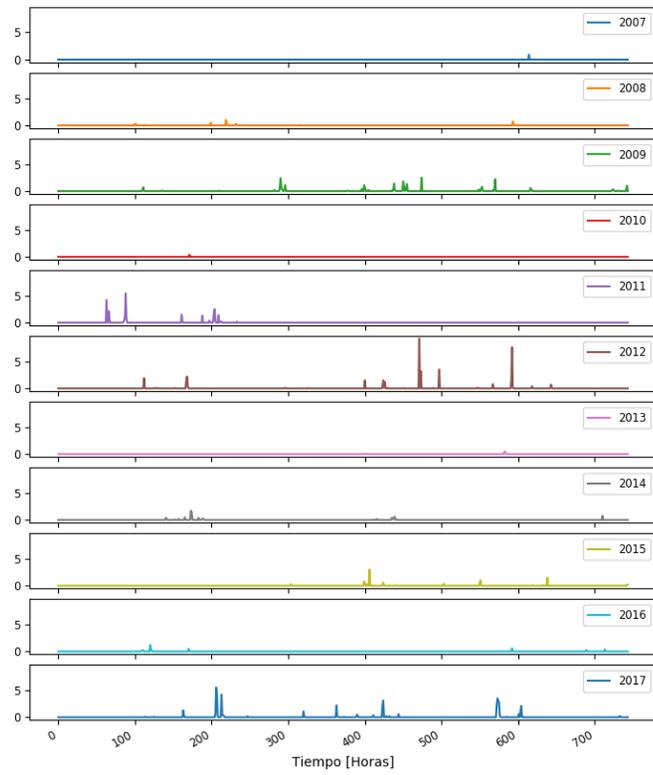
Lluvia observada  
San\_Benito - Noviembre  
[mm/h]



Lluvia observada  
San\_Benito - Diciembre  
[mm/h]



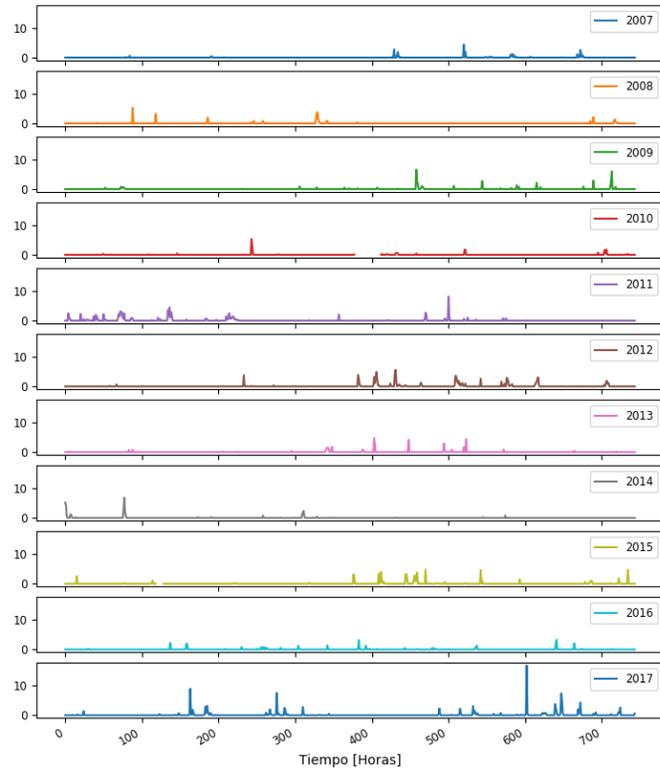
Lluvia observada  
Dona Juana - Enero  
[mm/h]



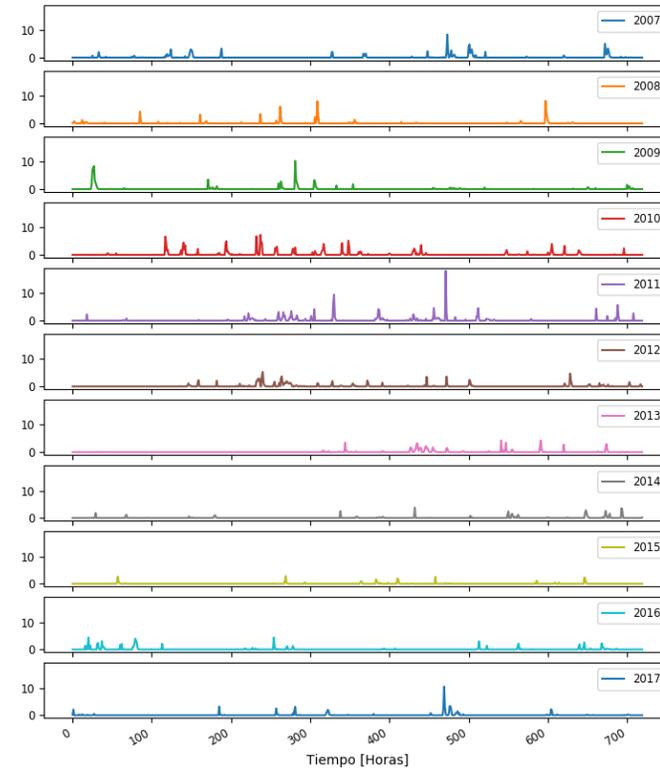
Lluvia observada  
Dona Juana - Febrero  
[mm/h]



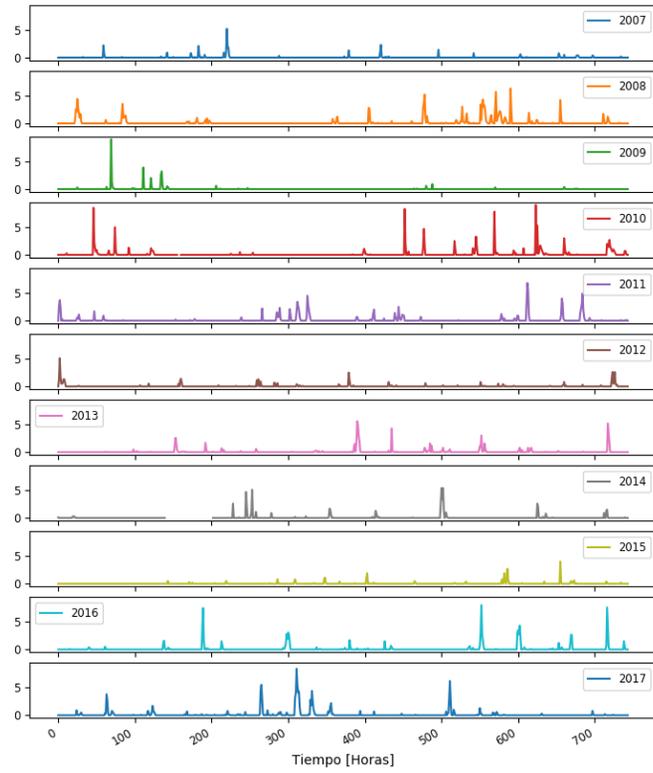
Lluvia observada  
Dona Juana - Marzo  
[mm/h]



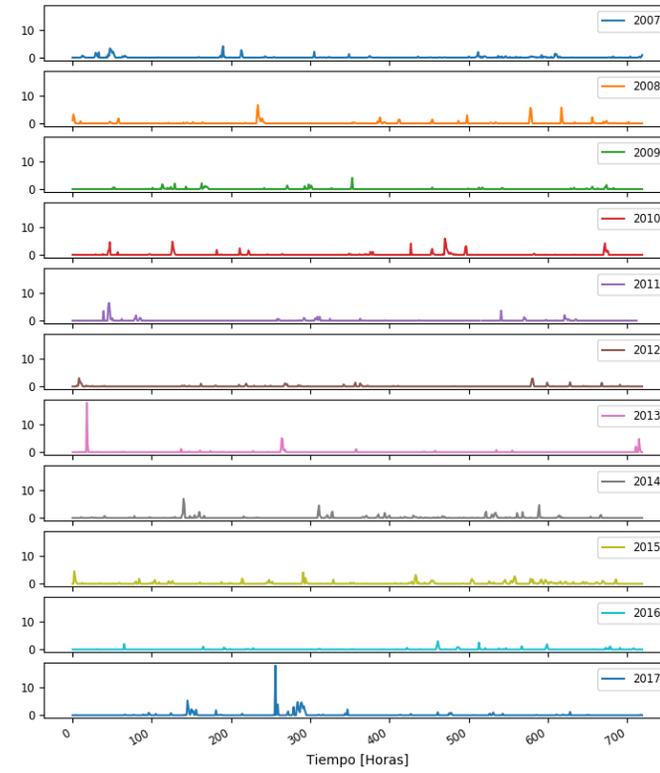
Lluvia observada  
Dona Juana - Abril  
[mm/h]



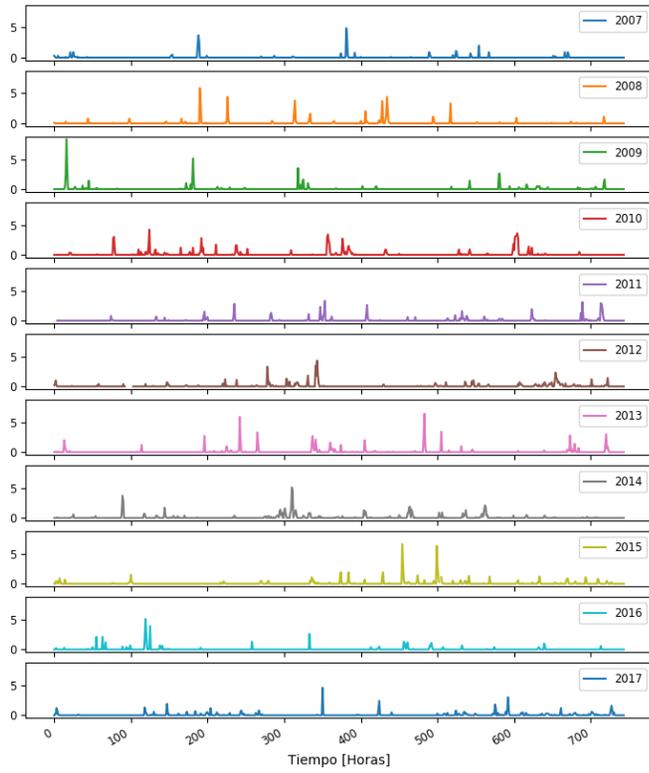
Lluvia observada  
Dona Juana - Mayo  
[mm/h]



Lluvia observada  
Dona Juana - Junio  
[mm/h]



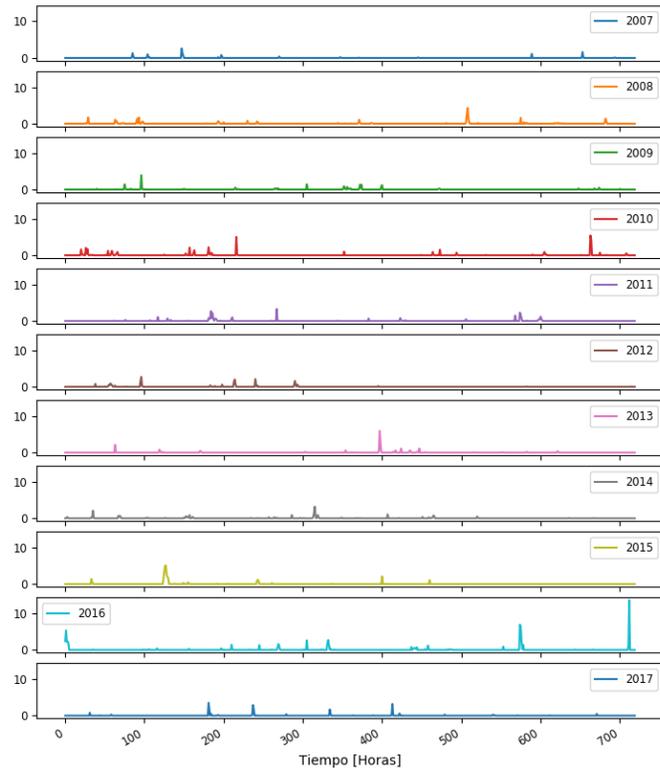
Lluvia observada  
Dona Juana - Julio  
[mm/h]



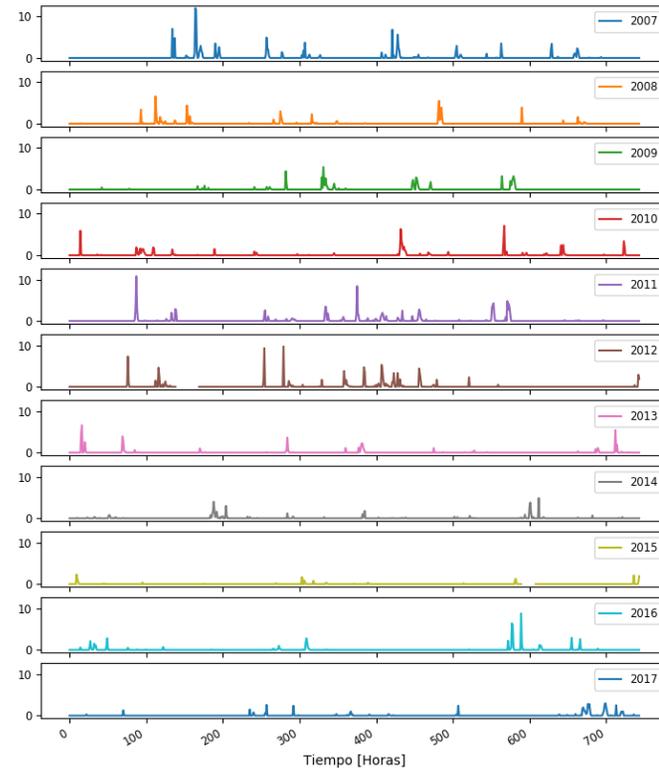
Lluvia observada  
Dona Juana - Agosto  
[mm/h]



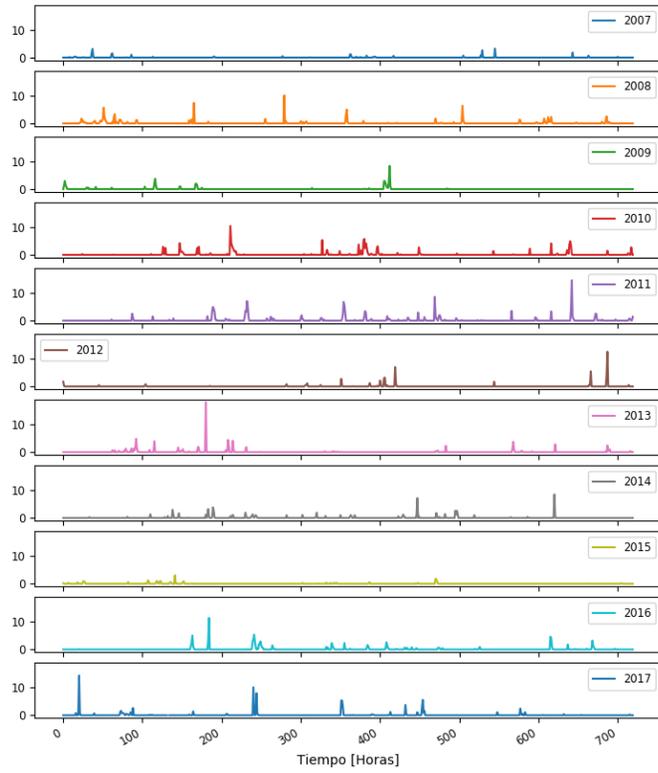
Lluvia observada  
Dona Juana - Septiembre  
[mm/h]



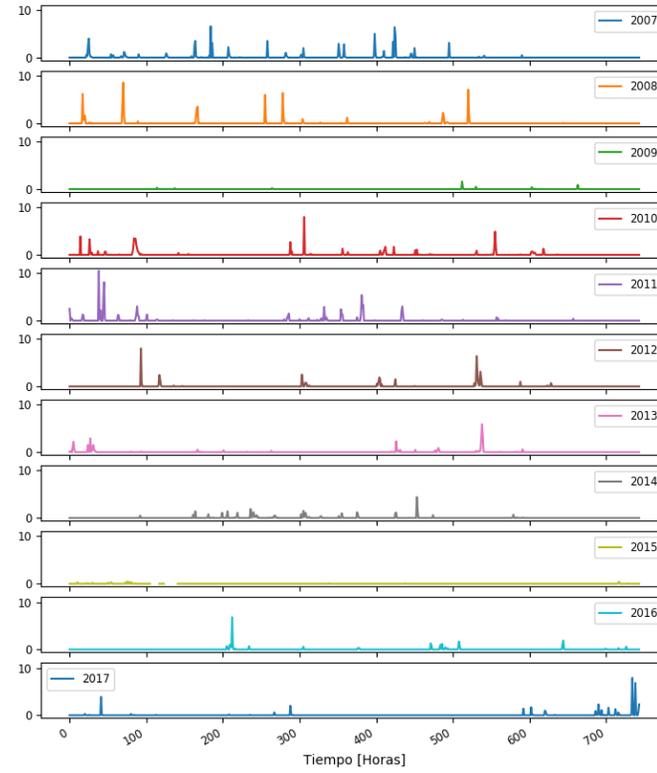
Lluvia observada  
Dona Juana - Octubre  
[mm/h]



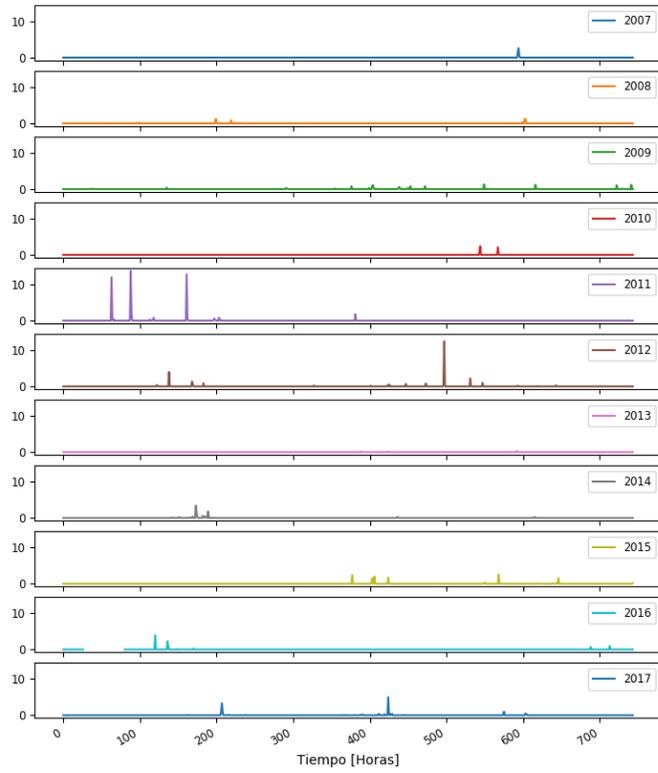
Lluvia observada  
Dona Juana - Noviembre  
[mm/h]



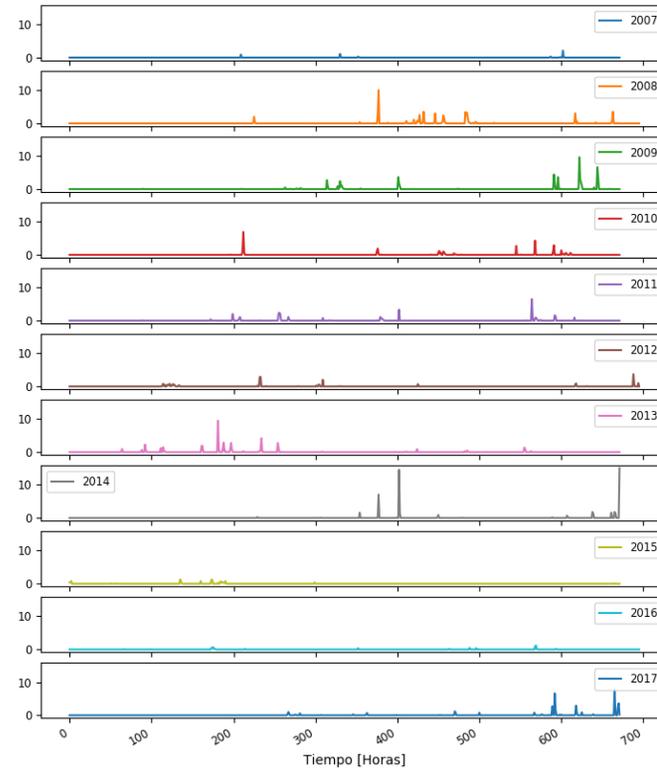
Lluvia observada  
Dona Juana - Diciembre  
[mm/h]



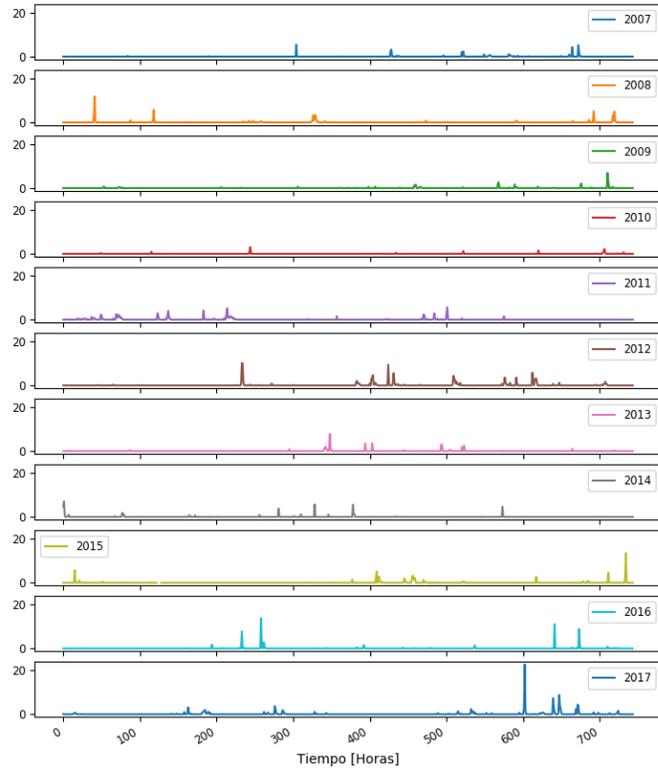
Lluvia observada  
Quiba - Enero  
[mm/h]



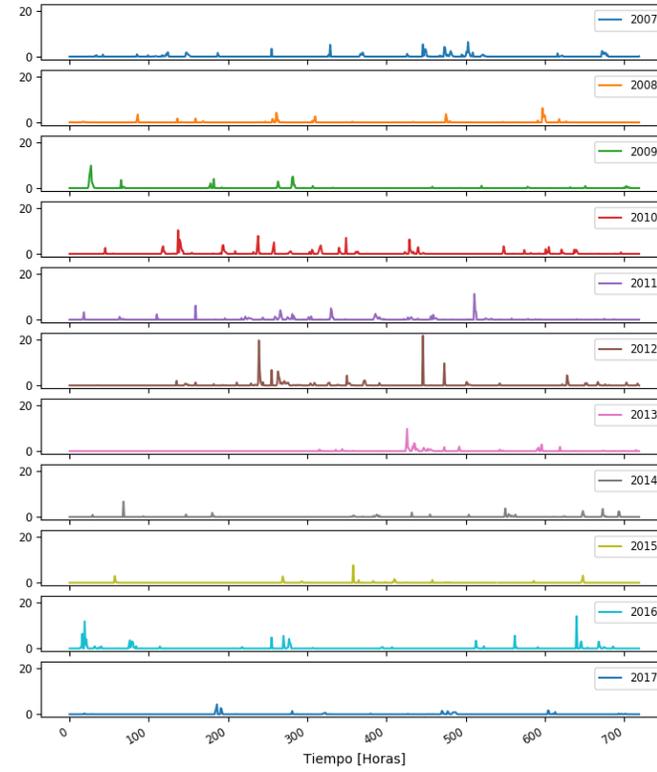
Lluvia observada  
Quiba - Febrero  
[mm/h]



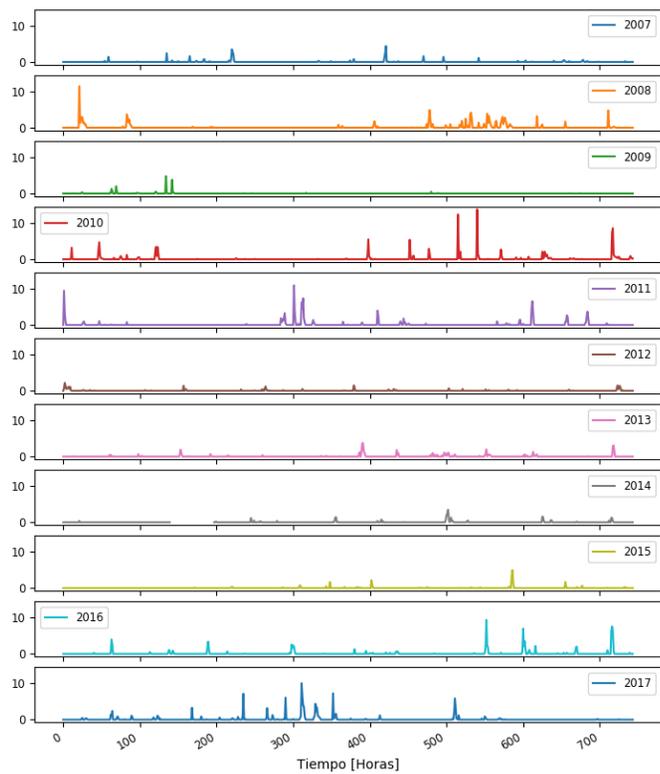
Lluvia observada  
Quiba - Marzo  
[mm/h]



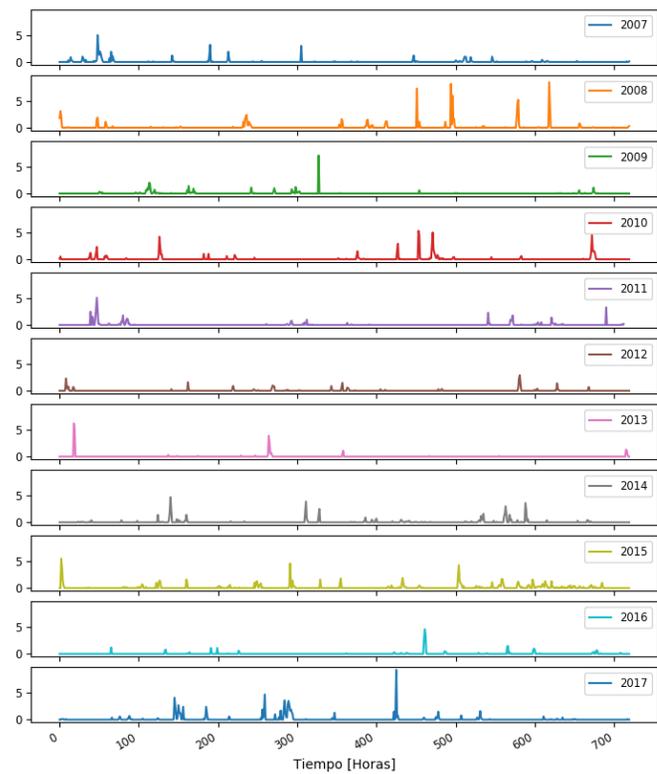
Lluvia observada  
Quiba - Abril  
[mm/h]



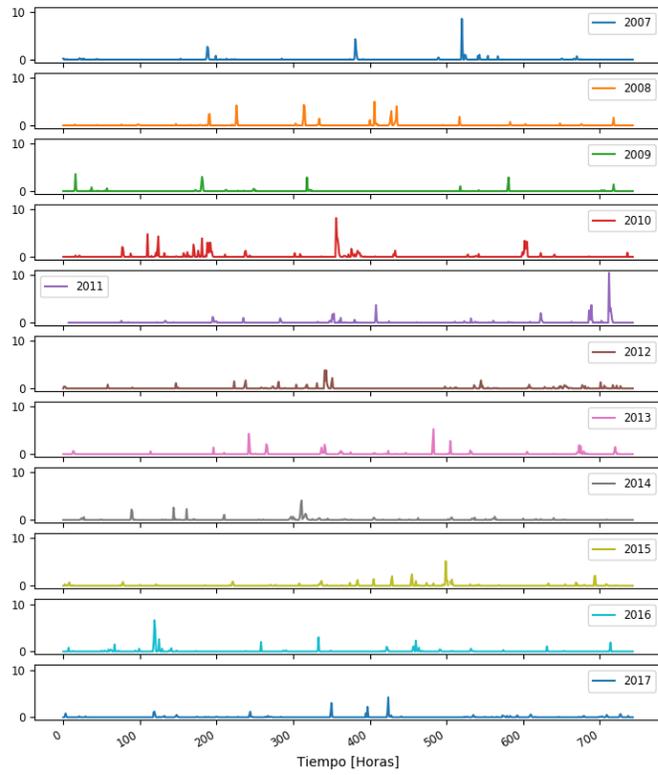
Lluvia observada  
Quiba - Mayo  
[mm/h]



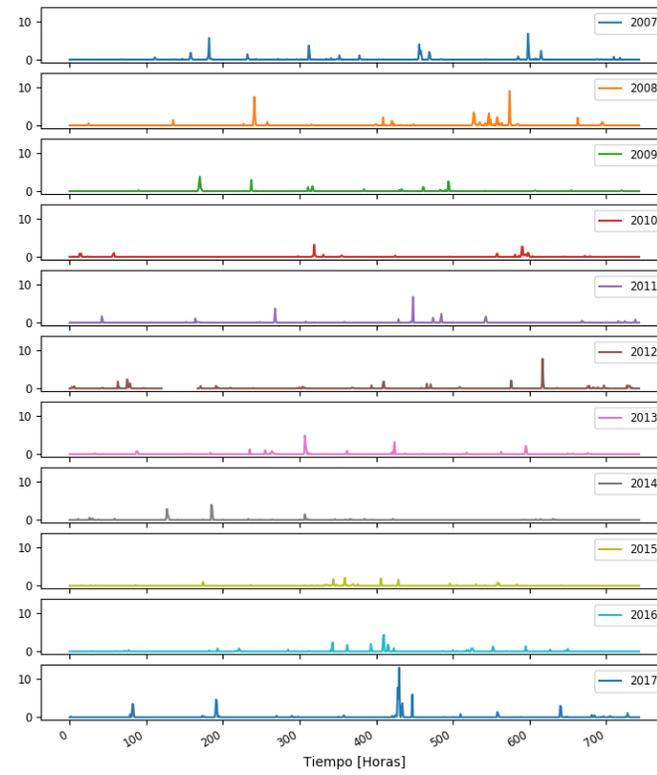
Lluvia observada  
Quiba - Junio  
[mm/h]



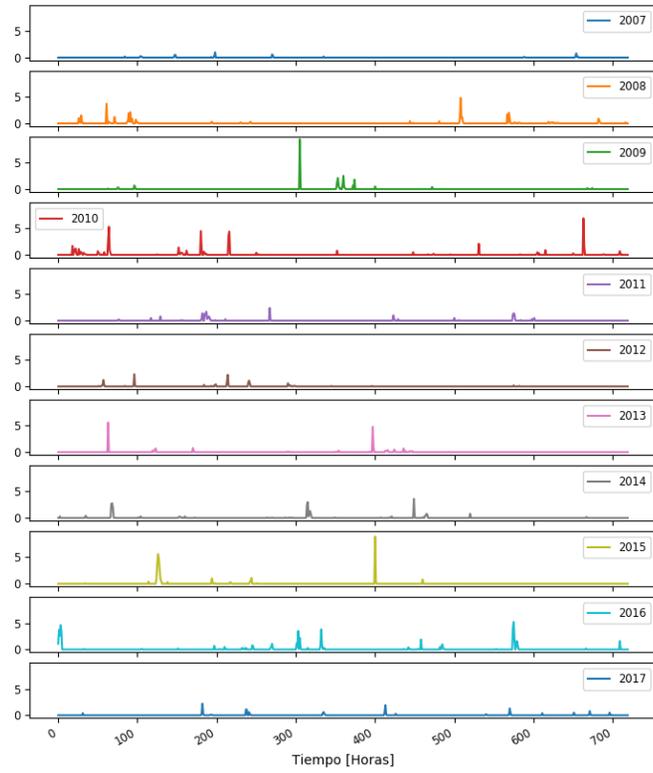
Lluvia observada  
Quiba - Julio  
[mm/h]



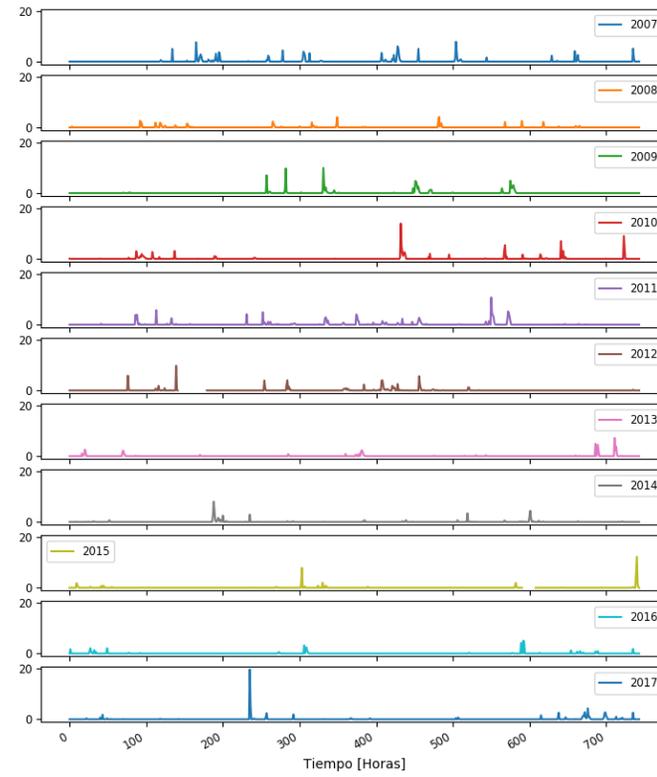
Lluvia observada  
Quiba - Agosto  
[mm/h]



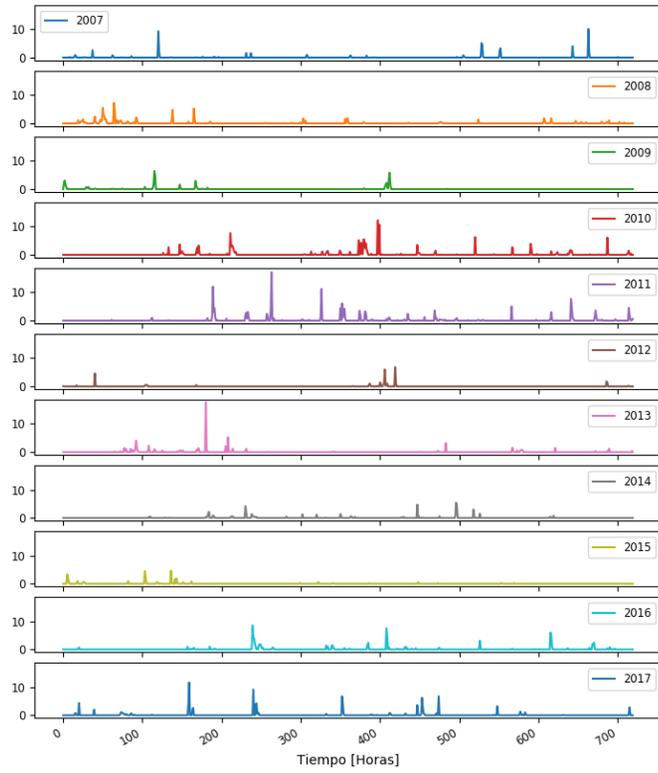
Lluvia observada  
Quiba - Septiembre  
[mm/h]



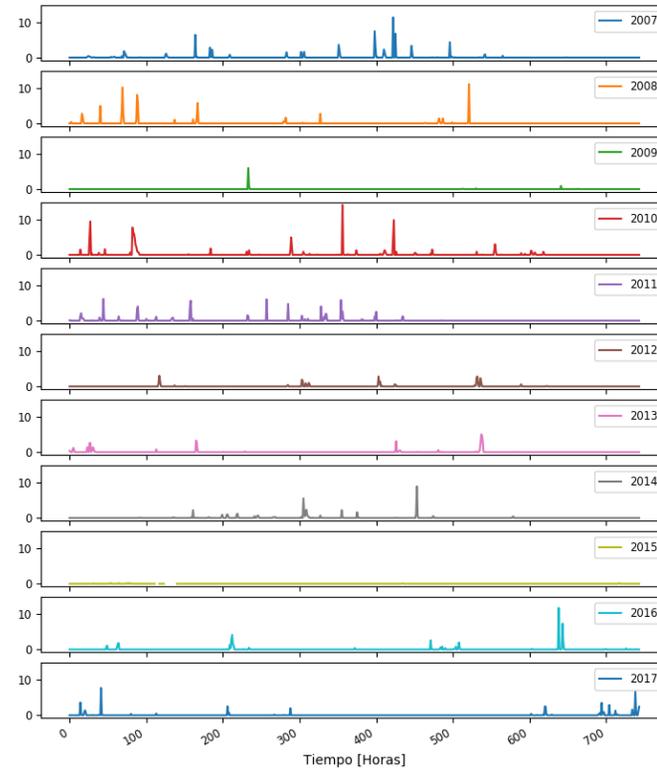
Lluvia observada  
Quiba - Octubre  
[mm/h]



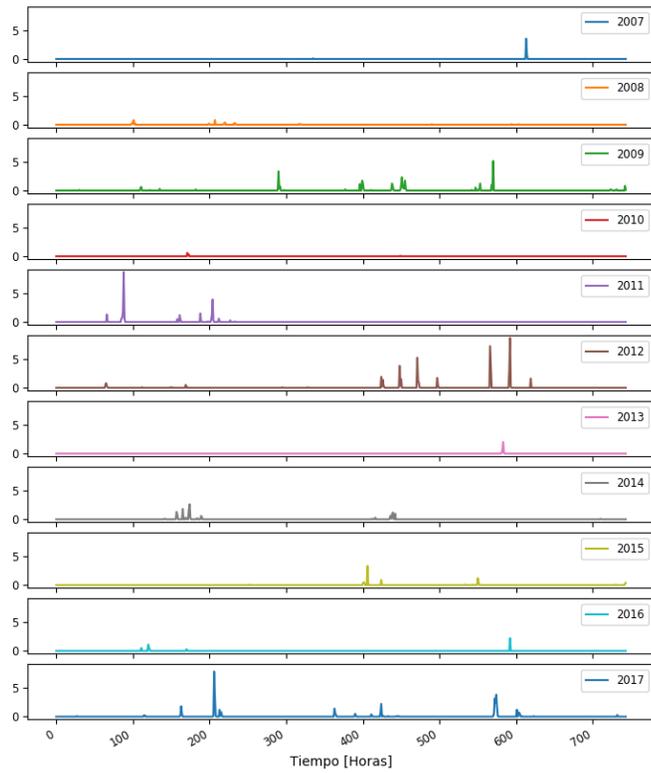
Lluvia observada  
Quiba - Noviembre  
[mm/h]



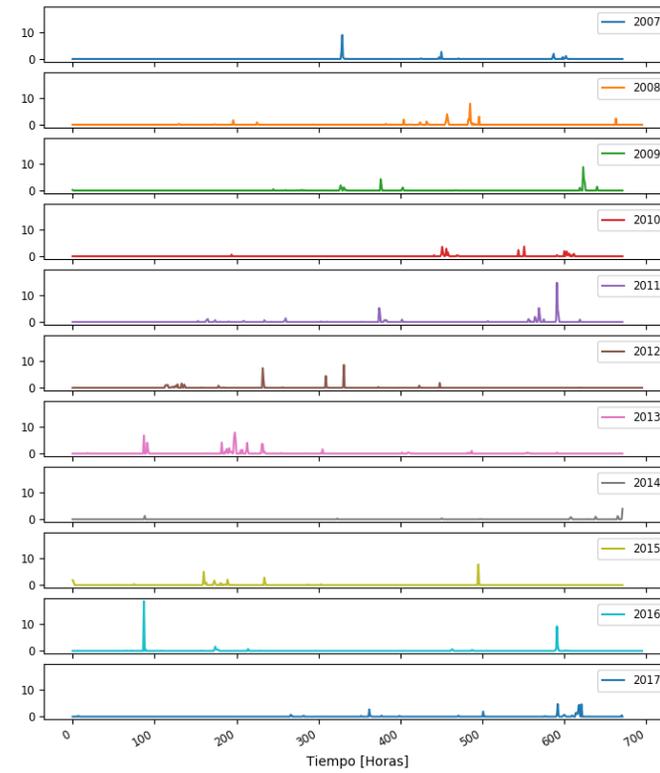
Lluvia observada  
Quiba - Diciembre  
[mm/h]



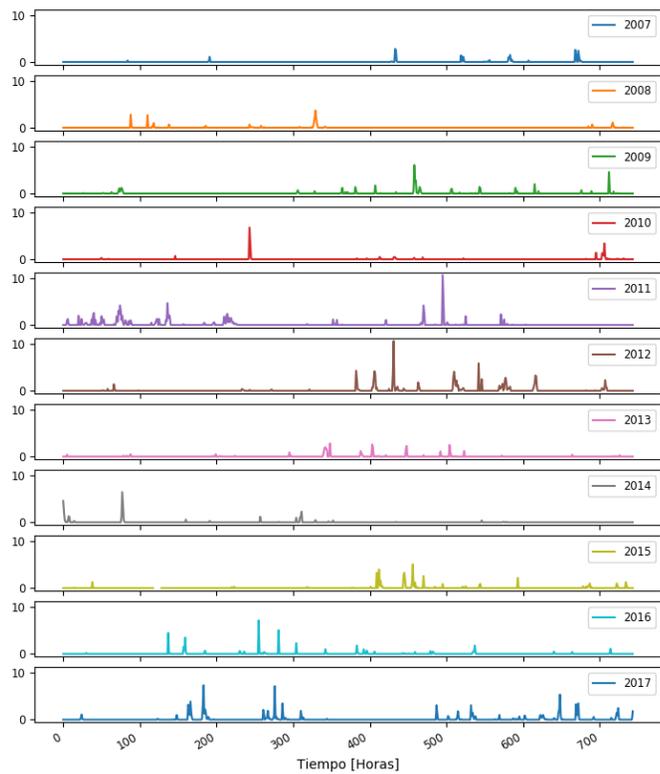
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Enero  
[mm/h]



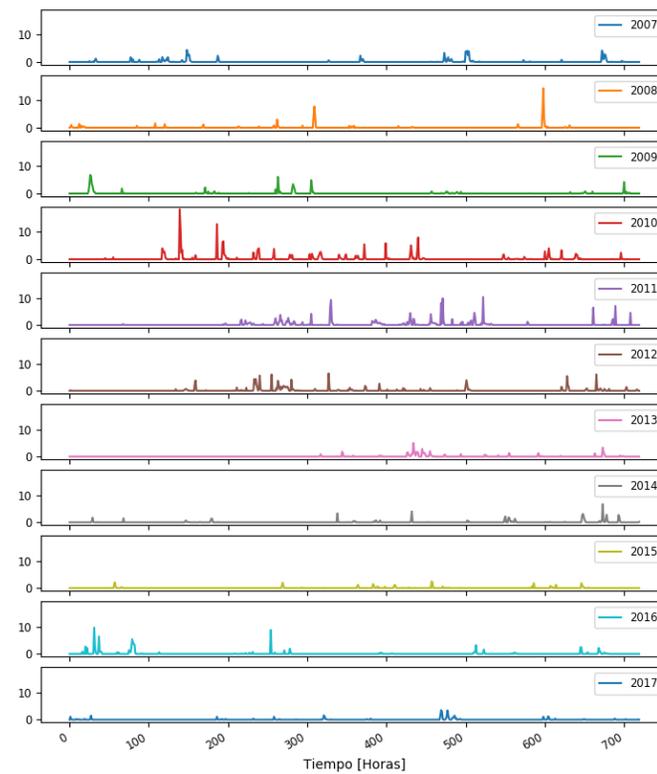
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Febrero  
[mm/h]



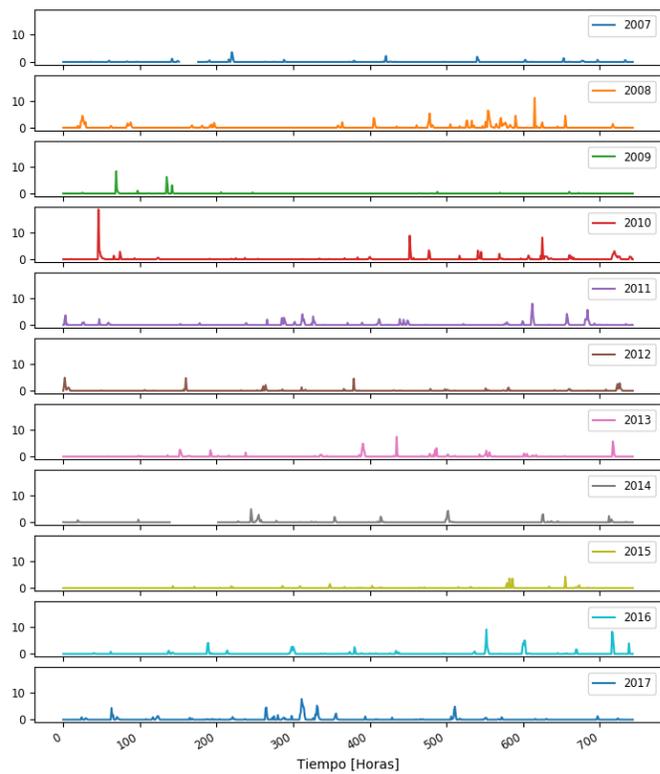
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Marzo  
[mm/h]



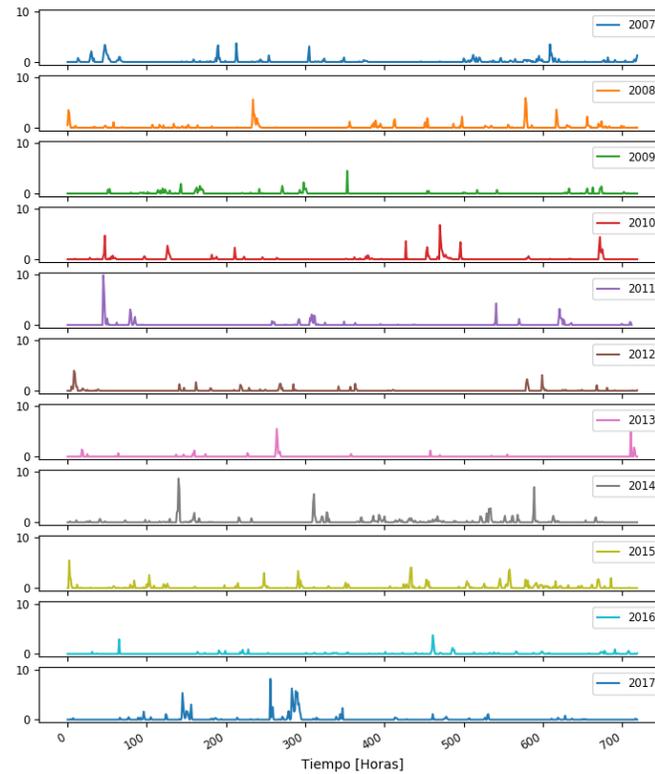
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Abril  
[mm/h]



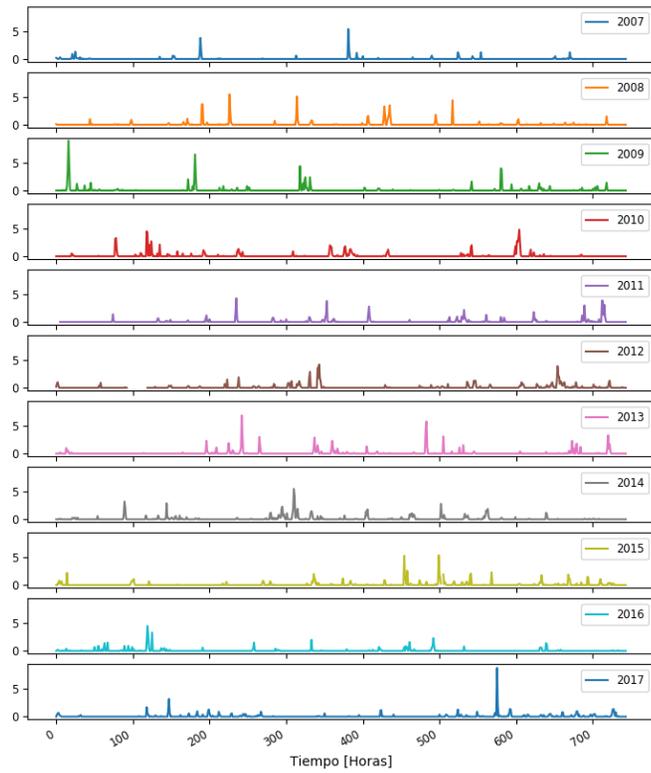
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Mayo  
[mm/h]



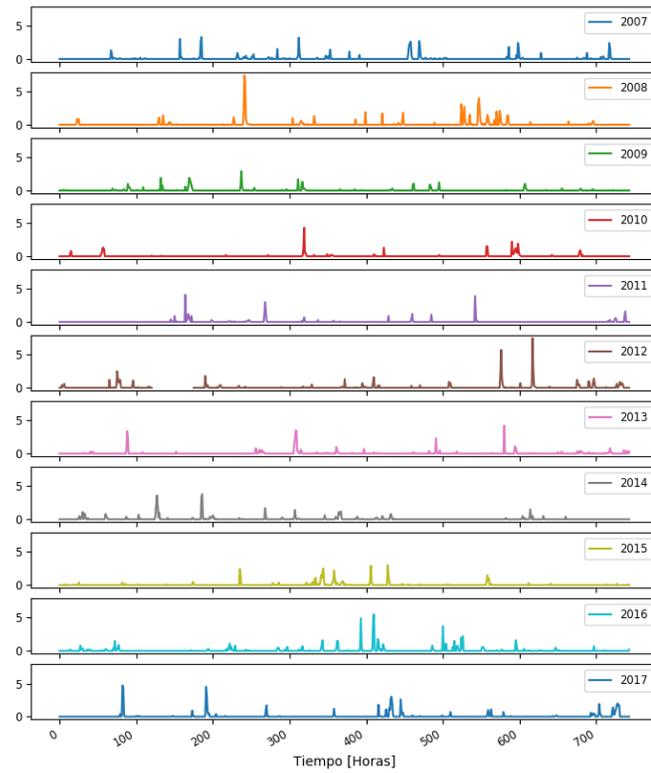
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Junio  
[mm/h]



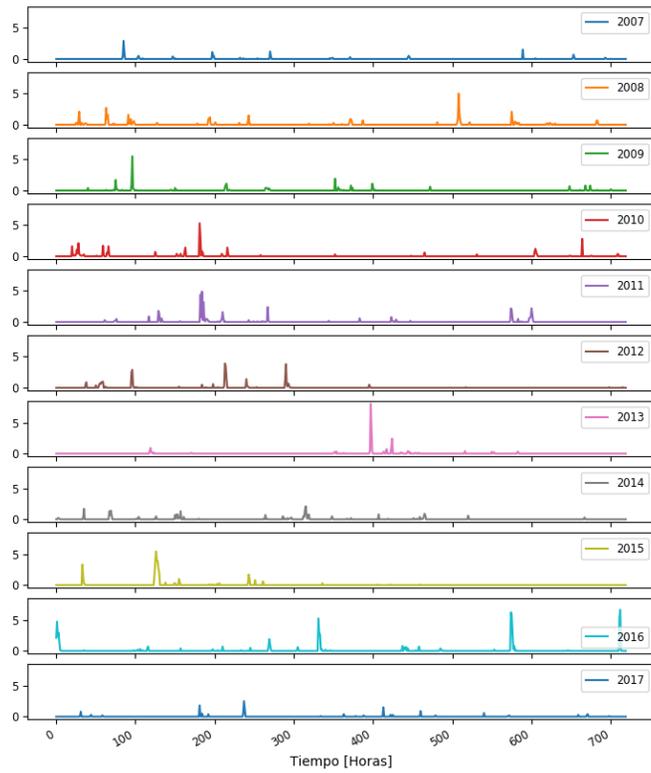
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Julio  
[mm/h]



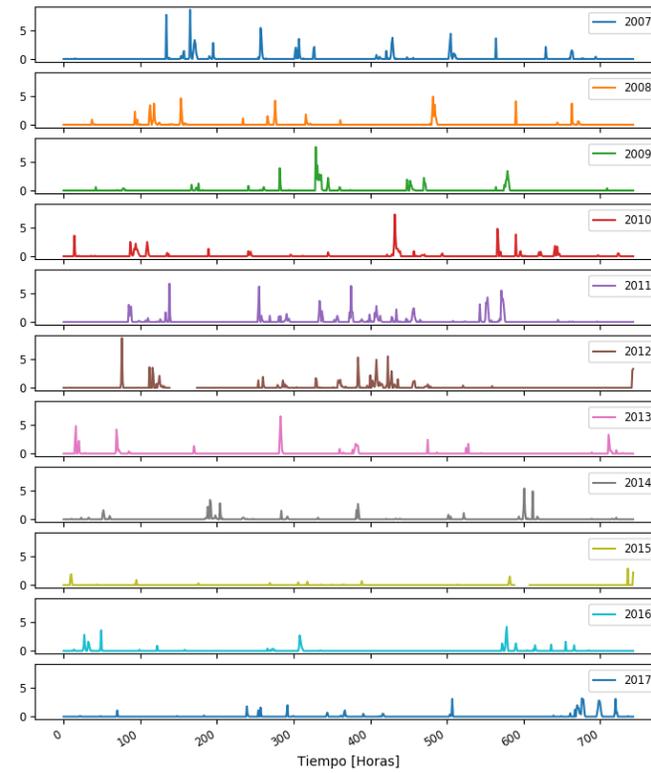
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Agosto  
[mm/h]



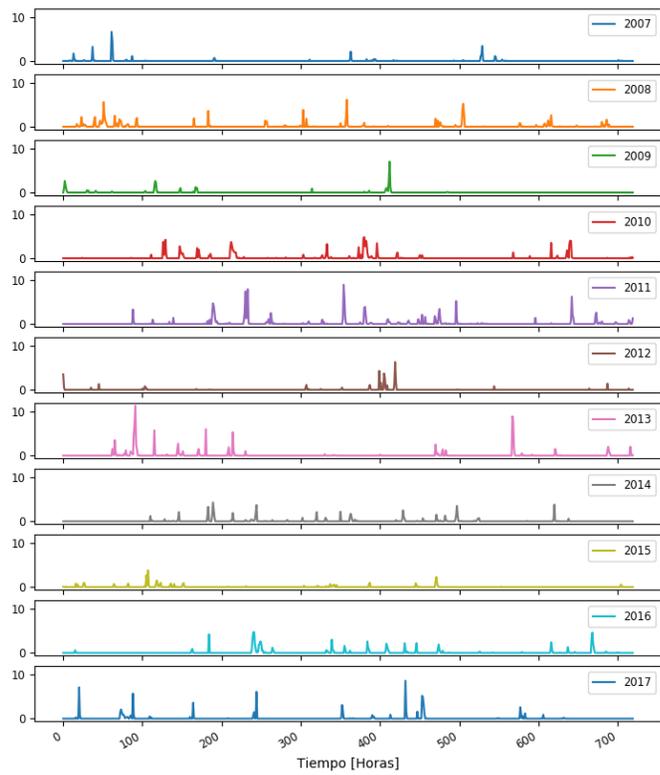
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Septiembre  
[mm/h]



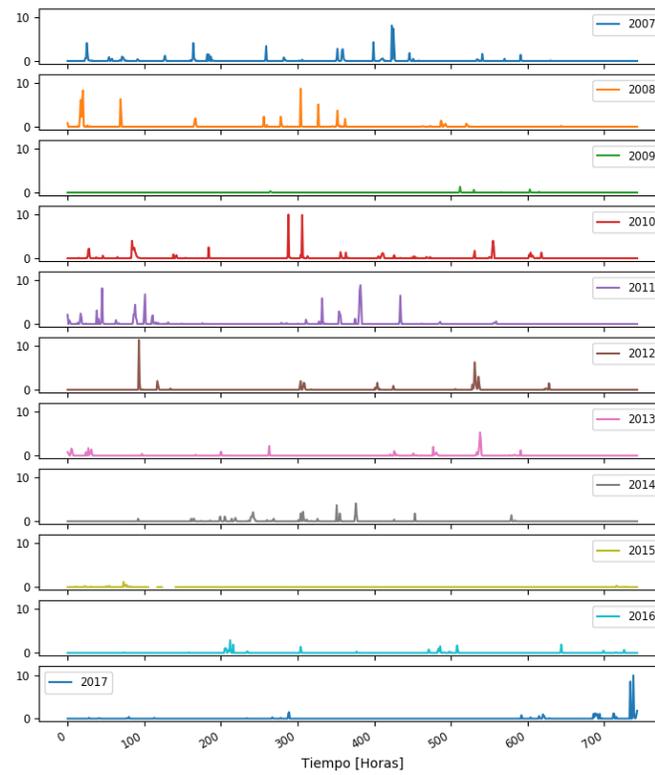
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Octubre  
[mm/h]



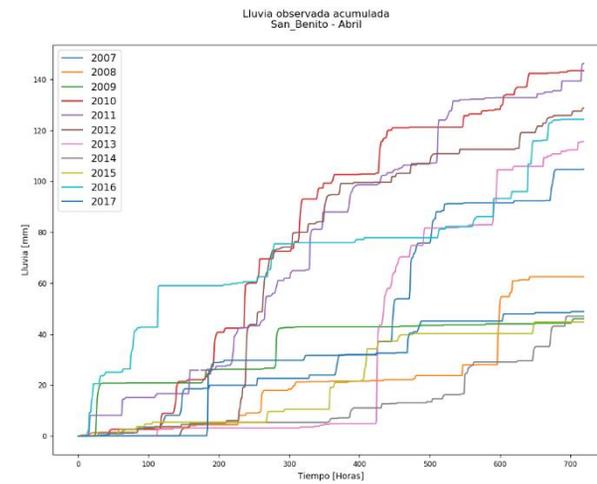
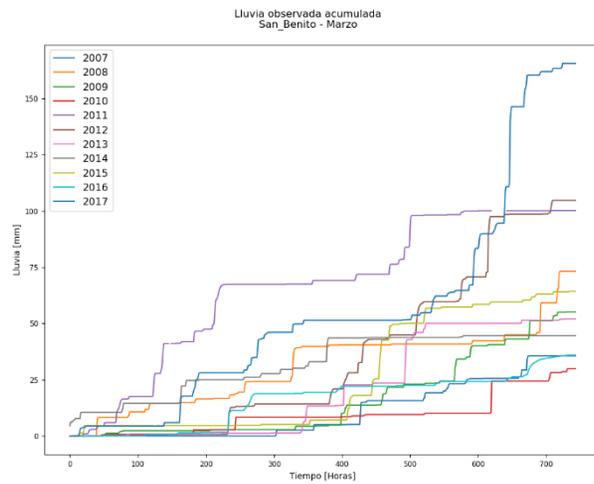
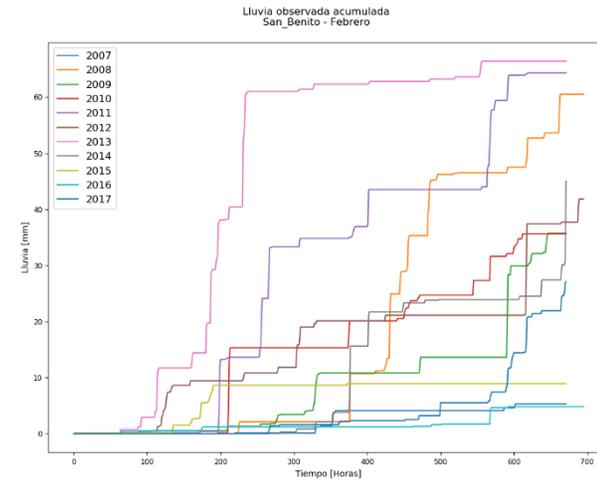
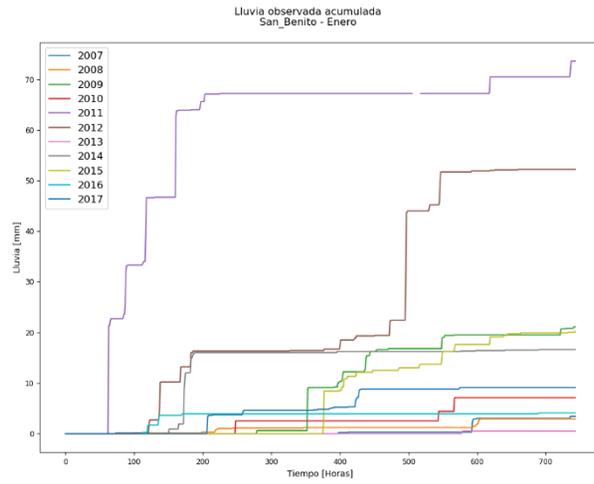
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Noviembre  
[mm/h]

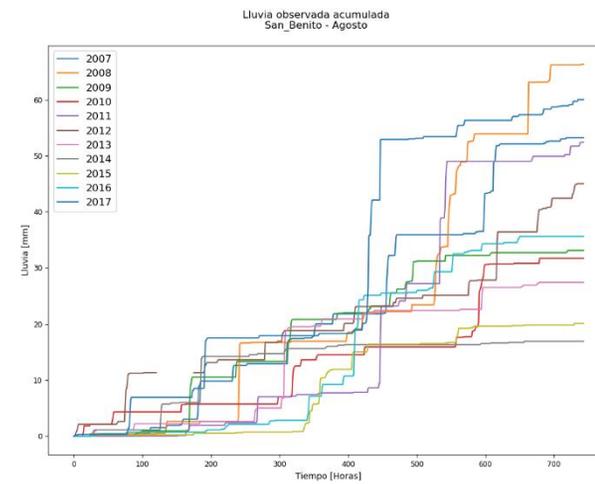
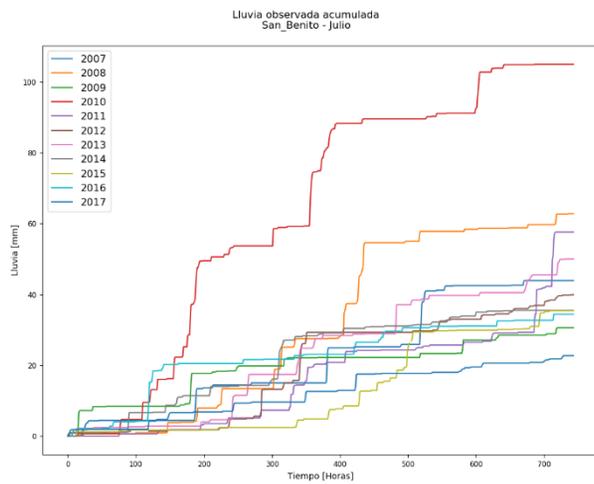
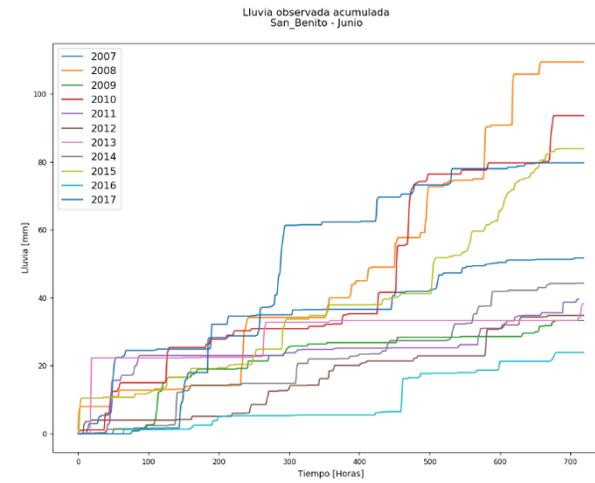
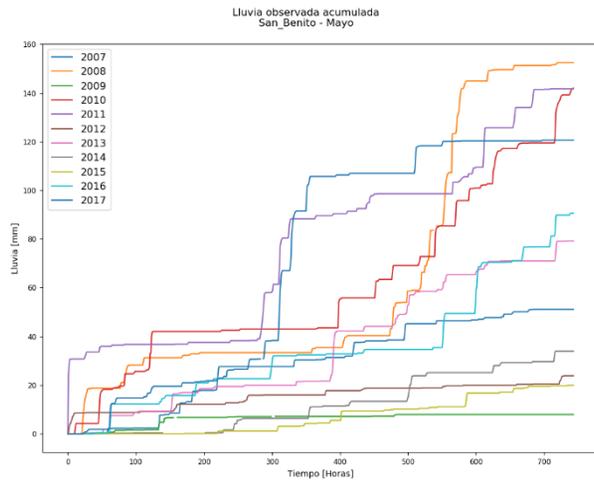


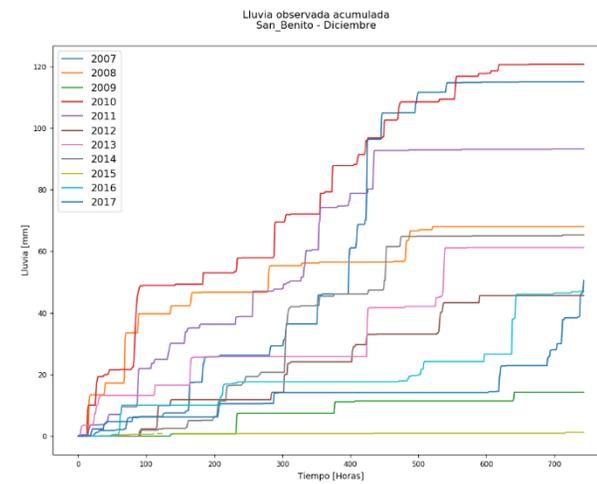
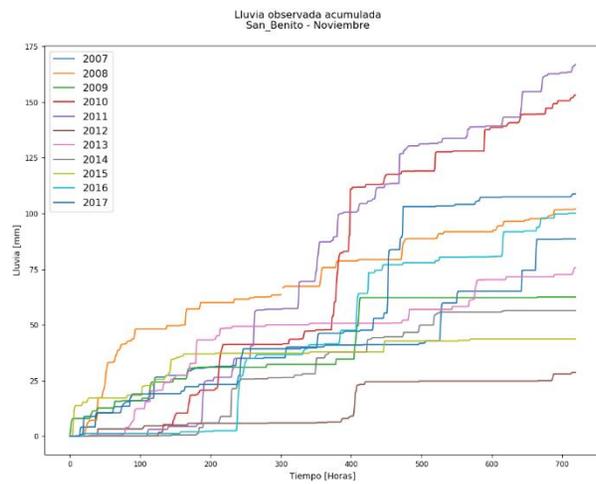
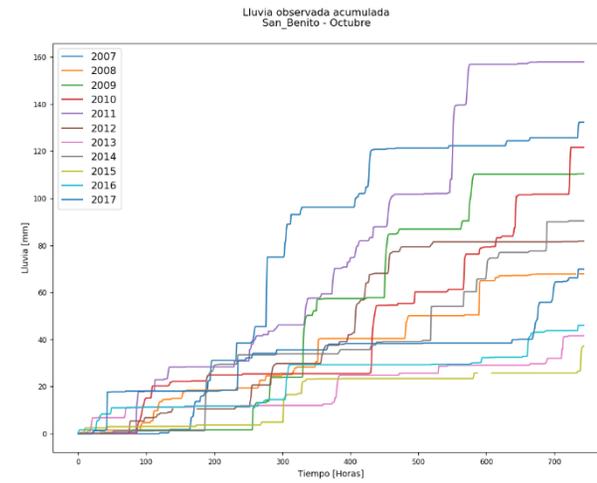
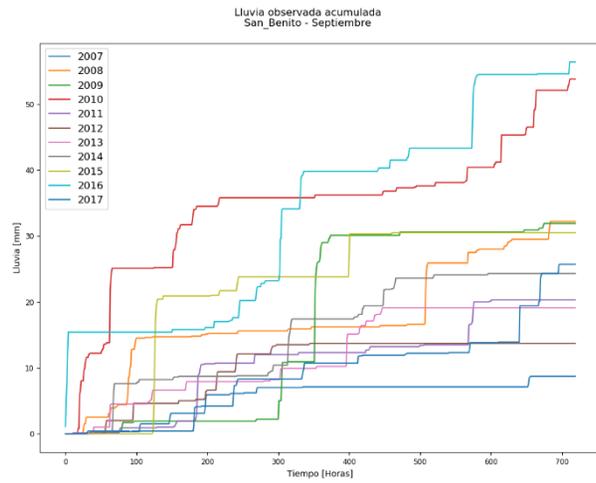
Lluvia observada  
UAN\_Usme - Diciembre  
[mm/h]

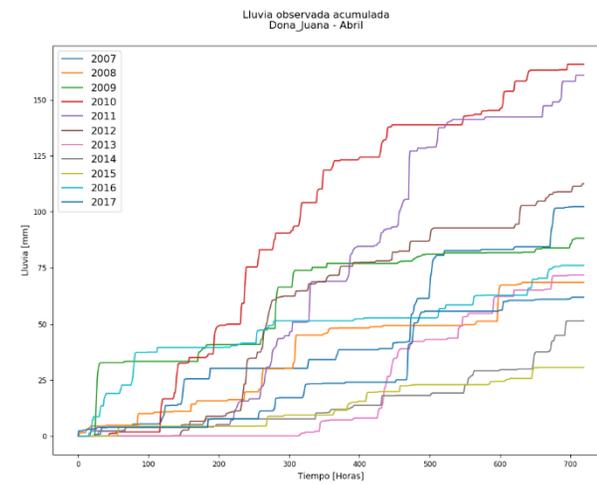
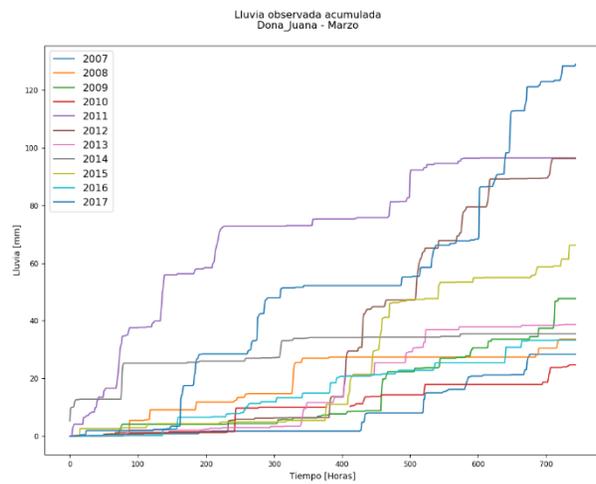
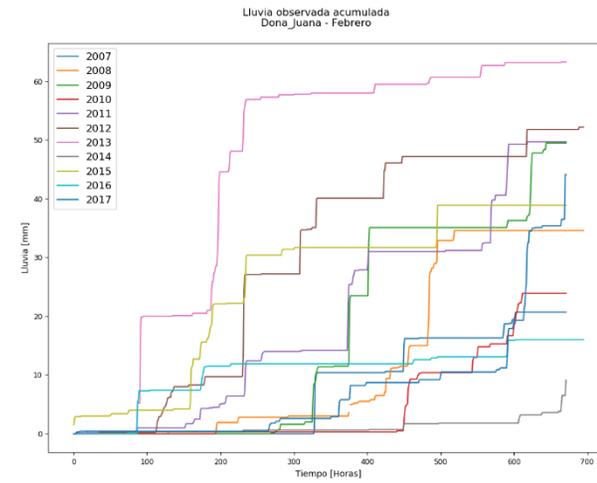
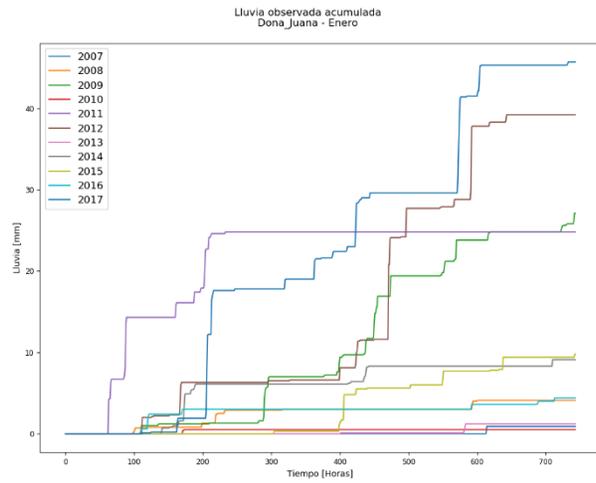


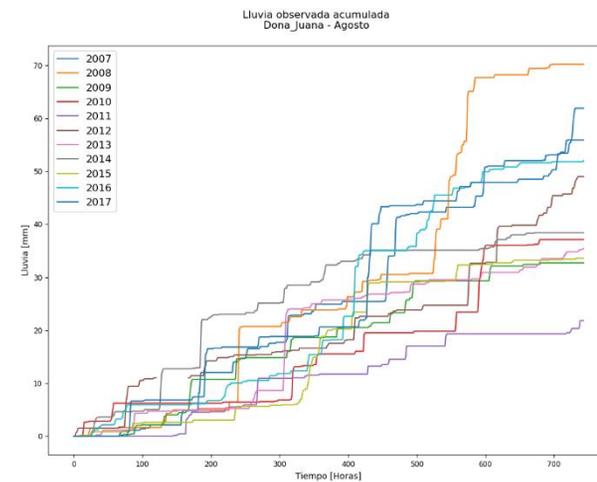
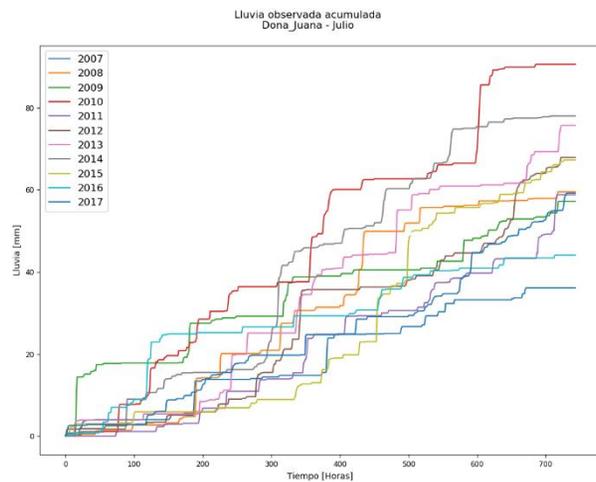
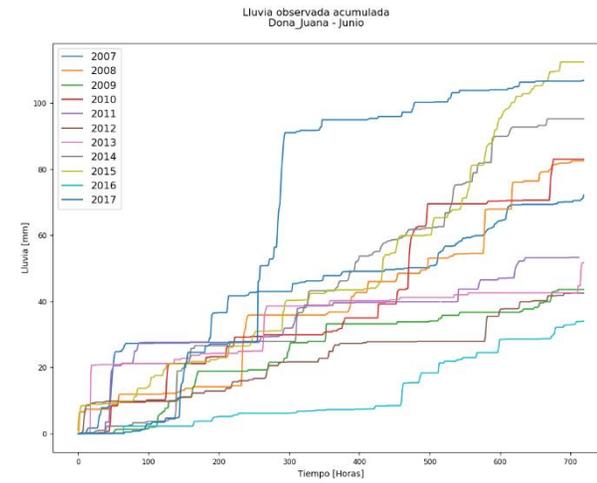
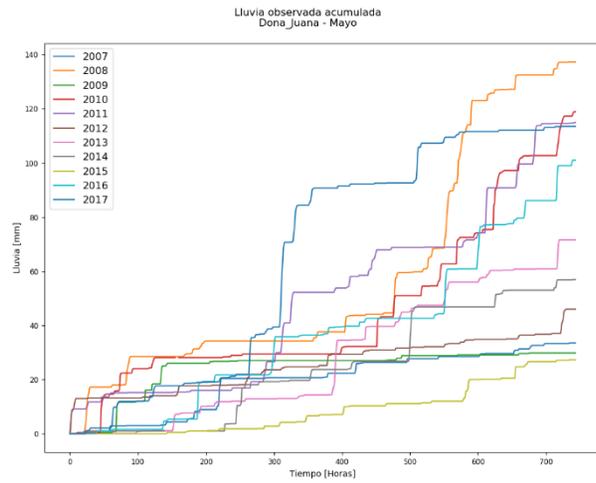
## Anexo 2. Gráficas de series observadas acumuladas

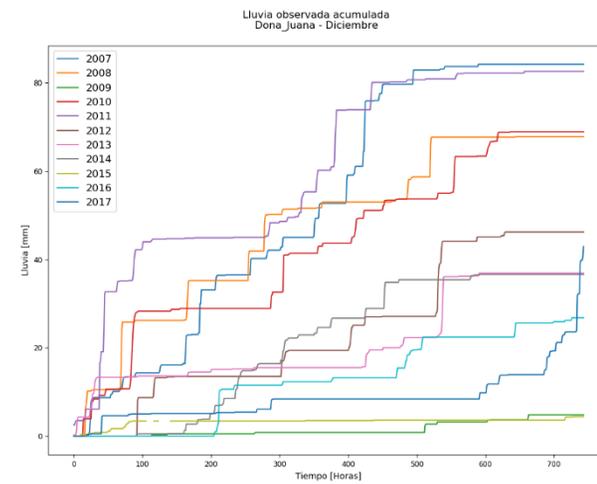
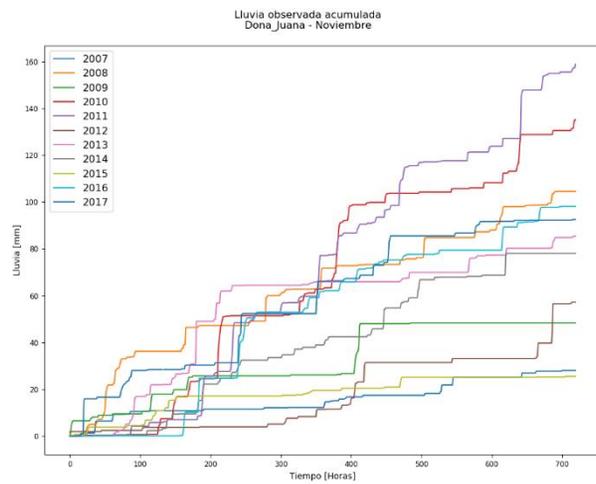
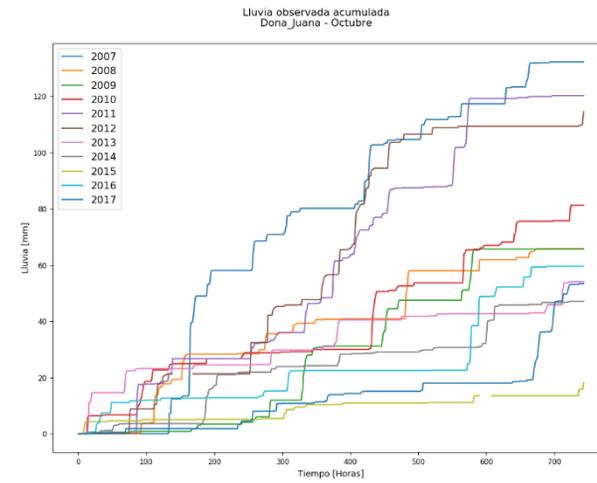
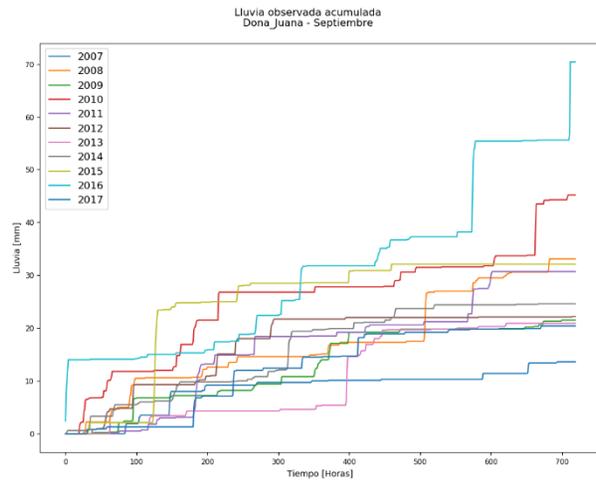


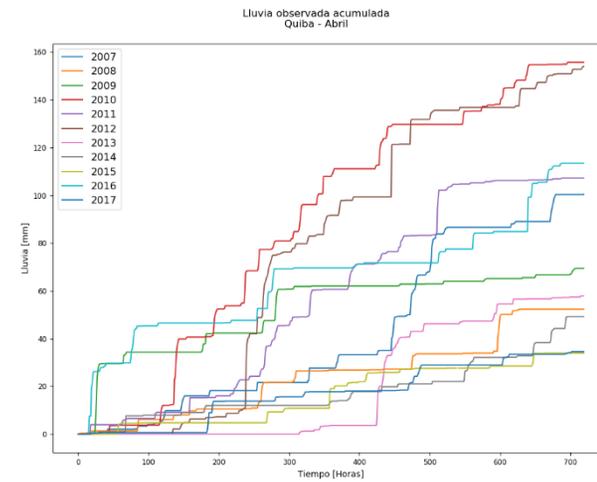
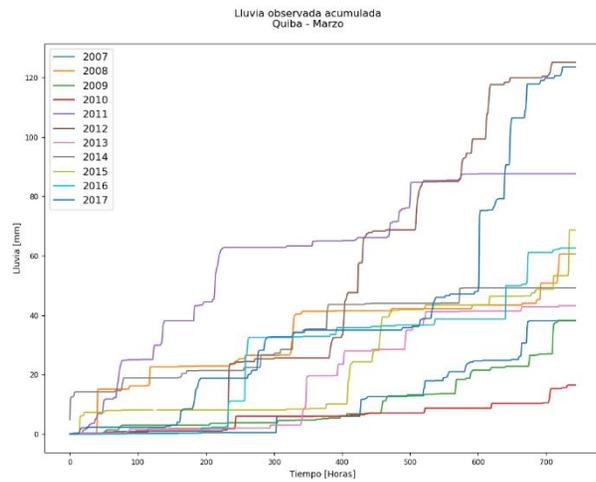
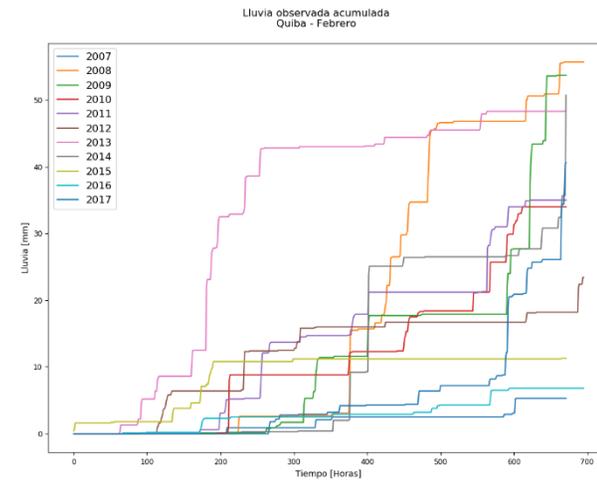
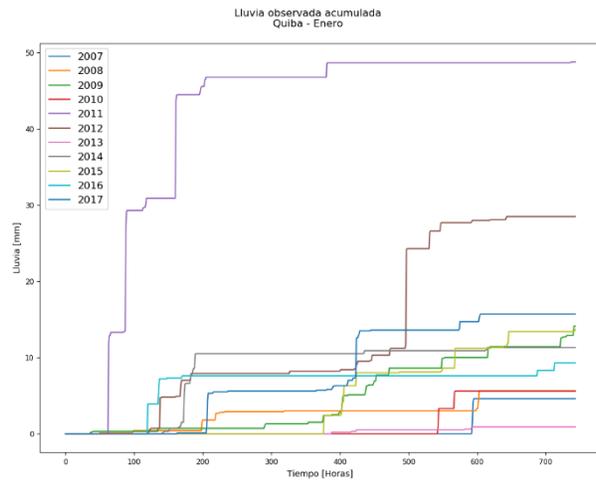


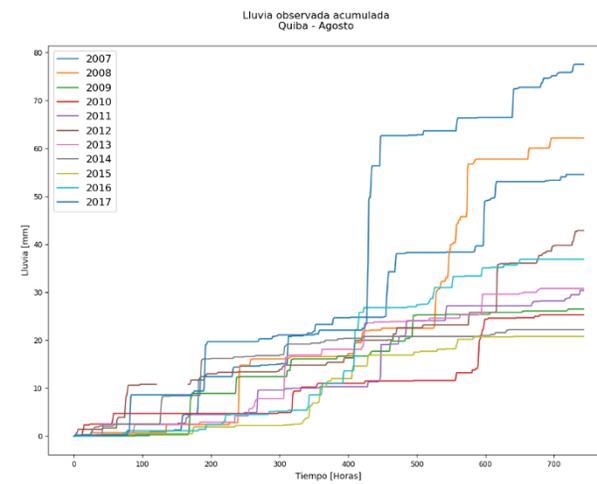
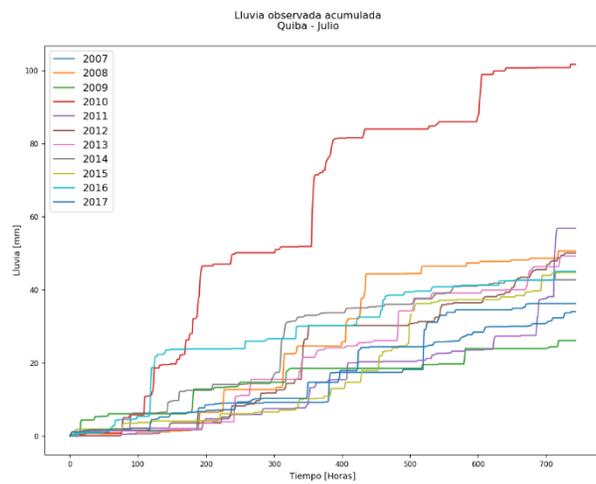
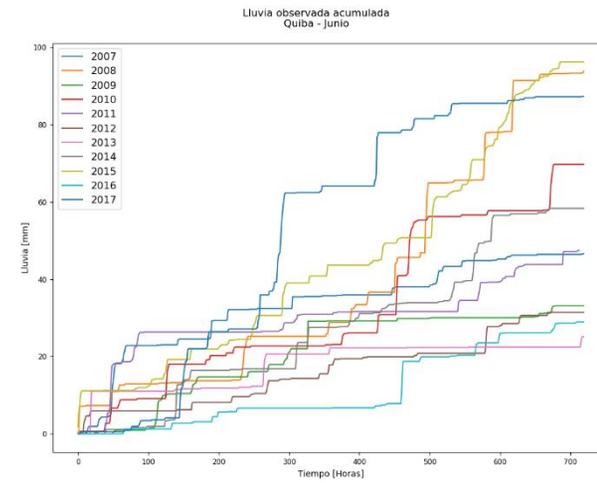
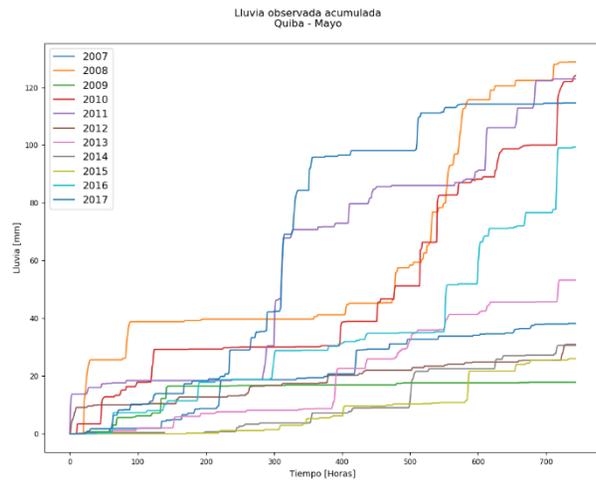


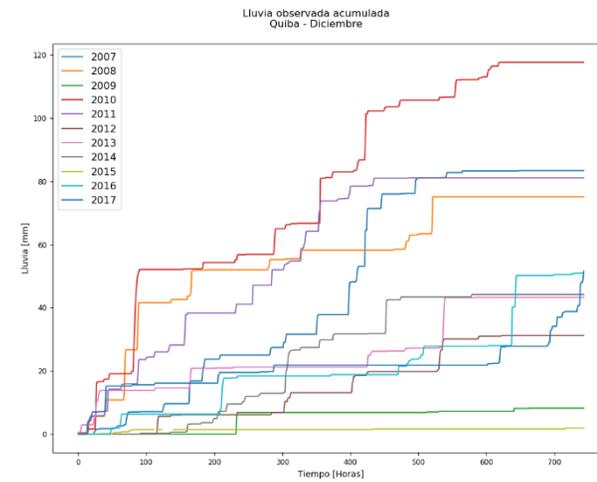
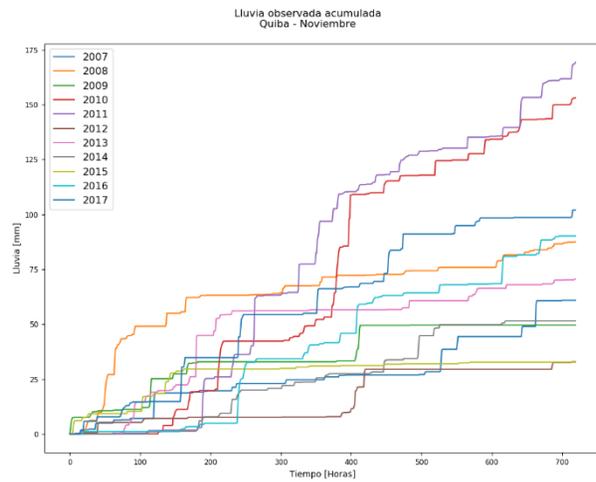
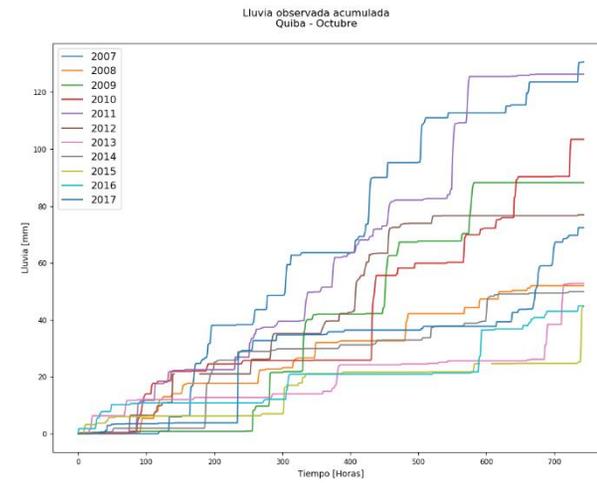
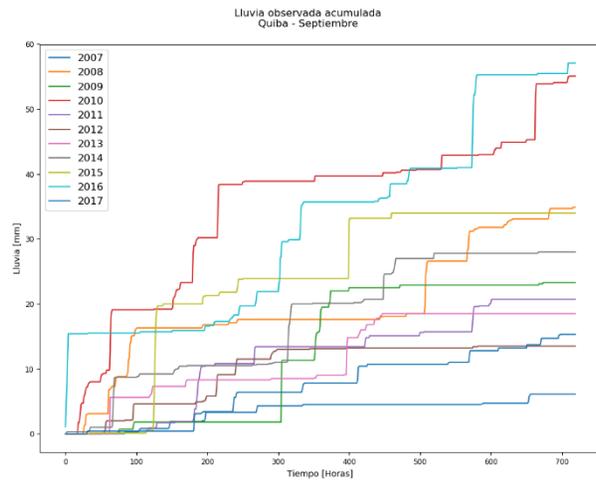


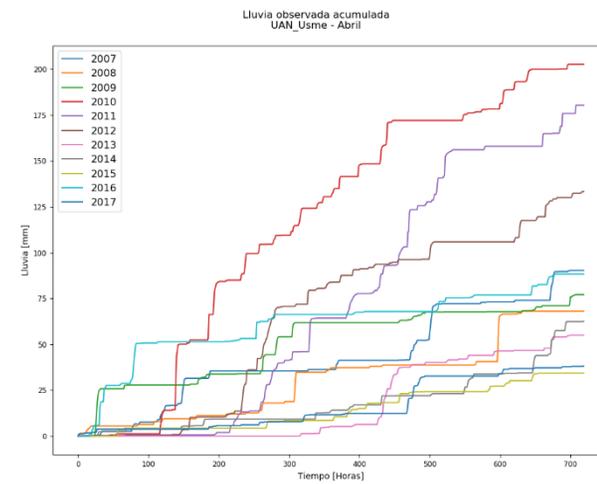
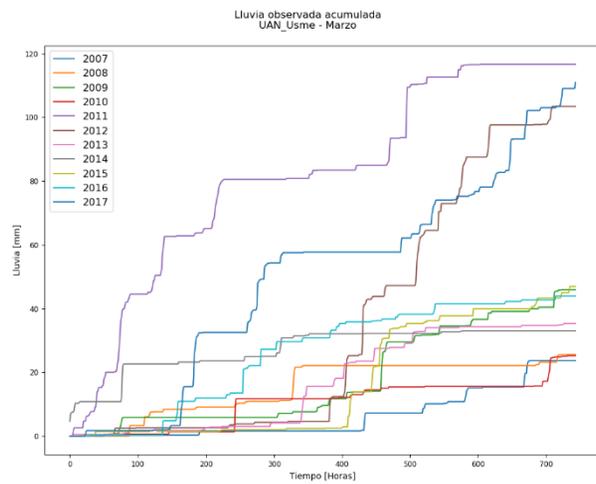
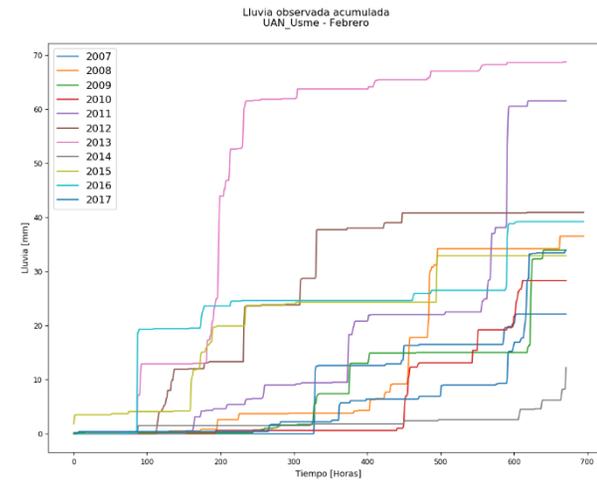
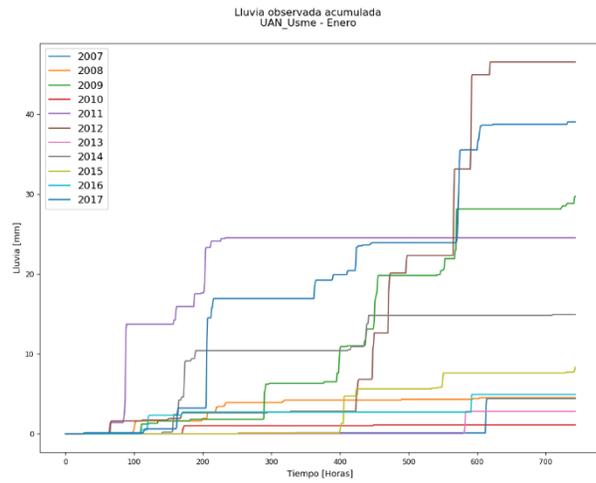


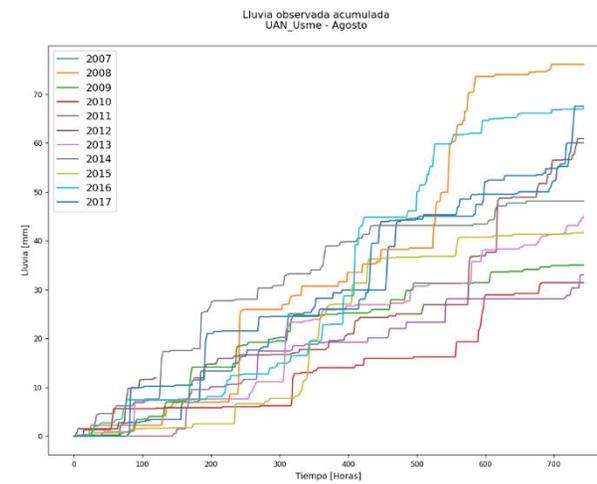
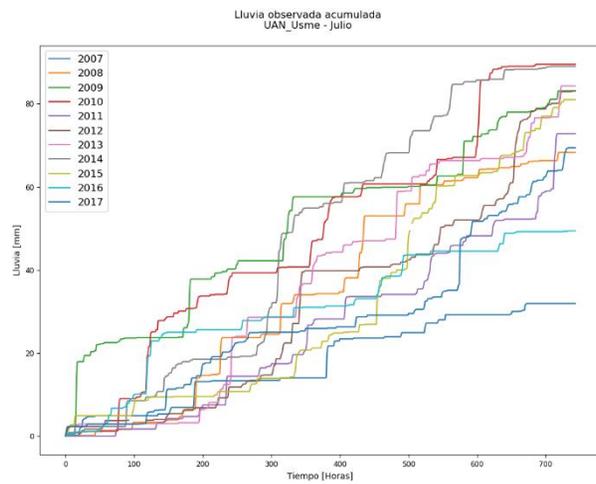
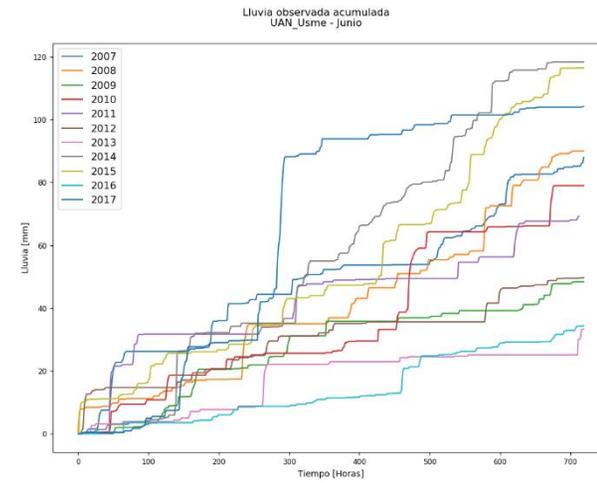
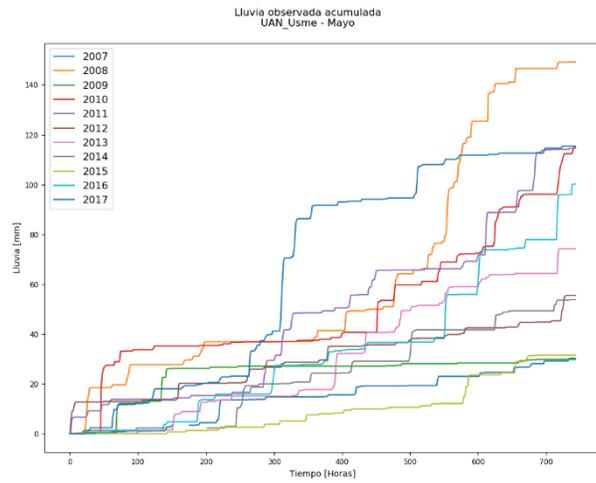


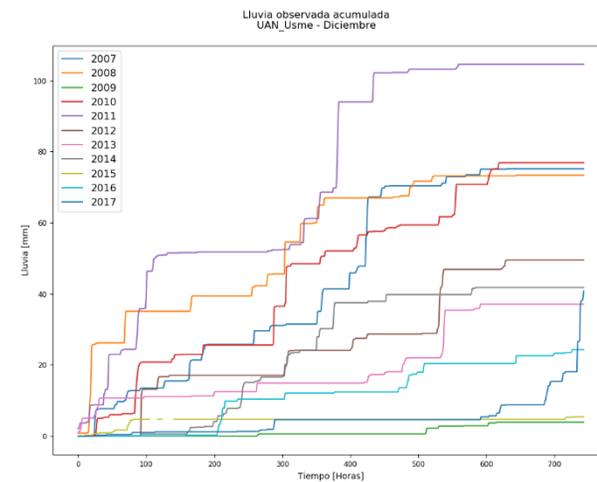
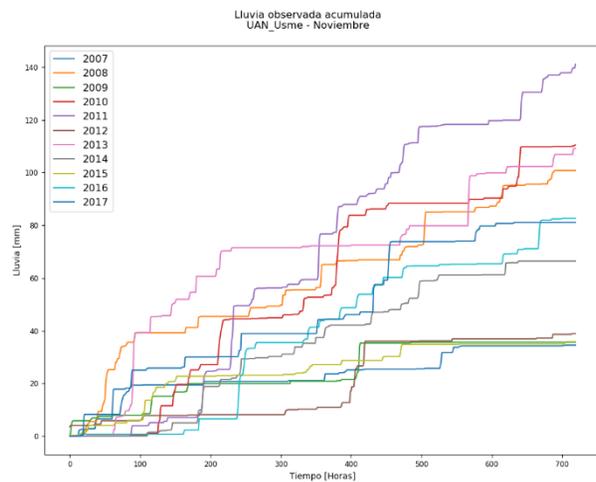
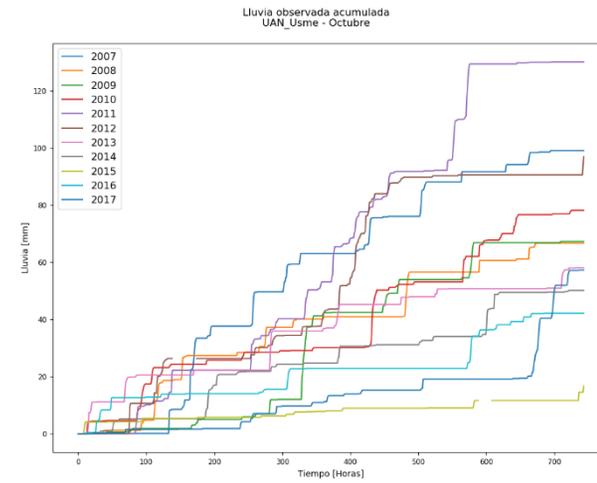
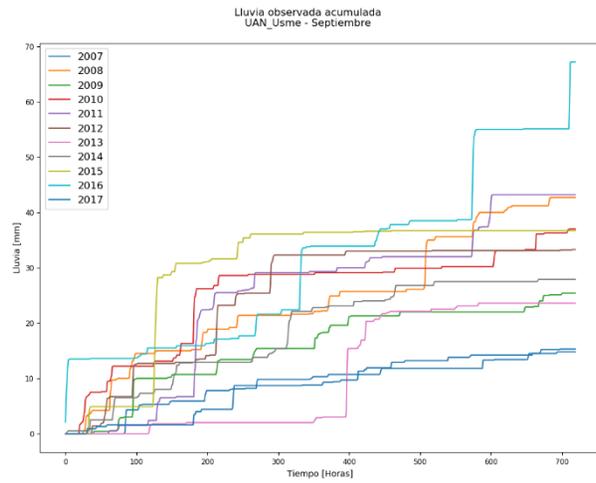












### Anexo 3. Resultados de la optimización por pasos

#### Paso 1

```
1
  fun: 0.021445607905429966
  jac: array([ 0.09149118, -0.00230163,  0.00075079,  0.00039412])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 131
  nit: 20
  njev: 20
  status: 0
  success: True
     x: array([3.13646414e-03, 2.10718786e-01, 9.95181770e+00, 9.10098479e+00])
2
  fun: 3.0337662735592044e-07
  jac: array([ 5.19169552e-02, -4.67991925e-04, -3.54570348e-05,  1.43278701e-04])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 352
  nit: 55
  njev: 55
  status: 0
  success: True
     x: array([0.00847733, 0.04234442, 2.6949298 , 4.05876469])
3
  fun: 4.2194530190627596e-07
  jac: array([3.95484135e-02, 2.47909038e-03, 5.11553852e-05, 4.96168830e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 348
  nit: 54
  njev: 54
  status: 0
  success: True
     x: array([0.01516458, 0.08367306, 2.16019239, 3.89421466])
4
  fun: 1.5196498648725681e-07
  jac: array([-9.61749107e-03,  1.82610313e-03,  5.80214263e-05, -1.27778381e-04])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 258
  nit: 41
  njev: 41
  status: 0
  success: True
     x: array([0.01570815, 0.04219797, 1.61863653, 4.53717902])
```

5  
fun: 7.672842030333173e-07  
jac: array([5.19018170e-02, 3.87244222e-04, 1.68585263e-05, 4.49758186e-06])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 178  
nit: 27  
njev: 27  
status: 0  
success: True  
x: array([1.26779409e-02, 4.99360069e-01, 4.25970409e+00, 1.53963513e+01])

6  
fun: 3.3784561005524125e-07  
jac: array([ 2.56910096e-02, -4.99984841e-03, 8.53413177e-05, -1.98577432e-04])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 386  
nit: 60  
njev: 60  
status: 0  
success: True  
x: array([0.02468038, 0.03584984, 1.26157441, 2.57499598])

7  
fun: 2.995899084220012e-07  
jac: array([ 1.67216653e-03, 2.51311592e-03, 3.41747433e-05, -1.09770597e-04])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 344  
nit: 54  
njev: 54  
status: 0  
success: True  
x: array([0.02434353, 0.05261428, 1.59319422, 3.0654128 ])

8  
fun: 0.015022770747101412  
jac: array([0.00550105, 0.00133225, 0.00044603, 0.00040395])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 164  
nit: 25  
njev: 25  
status: 0  
success: True  
x: array([8.94999956e-03, 2.71749227e-01, 5.63904430e+00, 1.75636041e+01])

9  
fun: 0.00010095499615849663  
jac: array([-7.87681413e-02, 7.89905254e-04, -9.81099856e-06, -3.83890410e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 231  
nit: 37  
njev: 34  
status: 0

```
success: True
  x: array([9.50028830e-03, 7.31780448e-01, 4.84123655e+00, 1.07202524e+01])
10
  fun: 5.352982825022886e-08
  jac: array([ 2.90223551e-02, -4.60773603e-03, -4.02539402e-05,  3.03095954e-04])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 325
  nit: 51
  njev: 51
  status: 0
success: True
  x: array([0.01897506, 0.0608146 , 1.75734935, 3.35917269])
11
  fun: 2.526211542699765e-07
  jac: array([-0.03401709,  0.00365953,  0.00020967, -0.00016142])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 270
  nit: 42
  njev: 42
  status: 0
success: True
  x: array([0.01473804, 0.03849403, 1.94427968, 4.82554186])
12
  fun: 0.017045287384793592
  jac: array([-0.04394438, -0.00494132,  0.00057253,  0.00058224])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 149
  nit: 22
  njev: 22
  status: 0
success: True
  x: array([6.81693170e-03, 1.74316726e-01, 8.35024620e+00, 1.60756852e+01])
  lam      beta      eta      miuc
```

Process finished with exit code 0

## Paso 2

```
1
  fun: 6.402791546521213
  jac: array([2.98419641e+02, 1.52349472e-04])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 29
  nit: 8
  njev: 7
  status: 0
  success: True
  x: array([0.01      , 1.44390552])
2
  fun: 5.986786638029641
  jac: array([0.00025839, 0.00010246])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 44
  nit: 10
  njev: 10
  status: 0
  success: True
  x: array([0.01401964, 2.04238157])
3
  fun: 0.5749125067291573
  jac: array([4.80367988e-03, 3.27080488e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 31
  nit: 7
  njev: 7
  status: 0
  success: True
  x: array([0.01650484, 1.3177802 ])
4
  fun: 0.22824437623855234
  jac: array([1.40751414e-02, 3.07392329e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 37
  nit: 8
  njev: 8
  status: 0
  success: True
  x: array([0.0242778 , 1.12229716])
5
  fun: 0.5713470164992602
  jac: array([ 1.65238976e-04, -2.99736857e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 45
  nit: 11
```

njev: 11  
status: 0  
success: True  
x: array([0.41702482, 1.91269547])  
6  
fun: 0.0253331651681583  
jac: array([-2.61484669e-03, 7.28107989e-06])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 55  
nit: 12  
njev: 12  
status: 0  
success: True  
x: array([0.03490708, 0.37757658])  
7  
fun: 0.014070265725635646  
jac: array([0.00595857, 0.00054679])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 48  
nit: 10  
njev: 10  
status: 0  
success: True  
x: array([0.05207325, 0.3090513 ])  
8  
fun: 0.15876336254796497  
jac: array([-2.39576027e-03, -3.20300460e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 29  
nit: 7  
njev: 7  
status: 0  
success: True  
x: array([0.25359791, 1.11752216])  
9  
fun: 0.6419020747651666  
jac: array([ 5.59836626e-05, -4.72888350e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 46  
nit: 11  
njev: 11  
status: 0  
success: True  
x: array([0.59528061, 2.09873139])  
10  
fun: 0.2328272987607657  
jac: array([0.00725831, 0.00059243])  
message: 'Optimization terminated successfully.'

```
nfev: 41
nit: 9
njev: 9
status: 0
success: True
  x: array([0.02453402, 0.94814542])
11
  fun: 0.15154346779506897
  jac: array([4.18353826e-03, 9.35420394e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 36
nit: 8
njev: 8
status: 0
success: True
  x: array([0.02626975, 0.93491469])
12
  fun: 1.532600809642323
  jac: array([-0.00660789, 0.00023475])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 22
nit: 5
njev: 5
status: 0
success: True
  x: array([0.133078 , 1.86536218])
  beta   phi
```

Process finished with exit code 0

### Paso 3

1

```
fun: 0.0004902007547841042
jac: array([ 2.92651613e-02, -7.96356253e-05, -2.59189255e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 123
nit: 23
njev: 23
status: 0
success: True
x: array([0.00397309, 2.99575256, 3.37128169])
```

2

```
fun: 0.0008941178205748338
jac: array([ 4.19707107e-02, -1.85706493e-04, 7.67939055e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 52
nit: 10
njev: 10
status: 0
success: True
x: array([5.38680199e-03, 2.56869496e+00, 5.90959162e+00])
```

3

```
fun: 0.00398976687835655
jac: array([-7.95495068e-03, 4.51636151e-05, 1.10506662e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 52
nit: 10
njev: 10
status: 0
success: True
x: array([0.01230781, 1.91486907, 3.94922864])
```

4

```
fun: 0.0004175855802851478
jac: array([ 1.23311466e-03, -3.69829104e-04, -1.09237189e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 41
nit: 8
njev: 8
status: 0
success: True
x: array([0.01358325, 1.56086109, 4.9192767 ])
```

5

```
fun: 0.00032302040766532514
jac: array([ 2.85563100e-02, -1.09556033e-04, 8.52271551e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 123
nit: 23
```

njev: 23  
status: 0  
success: True  
x: array([0.01724314, 2.18191403, 5.96675702])

6  
fun: 1.3866801020303585e-07  
jac: array([-1.01293266e-04, -3.98433681e-04, 1.54149935e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 33  
nit: 6  
njev: 6  
status: 0  
success: True  
x: array([0.02452461, 1.25946057, 2.58507441])

7  
fun: 2.2713284386336626e-06  
jac: array([0.04467735, 0.00018222, 0.00088994])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 9  
nit: 1  
njev: 1  
status: 0  
success: True  
x: array([0.02431735, 1.59319401, 3.06541177])

8  
fun: 0.010331066411537363  
jac: array([ 4.31068009e-02, 2.01457879e-05, -1.57669419e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 102  
nit: 20  
njev: 20  
status: 0  
success: True  
x: array([1.02074051e-02, 3.32180853e+00, 1.11063889e+01])

9  
fun: 0.0004092232983511343  
jac: array([ 0.06654536, -0.00015576, 0.00017877])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 125  
nit: 23  
njev: 23  
status: 0  
success: True  
x: array([0.01406351, 2.55063702, 3.99927482])

10  
fun: 0.0010808608614882552  
jac: array([ 1.75968633e-03, -5.38219145e-04, 8.61044391e-05])  
message: 'Optimization terminated successfully.'

```
nfev: 41
nit: 8
njev: 8
status: 0
success: True
  x: array([0.01676622, 1.65741713, 3.43227857])
11
  fun: 0.00022783723015729445
  jac: array([2.57456933e-03, 1.26327870e-04, 7.33209963e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 47
nit: 9
njev: 9
status: 0
success: True
  x: array([0.01330332, 1.89576722, 5.11544229])
12
  fun: 0.00252253033656117
  jac: array([-4.23301631e-03, 7.06707942e-06, 4.02805745e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 119
nit: 22
njev: 22
status: 0
success: True
  x: array([0.00950679, 3.21168272, 6.71959685])
  lam   eta   miuc
```

Process finished with exit code 0

#### Paso 4

1

```
fun: 4.261681456386241e-07
jac: array([ 0.00057887, -0.0001002 ])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 65
nit: 16
njev: 16
status: 0
success: True
x: array([1.45058513, 5.57992248])
```

2

```
fun: 2.616945392943867e-07
jac: array([ 8.37054055e-03, -3.67678461e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 360
nit: 84
njev: 84
status: 0
success: True
x: array([ 3.72072972, 151.21148247])
```

3

```
fun: 2.8718810594452924e-06
jac: array([ 6.85768138e-03, -2.87894233e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 377
nit: 88
njev: 88
status: 0
success: True
x: array([ 4.08110885, 166.34835858])
```

4

```
fun: 0.015273109929732989
jac: array([ 0.47804239, -0.00073961])
message: 'Iteration limit exceeded'
nfev: 438
nit: 101
njev: 101
status: 9
success: False
x: array([ 4.9044813 , 443.66850955])
```

5

```
fun: 3.202833444149204e-07
jac: array([ 9.75015205e-03, -2.14805267e-05])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 398
nit: 93
```

njev: 93  
status: 0  
success: True  
x: array([ 4.24924439, 296.11930506])  
6  
fun: 0.00019011860387967917  
jac: array([ 0.07162562, -0.00025663])  
message: 'Iteration limit exceeded'  
nfev: 437  
nit: 101  
njev: 101  
status: 9  
success: False  
x: array([ 4.58985415, 186.80159344])  
7  
fun: 4.6025510970356225e-07  
jac: array([-1.12432426e-03, 5.83638998e-06])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 339  
nit: 79  
njev: 79  
status: 0  
success: True  
x: array([ 3.95017706, 100.58455904])  
8  
fun: 3.365629584741938e-07  
jac: array([ 1.04574324e-03, -3.97321498e-06])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 278  
nit: 66  
njev: 66  
status: 0  
success: True  
x: array([ 3.59832685, 189.44607969])  
9  
fun: 3.31414568334209e-07  
jac: array([-0.00323815, 0.00011886])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
nfev: 123  
nit: 30  
njev: 30  
status: 0  
success: True  
x: array([ 2.28651595, 17.4282281 ])  
10  
fun: 9.647665326041759e-07  
jac: array([ 2.55785061e-02, -9.67748582e-05])  
message: 'Iteration limit exceeded'

```
nfev: 432
nit: 101
njev: 101
status: 9
success: False
  x: array([ 4.23556273, 169.23889881])
11
  fun: 0.0006838105836790994
  jac: array([ 0.05244792, -0.0001045 ])
message: 'Iteration limit exceeded'
  nfev: 434
  nit: 101
  njev: 101
  status: 9
  success: False
    x: array([ 4.58302708, 364.92572215])
12
  fun: 4.354057494244528e-07
  jac: array([ 0.00685824, -0.00010242])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 182
  nit: 43
  njev: 43
  status: 0
  success: True
    x: array([ 2.71692278, 43.70802297])
    alpha    miuc
```

Process finished with exit code 0

## Paso 5

```
1
  fun: 4.398782717707816
  jac: array([-9.29832458e-06])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 9
  nit: 3
  njev: 3
  status: 0
  success: True
  x: array([1.44015599])
2
  fun: 6.352736458558565
  jac: array([-0.00021857])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 12
  nit: 4
  njev: 4
  status: 0
  success: True
  x: array([2.09246837])
3
  fun: 0.5974255807514817
  jac: array([-0.0001016])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 12
  nit: 4
  njev: 4
  status: 0
  success: True
  x: array([1.37079461])
4
  fun: 0.2544943458812709
  jac: array([-0.00010571])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 12
  nit: 4
  njev: 4
  status: 0
  success: True
  x: array([1.17421336])
5
  fun: 0.5124508397244438
  jac: array([0.00054216])
message: 'Optimization terminated successfully.'
  nfev: 3
```

```
nit: 1
njev: 1
status: 0
success: True
  x: array([1.91269547])
6
  fun: 0.02620099046155336
  jac: array([0.00082353])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 10
nit: 3
njev: 3
status: 0
success: True
  x: array([0.39852687])
7
  fun: 0.014812750141623959
  jac: array([0.0026939])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 11
nit: 3
njev: 3
status: 0
success: True
  x: array([0.33378791])
8
  fun: 0.1729814133698347
  jac: array([-0.00011291])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 15
nit: 5
njev: 5
status: 0
success: True
  x: array([1.23746488])
9
  fun: 0.4884776853813022
  jac: array([-0.00016633])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 20
nit: 6
njev: 6
status: 0
success: True
  x: array([1.84621393])
10
  fun: 0.254875787765042
  jac: array([-0.00105435])
```

```
message: 'Optimization terminated successfully.'  
  nfev: 10  
  nit: 3  
  njev: 3  
  status: 0  
  success: True  
    x: array([0.99294924])  
11  
  fun: 0.17855468504899932  
  jac: array([-0.00014126])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
  nfev: 12  
  nit: 4  
  njev: 4  
  status: 0  
  success: True  
    x: array([0.99821801])  
12  
  fun: 1.3306080687489945  
  jac: array([-0.0002889])  
message: 'Optimization terminated successfully.'  
  nfev: 13  
  nit: 4  
  njev: 4  
  status: 0  
  success: True  
    x: array([1.81257665])  
  phi
```

Process finished with exit code 0