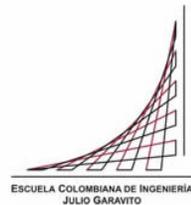


**Maestría en Ingeniería Civil**

**Modelación con Diferencias Finitas del Comportamiento Dinámico  
de Suelos Estratificados Sometidos a Cargas en Superficie: Caso  
2D**

**Maximiliano Villadiego Estrada**

**Bogotá D.C., 07 de febrero de 2019**

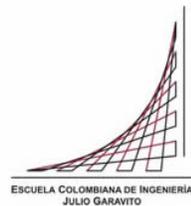


**Modelación con Diferencias Finitas del Comportamiento Dinámico  
de Suelos Estratificados Sometidos a Cargas en Superficie: Caso  
2D**

**Tesis para optar al título de magíster en Ingeniería Civil, con  
énfasis en Geotecnia**

**Ing. Ricardo Salazar Ferro  
Director**

**Bogotá D.C., 12 de diciembre de 2018**



La tesis de maestría titulada “Modelación con Diferencias Finitas del Comportamiento Dinámico de Suelos Estratificados Sometidos a Cargas en Superficie: Caso 2D”, presentada por Maximiliano Villadiego Estrada, cumple con los requisitos establecidos para optar al título de Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Geotecnia.

Director de la tesis

Ing. Ricardo Salazar Ferro

Jurado

Ing. Edgar Eduardo Rodríguez Granado

Jurado

Ing. Javier Camacho Tauta

Bogotá, D.C., 18 de enero de 2019

## **Agradecimientos**

Agradezco a **Dios** porque a lo largo de años de arduo esfuerzo, en medio de muchas dificultades, siempre ha brindado los medios, me ha dado la paciencia y la fortaleza para seguir adelante y alcanzar las metas.

A **mi familia**, porque siempre han confiado en mis capacidades y ante todo nunca me han negado apoyo incondicional y con sus palabras de aliento me han empujado a seguir adelante, en especial a mi madre, que siempre me inculcó el interés en aprender y gracias a ello cada momento de mi vida es movido por el deseo de adquirir conocimientos nuevos.

A **mi esposa e hijos**, que a lo largo de esta importante travesía, para alcanzar el logro que se concreta con esta tesis, vieron truncado gran parte del tiempo, que bien pudo ser compartido con ellos, y me apoyaron incondicionalmente.

Al **Ing. Ricardo Salazar Ferro**, por aceptar acompañarme en este proceso, compartir sus conocimientos académicos y guiarme durante el desarrollo de este trabajo de grado, por el tiempo, paciencia y dedicación invertido en las revisiones de cada una de las partes constituyentes, por las críticas constructivas brindadas, siendo su objetivo la conclusión del trabajo de grado con la mayor satisfacción.

A los **docentes de la Carrera de Ingeniería Civil**, por su importante y valiosa labor de transmitirnos sus conocimientos, necesarios para nuestra formación e invaluable en el excelente ejercicio profesional.

A la **Escuela Colombiana de Ingeniería**, por brindarme la oportunidad de experimentar esta experiencia universitaria y permitirme evolucionar en la adquisición de conocimientos en su campus.

**¡A TODOS MUCHAS GRACIAS!**

## Resumen

Siempre que se concibe un proyecto de ingeniería, lo primero que se debe entender es que este deberá estar vinculado al suelo mediante un sistema suelo-fundación, y que la correcta interacción entre el suelo y dicha fundación debe ser la que garantice la estabilidad geotécnica y estructural del proyecto.

Debido a que las máquinas y equipos mecánicos que generan vibraciones hacen parte de los diversos sistemas de producción en la industria energética, minera, siderúrgica, de petróleos, etc., es muy común que los ingenieros se encuentren con la necesidad de diseñar la cimentación de este tipo de equipos, razón por la cual es fundamental el adecuado conocimiento del comportamiento del sistema máquina-fundación-suelo. Por lo anterior se en este proyecto analizó el comportamiento de un sistema máquina vibratoria-fundación-suelo, para un suelo de dos estratos y un cimiento de longitud infinita.

El presente proyecto se desarrolló mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD, por sus siglas en inglés), a través de un programa escrito en el lenguaje FORTRAN 90 usando la plataforma libre INTEL VISUAL STUDIO, donde se propuso un modelo que contiene las cargas estáticas de la fundación y dinámicas de la máquina vibratoria, además de la geometría del cimiento y parámetros del suelo.

**Palabras clave:** Suelo, Máquina, Vibraciones, Cimentación, Carga dinámica, Diferencias finitas, desplazamientos, esfuerzos.

## **Abstract**

Whenever an engineering project is conceived, the first thing that must be understood is that it must be linked to the soil through a soil-foundation system, and that the correct interaction between the soil and the foundation must guarantee geotechnical and structural stability of the project.

Because the machines and mechanical equipment that generate vibrations are part of the various production systems in the energy industry, mining, steel, oil, etc., it is very common for engineers to find the need to design the foundation for this type of equipment, which is why the adequate knowledge of the behavior of the machine-foundation-soil system is fundamental. Because of the above this project analyzes the behavior of a vibratory machine-foundation-soil system, for a soil of two strata and a foundation of infinite length.

The present project is developed by means of the method of finite differences in the time domain (FDTD, for its acronym in English), through a program written in the FORTRAN 90 language using the free platform INTEL VISUAL STUDIO. A model is proposed that contains the static loads of the foundation and dynamics loads of the vibratory machine, in addition to the geometry of the foundation and soil parameters.

Key words: Soil, Machine, Vibrations, Foundations, Dynamic load, Finite differences, displacements, efforts.

## Índice general

<b>GENERALIDADES .....</b>	<b>14</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>14</b>
<b>1 OBJETIVO .....</b>	<b>16</b>
<b>2 METODOLOGÍA .....</b>	<b>17</b>
<b>3 ANTECEDENTES GENERALES .....</b>	<b>18</b>
<b>3.1 CIMENTACIÓN DE MÁQUINAS VIBRATORIAS.....</b>	<b>18</b>
3.1.1 TIPOS DE MÁQUINAS VIBRATORIAS.....	19
3.1.2 TIPOS DE FUNDACIONES PARA MÁQUINAS VIBRATORIAS ..	21
3.1.3 MÉTODOS DE DISEÑO DE CIMENTACIÓN DE MÁQUINAS VIBRATORIAS .....	24
<b>3.2 MOVIMIENTO OSCILATORIO .....</b>	<b>25</b>
3.2.1 OSCILACIONES LIBRES .....	25
3.2.2 OSCILACIONES AMORTIGUADAS.....	26
3.2.3 OSCILACIONES FORZADAS EN ESTADO ESTACIONARIO .....	29
<b>4 SUELOS SOMETIDOS A CARGAS DINÁMICAS SUPERFICIALES .....</b>	<b>33</b>
<b>4.1 PROPIEDADES DINÁMICAS DE LOS SUELOS.....</b>	<b>33</b>
4.1.1 MÓDULOS DINÁMICOS.....	36
<b>4.2 MODELOS MATEMÁTICOS EN DINÁMICA DE SUELOS.....</b>	<b>37</b>
<b>5 ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO .....</b>	<b>40</b>
<b>5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.....</b>	<b>40</b>
5.1.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ELÍPTICAS .....	40
5.1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARABÓLICAS.....	40
5.1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBÓLICAS .....	41
5.1.4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES .....	41
<b>5.2 DIFERENCIAS FINITAS - DF .....</b>	<b>42</b>
5.2.1 DIFERENCIAS FINITAS CON DERIVADAS TEMPORALES 2D ..	44
<b>5.3 HISTORIA DE ECUACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS .....</b>	<b>46</b>
5.3.1 ECUACIÓN DE ONDA EN UNA DIMENSIÓN DE D'ALEMBERT .	47
5.3.2 ECUACIÓN DE ONDA EN UNA DIMENSIÓN DE BERNOULLI ...	48
5.3.3 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO .....	49

5.3.4	FRENTE Y TIPO DE ONDA .....	50
6	PROPAGACIÓN DE ONDAS P-SV EN MEDIOS HETEROGÉNEOS: VELOCIDADES-ESFUERZOS POR MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO .....	52
6.1	MODELAMIENTO NUMÉRICO DE LA ECUACIÓN DE ONDA.....	53
6.1.1	FORMULACIÓN DESPLAZAMIENTO Y ESQUEMA CONVENCIONAL.....	53
6.1.2	FORMULACIÓN VELOCIDAD – ESFUERZO Y ESQUEMA DE MALLA INTERCALADA .....	53
6.2	ECUACIÓN DIFERENCIAL ELASTODINÁMICA .....	54
6.3	ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO VIRIEUX 1986 .....	57
6.3.1	MALLA INTERCALADA .....	60
6.3.2	CONDICIONES DE FRONTERA .....	64
7	MODELO NUMÉRICO .....	70
7.1	DOMINIO ESPACIAL .....	70
7.2	MATERIALES.....	71
7.3	HISTORIA DE CARGA.....	71
7.4	SENSIBILIDAD DE LA GEOMETRÍA DEL DOMINIO DE SUELO .....	73
7.5	SENSIBILIDAD DEL MODELO ANTE VARIACIÓN DE INCREMENTOS DEL DOMINIO DE SUELO (TAMAÑO DE ENMALLADO) Y DEL DOMINIO DEL TIEMPO.....	73
7.6	VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO .....	75
7.7	SENSIBILIDAD DEL MODELO A LA VARIACIÓN EN LA FRECUENCIA DE VIBRACIÓN .....	79
7.8	COMPARACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO PROPUESTO VERSUS MODELOS CON CIMENTACIÓN DE GEOMETRÍA DEFINIDA.....	80
7.8.1	VARIACIÓN DE ASENTAMIENTOS VERSUS LONGITUD DEL ÁREA CARGADA .....	83
7.8.2	VARIACIÓN DE ASENTAMIENTOS VERSUS LONGITUD DEL ÁREA CARGADA SIN VIBRACIÓN Y CON VIBRACIÓN .....	85
7.9	VARIACIÓN DE LA DEFORMACIÓN VERSUS RELACIÓN ENTRE MÓDULOS DE ELASTICIDAD $E_1/E_2$ .....	86

7.10	GRÁFICA DEL CUENCO DE DEFORMACIÓN BAJO LA CARGA SU ÁREA AFERENTE. ....	91
7.11	GRÁFICA DE BULBO DE DISIPACIÓN DE ESFUERZOS PARA DIFERENTES RELACIONES $E_1/E_2$ CONJUGADOS CON VARIAS RELACIONES H/B. ....	95
7.12	SENSIBILIDAD DEL BULBO DE DISIPACIÓN DE ESFUERZOS PARA DIFERENTES TIEMPOS DE MODELACIÓN. ....	98
8	CONCLUSIONES.....	100
9	ALGUNAS SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES .....	102
10	APÉNDICE A.1: MÉTODOS DE ANÁLISIS DE BLOQUES DE CIMENTACIÓN .....	103
11	ANEXO 1: ARTÍCULO DE VIRIEUX.....	108
12	ANEXO 2: CÓDIGO DEL PROGRAMA.....	109
13	ANEXO 3: MANUAL DE USUARIO DEL PROGRAMA PARA INTEGRACIÓN DE ECUACIÓN DE ONDA P-SV “DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO VIRIEUX 1986” .....	110
14	BIBLIOGRAFÍA.....	111

## Índice de figuras

Figura 1 Fundación tipo bloque (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	21
Figura 2 Fundación tipo bloque combinado (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	21
Figura 3 Fundación tipo bloque combinado (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	22
Figura 4 Fundación tipo muros (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	22
Figura 5 Fundación tipo marco o pórtico (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	23
Figura 6 Fundación tipo bloque apoyada sobre pilotes (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	23
Figura 7 Bloque de concreto pre-esforzado (a) alzado con disposición de cables (b) planta con disposición de cables (c) esfuerzos internos de compresión resultantes en la fundación (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).	24
<b>Figura 8.</b> Representación gráfica de oscilaciones libres (Fuente: El autor).	26
<b>Figura 9.</b> Representación gráfica de oscilaciones forzadas (Fuente: El autor).	27
<b>Figura 10.</b> Gráfica típica de oscilaciones forzadas (Fuente: <a href="http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm">http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm</a> ).	29
<b>Figura 11.</b> Representación gráfica de oscilaciones forzadas (Fuente: El autor).	30
Figura 12 Nivel de deformación para diferentes técnicas experimentales	34
Figura 13 Nivel de deformación del suelo en obras típicas de infraestructura	35
<b>Figura 14</b> Tipos de ondas de cuerpo. a) Ondas P y b) Ondas S (Fuente: Steven L. Kramer, “Geotechnical Earthquake Engineering”, P. 19).	38
<b>Figura 15</b> Ondas de superficie. a) Ondas Rayleigh y b) Ondas Love (Fuente: Steven L. Kramer, “Geotechnical Earthquake Engineering”, P. 20).	39
<b>Figura 16</b> Representación gráfica de la derivada (Fuente: El autor)	41
<b>Figura 17</b> Ilustración de la gráfica de la función $y = f(x)$ , que es solución de la ecuación diferencial (Fuente: El autor).	43
<b>Figura 18</b> Modelo de la región tridimensional para resolver numéricamente la ecuación diferencial 2D en el dominio del tiempo (Fuente: El autor)	46
<b>Figura 19</b> Ilustración de diagrama de cuerpo libre en una cuerda vibrante (Fuente: el autor)	47
<b>Figura 20</b> Discretización del medio para Virieux P-SV de segundo orden (Fuente: El autor)	62
<b>Figura 21</b> Modelo de la región tridimensional para resolver numéricamente la ecuación diferencial 2D en el dominio del tiempo de Virieux (Fuente: El autor)	63
Figura 22 Esquema que ilustra el modelo numérico (Fuente: El autor)	70
Figura 23 Historia de carga (Fuente: El autor)	72

Figura 24 Incremento de esfuerzos debido una carga continua, definición de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ y demás parámetros del modelo (Fuente: Peter L Berry-David Reid, “Mecánica de Suelos”. P. 69) .....	75
Figura 25 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita sin vibración – modelo Virieux (Fuente: el autor).....	76
Figura 26 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita con vibración – modelo Virieux (Fuente: el autor).....	77
Figura 27 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita sin vibración – Solución de Boussinesq (Fuente: el autor) .....	78
Figura 28 Variación de profundidad de disipación del 90% del esfuerzo impuesto en superficie versus relación L/B del área cargada (Fuente: el autor).....	84
Figura 29 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	87
Figura 30 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	88
Figura 31 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	89
Figura 32 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Boussinesq (Fuente: el autor) .....	90
Figura 33 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Steinbrenner (Fuente: el autor).....	91
Figura 34 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 50 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor) .....	92
Figura 35 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 50 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor) .....	93
Figura 36 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 100 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	93
Figura 37 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 100 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	94

Figura 38 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 200 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	94
Figura 39 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 200 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	95
Figura 40 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=0$ Hz, $h=10$ m y $E_1/E_2=1.552$ (b) $f_r=200$ Hz y $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	96
Figura 41 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=300$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1.293$ (b) $f_r=400$ Hz y $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	96
Figura 42 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=400$ Hz, $h=10$ m y $E_1/E_2=1.293$ (b) $f_r=400$ Hz y $h=10$ m y $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	97
Figura 43 Bulbo de esfuerzos para par un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=400$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ (b) $f_r=400$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	99
Figura 44 Bulbo de esfuerzos para par un esfuerzo de 100 kPa (a) $f_r=400$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ (b) $f_r=400$ Hz, $h=8$ m y $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	99

## Índice de cuadros

Tabla 1 Comportamiento del suelo y nivel de deformación.....	34
Tabla 2 Parámetros drenados de los suelos (Fuente: El autor) .....	35
Tabla 3 Métodos para obtención de varios parámetros de rigidez (Fuente: Diaz R. Jorge A. - El autor) .....	36
Tabla 4 Correlaciones para obtención de varios parámetros de rigidez .....	37
Tabla 5 Límites para campos físicos (Fuente: El autor) .....	64
Tabla 6 Definición de materiales (Fuente: El autor) .....	71
Tabla 7 Profundidad de disipación de esfuerzos versus geometría del dominio de suelo (Fuente: El autor) .....	73
Tabla 8 Sensibilidad del modelo a la variación del número de iteraciones (Fuente: El Autor) .....	74
Tabla 9 Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos para distintas frecuencias de vibración (Fuente: El autor).....	79
Tabla 10 Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos y asentamientos para distintas longitudes del área cargada (Fuente: El autor).....	83
Tabla 11 Asentamiento y disipación de esfuerzos de un área cargada que tiende a infinita sin vibración, por solución de Boussinesq y Steinbrenner para una capa y bicapa (Fuente: El autor). .....	85
Tabla 12 Asentamientos y disipación de esfuerzos con vibración por modelo de Virieux para una sola capa y bicapa (Fuente: El autor). .....	85
Tabla 13 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	86
Tabla 14 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	87
Tabla 15 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor).....	88
Tabla 16 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Boussinesq y Steinbrenner (Fuente: el autor).....	90

## Generalidades

### Introducción

Las fundaciones pueden estar sometidas a cargas estáticas o dinámicas o una combinación de las dos. Las cargas estáticas normalmente son impuestas lenta y gradualmente en la fundación y de esta manera no se induce ninguna vibración en el sistema fundación-suelo; por el contrario cuando las cargas conducen a una vibración del sistema se dice que son dinámicas. Las vibraciones que son de interés en esta tesis son las debidas a máquinas de movimiento alternativo, tipo rotativo e impacto, ya que las vibraciones causadas por estas máquinas al sistema fundación-suelo pueden ser analizadas con base en el fenómeno de movimiento armónico.

Las cargas dinámicas ocasionan que la cimentación sobre la que se apoyan produzca efectos indeseables en el suelo, por el incremento de los esfuerzos, la mayor sollicitación a la cimentación misma y la afectación de las estructuras cercanas, lo que hace necesario la implementación de cimentaciones que reduzcan o mitiguen dichos efectos.

Con el avance de la ciencia y la industria, los sistemas de producción han requerido de máquinas más grandes y de mayores velocidades, que por consiguiente han generado mayor impacto en los sistemas fundación-suelo. Las mayores frecuencias de oscilación de los equipos mecánicos inducen vibraciones más importantes en el suelo y si estas vibraciones llegasen a producir resonancia en el sistema o amplitudes de vibración mayores a los límites especificados por los fabricantes de la máquina pueden afectar la estabilidad del sistema.

En el pasado los métodos de diseño para resolver el inconveniente de las vibraciones excesivas, que aún tiene amplia aplicación en nuestro medio, fue la amplificación de la carga estática, que se logra con el diseño de grandes cimentaciones; pero cuyo gran inconveniente es que se generan grandes esfuerzos en el suelo trayendo consigo grandes deformaciones.

El problema de la deformación de los sólidos puede abordarse de dos formas generales. Una forma es contemplando las fuerzas inerciales y la propagación en el tiempo de las perturbaciones a lo largo del sólido, es decir, buscando una solución que describa cómo varia la deformación a medida que varía la perturbación en el tiempo (caso dinámico). Otra forma es considerando el proceso de deformación como un estado estacionario final donde no se tiene en cuenta la inercia ni el tiempo, es decir, se evalúa la deformación para una perturbación única de magnitud y posición constante (caso estático).

Los problemas elastodinámicos de deformación de sólidos se resuelven mediante la integración de lo que se conoce como la ecuación de onda elástica. La ecuación de onda elástica es una ecuación en derivadas parciales, lineal, de segundo orden, que tiene soluciones cerradas particulares (Lamb, 1904). Estas soluciones aplican principalmente para espacios infinitos o medios semi-infinitos con configuraciones simples de estratigrafía y de carga.

Sin embargo, en los problemas de ingeniería la geometría del dominio no siempre permite encontrar este tipo de soluciones cerradas. En cambio, para desarrollar soluciones en dominios complejos es necesario realizar una integración numérica aproximada.

Para solucionar los problemas dinámicos de deformación se puede integrar la ecuación de onda elástica usando el Método de las Diferencias finitas en el dominio del tiempo, en teoría, para dominios de cualquier geometría tridimensional y un sinnúmero de condiciones de carga.

## 1 Objetivo

El objetivo general de este trabajo de grado de maestría es aplicar el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo para encontrar la distribución de esfuerzos y desplazamientos dentro de un dominio bidimensional bicapa, no homogéneo, semi-infinito y elástico, cuando es sometido a cargas verticales sinusoidales producidas por una máquina vibratoria y aplicadas en la superficie. Para lograr este objetivo se analizará el resultado de esfuerzos y deformaciones bajo distintos tipos de carga y a distintas frecuencias de oscilación, haciendo variar frecuencias y espesor de los estratos del sistema bicapa. Se realizará un análisis paramétrico del comportamiento dinámico del sistema y se analizará su comportamiento a frecuencias cercanas a la resonancia.

Para lograr este objetivo se plantearon los siguientes objetivos específicos

- Estudiar los fundamentos teóricos de la dinámica de suelos y la propagación de ondas en medios elásticos.
- Estudiar la integración con diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) de las ecuaciones elastodinámicas para el caso 2D de deformaciones en el plano.
- Estudiar, a partir de la integración con diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD), el comportamiento dinámico del suelo en sistemas de cimentación flexible apoyado sobre un medio semi-infinito, no homogéneo y estratificado.
- Programar alguna metodología FDTD en un lenguaje de programación científico y de libre utilización para fines educativos.
- Resolver, en el dominio del tiempo, el problema de la carga armónica de ancho finito aplicada sobre un medio elástico semi-infinito.
- Hacer un estudio paramétrico del problema del cimiento flexible de longitud infinita y a partir del algoritmo de Virieux, analizar la distribución de esfuerzos y deformaciones en la masa de suelo, para un sistema bicapa.
- A partir de las ecuaciones del movimiento oscilatorio forzado determinar los parámetros de comportamiento dinámico y comparar los resultados con los obtenidos a partir de las formulaciones del método del semi-espacio elástico
- Emitir las observaciones y conclusiones pertinentes.

## 2 Metodología

Para el desarrollo del presente estudio se debió, en primera instancia, realizar una extensa revisión de la bibliografía en el tema de la dinámica de suelos y de la propagación de ondas en medios elásticos. La primera se enfocó en los libros clásicos de geotecnia y algunas de sus referencias. La segunda se localizó en los libros de ingeniería de terremotos.

Estudiados los conceptos básicos de estas dos disciplinas, se realizó la revisión bibliográfica más profunda: aplicaciones de FDTD para la propagación de ondas en medios elásticos. La tesis se enfocó en el artículo de Jean Vireux de 1986 "P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-Stress Finite-Difference Method". La revisión comprendió principalmente citas y/o referencias de este artículo y otras referencias bibliográficas relacionadas con el tema que se relacionan con el desarrollo de esta tesis.

Comprendido el método FDTD se escribió un programa en FORTRAN 90 usando la plataforma libre INTEL VISUAL STUDIO que se puede descargar de la página del proveedor. Este software es libre en la medida en que sea usado para fines académicos como el del presente estudio. Con este programa se procedió a encontrar la respuesta en el dominio del tiempo del problema de un cimiento flexible de longitud infinita apoyado sobre un medio elástico semi-infinito. Como este problema está resuelto para ciertos rangos de parámetros, la solución numérica usando estos valores sirvió de referencia para la validación de los resultados del programa.

Programado y validado el método numérico, se procedió a realizar el estudio paramétrico del problema, variando el espesor de los dos estratos y la rigidez de los materiales, para encontrar la sensibilidad del problema frente a estos cambios. Los resultados se tabularon y gráficamente de tal forma que se pueden comparar con resultados obtenidos por métodos de cálculo y/o ábacos de diseño encontrados en la bibliografía geotécnica.

### 3 Antecedentes generales

El diseño de cimentaciones de máquinas vibratorias es un tema abordado, normalmente, a partir de métodos pseudo-estáticos que involucran parámetros de amortiguamiento y rigidez del suelo. Para realizar el diseño de estas cimentaciones es necesario verificar que los esfuerzos dinámicos inducidos a la cimentación por la operación de la máquina, además de los demás esfuerzos debidos a cargas muertas, no excedan los límites de esfuerzos y deformaciones permisibles por el suelo de fundación. De ser posible se revisará cumplimiento de criterios de resonancia y amplitudes de vibración.

#### 3.1 Cimentación de máquinas vibratorias

El análisis y diseño de fundaciones para equipos vibratorios es fundamental e implica un alto nivel de precisión para garantizar la estabilidad y funcionamiento de esta clase de equipos tanto en pequeños como en grandes complejos industriales, toda vez que sobrepasa el límite del concepto elemental de fundaciones sometidas a cargas estáticas, donde se entiende que las cargas son impuestas lenta y gradualmente en la fundación de tal manera que se evite alguna vibración en el sistema fundación-suelo, problema del cual se ocupa la *Mecánica de suelos* tal como se entiende normalmente. El cuidado y precisión que requiere el diseño de fundaciones sometidas a cargas dinámicas obedece fundamentalmente a que la carga dinámica procedente de la maquinaria, sumada a las cargas estáticas procedentes de la máquina y el bloque de fundación, conducen a la vibración de todo el sistema generando fuerzas y momentos dinámicos desbalanceados o parcialmente balanceados. Debido a que se generan, por efecto de la vibración, este tipo de fuerzas y momentos se hace necesario procedimientos especiales de diseño.

El análisis geotécnico de cimentaciones superficiales de maquinaria y equipos mecánicos que ejercen sobre la masa de concreto vibraciones tiene como función principal, además de predecir y controlar que los asentamientos y los esfuerzos dinámicos del sistema equipocimiento no sobrepasen los límites permisibles, determinar la frecuencia natural y amplitud de vibración del sistema maquinaria-fundación-suelo, en condiciones normales de operación.

En la práctica común los asentamientos y esfuerzos en las inmediaciones del subsuelo, bajo la influencia de la cimentación, son eventualmente controlados mediante el control de los movimientos y esfuerzos “debajo” del cimiento, debido a la carga dinámica que es tomada como la mayor carga asociada al esfuerzo dinámico donde la componente sinusoidal toma su valor máximo, al ser estos últimos los de mayor magnitud; pero esta práctica generalmente ignora aspectos importantes como frecuencia natural del sistema, amplitud del sistema y frecuencia de resonancia del sistema máquina-fundación-suelo.

El costo de análisis, diseño y construcción de una fundación para una máquina, generalmente, puede llegar a ser una fracción muy pequeña del costo de la misma máquina, de sus accesorios, de su instalación y mantenimiento; sin embargo, la falla de una cimentación por causa de un diseño y construcción incorrectos puede llegar a generar grandes pérdidas.

El estudio de las cimentaciones para maquinaria debe resolver tres principales problemas:

- a) Que los movimientos de la maquinaria y la cimentación no sean excesivos, ya que originarían fallas y desperfectos en la operación propia del equipo.
- b) Que los asentamientos debidos a los efectos dinámicos estén dentro de los límites permisibles.
- c) Disminuir o eliminar cualquier modo de vibración, combinación de carga y/o velocidad de operación que pueda transmitir a través del suelo amplitudes de vibración objetables para el sistema máquina-fundación-suelo o que puedan afectar a personas, edificios u otra maquinaria cercana.

Basado en lo anterior, es práctica común la utilización de un método que podría denominarse pseudo-estático, que consiste en diseñar fundaciones que respondan a cargas estáticas de diseño incrementando el peso propio de la máquina por un factor de impacto, logrando así fundaciones que cumplan condiciones de capacidad de carga y asentamientos; pero ignorando la posibilidad de que la frecuencia de vibración correspondiente a la velocidad de operación de la máquina o alguna de sus componentes armónicas coincidan con la frecuencia natural del sistema máquina-fundación-suelo pudiendo ocasionar así fenómeno de resonancia que genera amplitudes de vibración intolerables.

Los modelos analíticos para la estimación de movimientos del terreno se basan principalmente en dos aproximaciones: El semi-espacio elástico (Richart et al., 1970) y la propuesta de los resortes lineales elásticos sin peso (Barkan, 1962).

### **3.1.1 Tipos de Máquinas Vibratorias**

Existe diversidad de máquinas las cuales producen vibraciones que son causadas por las fuerzas dinámicas y su clasificación depende del tipo movimiento, a la vez que el tipo de carga dinámica depende del tipo de máquina vibratoria que ejerza la sollicitación. Dependiendo el tipo de movimiento las máquinas más importantes son las siguientes:

- a) Máquinas reciprocantes (o de movimiento alternativo)
- b) Máquinas rotatorias (centrífugas)
- c) Máquinas de impacto

#### **3.1.1.1 Máquinas reciprocantes (o de movimiento alternativo)**

Este tipo de máquinas producen periódicamente fuerzas desbalanceadas. La velocidad de operación es normalmente menor a 600 rpm (10 Hz); pero también se les puede encontrar con velocidades de operación que varían entre 1200 y 1500 rpm (20 y 25 Hz). En muy pocos casos este tipo de máquinas operan a grandes velocidades. Para el análisis de las fundaciones, las fuerzas desbalanceadas pueden ser consideradas como varias fuerzas

sinusoidales. Ejemplos típicos de máquinas reciprocantes son las máquinas de vapor, máquinas de combustión interna, bombas y compresores.

La cimentación para estas máquinas usualmente consiste en un bloque de concreto rígido provisto de aditamentos para montar la máquina.

### **3.1.1.2 Máquinas rotatorias (Centrífugas)**

Estas son máquinas constituidas por un eje rotor o masa que gira a velocidad considerable; pero cuyo giro obedece a fuerzas relativamente balanceadas, es decir no experimenta cambios bruscos de movimiento ni algún tipo de impacto, como por ejemplo turbogeneradores o compresores de rotación, las cuales pueden alcanzar velocidades entre 3000 rpm y 10000 rpm (50 y 166.7 Hz).

En términos prácticos las máquinas rotatorias se clasifican en de baja velocidad que operan a menos de 1500 rpm (25 Hz) (compresores, motores generadores, bombas centrífugas y de vacío, ventiladores, etc.) y normalmente su cimentación es del tipo bloque rígido o del tipo marco. En algunos casos, de ser necesario, la cimentación deberá estar soportada por pilas. Las máquinas de alta velocidad operan a 3000 ó 3600 rpm (50 y 60 Hz) y ocasionalmente hasta 10000 rpm (166.7 Hz) (turbinas de gasolina o vapor, generadores, compresores y turboventiladores) y algunas unidades de turbina que pueden operar entre 1500 y 1800 rpm (25 y 30 Hz). Normalmente la cimentación de turbogeneradores es de tipo marco o puede ser construida en concreto reforzado o acero.

### **3.1.1.3 Máquinas de impacto**

Dentro de esta categoría se encuentran las máquinas que generan cargas de impacto u operaciones intermitentes de maquinarias, como los martillos de forja, prensas hidráulicas y neumáticas, martinets y troqueladoras. Su velocidad de operación se encuentra entre 60 y 150 golpes por minuto (1 – 2.5 Hz). Estas cargas dinámicas alcanzan su pico en intervalos pequeños de tiempo.

La cimentación para una máquina de impacto, normalmente, consiste en un bloque de concreto reforzado. El bloque de cimentación generalmente se diseña para apoyarse directamente sobre el suelo. Pero si las condiciones del suelo son desfavorables el bloque de cimentación puede ser soportado por pilas.

Las máquinas también se pueden clasificar según su frecuencia de excitación<sup>1</sup>, así:

- a) Máquinas de baja frecuencia: Entre 0 y 300 rpm (0 y 5 Hz).
- b) Máquinas de frecuencia media: Entre 300 y 1000 rpm (5 y 16.7 Hz).

---

<sup>1</sup> Di Bartolomeo O. Ymoli E. "Análisis Sobre Fundaciones Aisladas Superficiales Sometidas a Vibraciones Inducidas por Bombas Centrífugas y Reciprocantes". P. 87-88.

- c) Máquinas de frecuencia alta: Entre 1000 y 3000 rpm (16.7 y 50 Hz).
- d) Máquinas de frecuencia muy alta: Entre 3000 y 10000 rpm (50 y 166.7 Hz).

Es de gran importancia el conocimiento de la frecuencia del impulso que impone una máquina porque de esa forma se pueden proyectar fundaciones cuya frecuencia natural sea mucho menor o mayor a la de excitación ( $\omega_f \neq \omega_n$ ), para descartar así la probabilidad de resonancia.

### 3.1.2 Tipos de Fundaciones Para Máquinas Vibratorias

Las fundaciones de maquinarias pueden clasificarse, de acuerdo con el diseño de su estructura, de la siguiente manera:

- a) Fundación tipo bloque: Consiste en un pedestal de concreto reforzado que soporta la máquina (Figura 1).

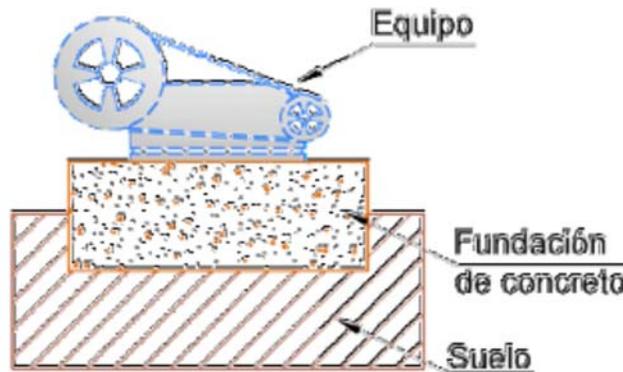


Figura 1 Fundación tipo bloque (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).

- b) Fundación tipo bloque combinado: Consiste en un bloque de concreto reforzado que apoya un pedestal en su parte superior sobre el cual se soporta la máquina (Figura 2).

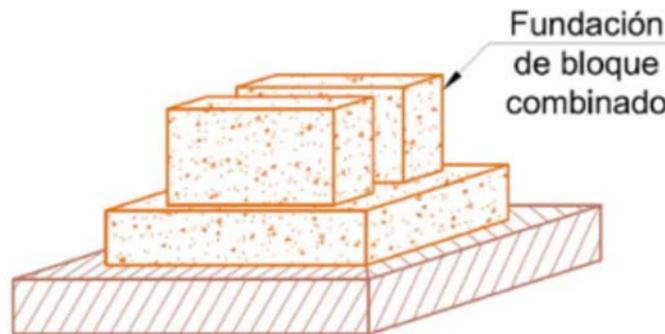


Figura 2 Fundación tipo bloque combinado (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).

- c) Fundación tipo cajón: Consiste en un bloque de concreto reforzado hueco que soporta la máquina en su parte superior (Figura 3).

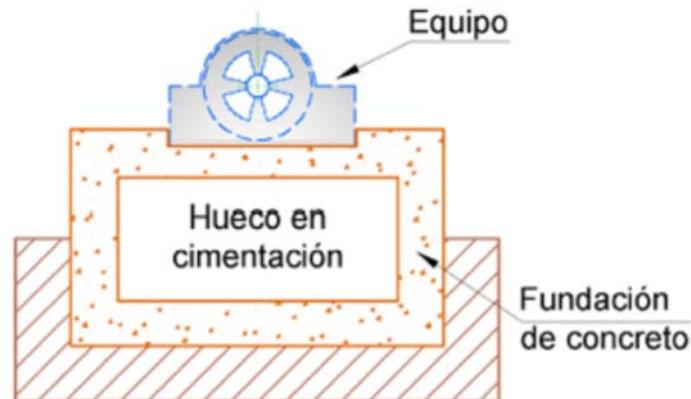


Figura 3 Fundación tipo bloque combinado (Fuente: Herrera C. Fredy, "tesis ECI").

- d) Fundación tipo muro: Consiste en un par de muros de concreto reforzado apoyados sobre un bloque o pedestal que dan soporte a la máquina (Figura 4).

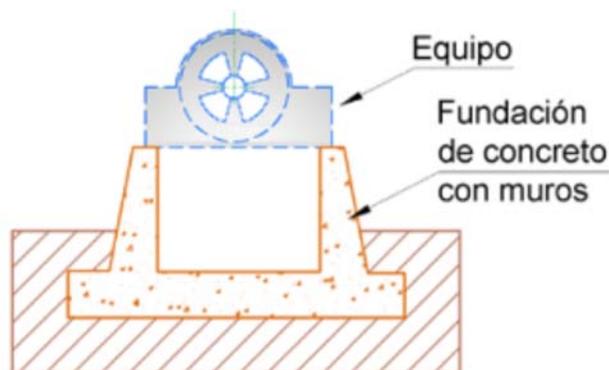


Figura 4 Fundación tipo muros (Fuente: Herrera C. Fredy, "tesis ECI").

- e) Fundación tipo marco o pórtico: Consiste en losa de fundación y en columnas verticales que soportan vigas y losa en la parte superior, la cual sirve de asiento a la máquina (Figura 5).

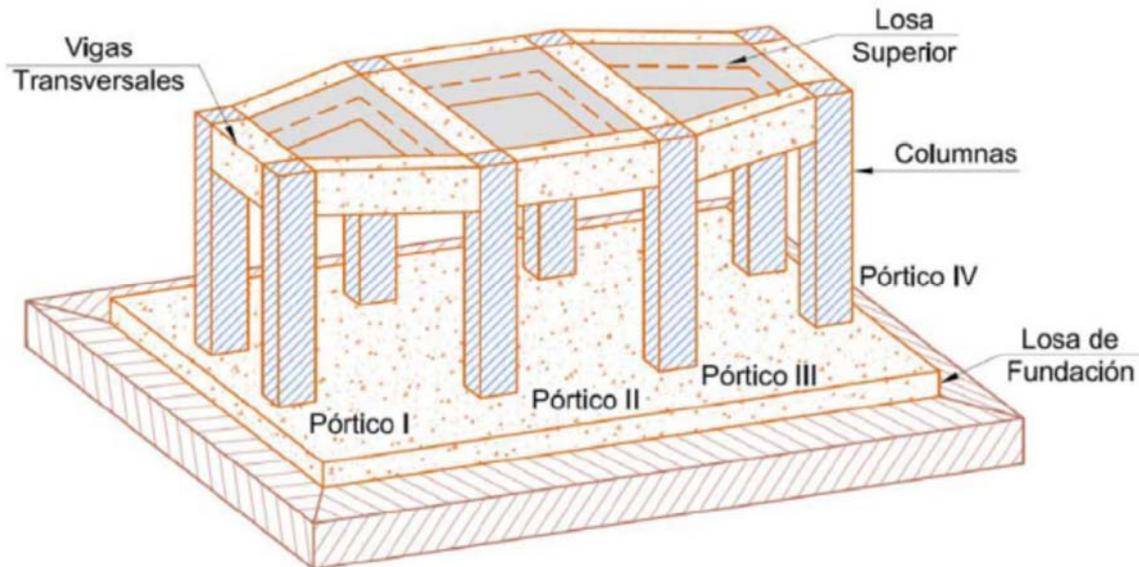


Figura 5 Fundación tipo marco o pórtico (Fuente: Herrera C. Fredy, "tesis ECI").

- f) Fundación tipo bloque apoyada sobre pilotes: Consiste en un grupo de pilotes de enterrados en el suelo trabajando por fricción y/o por punta los cuales son unidos por un bloque o pedestal en la parte superior, el cual sirve de asiento a la máquina (Figura 6).

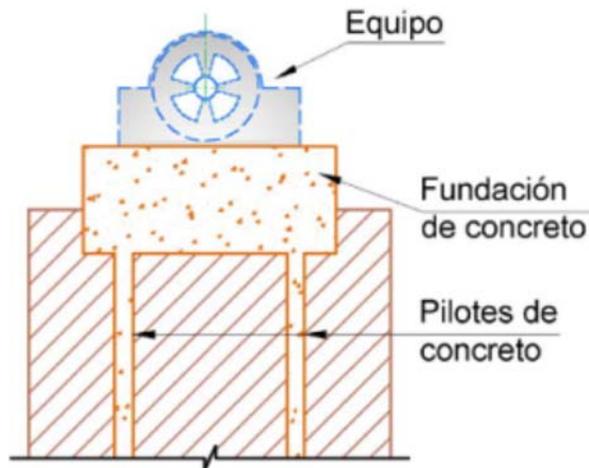


Figura 6 Fundación tipo bloque apoyada sobre pilotes (Fuente: Herrera C. Fredy, "tesis ECI").

- g) Fundación tipo bloque de concreto pre-esforzado: Consiste en un bloque de concreto reforzado con disposición de cables que pre-esfuerzan el bloque envolviéndolo sistemáticamente por sus caras laterales y superior, lo que crea unos esfuerzos internos de compresión resultantes en la fundación cual sirve de asiento a la máquina (Figura 7).

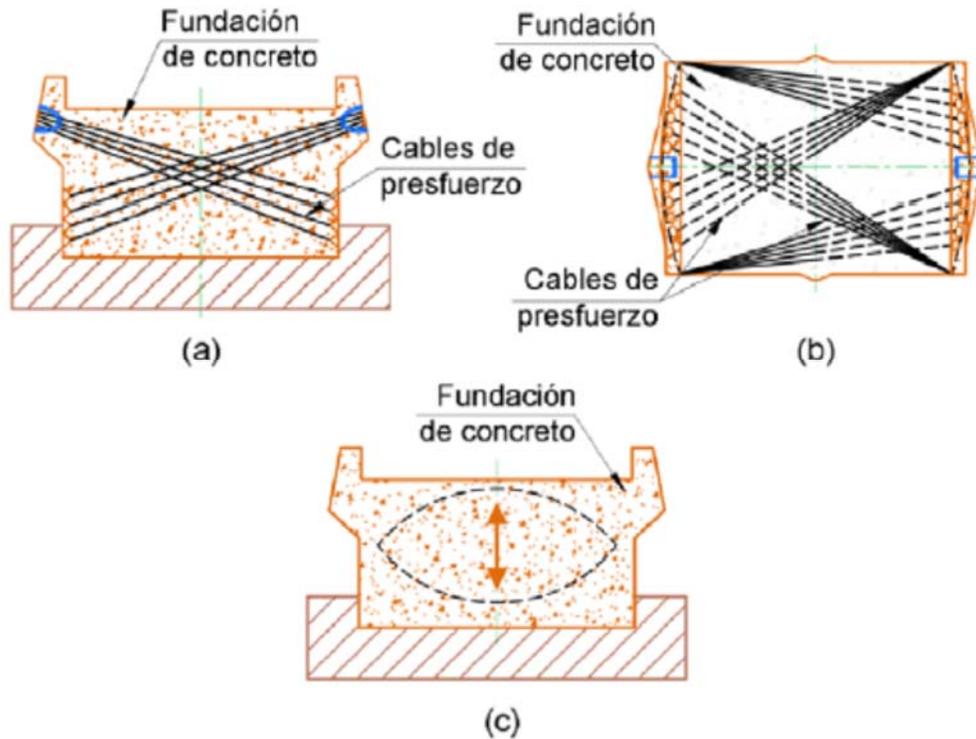


Figura 7 Bloque de concreto pre-esforzado (a) alzado con disposición de cables (b) planta con disposición de cables (c) esfuerzos internos de compresión resultantes en la fundación (Fuente: Herrera C. Fredy, “tesis ECI”).

La maquinaria que produce impactos y fuerzas periódicas de baja velocidad es generalmente montada sobre cimentaciones de tipo bloque. Aquellas que trabajan a altas velocidades y la maquinaria del tipo rotatorio se coloca sobre cimentaciones de marco; sin embargo, para ciertas condiciones particulares, lo anterior puede modificarse; en tal caso, se puede proponer un tipo alternativo de cimentación.

Alguna maquinaria, como los tornos, induce muy poca fuerza dinámica, y pueden ser atornillados directamente al firme, sin necesidad de una cimentación especial.

### 3.1.3 Métodos de diseño de cimentación de máquinas vibratorias

El diseño de bloques de cimentación para máquinas vibratorias se basa en el análisis de los modos de vibración de la cimentación.

Para el análisis de vibración de las cimentaciones de tipo bloque se usan varios métodos, los cuales se exponen a continuación:

- Método del semi-espacio elástico análogo.
- Método de los resortes lineales elásticos sin considerar el peso del suelo.
- Método de los resortes lineales elásticos considerando el peso del suelo.

- Métodos empíricos

El método más comúnmente usado en la práctica corresponde al semi-espacio elástico análogo y en segundo lugar se encuentra el método de los resortes lineal elásticos sin considerar el peso del suelo.

En el apéndice A.1 de esta tesis se hace una breve descripción de los dos métodos y se exponen las formulaciones utilizadas en el desarrollo del método del semi-espacio elástico que es el más usado.

## **3.2 Movimiento oscilatorio**

El movimiento oscilatorio o movimiento armónico simple es el modelo mediante el cual son más comúnmente analizadas las vibraciones causadas por las máquinas de movimiento alternativo, de tipo rotativo o de impacto a los sistemas fundación suelo. Esto es en realidad un modelo matemático representado por el clásico sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso consistente de una masa, un resorte y un amortiguador. La experiencia ha demostrado que este es un modelo que representa satisfactoriamente el análisis dinámico de un sistema máquina-cimentación-suelo, aunque el sistema real puede no asemejarse físicamente al modelo matemático.

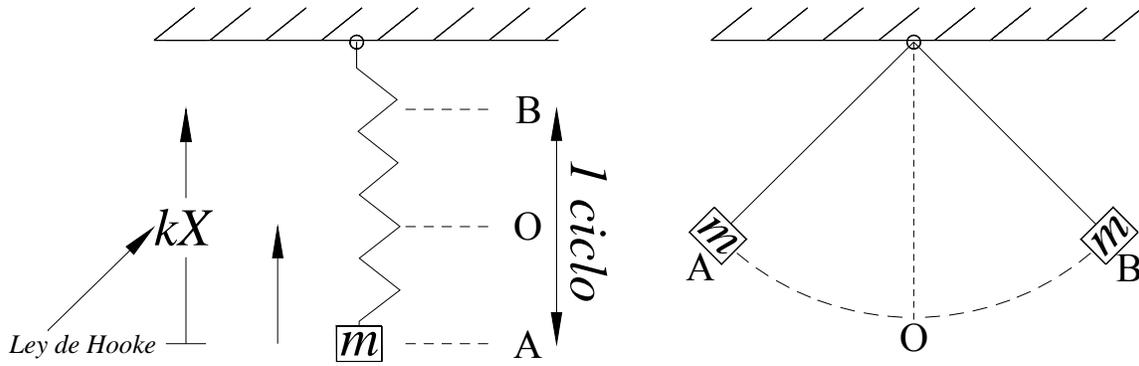
### **3.2.1 Oscilaciones libres<sup>2</sup>**

Los ejemplos más clásicos de oscilaciones, corresponden al caso de una masa que cuelga de un resorte o un péndulo (en el vacío) y sin rozamiento mecánico, en la **Figura 8** se muestra la representación gráfica de los casos expuestos de movimiento oscilatorio.

La razón por la que se habla del vacío es porque un resorte o un péndulo, si se lleva a la posición perturbada (se le suministra energía potencial) y se suelta, estos se moverán libremente de la posición A a la posición B indefinidamente, siempre y cuando no exista ningún agente externo que se oponga al movimiento (p.e. el viento o cualquier otro tipo de fricción).

---

<sup>2</sup> <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/libres/libres.htm>



**Figura 8.** Representación gráfica de oscilaciones libres (Fuente: El autor).

La ecuación del movimiento según ley de Hooke está dada por:

$$F = ma = kx$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo ( $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ), la ecuación del movimiento toma la forma de la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = kx$$

Si se hace  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ , la ecuación del movimiento toma la forma siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_n^2 = 0$$

Donde  $\omega_n$  es la frecuencia propia o natural del oscilador.

La solución de la ecuación diferencial que describe las oscilaciones libres está dada por las siguientes expresiones:

$$X = A\cos(\omega_n t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega_n \cos(\omega_n t + \phi) = A\omega_n \sin(\omega_n t)$$

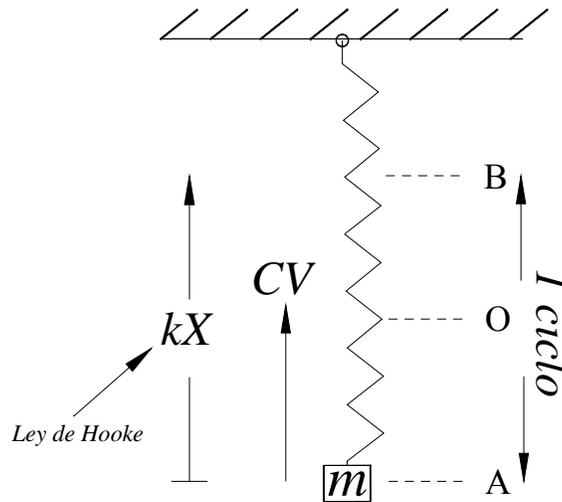
En las cuales  $\phi$  es el ángulo de fase ( $\frac{\pi}{2}$  en las oscilaciones libres), X es la amplitud de oscilación del movimiento y V es la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo.

### 3.2.2 Oscilaciones amortiguadas<sup>3</sup>

<sup>3</sup> <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm>

Cuando existe una fuerza que se opone al movimiento, la oscilación pasa a ser amortiguada, por ejemplo el resorte tiene rozamiento con el viento y el péndulo tiene rozamiento en el eje de rotación y con el viento.

Si tenemos un resorte y una masa “m” unida a él, al excitarlos (halarlos o empujarlos) este reacciona con una fuerza  $F = -kx$  (Ley Hooke). El amortiguamiento es una fuerza opuesta a la velocidad (p.e. rozamiento)  $Fr = -CV$ , que también se opone al movimiento, por ello un resorte entra en oscilación y gradualmente disminuye su amplitud hasta que se detiene, en la **Figura 9** se muestra la representación gráfica del movimiento oscilatorio amortiguado.



**Figura 9.** Representación gráfica de oscilaciones forzadas (Fuente: El autor).

En este caso la ecuación del movimiento amortiguado está dado por:

$$ma = -kx - CV$$

Reemplazando la aceleración y la velocidad por sus definiciones en derivadas ( $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $V = \frac{dx}{dt}$ ), la ecuación del movimiento amortiguado toma la forma de la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Si hacemos  $\frac{C}{m} = 2\gamma$ , y sabiendo que  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ , la ecuación diferencial del movimiento amortiguado queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = 0$$

La solución de la ecuación diferencial que describe el movimiento amortiguado está dada por las siguientes expresiones:

$$X = A_T e^{-\gamma t} \text{sen}(W_T t + \emptyset)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -\gamma A_T e^{-\gamma t} \text{sen}(W_T t + \emptyset) + A_T e^{-\gamma t} W_T \cos(W_T t + \emptyset)$$

Donde

$$W_T^2 = W_n^2 - \gamma^2, \text{ o, } W_T = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

A: amplitud del movimiento

$w_n$ : frecuencia angular o natural del Sistema

Si el amortiguamiento es grande,  $\gamma$  puede ser mayor que  $W_n$ , y  $W_T$  puede llegar a ser cero (oscilación crítica) o imaginaria (oscilación sobre amortiguada), lo cual quiere decir que el sistema se quedaría estático, no entraría nunca en movimiento.

### Condiciones iniciales

La posición inicial ( $X_0$ ) y velocidad inicial ( $V_0$ ), para  $t = 0$  determinan la amplitud ( $A_T$ ) y la fase inicial ( $\emptyset$ ), así:

$$X_0 = A_T \text{sen}\emptyset$$

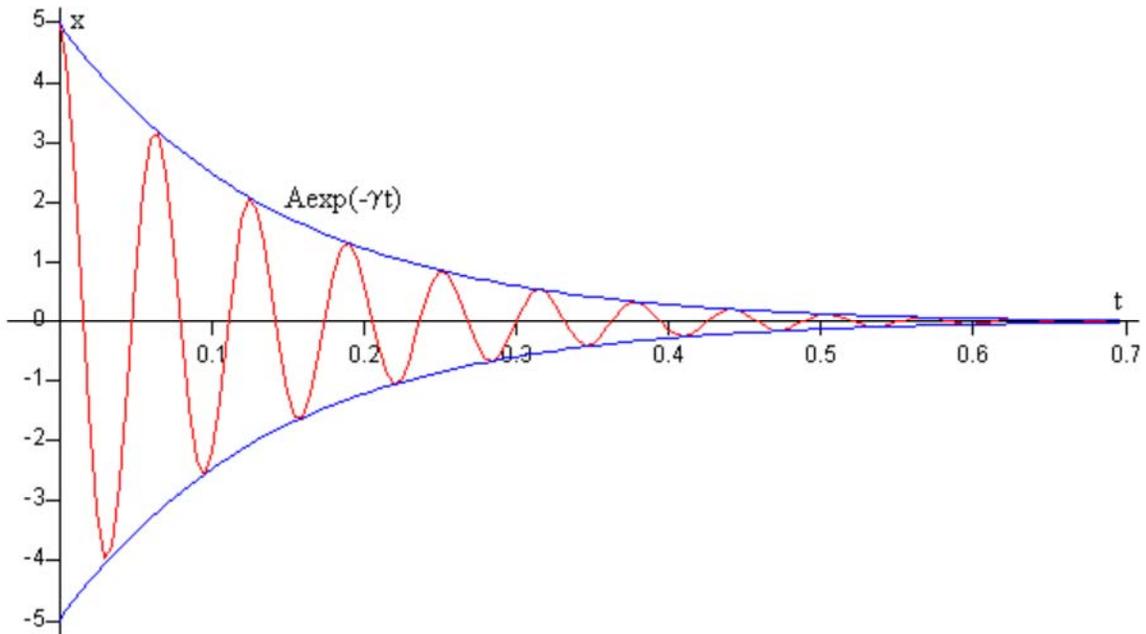
$$V_0 = -\gamma A_T \text{sen}\emptyset + A_T W_T \cos\emptyset$$

Resolviendo este Sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} A_T = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{V_0 + \gamma X_0}{W_T}\right)^2} \\ \text{tg}\emptyset = \frac{X_0 W_T}{V_0 + \gamma X_0} \end{cases}$$

$$\emptyset = \text{tg}^{-1}\left(\frac{W_T}{\gamma}\right), \text{ y } A_T = \left(\frac{A_e}{\text{sen}\emptyset}\right)$$

En la **Figura 10** se muestra la gráfica típica de las oscilaciones amortiguadas.



**Figura 10.** Gráfica típica de oscilaciones forzadas (Fuente: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/amortiguadas/amortiguadas.htm>).

Como puede verse la amplitud en el movimiento amortiguado no es constante, como en el caso de las oscilaciones libres, y el ángulo de fase puede ser diferente de  $\pi/2$ .

El máximo desplazamiento ocurre cuando la velocidad es cero (0), que se da al inicio del movimiento, entonces si  $V = 0$  y despejamos  $W_T t + \phi$  se obtiene:

$$tg(W_T t + \phi) = \frac{W_T}{\gamma} \Rightarrow t_n = \frac{tg^{-1}\left(\frac{W_T}{\gamma}\right) - \phi + n\pi}{w}, n = 1, 2, \dots$$

### 3.2.3 Oscilaciones Forzadas en estado estacionario<sup>4</sup>

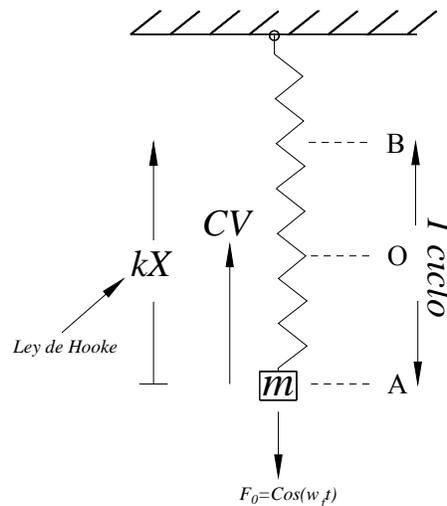
Ya se vio que la oscilación es libre cuando ninguna fuerza externa interfiere el movimiento y es amortiguada cuando alguna fuerza proporcional a la velocidad del movimiento se opone a este, en este caso el oscilador se detendrá en algún momento.

Ahora, si se quiere que el oscilador amortiguado siga moviéndose con una amplitud constante, es necesario aplicarle una fuerza externa que garantice esto. Esta fuerza debe ser oscilante (fuerza impulsora), y actuar con una frecuencia angular propia ( $\omega_f$ ). El

<sup>4</sup> <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/forzadas/forzadas.htm>

movimiento con que el sistema se desplaza cuando actúa esta fuerza es diferente que cuando deja de aplicar dicha fuerza.

En una oscilación forzada la frecuencia angular con que el sistema oscila pasa a ser igual a la de la fuerza impulsadora, y cuando se está en esta condición se denomina movimiento estacionario del oscilador impulsado; pero existe una etapa previa a dicha condición llamada transitoria, en donde la frecuencia natural del oscilador ( $\omega_n$ ) y la frecuencia de la fuerza impulsadora ( $\omega_f$ ) son muy importantes. En la **Figura 11** se muestra la representación gráfica del movimiento oscilatorio forzado.



**Figura 11.** Representación gráfica de oscilaciones forzadas (Fuente: El autor).

En este movimiento actúan fuerza del resorte ( $-kx$ ), fuerza de rozamiento ( $CV$ ) y la fuerza oscilante ( $F_0 \cos(\omega_f t)$ ).

La ecuación del movimiento oscilatorio forzado está dada por la siguiente expresión:

$$ma = -kx - CV + F_0 \cos(\omega_f t)$$

Con aceleración y velocidad en términos de derivadas la ecuación del movimiento oscilatorio forzado es representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_f t)$$

Si hacemos  $\frac{c}{m} = 2\gamma$ , y sabiendo que  $\frac{k}{m} = \omega_n^2$ , la ecuación diferencial del movimiento oscilatorio forzado queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t)$$

La solución de esta última ecuación, que es la ecuación diferencial lineal completa, se compone de dos términos.

1. El estado transitorio que depende de las oscilaciones iniciales ( $W_T$ ).
2. El estado estacionario, independientemente de las condiciones iniciales, y que permanece después del primer estado ( $W_f$ ).

$$X = A_T e^{-\gamma t} \cos(W_T t \pm \emptyset) + A_e \cos(W_f t \mp \delta)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = A_e \omega_f \cos(W_f t + \delta)$$

Donde:

$$W_T = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2}, \text{ o } \omega_T = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

Se obtiene  $A_e$  y  $\delta$  al hacer que se cumpla la ecuación diferencial lineal completa, así:

$$X_{max} = A_e = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_f^2 \gamma^2}}, \text{ ó, } X_{max} = A_e = \frac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega_f^2)^2 + (C\omega_f)^2}}$$

Con

$$\text{tg} \delta = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_n^2 - \omega_f^2}, \text{ ó, } \text{tg} \delta = \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2}$$

$$\emptyset = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega_T}{\gamma}\right)$$

$$A_T = \frac{A_e}{\text{Sen} \emptyset}$$

La amplitud  $A_e$  es máxima cuando:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{m}\right)^2}, \text{ ó, } \omega_f = \sqrt{\omega_n^2 - 2\gamma^2}, \text{ ó, } \omega_f = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{km}}$$

Si la frecuencia de la fuerza ( $\omega_f$ ) es igual a la frecuencia del oscilador ( $\omega_n$ ) se dice que el sistema entra en resonancia. En ese caso el valor medio de la energía por unidad de tiempo (P) es máxima.

$$P = \frac{mF_0^2}{C^2}, \gamma, X = \tan\delta = \frac{(\omega_f^2 - \omega_n^2)m}{C\omega_f}$$

La frecuencia crítica genera amortiguamiento crítico y está dada por:

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2 \left( \frac{C}{2\sqrt{km}} \right)^2}$$

Donde:

$$C_c = 2\sqrt{km}, \text{ ó, } C_c = 2m\omega_n \text{ (amortiguamiento crítico)}$$

### 3.2.3.1 Fuerza oscilatoria y Amplitud Máxima de oscilación<sup>5</sup>

Se ha indicado en este capítulo que la fuerza oscilatoria (fuerza impulsora) que garantiza que el movimiento se mantenga con amplitud constante es de la forma  $F_0 \cos(\omega_f t)$ . Ahora bien, en un movimiento oscilatorio forzado la fuerza impulsadora lo que hace es garantizar que el movimiento mantenga amplitud constante pese a existir una fuerza amortiguadora que hace tender el movimiento a un estado de reposo. Es posible expresar la fuerza impulsadora en función de las variables que intervienen en el movimiento ( $m, \omega_f, X_m, \delta, C, k$  &  $t$ ), así:

$$F_0 \text{Sen}(\omega_f t) = -m\omega_f^2 X_m \text{Sen}(\omega_f t - \delta) + C\omega_f X_m \text{Cos}(\omega_f t - \delta) + kX_m \text{Sen}(\omega_f t - \delta)$$

donde la amplitud máxima de oscilación de la vibración estacionaria producida por  $F = F_0 \cos(\omega_f t)$  está dada por

$$X_m = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (C\omega_f)^2}}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{C\omega_f}{k - m\omega_f^2} \right)$$

---

<sup>5</sup> <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/transitorio/transitorio.htm>

## 4 Suelos Sometidos a Cargas Dinámicas Superficiales

El objetivo del estudio de cimientos sometidos a cargas dinámicas es la evaluación tanto de las vibraciones debajo del cimiento que soporta la carga vibratoria (principalmente equipos/máquinas) como también las vibraciones en el área circundante.

El estudio de estas vibraciones comprende básicamente dos aspectos. Uno relacionado con las propiedades dinámicas de los suelos de fundación; y otro relacionado con el modelo matemático usado para estimar las vibraciones en sí.

### 4.1 Propiedades Dinámicas de los Suelos

Varios problemas en la práctica de la ingeniería requieren el conocimiento de las propiedades del suelo frente a una sollicitación dinámica. Existen muchos ensayos de campo y métodos de laboratorio desarrollados para obtener las propiedades dinámicas del suelo, los cuales son discutidos a continuación.

En Colombia los ensayos de laboratorio dinámicos más comunes son: módulo resiliente y columna resonante. En los últimos años se ha implementado en algunos laboratorios universitarios los Bender Elements y el Triaxial Dinámico.

El módulo resiliente es comúnmente utilizado para proyectos de pavimentos, y, aunque es un ensayo con carga cíclica, solo arroja valores de la rigidez vertical de la muestra a una misma frecuencia de carga; esto hace que este ensayo no sea usado para caracterizar dinámicamente los suelos.

El ensayo de Columna Resonante, en cambio, es útil para evaluar el módulo de corte y la relación de amortiguamiento a diferentes niveles de deformación y para diferentes estados de esfuerzo triaxial estático. Este ensayo, tal como está estandarizado, caracteriza dinámicamente los materiales para un único valor de frecuencia de vibración, la frecuencia de resonancia. Esta frecuencia es alta y muy diferente a la frecuencia de operación de las maquinarias. Lo mismo ocurre con los ensayos de propagación de onda que usan Bender Elements. Las frecuencias de vibración de estos dispositivos son del orden de los ultrasonidos.

Por otro lado, el equipo triaxial dinámico permite variar tanto magnitud como frecuencia de carga. Igualmente permite la aplicación de carga dinámica lateral y la medición de la relación de Poisson. Mediciones locales dentro de la cámara permiten evitar los efectos de las condiciones de borde y de la rigidez propia del aparato.

El comportamiento dinámico de los suelos es tan complejo que para caracterizar dinámicamente un suelo debe emplearse diferentes técnicas experimentales. La **Figura 12** presenta el nivel de deformación de algunas técnicas experimentales.

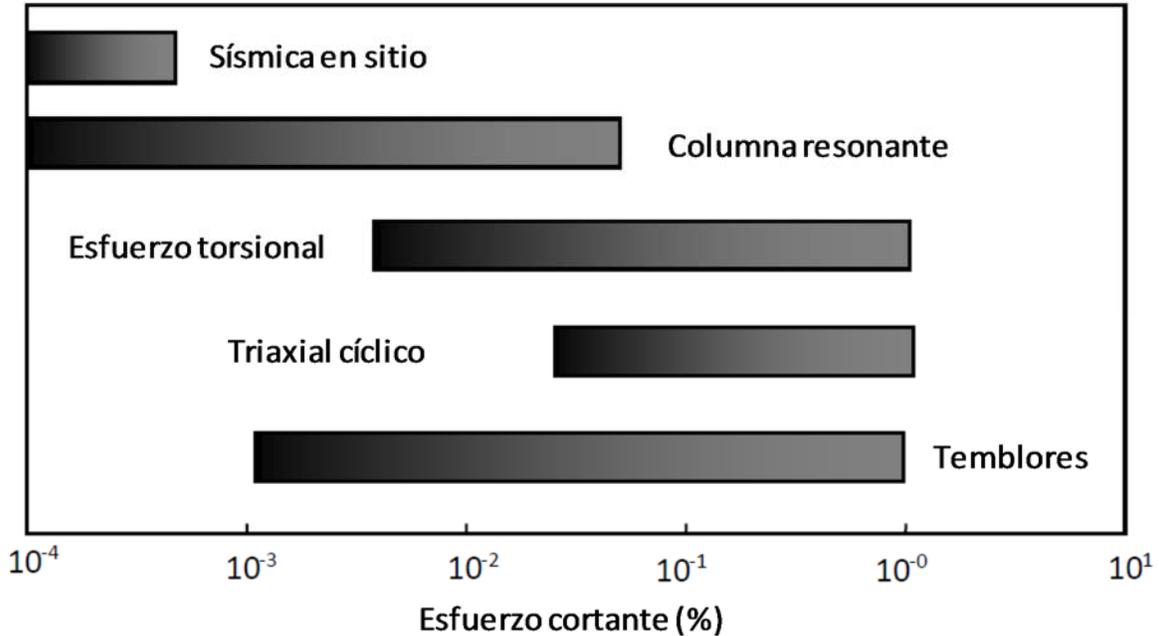


Figura 12 Nivel de deformación para diferentes técnicas experimentales

No sólo es necesaria la implementación de diferentes técnicas experimentales, igualmente debe emplearse diferentes modelos constitutivos de cierta complejidad matemática para interpretar los resultados de los ensayos, para finalmente poder predecir el comportamiento del terreno sometido a cargas dinámicas. Modelos elásticos no lineales, viscoelásticos, elastoplásticos, etc., aunque no están ampliamente disponibles en nuestro medio, también son empleados actualmente. La Tabla 1 presenta un resumen de estos modelos en función de su utilidad según el nivel de deformación.

Tabla 1 Comportamiento del suelo y nivel de deformación

Deformación	Muy pequeña $\gamma < 10^{-7}$	Pequeña $10^{-7} < \gamma < 10^{-3}$	Intermedia $10^{-3} < \gamma < 10^{-0}$	Grande $\gamma > 10^{-0}$
Comportamiento	Lineal Inelástico	No-lineal viscoelástico	No-lineal visco- elasto-plástico	Falla

En la práctica sólo es necesario identificar el nivel de deformación al que se verá sometido el suelo y caracterizar el rango de frecuencia de operación, para identificar el tipo de ensayo a emplear en la caracterización. La **Figura 13** presenta el nivel de deformación para algunas estructuras típicas.

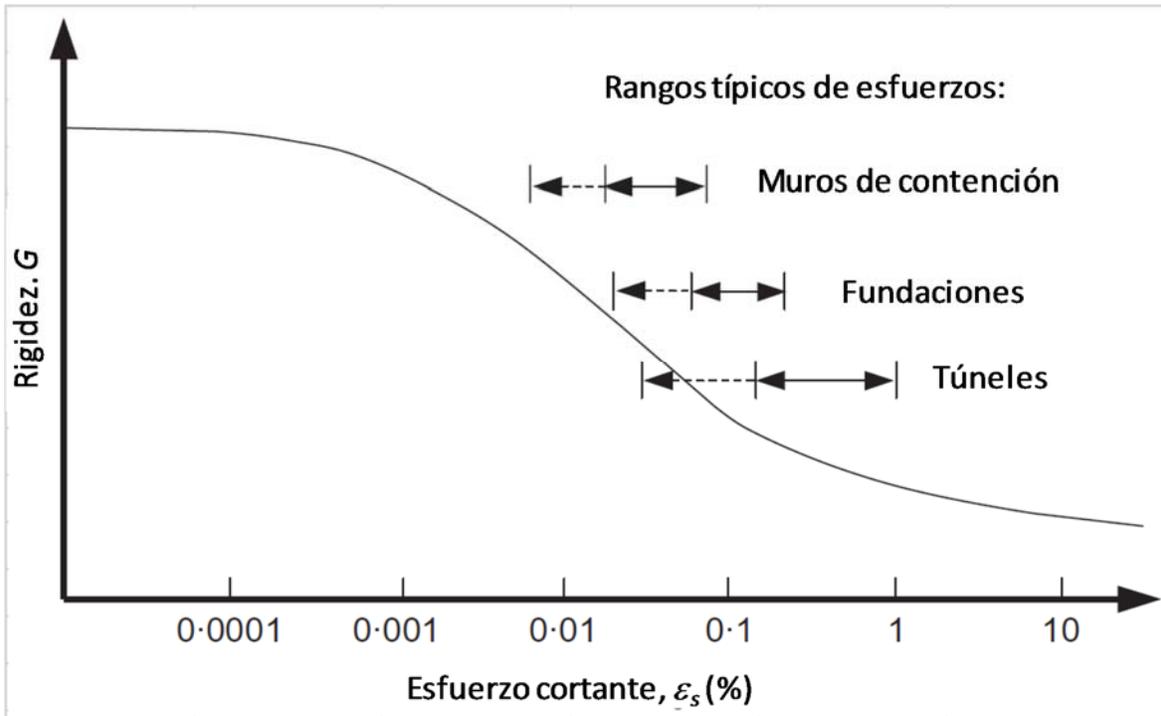


Figura 13 Nivel de deformación del suelo en obras típicas de infraestructura

Una característica de los suelos es que estos no exhiben isotropía. El caso más simple de anisotropía es la isotropía transversal. Este caso particular de anisotropía es identificada mediante técnicas experimentales modernas. Actualmente es reconocido que muchos depósitos de suelo presentan esta condición de anisotropía en la que la rigidez horizontal es diferente que la rigidez vertical. Por lo tanto, actualmente se da por cierto que un suelo se caracteriza mediante alguno de los siguientes juegos de parámetros (ver **Tabla 2**).

Los parámetros  $E$ ,  $\nu$  y  $G$  expuestos en la **Tabla 2** son módulo de elasticidad, relación de Poisson y módulo cortante, respectivamente y los subíndices v y h hacen referencia a si el parámetro del suelo fue medido en dirección horizontal o vertical.

Tabla 2 Parámetros drenados de los suelos (Fuente: El autor)

Set 1	$E'_v, E'_h, \nu'_{vh}, \nu'_{hh}, G_v$
Set 2	$E'_v, E'_h, \nu'_{vh}, G_h, G_v$
Set 3	$E'_v, E'_h, \nu'_{hv}, \nu'_{hh}, G_v$
Set 4	$E'_v, \nu'_{hv}, \nu'_{hh}, G_h, G_v$

Para el caso no drenado pueden usarse las siguientes expresiones para evaluar los diferentes parámetros elásticos<sup>6</sup>.

$$E^u = \frac{1.5E'}{1+\nu'} \quad G = \frac{E'}{2(1+\nu')} = \frac{E^u}{2(1+\nu^u)}$$

$$\nu_{vh}^u = 0.5 \rightarrow \nu_{hv}^u = \frac{E_h^u}{2E_v^u}$$

$$\nu_{hh}^u = 1 - \frac{E_h^u}{2E_v^u} = 1 - \nu_{vh}^u$$

Cuando el nivel de deformación es bastante pequeño, los valores de los módulos de Young y de corte son denominados valores de referencia:  $E_0'$ ,  $E_0^u$  ó  $G_0$  (con el subíndice 0). Estos parámetros, a muy pequeñas deformaciones dependen, principalmente, de la relación de vacíos, el estado actual de esfuerzos, la historia de esfuerzos, la fábrica y la estructura del suelo.

Es así que, diferentes técnicas experimentales permiten la medición de diferentes tipos de parámetros. La **Tabla 3** resume que tipo de parámetro es medido por algunas técnicas experimentales.

Tabla 3 Métodos para obtención de varios parámetros de rigidez (Fuente: Diaz R. Jorge A.<sup>7</sup> - El autor)

Prospección sísmica	Down hole	Cross hole	Bender element	Columna resonante	Triaxial avanzado
$G_{v0}$	$G_{v0}$	$G_{v0}, G_{h0}$	$G_{v0}, G_{h0}$	$G_{v0}, G_v$	$E_v^u, E_v', E_h', \nu_{vh}'$

#### 4.1.1 Módulos dinámicos

Como se puede inferir de la discusión anterior, y usando el resumen presentado en la Tabla 3, los denominados módulos dinámicos son en realidad módulos elásticos a bajas

<sup>6</sup> González, M. (2001). "El Terreno". Edicions de la Unversitat Politècnica de Catalunya, Edicions Virtuals: [www.edicionsups.es](http://www.edicionsups.es), pp. 240.

<sup>7</sup> Diaz R. Jorge A. [https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ved=2ahUKEwjJ87Wg-ZXgAhWGNfKkHY4YAj0QFjANegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.imt.mx%2Farchivos%2Fpublicaciones%2FPublicacionTecnica%2Fpt420.pdf&usg=AOvVaw0-2gEyFmqBNyqTrNaCJQ\\_W](https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ved=2ahUKEwjJ87Wg-ZXgAhWGNfKkHY4YAj0QFjANegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.imt.mx%2Farchivos%2Fpublicaciones%2FPublicacionTecnica%2Fpt420.pdf&usg=AOvVaw0-2gEyFmqBNyqTrNaCJQ_W)

deformaciones ( $E_0'$ ,  $E_0''$  ó  $G_0$ ). Ahora bien, teniendo en cuenta que a partir de una frecuencia de carga entre los 20 ó 30 Hz no se produce cambio de volumen<sup>8</sup>, se podría decir que en la mayoría de pruebas dinámicas en suelo, los módulos dinámicos estimados corresponden a módulos no-drenados a bajas deformaciones, es decir,  $E_0''$  ó  $G_0$ .

En la presente tesis se utilizó un modelo elástico lineal para las simulaciones numéricas, considerando así que este tipo de modelo es suficiente para representar la respuesta dinámica del suelo a las cargas vibratorias generadas por máquinas.

En el modelo elástico lineal, los parámetros que determinan la rigidez del suelo son únicamente el módulo de Young,  $E$ , y la relación de Poisson,  $\nu$ . Además, es preciso incluir algún modelo de amortiguamiento que permita la disipación de energía del sistema analizado, cuyos parámetros dependerán del modelo empleado. En el caso de problemas dinámicos, es más común usar el módulo de rigidez al corte,  $\mu$ , para representar la rigidez del suelo, aunque este se relaciona directamente con  $E$  y  $\nu$ , en la Tabla 4 se muestra una serie de relaciones entre parámetros elásticos.

En esta tesis no se usó ningún parámetro de amortiguamiento para simular la disipación de energía porque el modelo no incluye variables para dicho parámetro.

Tabla 4 Correlaciones para obtención de varios parámetros de rigidez<sup>9</sup>

	$(\lambda, G)$	$(E, G)$	$(K, \lambda)$	$(K, G)$	$(\lambda, \nu)$	$(G, \nu)$	$(E, \nu)$	$(K, \nu)$	$(K, E)$	$(M, G)$
$K =$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{EG}{3(3G - E)}$			$\lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$			$M - \frac{4G}{3}$
$E =$	$G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$		$9K \frac{K - \lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{9KG}{3K + G}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$2G(1 + \nu)$		$3K(1 - 2\nu)$		$G \frac{3M - 4G}{M - G}$
$\lambda =$		$G \frac{E - 2G}{3G - E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(3K - E)}{9K - E}$	$M - 2G$
$G =$			$3 \frac{K - \lambda}{2}$		$\lambda \frac{1 - 2\nu}{2\nu}$		$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$3K \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)}$	$\frac{3KE}{9K - E}$	
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$					$\frac{3K - E}{6K}$	$\frac{M - 2G}{2M - 2G}$
$M =$	$\lambda + 2G$	$G \frac{4G - E}{3G - E}$	$\frac{3K}{-2\lambda}$	$K + \frac{4G}{3}$	$\lambda \frac{1 - \nu}{\nu}$	$2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}$	$E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$3K \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$	$3K \frac{3K + E}{9K - E}$	

Módulo de compresibilidad ( $K$ ), Módulo de Young ( $E$ ), Primer parámetro de Lamé ( $\lambda$ ),  
Módulo de corte ( $G = \mu$ ), Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), Módulo de onda P ( $M$ )

## 4.2 Modelos Matemáticos en Dinámica de Suelos

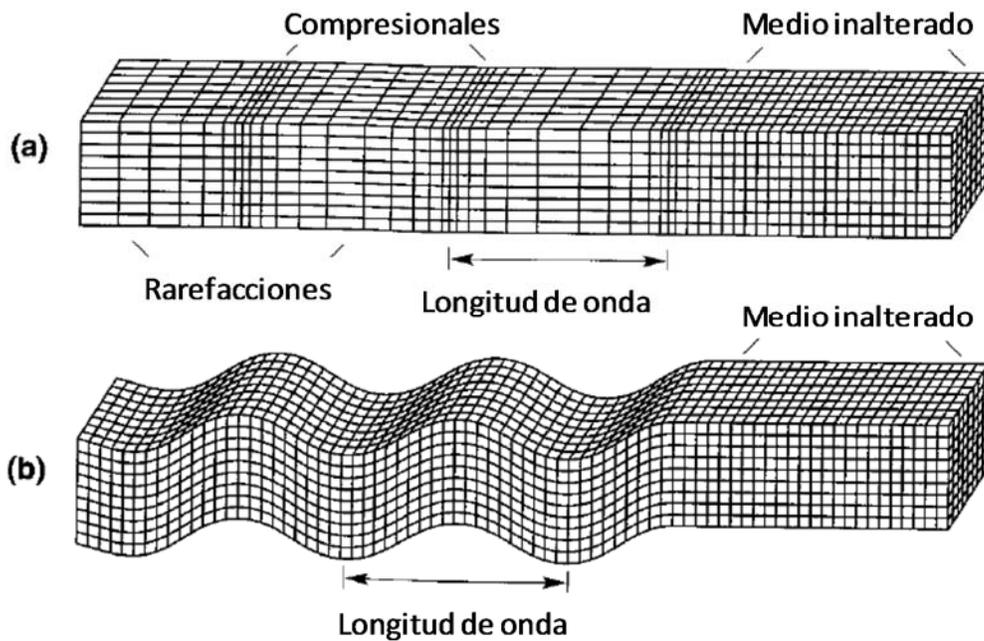
En ingeniería geotécnica se puede dividir el fenómeno de transmisión de vibraciones en dos grandes casos. Un caso general donde las ondas mecánicas son producidas al interior del suelo y se propagan hasta la superficie generando vibraciones transitorias que afectan el normal funcionamiento de las obras de infraestructura.

<sup>8</sup> Rondón, H. Alexander. Reyes, F. "Deformación permanente de materiales granulares en pavimentos flexibles: Estado del conocimiento". pp. 77

<sup>9</sup> [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo\\_de\\_Young](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%B3dulo_de_Young)

Los agentes generadores de estas ondas al interior de la tierra pueden ser sismos, explosiones mineras, o el tránsito de trenes subterráneos. Otro caso general es aquel donde las ondas son generadas en la superficie del suelo. Estas vibraciones son producidas naturalmente por perturbaciones de diferente índole, o por la interacción humana con el terreno. Las de mayor importancia, por su magnitud, son las producidas por el hombre. Las vibraciones superficiales producidas por el tránsito de vehículos o por equipos mecánicos, son las más comunes.

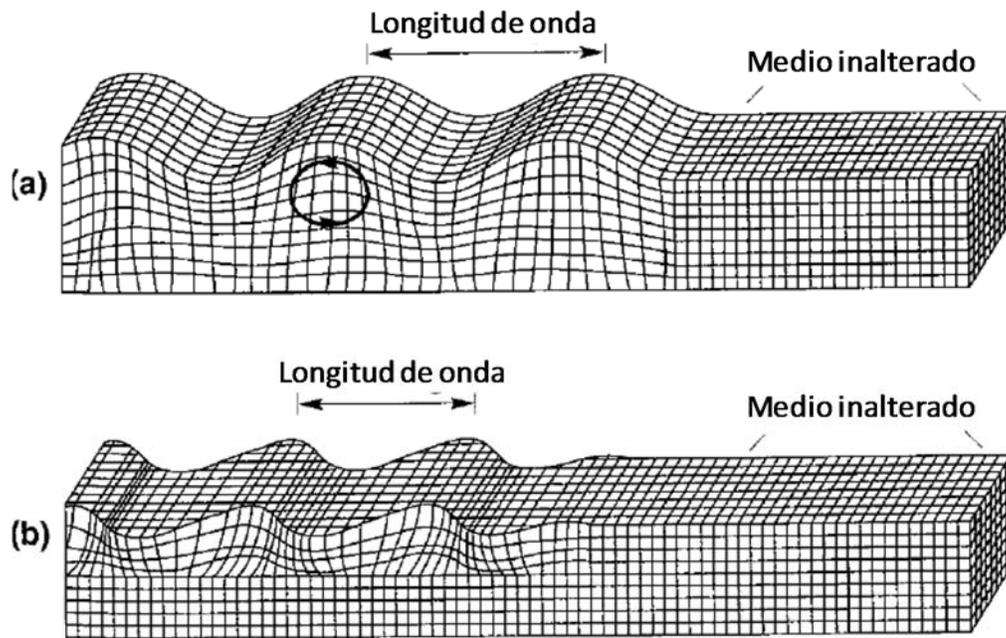
Las ondas producidas al interior del terreno sea por agentes naturales o antrópicos, producen dos tipos de ondas. Estas ondas se diferencian entre sí por el tipo de deformación que generan a su paso. Estas ondas son: las Ondas P y las Ondas S. Las primeras, las ondas P, son las ondas que transmiten esfuerzos normales y la deformación que generan es volumétrica al generar una deformación en la misma dirección de la propagación (ver figuras 14(a) y 14(b)).



**Figura 14** Tipos de ondas de cuerpo. a) Ondas P y b) Ondas S (Fuente: Steven L. Kramer, "Geotechnical Earthquake Engineering", P. 19)

El otro tipo de ondas de cuerpo son las ondas S. Estas ondas transmiten esfuerzos cortantes al generar distorsión (cambio de forma sin cambio de volumen) en planos diferentes al de la propagación de la onda.

Cuando las ondas de cuerpo P y S alcanzan la superficie del terreno, contacto entre tierra-aire o tierra-agua, se generan por lo menos dos ondas que se propagan en una franja bastante reducida cercana a la superficie. Estas ondas son las Ondas Rayleigh y las Ondas Love, respectivamente, que son las causantes de los daños producidos por los sismos en las construcciones (Ver ondas de superficie en Figuras 15(a) y 15(b)).



**Figura 15** Ondas de superficie. a) Ondas Rayleigh y b) Ondas Love (Fuente: Steven L. Kramer, "Geotechnical Earthquake Engineering", P. 20)

## **5 Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico**

Normalmente en la academia y el ejercicio de profesiones que están directamente ligadas con la solución de problemas de ciencia e ingeniería se hace uso del análisis numérico, esto debido a que muchos problemas físicos y de ingeniería son adecuadamente representados por ecuaciones lineales, polinómicas, exponenciales, diferenciales, etc., convirtiendo muchas de estas soluciones en resolución de problemas de matemática aplicada. Debido a que la mayoría de los problemas de la matemática aplicada no disponen de soluciones analíticas se ha vuelto necesario la aplicación de métodos numéricos para poder resolverlos.

El análisis numérico es entonces el estudio de algoritmos para la solución de problemas de la matemática continua y este a su vez hace uso de la computación científica, la cual puede definirse como el diseño e implementación de estos algoritmos numéricos para problemas de ciencia e ingeniería.

En particular en esta tesis fue de interés el problema de las ecuaciones diferenciales, debido a que el algoritmo en que se basa esta se ha desarrollado para un problema geotécnico que es representado a partir de ecuaciones diferenciales.

### **5.1 Ecuaciones Diferenciales Parciales**

Los problemas de ingeniería como transferencia de calor, flujo de agua subterránea, propagación de ondas electromagnéticas, deformación elástica de sólidos, entre otros, son descritos de manera general mediante ecuaciones diferenciales parciales (Reddy, 2006).

Las ecuaciones diferenciales que describen estos fenómenos se enmarcan dentro de alguna de las siguientes tres clases: elíptica, parabólica o hiperbólica (LeVeque, 2005).

#### **5.1.1 Ecuaciones diferenciales Elípticas**

Estas ecuaciones describen problemas estables (en equilibrio) de valor de frontera donde la dimensión temporal no es tomada en cuenta (Lynch, 2005). Su representación matemática es la siguiente:

$$\nabla^2 u = f(x_i)$$

Pertenece a este grupo los problemas estacionarios de flujo de calor, flujo de agua subterránea, y las ecuaciones estacionarias de Navier.

#### **5.1.2 Ecuaciones diferenciales Parabólicas**

Cuando se analizan problemas transitorios no oscilatorios aplican las ecuaciones parabólicas. Como se considera que las variables dependientes varían en el tiempo en una

sola dirección, solo es requerida la derivada de primer orden con respecto al tiempo. La forma general de estas ecuaciones son (Lynch, 2005):

$$u_t = \nabla(k\nabla u)$$

Los fenómenos que entran dentro de este caso son la transferencia de calor y la propagación de ondas en una dirección, la consolidación del suelo, entre otros.

### 5.1.3 Ecuaciones diferenciales Hiperbólicas

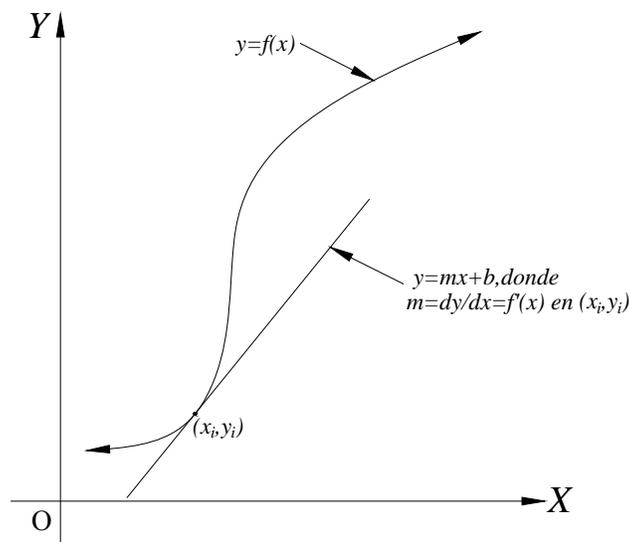
Este es el caso de fenómenos de transmisión de ondas electromagnéticas, sonoras y de deformación en sólidos. La forma general de estos fenómenos dinámicos, generalmente oscilatorios, es:

$$u_{tt} = \nabla(C^2\nabla u)$$

### 5.1.4 Resolución de ecuaciones diferenciales

Dada una función  $y = f(x)$ , la derivada de dicha función es  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ .

En la interpretación elemental de la derivada se sabe que dada una función,  $y = f(x)$  cuya gráfica es cualquier curva en el espacio coordenado  $(x, y)$ , la derivada de dicha función  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  representa la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$ , en cualquier punto  $(x_i, y_i)$ . Ver representación gráfica de la derivada en la **Figura 16**.



**Figura 16** Representación gráfica de la derivada (Fuente: El autor)

La forma más sencilla de una ecuación diferencial es:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = g(x)$$

Resolver esta ecuación diferencial es hallar la función  $y = f(x)$  que al derivarla satisfaga la función  $\frac{dy}{dx} = g(x)$ .

Algunas ecuaciones diferenciales se pueden resolver aplicando ciertas reglas sencillas (reglas de integración), en dichos casos la gráfica de la función  $y = f(x)$ , que es solución de la ecuación diferencial, se obtiene graficando la función que resulta al resolver la ecuación diferencial; pero cuando no es posible resolver por integración una ecuación diferencial, entonces se hace necesario emplear análisis numérico. Luego de esto se puede graficar la función  $y = f(x)$ , que es solución de la ecuación diferencial.

## 5.2 Diferencias Finitas - DF

Las diferencias finitas se usan para llegar a la solución gráfica de la función  $y = f(x)$ , que es solución de la ecuación diferencial dada.

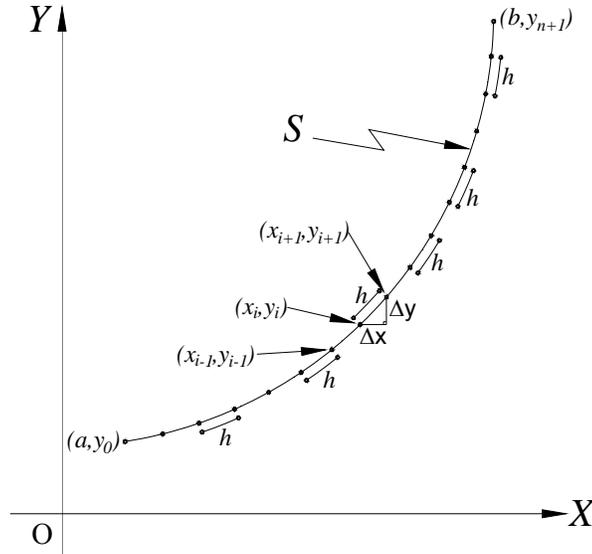
El método de diferencias finitas tiene como filosofía el reemplazar cada operador diferencial de la ecuación en estudio, por aproximaciones de la definición de derivada utilizando series truncadas (finitas) de Taylor de orden arbitrariamente pre-seleccionado. A continuación se tratará de explicar en forma muy general en que consiste el método.

Sea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = g(x),$$

definida en  $a < x < b$

Con  $y_0 = y(a) = f(x_0)$ ,  $y, y_{(n+1)} = f(x_{n+1}) = y(b)$  (véase **Figura 17**)



*El segmento de curva S es la gráfica de la función  $y=f(x)$  que satisface la ecuación diferencial dada*

**Figura 17** Ilustración de la gráfica de la función  $y = f(x)$ , que es solución de la ecuación diferencial (Fuente: El autor).

Se sabe que al dividir el segmento S en  $n$  intervalos iguales de longitud  $h$  lo suficientemente pequeños, entonces la curva S estará formada por  $n$  segmentos de recta de pendiente  $m$ .

Por definición la pendiente de cada segmento de recta está dada por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x$$

De donde resulta que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}$$

Sumando las dos expresiones anteriores se obtiene el operador de diferencias finitas centradas de las derivadas de primer orden, que será el usado en esta tesis.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta x)}$$

Este es un método de aproximaciones locales que tradicionalmente usa una malla de puntos regular, y métodos explícitos para la solución de ecuaciones algebraicas (Gray, 1984).

Los pasos básicos para la implementación del método de diferencias finitas son los siguientes (Moczo & Kristek, 2004):

1. Creación del esquema de diferencias finitas (DF). Esto contempla:
  - a. Generar una malla o red de celdas elementales en el dominio geométrico
  - b. Reemplazar las derivadas por los operadores de las series de Taylor para los nodos internos, nodos de discontinuidades y nodos de frontera.
  - c. Construir el sistema de ecuaciones y resolver por algún método numérico conocido las ecuaciones en diferencias finitas.
2. Análisis del esquema de diferencias finitas. Esto contempla:
  - a. Análisis de consistencia y orden de aproximación (error por truncamiento)
  - b. Estabilidad
  - c. Convergencia
3. Cálculos numéricos

La **consistencia** hace referencia a que el esquema en diferencias finitas se aproxima a la solución cuando los incrementos disminuyen, o lo que es lo mismo que el error tiende a cero cuando el incremento en el tiempo y el espacio tienden también a cero. La **estabilidad** hace referencia a que a partir de un tamaño mínimo de malla la precisión de la solución varía poco aunque se siga disminuyendo este tamaño de discretización. Por **convergencia** se hace referencia a que esa sensibilidad al tamaño de la discretización hace que la solución tienda asintóticamente a un valor único en la medida que se hace el enmallado más fino (LeVeque, 2005).

### 5.2.1 Diferencias finitas con derivadas temporales 2D

Una ecuación diferencial en dos dimensiones involucra dos variables espaciales.

Dada la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, |$$

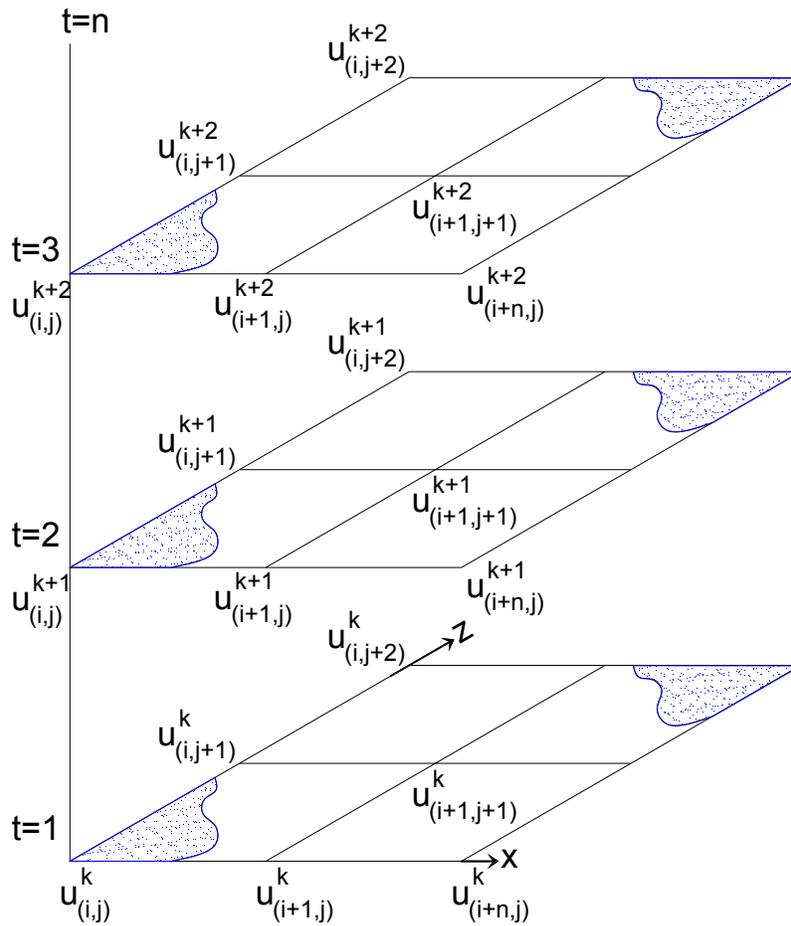
definida en  $a \leq t \leq \infty$

Para el caso de una ecuación diferencial en 2D, teniendo definidas las aproximaciones de las derivadas, para el método de diferencias finitas, se reemplaza en la ecuación diferencial dada y se obtiene también una ecuación discreta de diferencias finitas.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2(\Delta t)} = \rho \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta z)^2}$$

En este caso se tiene que el arreglo para la solución del problema es una región tridimensional que se divide en grilla de celdas cúbicas, donde el plano  $x,z$  corresponde a los incrementos espaciales y en elevación cada cara  $x,z$  avanza un intervalo  $\Delta t$  que representa el tiempo.

Para resolver la región tridimensional es necesario conocer unas condiciones iniciales y unas condiciones de frontera: Estas normalmente son valores dados, iniciales y/o finales y/o valores en los bordes de la región, que se usan para iniciar los cálculos a partir de la ecuación discreta de diferencias finitas obtenida para el problema. En la **Figura 18** se muestra el esquema de la malla tridimensional para resolver numéricamente la ecuación diferencial.



**Figura 18** Modelo de la región tridimensional para resolver numéricamente la ecuación diferencial 2D en el dominio del tiempo (Fuente: El autor)

En el numeral 5.6.1 se explicará en detalle cómo se utiliza el método.

### 5.3 Historia de Ecuación de Ondas Mecánicas

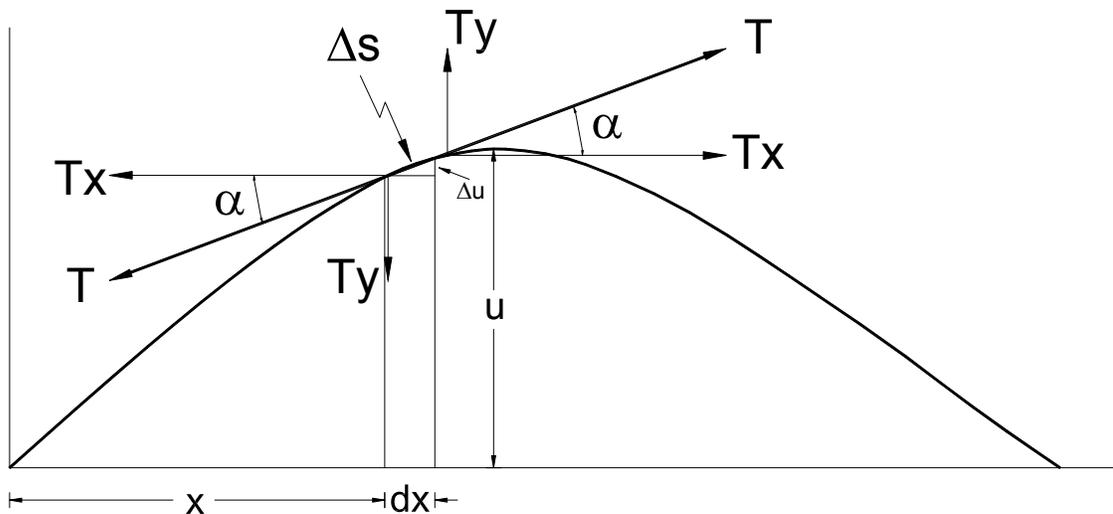
En Europa los problemas de vibraciones mecánicas comenzaron a tratarse formalmente a mediados del siglo XVIII. Fue el físico Jean le Rond D'Alembert (1746) quien estudió por primera vez el problema de una cuerda vibrante y a partir de ello, por diagrama de cuerpo libre, aplicando la segunda ley de Newton, límites y derivadas elaboró el primer modelo apropiado para describir una onda. Leonhard Euler (1748), también logró demostrar una de las ecuaciones de onda demostradas por D'Alembert, aunque tenía algunas diferencias con este último. El físico Daniel Bernoulli (1753) logró también obtener un modelo matemático para ecuación de onda, analizando el problema de la cuerda vibrante, de una manera diferente que D'Alembert. Beornoulli lo hizo superponiendo una serie de funciones trigonométricas con dos argumentos, uno para el tiempo y otro para la longitud, dando como

inicio al método de Separación de Variables para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Este método fue sistematizado y formalizado por J. Fourier, medio siglo después, para resolver la ecuación de transferencia de calor propuesta también por él mismo.

### 5.3.1 Ecuación de onda en una dimensión de D'Alembert

La ecuación de onda desarrollada por d'Alembert tiene su origen en el análisis de cuerpo libre de un segmento  $\Delta s$  de una cuerda infinita de longitud  $L$  sometida a una tensión  $T$  que en equilibrio está en línea recta. Como suposiciones básicas debe considerarse que si la cuerda es perturbada se observará un desplazamiento transversal  $u$  de la cuerda que es bastante pequeño comparándolo con la longitud  $L$  de la cuerda. Esto ocasiona que los ángulos  $\alpha$  de la horizontal con cualquier tangente a la curva sean lo suficientemente pequeños como para que el *seno* ( $\alpha$ ) sea aproximadamente igual a la *tangente* ( $\alpha$ ) y esta a su vez a la relación  $\Delta u/\Delta x$  (eje vertical  $u$  eje horizontal  $x$ ).

En cada extremo del segmento  $\Delta s$ , actúan fuerzas verticales que intervienen en el movimiento (la **Figura 19** ilustra las variables y suposiciones del método).



**Figura 19** Ilustración de diagrama de cuerpo libre en una cuerda vibrante (Fuente: el autor)

$$\rho_L \Delta s \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = T \sin \alpha|_{x+\Delta x} - T \sin \alpha|_x$$

Si la tensión  $T$  se considera constante a lo largo de la cuerda y  $\Delta s$  se aproxima a  $\Delta x$  la expresión anterior puede reescribirse como se muestra a continuación.

$$\rho_L \Delta x \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = T \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_x \right)$$

$$\rho_L \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = T \frac{\left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_x \right)}{\Delta x}$$

Tomando los límites

$$\rho_L \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = \rho_L \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$T \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_x \right)}{\Delta x} = T \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Obtenemos la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{con} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$$

### 5.3.2 Ecuación de onda en una dimensión de Bernoulli

La idea clave de Bernoulli fue obtener la ecuación de onda como una superposición de ondas sencillas, para ello se partió de la suposición que el desplazamiento transversal  $u$  de la cuerda puede expresarse como el producto de dos funciones independientes, una dependiente del espacio y la otra dependiente del tiempo:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Ahora se supone que es posible separar la dependencia de  $u(x, t)$  en las dos variables independientes y se sustituye  $u(x, t)$  dentro de la ecuación de onda, para obtener:

$$X(x) \cdot T''(t) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

Dividiendo la expresión anterior por  $c^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$ , se obtiene:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

La expresión de la izquierda solo depende del tiempo ( $t$ ), en tanto que la expresión de la derecha solo depende del espacio  $x$ . Como  $x$  y  $t$  son variables independientes, esto solo es posible si ambas expresiones son iguales a una constante  $A$  (independiente de  $x$  y  $t$ ), obteniendo las siguientes expresiones.

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = A$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = A$$

La solución a estas dos expresiones se realiza mediante métodos convencionales de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Puede verificarse que la solución está representada por medio de funciones trigonométricas oscilatorias. Aplicando alguna condición de borde (espacial) e inicial (temporal), se puede llegar a la solución de la cuerda vibrante propuesta por D. Bernoulli:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

### 5.3.3 Ecuación de movimiento

A partir de la segunda ley de Newton puede derivarse la ecuación de movimiento de un continuo sólido. La fuerza resultante en cualquier cuerpo finito y deformable en equilibrio, se evalúa mediante la siguiente expresión

$$\int_V \mathbf{F} dV + \int_A \mathbf{P} dA = 0$$

Donde  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas de cuerpo e inerciales que experimentan todas las partículas,  $\mathbf{P}$  es el vector de fuerzas de contacto aplicado aleatoriamente a lo largo de la superficie externa del sólido y los diferenciales de volumen y área,  $dV$  y  $dA$ , describen la geometría del sólido, el primero describe el volumen donde las fuerzas de cuerpo, como el caso de la gravedad, ejercen su efecto y donde se desarrolla toda la inercia  $m$ , y el segundo delimita un diferencial de área en la superficie con vector normal hacia afuera donde se aplican las fuerzas de contacto.

La ecuación anterior escrita en componentes es la siguiente (Müller, 2007):

$$\int_V F_i dV + \int_A p_{ij} n_j dA = 0$$

Que al aplicar el teorema de integración de Gauss

$$\int_A p_{ij} n_j dA = \int_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V P_{,i} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV$$

La ecuación de fuerza resultante está dada por:

$$\int_V (\mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{P}) dV = 0$$

Esta integral será cero siempre y cuando:

$$F_i + \frac{\partial p_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

Siendo  $\mathbf{F}$  la suma de todas las fuerzas de cuerpo e inerciales. La ecuación general de movimiento, denominada también Ecuación de Cauchy (Fridtjov, 2008), es

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{p}_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{f}_i$$

Teniendo en cuenta la ley de Hooke para materiales elásticos lineales, usando constantes de Lamé, se obtiene:

$$\mathbf{p}_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

y las relaciones desplazamiento deformación

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})$$

Se puede llegar a la ecuación general de Navier (1821) que describe la deformación de sólidos elásticos (para cualquier sistema de coordenadas):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0$$

Esta expresión puede presentarse en componentes y en coordenadas cartesianas (Heaton, 2005) así:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_{j=1}^3 \left[ \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

### 5.3.4 Frentes y Tipos de onda

Un campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  puede dividirse en dos componentes ortogonales  $\mathbf{u}_L$  (longitudinal) y  $\mathbf{u}_T$  (transversal). La componente longitudinal no tiene rotacional y la componente transversal no tiene divergencia (Lautrup, 2011).

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_L = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T = 0$$

Como las fuerzas de gravedad pueden despreciarse (Lamb, 1904) la ecuación de movimiento de Navier puede reescribirse para cada uno de los campos de desplazamiento longitudinal y transversal según la siguiente expresión:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T) = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T) - \mu \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T) = 0$$

Para las componentes longitudinales:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_L - \underbrace{\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_L}_{\text{es igual a cero}} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{u}_L \quad \text{con} \quad \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

Para las componentes transversales:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = \underbrace{(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_T}_{\text{es igual a cero}} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_T = 0$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{u}_T \quad \text{con} \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Las expresiones anteriores permiten deducir que tanto la solución para  $\mathbf{u}_L$  y como para  $\mathbf{u}_T$  corresponden a ondas, y que estas se propagan a diferentes velocidades según coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ . Dado que la divergencia de las ondas transversales  $\mathbf{u}_T$  es cero, se deduce que solo las ondas longitudinales  $\mathbf{u}_L$  generan cambios de presión, por lo que se denominan ondas compresionales (onda-P). A las ondas transversales se les conocen como ondas cortantes (onda-S).

De la definición de las ondas compresionales y cortantes se desprenden las siguientes soluciones a la ecuación de Navier, que corresponden a ondas planas unidimensionales para medios no dispersivos (Heaton, 2005).

### Onda-P plana

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = f\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) \hat{\mathbf{a}}_x$$

que corresponden a un campo de desplazamiento paralelo a la dirección de propagación (eje x).

### **Onda-S plana vertical**

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = f\left(t - \frac{x}{\beta}\right) \hat{\mathbf{a}}_y$$

que corresponde a un campo de desplazamiento en dirección vertical (eje y) perpendicular a la dirección de propagación (eje x)

### **Onda-S plana horizontal**

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = f\left(t - \frac{x}{\beta}\right) \hat{\mathbf{a}}_z$$

que corresponde a un campo de desplazamiento en dirección horizontal (deformación en eje z) perpendicular a la dirección de propagación (eje x).

## **6 Propagación de Ondas P-SV en Medios Heterogéneos: Velocidades-Esfuerzos por Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo**

En este capítulo se discute el análisis de distribución de esfuerzos y desplazamientos dentro de un dominio de suelo bidimensional bicapa, no homogéneo, semi-infinito y elástico. Pero el análisis es abordado para el caso particular de suelo sometido a cargas verticales sinusoidales aplicadas en la superficie. El análisis se realizará mediante el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD (por sus siglas en inglés).

El método se empleará para la solución de las ecuaciones visco-elastodinámicas en forma diferencial por medio de diferencias centradas, las cuales son obtenidas a partir de la expansión de Taylor, que sirven para discretizar los campos de velocidades y esfuerzos. El método de FDTD establece una relación geométrica, por ejemplo la celda de Yee, que consiste en discretizar el modelo en tiempo y espacio, dividiendo un cubo en varios cubos pequeños, donde los vértices de los cubos forman la red tridimensional para el muestreo espacial de las componentes vectoriales de los campos de velocidades y esfuerzos (en el numeral 5.3 se explica a partir del modelo de Virieux).

Para resolver los problemas dinámicos de deformación es necesario conocer aspectos básicos de ecuaciones diferenciales, métodos numéricos, programación en lenguajes de computación, mecánica de materiales y teoría de ondas. En este capítulo se describen brevemente estos aspectos. Para el desarrollo matemático se utilizarán las siguientes convenciones (Fridtjov, 2008):

$$\begin{aligned}
 u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
 u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \nabla &= e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 f_{,i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} & \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}
 \end{aligned}$$

## 6.1 Modelamiento Numérico de la Ecuación de Onda

Los principales avances en el desarrollo de soluciones cerradas y aproximadas de la ecuación elastodinámica de onda fueron debido a sismólogos. En la literatura abundan artículos científicos y libros técnicos presentando innovaciones en esta área de la Geociencia. La principal motivación para los sismólogos ha sido la interpretación de Sismogramas. La industria petrolera ha patrocinado gran variedad de estos estudios.

En el artículo que enmarca el fundamento teórico de esta tesis de grado se presenta la integración de variaciones de la ecuación de onda mediante diferencias finitas en el dominio del tiempo, DFTD. Esto significa que existen diferentes formas de integración según el tipo de ecuación elastodinámica utilizada y el esquema DFTD seleccionado. A continuación se presenta una breve descripción de estos avances.

### 6.1.1 Formulación desplazamiento y esquema convencional

Esta formulación de la ecuación elastodinámica es el resultado de reemplazar directamente los esquemas de DF seleccionados, en la ecuación de Navier. Estos corresponden a los primeros esquemas de DF desarrollados en códigos de computación.

Los artículos de (Alterman & Karal, 1968) y (Kelly & Ward, 1976) presentan este tipo de formulación. La integración es explícita y el esquema de DF es central truncado para error de orden 2.

Estos son esquemas de DF convencionales en cuanto a que presentan tres ecuaciones algebraicas independientes para cada dirección de desplazamiento, resolviendo independientemente cada una de ellas para el tiempo (t+1) y usando los valores de desplazamiento hallados en el tiempo t y (t-1).

### 6.1.2 Formulación velocidad – esfuerzo y esquema de malla intercalada

Esta formulación considera las ecuaciones de movimiento y la ley de Hooke por separado. Para evitar las ecuaciones diferenciales hiperbólicas de segundo orden en el tiempo, utiliza como variable la velocidad y no el desplazamiento. Utiliza esquema de DF central para la

ecuación de movimiento (expresada en velocidad) y diferencias hacia adelante en las ecuaciones de esfuerzo, en una malla donde cada variable dependiente (y parámetro de material) se evalúa en un punto que está desplazado con respecto a otra variable dependiente.

Los artículos de (Virieux, 1984) y (Virieux, 1986) son ampliamente referenciados en el medio académico.

El trabajo de Jean Virieux titulado “*P-SV Wave Propagation in Heterogeneous Media: Velocity-Stress Finite-Difference Method*” publicado en 1986 (Virieux, 1986), presentó las ecuaciones elastodinámicas integradas con diferencias finitas de segundo orden de aproximación, en el dominio del tiempo y en coordenadas cartesianas, aplicable para medios heterogéneos generales, donde la homogeneidad es un caso especial.

En su artículo, Jean Virieux usa las ecuaciones elastodinámicas básicas donde se relaciona la aceleración inercial de la partícula con el cambio de esfuerzos a lo largo de esta. Mediante operadores de diferencias finitas centradas de un paso presenta las expresiones generalizadas para la integración DFTD en medios heterogéneos mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se dice que son centradas de un paso debido a que Yee usa diferencia finita espacial de  $\pm\frac{1}{2}\Delta x$  y diferencia finita temporal de  $\pm\frac{1}{2}\Delta t$ , alrededor del punto de observación, en vez de usar  $\Delta x$  ó  $\Delta t$ , dando lugar a un operador de diferencia finita con cociente  $\Delta x$  o  $\Delta t$ , en lugar de,  $2(\Delta x)$  o  $2(\Delta t)$ , como ocurre en los esquemas convencionales.

Para llegar a las ecuaciones originales de la elastodinámica contrae en el dominio espacial las ecuaciones de Navier.

## 6.2 Ecuación Diferencial Elastodinámica

A partir de la ecuación de Navier en coordenadas cartesianas (Ecuación 1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sum_{j=1}^3 \left[ \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right] \quad (\text{Ec. 1})$$

Y las definiciones de ondas planas de P-SV para las dimensiones X e Z (Ecuación 2)

$$\text{onda P} = f \left( t - \frac{u_1}{\alpha} \right) \hat{x} \quad (\text{Ec. 2a})$$

$$\text{onda SV} = f \left( t - \frac{u_1}{\alpha} \right) \hat{z} \quad (\text{Ec. 2b})$$

$$\text{onda P} = f \left( t - \frac{u_3}{\alpha} \right) \hat{z} \quad (\text{Ec. 2c})$$

$$\text{onda SV} = f\left(t - \frac{u_3}{\alpha}\right) \hat{x} \quad (\text{Ec. 2d})$$

Se puede obtener las expresiones de la propagación de onda SH, reemplazando esta solución dentro de las expresiones expandidas de Navier. Por ejemplo, si definimos

$$u_1 = u = f(x, z, t) \quad u_2 = 0 \quad u_3 = v = f(x, z, t) \quad (\text{Ec. 3a, b, c})$$

Y se expande la Ecuación 1 usando Ecuación 3 se obtiene (Ecuación 4)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \quad (\text{Ec. 4a})$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \quad (\text{Ec. 4b})$$

Ya que la componente de desplazamientos en Y son nulos y las direcciones 1, 2, 3 son respectivamente X, Y, Z. Haciendo la siguiente manipulación de la primera expresión se obtiene (Ecuación 5).

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{Ec. 5})$$

Para llegar a (Ecuación 6)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (\text{Ec. 6})$$

De la misma manera, usando la segunda expresión para desplazamiento en Z, se llega a la siguiente expresión (Ecuación 7)

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (\text{Ec. 7})$$

La Ecuación 6 y la Ecuación 7 son ecuaciones contraídas de Navier en el dominio del espacio. Recordando, por mecánica del continuo, las definiciones de esfuerzos.

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{Ec. 8a})$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{Ec. 8b})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 8c})$$

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad y usando las definiciones de esfuerzos de la Ecuación 8, se puede re-escribir Ecuación 6 y Ecuación 7 como (Ecuación 9)

$$\rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz}) \quad (\text{Ec. 9a})$$

$$\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xz}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) \quad (\text{Ec. 9b})$$

Tomando derivadas con respecto al tiempo a cada una de las expresiones de la Ecuación 8, se obtiene (Ecuación 10)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \quad (\text{Ec. 10a})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (\text{Ec. 10b})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 10c})$$

De esta manera se obtienen las ecuaciones diferenciales visco-elastodinámicas usadas por Jean Virieux en su artículo, que se pueden agrupar como sigue (Ecuación 11)

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = b \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 11a})$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = b \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 11b})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \quad (\text{Ec. 11c})$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (\text{Ec. 11d})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right) \quad (\text{Ec. 11e})$$

Donde b es el inverso de la densidad.

### 6.3 Esquema de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo Virieux 1986

El método de FDTD analiza el problema de distribución de esfuerzos en pequeñas particiones espaciales al dividir la región del espacio 2D en una grilla espacial en la cual las velocidades y los esfuerzos son alternadamente distribuidos en posiciones discretas con el fin de poder resolver las ecuaciones visco-elastodinámicas. Las derivadas parciales son discretizadas reemplazándolas por operadores de diferencias finitas, en el espacio y en el tiempo, para convertir las ecuaciones diferenciales en aproximaciones de tipo algebraico. Hecho lo anterior, las ecuaciones de diferencias finitas permiten calcular el valor de las derivadas de una función en un punto a partir de los valores de la función en otro punto del dominio, previa construcción de un arreglo de ecuaciones que calcule los campos en un instante de tiempo futuro con base en los valores de campo en un instante pasado.

Se dice que es distribuido por la condición del enmallado y porque utiliza adicionalmente el algoritmo de Yee (Schneider, 2014), donde con los valores actualizados de velocidad que son calculados en  $(t+1/2)$  calculan los esfuerzos en  $(t+1)$ . El algoritmo de Yee usa la celda de Yee, donde se tiene un modelo en 3D que consiste en un cubo dividido en cubos pequeños, donde los vértices de los cubos conforman la red tridimensional y representan los campos. En el caso del modelo de Virieux se tienen campos de velocidad y campos de esfuerzos y estos están desfasados entre si  $\frac{1}{2}t$ . Cada componente del campo  $V_x$  ( $U$ ) está rodeado de cuatro componentes del campo  $V_z$  ( $V$ ) y viceversa, estos en un tiempo  $(t+1/2)$ . Cada componente de campo de esfuerzo está rodeado de cuatro componentes de otro campo de esfuerzos, estos en un tiempo  $(t+1)$ , y los campos de velocidades están localizados en los vértices de cubos formados por velocidades y estos a su vez se encuentran en el centro de las aristas de cubos formados por esfuerzos en sus vértices (intercalados), véase figuras 20 y 21.

Siendo que los operadores de diferencias finitas centrados de segundo orden respecto al espacio pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\frac{dU_{i,j}}{dx_i} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta} \approx \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta} \quad (\text{Ec. 12})$$

Los operadores de diferencias finitas centrados de segundo orden respecto al tiempo pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\frac{dU(x,z,t)}{dt} = \frac{U_{(x,z)}^{k+\frac{1}{2}} - U_{(x,z)}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (\text{Ec. 13})$$

Al reemplazar los operadores centrados con paso de un delta (ecuaciones 12 y 13) en las Ecuaciones 11(a, b, c, d, e) y despejando para el tiempo  $k+\frac{1}{2}$ , en el caso de las velocidades, y para el tiempo  $k+1$ , en el caso de los esfuerzos, se obtienen las expresiones discretizadas del artículo (Virieux, 1986).

A continuación se usarán las siguientes convenciones para las derivadas de velocidades y esfuerzos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial \Xi}{\partial t}$$

Por tanto los operadores de diferencias finitas para la Ec. 11e quedan así:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} = \frac{\Xi_{(i,j+\frac{1}{2})}^{k+1} - \Xi_{(i,j+\frac{1}{2})}^k}{\Delta t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - U_{(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - V_{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (\text{Ec. 14a,b,c})$$

Para entender la configuración de los subíndices de  $(i, j)$  es necesario remitirse a las **Figuras 20 y 21** donde se puede apreciar claramente cómo están organizados en la grilla los subíndices.

Como se muestra, a continuación, se presenta el reemplazo de los operadores de diferencias finitas (Ec. 14a, b, c) en la Ecuación 11e.

$$\frac{\Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k}{\Delta t} = m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z}$$

Despejando  $\Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1}$

$$\rightarrow \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} = \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k + m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 15e})$$

De la misma forma de obtienen las ecuaciones 15a, b, c, d

$$U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{i+\frac{1}{2},j}^k - \sum_{i-\frac{1}{2},j}^k \right) + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \Xi_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \quad (\text{Ec. 15a})$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Xi_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right) + b_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( T_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - T_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \quad (\text{Ec. 15b})$$

$$\sum_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = \sum_{i+\frac{1}{2},j}^k + (l + 2m)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + l_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 15c})$$

$$T_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = T_{i+\frac{1}{2},j}^k + (l + 2m)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) + l_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 15d})$$

$$\Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} = \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k + m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( U_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + m_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 15e})$$

En donde

- $k$  es el índice para discretización del tiempo.
- $i, j$  son los índices para discretización de los ejes X y Z respectivamente.
- $\Delta t$  es el tamaño de la cuadrícula del tiempo (tamaño de paso del tiempo).
- $\Delta x$  y  $\Delta z$  representa el tamaño de la cuadrícula para los ejes X y Z respectivamente (tamaño de paso del espacio).
- $l$  y  $m$  representan coeficientes de Lamé  $(\lambda, \mu)$ ;  $\left[ \lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \right]$ , y,  $\left[ G = \mu = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{E}{2(1+v)} \right]$ .
- $(U_{i,j}, V_{i,j}) = (v_x, v_z)$  son las velocidades numéricas en tiempo  $(k + \frac{1}{2})\Delta t$  que son calculadas para velocidades en tiempo  $(k - \frac{1}{2})\Delta t$  y esfuerzos en el tiempo  $k\Delta t$ , es decir, las velocidades quedan calculadas en instantes intermedios de tiempo con base en velocidades del instante anterior y esfuerzos del instante anterior.
- $(\sum, \Xi, T) = (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$  son los esfuerzos numéricos en el tiempo  $(k + 1)\Delta t$  que son calculados explícitamente para velocidad en el tiempo  $(k - \frac{1}{2})\Delta t$  y esfuerzos en el tiempo  $k\Delta t$ , es decir, los esfuerzos quedan calculadas en instantes enteros de tiempo para velocidades del instante anterior y esfuerzos del instante anterior.

De esta forma, conocidas las velocidades y esfuerzos de un instante de tiempo anterior, se podrá calcular velocidades y esfuerzos de un instante de tiempo actual, luego se actualizan las velocidades y esfuerzos del instante anterior con los valores de las últimas calculadas y se vuelve a calcular y así sucesivamente se calculan nuevos valores para nuevos instantes de tiempo.

Es importante tener en cuenta que, como el dominio es el tiempo, las variables dependientes se calculan en función del tiempo. Dado que las ecuaciones a resolver, ecuaciones visco-elastodinámicas, están constituidas por variables de velocidades y esfuerzos, entonces es necesario partir de valores de alguna de las variables correspondientes a un tiempo inicial, en este caso esfuerzos conocidos y condiciones iniciales de velocidades, los que denominamos valores en un tiempo anterior, y a partir de los correspondientes valores de velocidad y esfuerzo en el tiempo anterior, se calculan velocidades y esfuerzos en tiempos siguientes y/o intermedios. Es así que las variables de esfuerzos van intercaladas en intervalos de  $\frac{1}{2}\Delta t$  con respecto a las variables de velocidad, entonces dan origen a una malla intercalada donde el primer nivel, en el arreglo tridimensional, corresponde a las velocidades anteriores, el segundo nivel corresponde a esfuerzos intermedios y el tercer nivel corresponde a las velocidades a calcular.

### 6.3.1 Malla intercalada

Las expresiones discretizadas de diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales visco-elastodinámicas, Ec. 15(a, b, c, d, e), tienen algunas particularidades frente a esquemas anteriores. Cuando se usa mallas convencionales en DF (p.e. Z. Alterman y Karal (1968) o K.R. Kelly et al (1976)) se suele usar formulaciones en desplazamientos, los subíndices entre desplazamiento avanzan un paso (intervalos enteros) y resuelven medios homogéneos. En el caso de las expresiones discretizadas de diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales visco-elastodinámicas se emplean formulaciones en velocidad-esfuerzos, los subíndices entre velocidad-esfuerzos avanzan medio paso (intervalos de  $\frac{1}{2}\Delta t$ ) y resuelven medios heterogéneos. Evidentemente existe un problema en los subíndices al encontrar pasos intermedios iguales a  $\frac{1}{2}\Delta t$ , lo cual da origen a la malla intercalada. A continuación en la **Figura 20** se presenta este esquema para una discretización de 6 nodos.

Los puntos negros es donde se evalúa la velocidad en dirección X. Los cuadrados azules es donde se evalúa la velocidad en dirección Z. Los triángulos rojos es donde se evalúan los esfuerzos de compresión  $\sigma_{xx}$  y tracción  $\sigma_{zz}$ . Los triángulos verdes son los puntos donde se evalúa el esfuerzo cortante  $\sigma_{xz}$ .

Este tema de la malla intercalada es bastante difícil de entender, por tal razón es necesario explicarlo detalladamente:

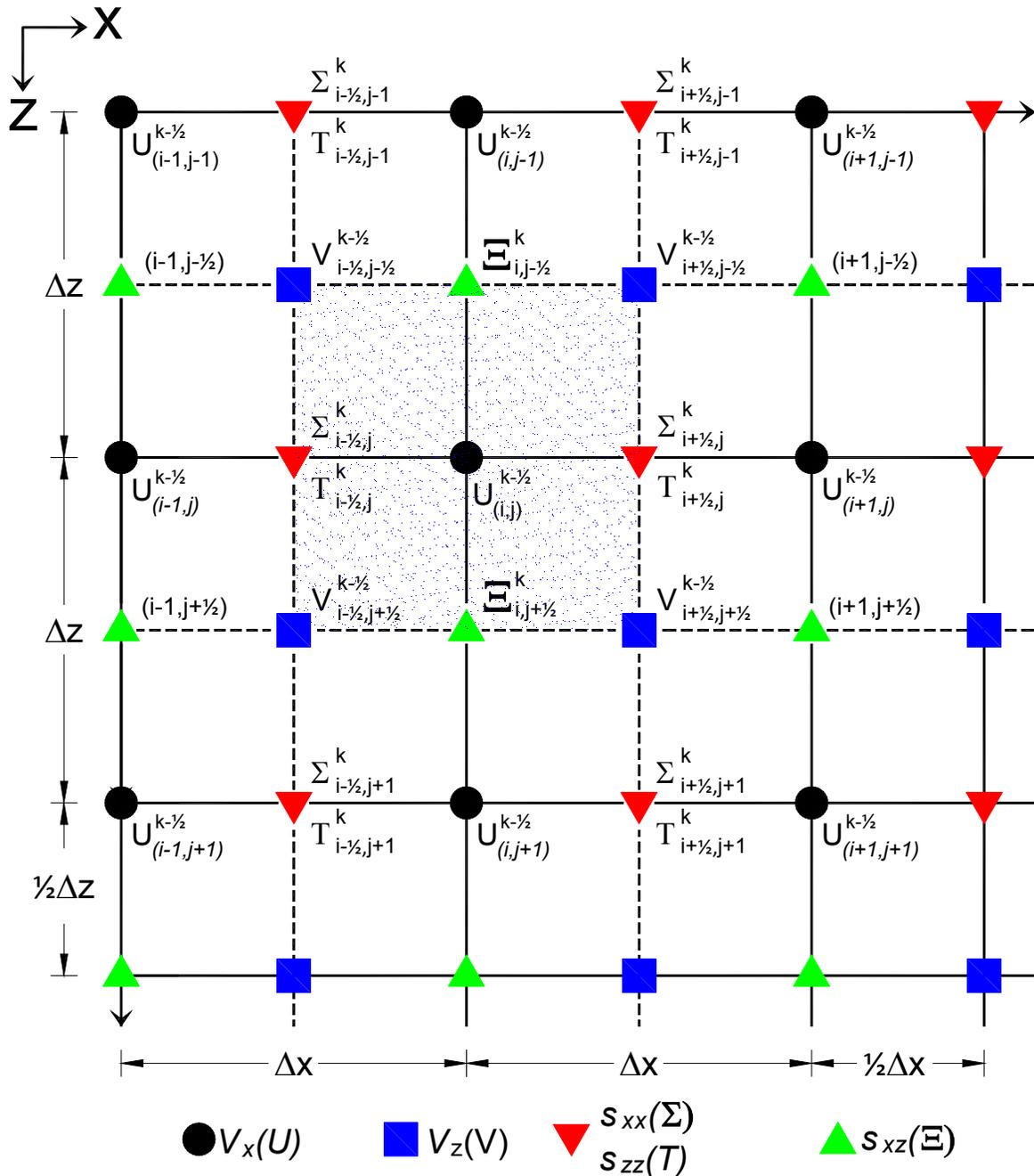
Obsérvese que en los nodos de la **Figura 20** se tienen velocidades (U y V) en el tiempo  $k - \frac{1}{2}$ ; pero los esfuerzos ( $\Sigma$ , T y  $\Xi$ ) están en el tiempo  $k$ , esto lo que indica es que esa grilla está mostrando resultados de ecuaciones discretizadas de diferencias finitas en dos tiempo diferentes, es decir que en realidad lo que se muestran son dos planos de tiempo superpuestos. Más específicamente tenemos las velocidades en un incremento de tiempo inmediatamente anterior al de los esfuerzos.

Ya se ha indicado al final del numeral 5.2.1 que el arreglo para resolver diferencias finitas en el dominio del tiempo es un espacio tridimensional donde el plano XZ representa las funciones en el espacio y el eje del tiempo que es ortogonal al plano XZ, y genera el volumen

tridimensional, corresponde al incremento en el tiempo. En la **Figura 21** se representa el espacio tridimensional, donde se puede apreciar claramente la posición en el tiempo de las grillas de esfuerzos con respecto a las grillas de velocidades.

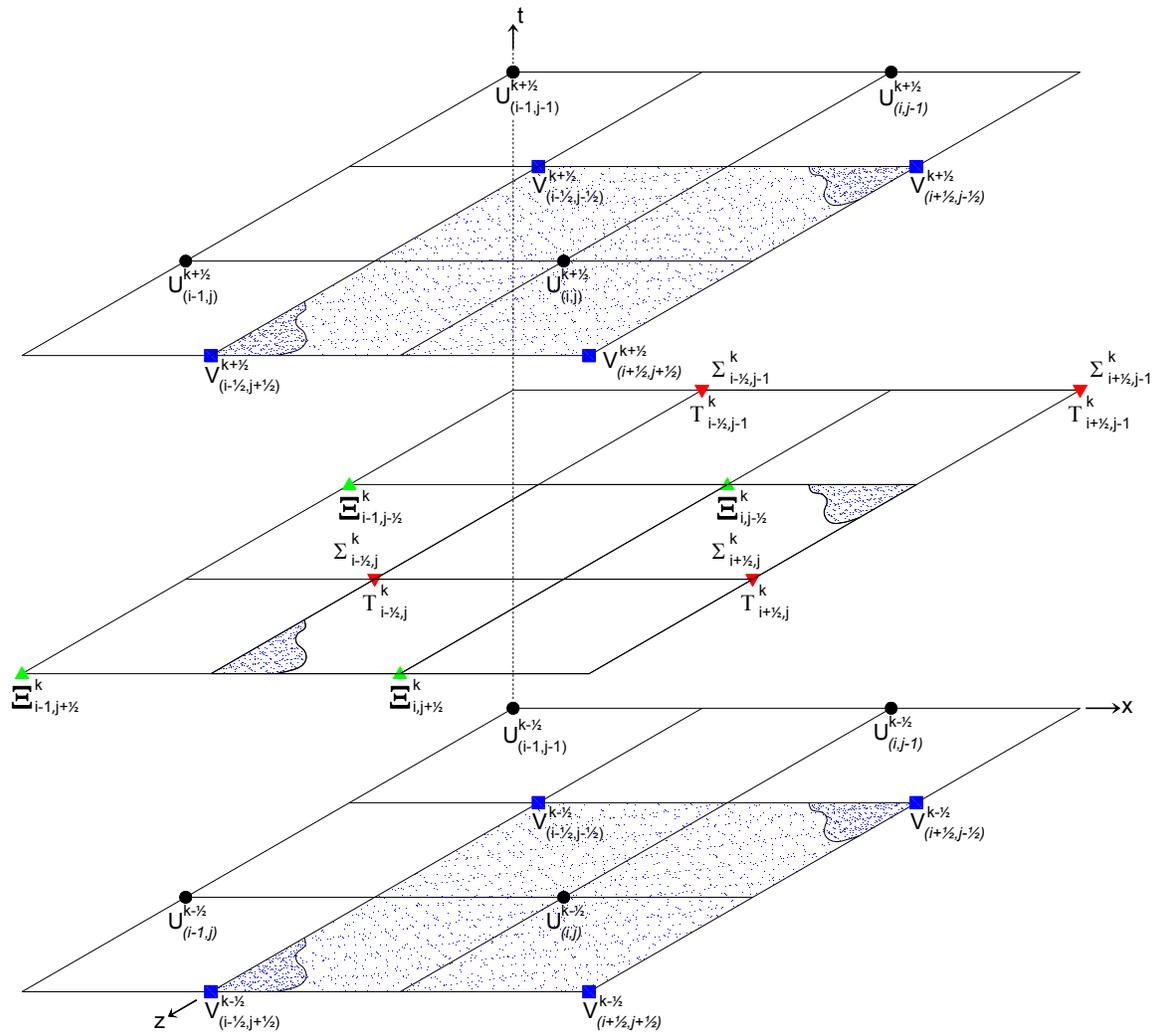
Obsérvese que es una grilla discretizada con incrementos en el espacio iguales a  $\frac{1}{2}\Delta x$  (cuadrículas con lados iguales a  $\frac{1}{2}\Delta x$ ); pero entre cada nodo correspondiente a la velocidad existe un nodo desocupado, de tal suerte que las velocidades están separadas un  $\Delta x$  y los nodos intermedios son ocupados por los esfuerzos, de tal forma que los esfuerzos también están separadas un  $\Delta x$ ; pero los esfuerzos están separados de las velocidades por incrementos en el tiempo de  $\frac{1}{2}\Delta t$ , intercalados también, es así que en el tiempo las velocidades están separadas entre sí un  $\Delta t$  al igual que los esfuerzos están separadas entre sí un  $\Delta t$ .

Este tipo arreglos es lo que se conoce como una implementación “leapfrog” o intercalada en el tiempo y es la implementación del algoritmo de Yee, introducido por K. Yee (1966) y posteriormente desarrollado por Allen Taflove et al (1980-1993)



**Figura 20** Discretización del medio para Virieux P-SV de segundo orden (Fuente: El autor)

En la **Figura 20** se muestran el origen y el final de cada grupo de puntos. Nótese como cada campo está desfasado en el espacio medio paso de grilla y una celda está compuesta por un cuadrado de lados  $\Delta x$  y  $\Delta z$  y cuatro puntos circulares. La línea a trazos encierra el dominio físico en estudio.



**Figura 21** Modelo de la región tridimensional para resolver numéricamente la ecuación diferencial 2D en el dominio del tiempo de Virieux (Fuente: El autor)

En este esquema los nodos internos para los diferentes campos se delimitan como lo presenta la **Tabla 5**

Tabla 5 Límites para campos físicos (Fuente: El autor)

<b>Campo</b>	<b>Límites de subíndices</b>	
Velocidad $V_x$ <b>U</b>	<i>En X</i>	$i=2 \rightarrow nx$
	<i>En Z</i>	$j=2 \rightarrow nz$
Velocidad $V_z$ <b>V</b>	<i>En X</i>	$i=1 \rightarrow nx-1$
	<i>En Z</i>	$j=1 \rightarrow nz-1$
Esfuerzo $\sigma_{xx}$ <b><math>\Sigma</math></b>	<i>En X</i>	$i=1 \rightarrow nx-1$
	<i>En Z</i>	$j=2 \rightarrow nz$
Esfuerzo $\sigma_{zz}$ <b>T</b>	<i>En X</i>	$i=1 \rightarrow nx-1$
	<i>En Z</i>	$j=2 \rightarrow nz$
Esfuerzo corte $\sigma_{xz}$ <b><math>\Xi</math></b>	<i>En X</i>	$i=2 \rightarrow nx$
	<i>En Z</i>	$j=1 \rightarrow nz-1$

Nuevamente los subíndices deben buscarse de tal manera que estén definidos dentro del dominio y que puedan usarse dentro del lenguaje de computo como arreglos.

### 6.3.2 Condiciones de frontera

La condición de borde que resulta naturalmente al aplicar las fórmulas para nodos internos de las Ecuaciones 15(a, b, c, d, e) usando los contadores según Tabla 5, generan reflexión, y se describen a continuación.

#### 6.3.2.1 Fronteras reflejantes

Para la frontera izquierda con frontera superior la velocidad  $V_x$  (**U**) es igual a cero, ya que el contador no actualiza los puntos con  $x_i = i - 1$  y  $z_j = j - 1$ . Para la frontera derecha con frontera inferior, la velocidad  $V_z$  (**V**) es igual a cero ya que las fórmulas de nodos internos no actualizan los puntos con  $x_i = nx$  y  $z_j = nz$ .

Los esfuerzos  $\sigma_{xx}$  ( **$\Sigma$** ) y  $\sigma_{zz}$  (**T**), que se evalúan en los triángulos rojos, son diferentes de cero en  $x_i = i - 1$  con  $z_j = nz$  (fronteras izquierda con frontera inferior respectivamente); sin embargo, son iguales a cero en  $x_i = nx - 1$  con  $z_j = j - 1$  (la frontera superior con frontera derecha).

El esfuerzo cortante  $\sigma_{xz}$  ( $\Xi$ ) es igual a cero en  $x_i = i - 1$  con  $z_j = nz - 1$  (frontera izquierda con frontera inferior).

### 6.3.2.2 Superficie libre

La superficie libre se implementó discretizando el dominio de tal manera que los esfuerzos  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$  estuvieran justo sobre la superficie libre del dominio. Para la evaluación de los esfuerzos sobre la superficie libre se utilizó el concepto de nodo ficticio, es decir un nodo que no existe, y de las propiedades de antisimetría (Graves, 1996), es decir que si se acepta que el valor del nodo que no existe se relaciona directamente con el opuesto del nodo existente y viceversa, entonces los nodos son iguales (ver la explicación numéricamente en la Ec. 17).

Al implementar el esquema de diferencias finitas (operadores centrados) encontramos que la ecuación de la velocidad en x ( $V_x$  ó  $U$ ) dentro de la **Figura 20** necesita un valor de  $\sigma_{xz}$  por fuera del dominio, es decir, un nodo ficticio de  $\sigma_{xz}$  en el punto  $(i, j - \frac{1}{2})$ .

$$U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k - \Sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \right) + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \Xi_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \quad (\text{Ec. 16})$$

Aplicando la condición de antisimetría

$$\left( \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k = -\Xi_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) \quad (\text{Ec. 17})$$

Reemplazando Ec. 17 en Ec. 16

$$U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k - \Sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \right) + b_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( 2 * \Xi_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right) \quad (\text{Ec. 18})$$

Superficie libre por fuera de la franja de carga para  $\sigma_{zz}$

$$T_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = \sigma_{zz} = 0$$

Superficie libre por debajo de la franja de carga para  $\sigma_{xx}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} = & \Sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k + (l + 2m)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ & + l_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( T_{i+\frac{1}{2},j}^{k+1} - T_{i+\frac{1}{2},j}^k - l_{i+\frac{1}{2},j} \left( U_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) / (l + 2m)_{i+\frac{1}{2},j} \right) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 19})$$

### 6.3.2.3 Fronteras absorbentes tipo paraxial

Existen varios tipos de fronteras absorbentes (Moczo, The Finite-Difference Method For Seismologists, 2004). Un tipo de frontera absorbente se logra usando la ecuación de onda en una dirección o paraxial (Clayton & Engquist, 1980). Otro tipo de frontera, consiste en usar parte del dominio espacial del modelo (un estrato, franja o faja) colindante con la frontera, y generar en esta faja una atenuación forzada mediante la incorporación de pesos decrecientes a la soluciones de los campos en estos puntos cercanos a los bordes (Cerjan & Dan, 1985). De esta manera cuando se reflejen (se mantiene condiciones reflejantes) la magnitud de los campos será despreciable.

En el artículo de Virieux – SH se señala el uso de las condiciones de borde Paraxiales B1 de (Clayton & Engquist, 1980). Estas condiciones de borde se diferencian ligeramente de las publicadas en el artículo anterior (Clayton & Engquist, 1977) en que: (1) parten de diferentes expresiones para la aproximación racional de la raíz cuadrada, (2) en la discretización y uso de operadores de diferencias finitas, y (3) en que las constantes de las ecuaciones paraxiales en el artículo de 1980 son dependientes del problema. La ecuación general discreta para las condiciones B1 es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} \pm \frac{b}{C_{\alpha\beta}} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ D_{\mp}^{\xi} \left( P_{i,j}^t + P_{i,j}^{t+1} \right) \pm \frac{b}{C_{\alpha\beta}} D_{\pm}^t \left( P_{i,j}^t + P_{i,j}^{t+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ecuación 1

En donde

$\xi$	Es la dirección de integración X ó Z
$P_{i,j}$	Es el campo de velocidad
$D_{\mp}^{\xi}$	Es el operador de diferencias finitas. Hacia atrás (-) cuando se está evaluando la migración en el extremo derecho o inferior, o Hacia adelante (+) cuando se está en los extremos izquierdo o superior.
$i, j$	Son los subíndices. i es en dirección X y j es en dirección Z. Asumen valores fijos o variables dependiendo de la frontera
$b$	Constante de ajuste para minimización de amplitud de onda reflejada (onda incidente). Es dependiente de cada problema en análisis

	Son los contadores para llamar al punto interno más cercano.
$I, J$	Sus ecuaciones son $I = i \mp 1$ & $J = j$ cuando la dirección de integración es X o iguales a $I = i$ & $J = j \mp 1$ cuando se integra en Z
$C_{\alpha\beta}$	Es la velocidad del medio. Si la propagación es tangente al borde se utiliza la velocidad de onda de corte y si la propagación es normal al borde se utiliza velocidad de onda de compresión

Las condiciones de borde paraxiales se basan en ecuaciones de onda en una dirección. Como la ecuación de onda tiene como solución una perturbación que se transmite simultáneamente en ambas direcciones, el éxito de la aplicación de las condiciones paraxiales consiste en definir cuál dirección-solución es la que aplica para cada frontera.

Por ejemplo, si se quiere evitar ondas reflejadas hacia la derecha en la frontera izquierda, en esta frontera se debe aplicar la condición paraxial que permita la trasmisión de ondas solo en dirección izquierda.

En las ondas que evacuan o migran en el sentido positivo de los ejes espaciales, la derivada temporal y espacial tienen signo positivo (+). Las ondas que migran en sentido negativo, las expresiones temporal y espacial tienen signo contrario. Esta es la razón en el signo  $\pm$  en las expresiones de la Ecuación 1.

A continuación se presentan las ecuaciones discretas FDTD para las condiciones paraxiales B1 del campo de velocidad Vx (**U**) y para el campo Vz (**V**) implementadas en los códigos FORTRAN.

Para la frontera superior  $j=1$ , mientras que  $i$  es variable

$$U_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta \Delta t}{\beta \Delta t + b \Delta x} \left( U_{i,2}^{k+\frac{1}{2}} + U_{i,2}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{b \Delta x}{\beta \Delta t + b \Delta x} \left( U_{i,2}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,2}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 20a})$$

$$V_{i,1}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{\alpha \Delta t + b \Delta x} \left( V_{i,2}^{k+\frac{1}{2}} + V_{i,2}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i,1}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{b \Delta x}{\alpha \Delta t + b \Delta x} \left( V_{i,2}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i,2}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i,1}^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 20b})$$

Para la frontera izquierda  $i=1$ , mientras que  $j$  es variable

$$U_{1,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{\alpha \Delta t + b\Delta x} \left( U_{2,j}^{k+\frac{1}{2}} + U_{2,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{b\Delta x}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( U_{2,j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{2,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 21a})$$

$$V_{1,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta \Delta t}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( V_{2,j}^{k+\frac{1}{2}} + V_{2,j}^{k-\frac{1}{2}} - V_{1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) - \frac{b\Delta x}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( V_{2,j}^{k+\frac{1}{2}} - V_{2,j}^{k-\frac{1}{2}} - V_{1,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 21b})$$

Para la frontera derecha  $i=nx$ , mientras que  $j$  es variable

$$U_{nx,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{\alpha \Delta t + b\Delta x} \left( U_{nx-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + U_{nx-1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{nx,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{b\Delta x}{\alpha \Delta t + b\Delta x} \left( U_{nx,j}^{k-\frac{1}{2}} + U_{nx-1,j}^{k-\frac{1}{2}} - U_{nx-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 22a})$$

$$V_{nx,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta \Delta t}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( V_{nx-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + V_{nx-1,j}^{k-\frac{1}{2}} - V_{nx,j}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{b\Delta x}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( V_{nx,j}^{k-\frac{1}{2}} + V_{nx-1,j}^{k-\frac{1}{2}} - V_{nx-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 22b})$$

Para la frontera inferior  $j=nz$ , mientras que  $i$  es variable

$$U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\beta \Delta t}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( U_{i,nz-1}^{k+\frac{1}{2}} + U_{i,nz-1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,nz}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{b\Delta x}{\beta \Delta t + b\Delta x} \left( U_{i,nz}^{k-\frac{1}{2}} + U_{i,nz-1}^{k-\frac{1}{2}} - U_{i,nz-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 23a})$$

$$V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \Delta t}{\alpha \Delta t + b\Delta x} \left( V_{i,nz-1}^{k+\frac{1}{2}} + V_{i,nz-1}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i,nz}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{b\Delta x}{\alpha \Delta t + b\Delta x} \left( V_{i,nz}^{k-\frac{1}{2}} + V_{i,nz-1}^{k-\frac{1}{2}} - V_{i,nz-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{Ec. 23b})$$

Nótese que las velocidades se calculan en intervalo de tiempo intermedio.

Donde:  $dt$  y  $dx$  corresponden a  $\Delta t$  y  $\Delta x$  respectivamente.

#### **6.3.2.4 Fronteras absorbentes tipo estrato con atenuación forzada**

Otra manera de atenuar las ondas reflejadas es usando una faja del modelo cercana a las fronteras como zona de disipación (Cerjan & Dan, 1985). Esta zona debe quedar por fuera del dominio en estudio ya que el procedimiento incorpora pesos artificiales de atenuación,  $G$ , menores a uno, a los campos físicos evaluados (en este caso velocidad y esfuerzo). Esta expresión  $G$  se aplica al valor calculado del campo según expresiones discretas DFTD.

El peso ficticio implementado a los puntos de la faja del modelo tiene la siguiente forma:

$$G_{i,j} = e^{-[\theta(n\xi-\xi)]^2} \quad (\text{Ec. 24})$$

Donde:

θ Es un factor de atenuación.

$n_\xi$  Es el número de nodos de la franja de atenuación, en el artículo se recomienda usar 25 nodos. Depende de la localización de la franja. Cuando está en zona final de nodos en dirección x, debe ser igual a  $(n_\xi - \xi)$  cuando  $n_\xi$  es el número máximo de nodos en la dirección x

$\xi$  Es el contador de la matriz:  $i$  ó  $j$

Por ejemplo las expresiones para atenuar la onda en la frontera izquierda para un modelo con número de nodos en dirección x igual a 400 en una franja de 25 nodos (del 1 al 25 en dirección x), con un factor de atenuación igual a 0.012 son las siguientes:

$$U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012(25-i)]^2} * U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012(25-i)]^2} * V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

Expresión para atenuar la onda en la frontera derecha

$$U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012(nx-25)]^2} * U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012(nx-25)]^2} * V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

Expresión para atenuar la onda en la frontera inferior

$$U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012(nz-25)]^2} * U_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}} = e^{-[0.012((nz-25)-j)]^2} * V_{i,nz}^{k+\frac{1}{2}}$$

Es esta tesis se usarán las fronteras absorbentes tipo estrato con atenuación forzada.

## 7 Modelo Numérico

Hasta ahora se ha explicado el marco teórico, la definición de las DFTD y la discretización de las ecuaciones visco-elastodinámicas a partir de operadores de DFTD para obtener las ecuaciones diferenciales discretizadas del modelo de Virieux.

El propósito de esta tesis fue investigar el comportamiento de un dominio geotécnico bicapa (dos estratos de suelo), a partir de un modelo elástico lineal, el cual superficialmente fue sometido a una faja de carga dinámica de ancho finito y longitud infinita. Para este fin se definió un modelo numérico con cuyo dominio espacial y temporal se ha representado los estratos de suelo en un espacio semi-infinito y una historia de carga.

La **Figura 22** esquematiza el dominio de suelo del modelo numérico. Este modelo se discretizó usando el esquema de malla intercalada para diferencias finitas que es mostrado en la **Figura 20**.

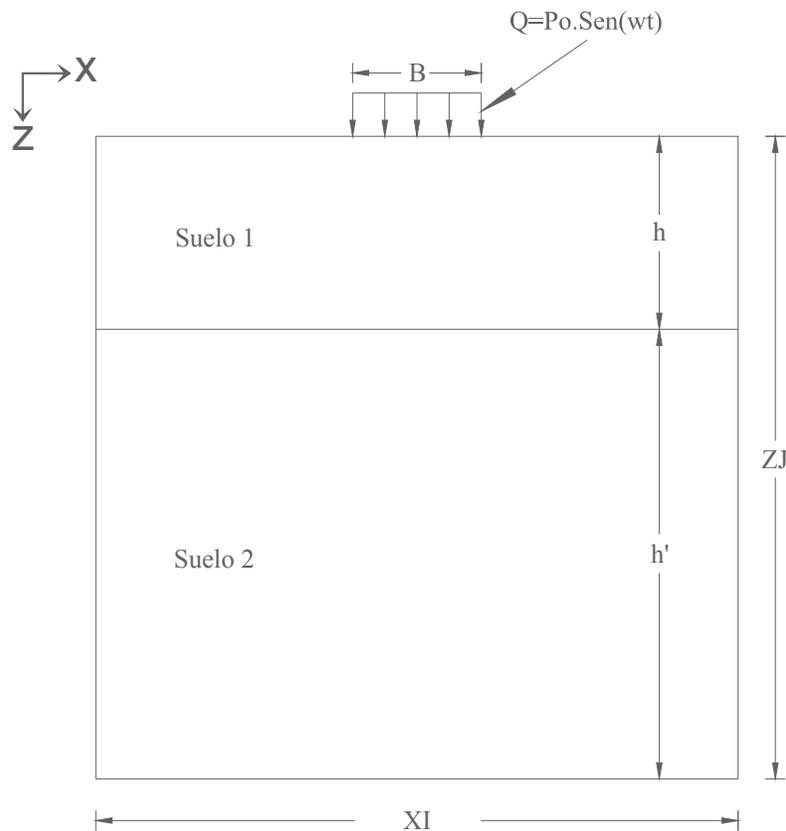


Figura 22 Esquema que ilustra el modelo numérico (Fuente: El autor)

**Nota:** ancho de la carga uniformemente distribuida, comúnmente denominado B.

### 7.1 Dominio Espacial

Para las simulaciones se consideró una dimensión del modelo geotécnico  $L=10B$  y  $H=7B$ , es decir el modelo tiene cinco anchos hacia la izquierda y hacia la derecha y siete anchos

en profundidad (por condiciones de sensibilidad del modelo numérico que serán explicados en este capítulo), medidos desde el extremo correspondiente de la faja de carga de ancho,  $B$ , variable. Considerando las condiciones de frontera absorbentes, estas dimensiones se consideran suficientes para lidiar con los bordes rígidos, que son los nodos extremos en los cuales los desplazamientos son iguales a cero.

## 7.2 Materiales

En la Tabla 6 se presenta un resumen de los parámetros de suelo usados dentro de los modelos numéricos para comportamiento elástica lineal de suelo bicapa, los cuales fueron asumidos por el autor para sus cálculos tratando de cubrir un amplio rango de suelos, yendo desde suelos poco rígidos a bastante rígidos.

Tabla 6 Definición de materiales (Fuente: El autor)

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu$	E (kN/m <sup>2</sup> )
SUELO 1	2.000	0.37	22.500
SUELO 2	1.800	0.37	6.500

Con estos parámetros se cumplió el objeto de esta investigación, el cual fue encontrar la distribución de esfuerzos y desplazamientos dentro de un dominio bidimensional bicapa, no homogéneo, semi-infinito y elástico, cuando es sometido a cargas verticales sinusoidales producidas por una máquina vibratoria y aplicada en la superficie.

Es evidente que el módulo de Poisson para rangos entre 0.2 y 0.4 genera efectos muy pequeños en entre los valores de asentamientos calculados (usando el rango extremo de 0 a 0.5 produce una máxima diferencia de 25%)<sup>10</sup>, por ello para efectos de las modelaciones en esta tesis se va a usar un módulo de Poisson de 0.37 en todos los casos.

Los módulos de elasticidad usados, que van desde 6500 hasta 22500 kN/m<sup>2</sup> corresponde a arcillas de consistencia blanda a media o también a arena limosa o arena limpia suelta<sup>11</sup>.

## 7.3 Historia de Carga

Como en las simulaciones dinámicas es común no usar la aceleración de la gravedad, a cambio del peso del cimiento se ha aplicado una carga externa. De esta manera la siguiente figura presenta la carga aplicada como un esfuerzo de contacto, de ancho  $B$ , en el centro del modelo.

Esta historia de carga tiene tres partes (ver Figura 23):

<sup>10</sup> Joseph Bowles , Foundation Analysis and Design, 5thed, pág. 313

<sup>11</sup> Joseph Bowles , Foundation Analysis and Design, 5thed, pág. 125

- 1 Carga Pseudo-Estática: esta etapa consta de un proceso de carga monotónico a velocidad constante. Simula la lenta inclusión del peso muerto total del sistema (equipo vibratorio y cimiento). Duración 0.3 segundos.
- 2 Vibración Transitoria: después de aplicada gradualmente la carga muerta del sistema, hasta llegar a una presión de contacto estática, definida según cada caso, se aplicará una carga vibratoria de frecuencia constante pero de magnitud variable desde cero hasta el valor máximo deseado, lo que representa el período transitorio de vibración. Este proceso de generar la vibración se hace de esta manera para evitar inestabilidades numéricas. Duración 0.3 segundos.
- 3 Vibración Estable: Al final del proceso de carga transitoria, la carga aplicada sobre el modelo llega a las características deseadas, es el estado estable de vibración. Durante este estado se presentan los movimientos del terreno que son de interés para la presente investigación. La magnitud de la carga vibratoria se mantiene constante durante 0.4 segundos hasta el final del ciclo de carga.
- 4 Simulación estática: Para el caso de la simulación estática, que se va a hacer como situación particular para algunas comprobaciones lo que se hace es aplicar el proceso de carga monotónico a velocidad constante durante 0.3 segundos para simular la inclusión del peso muerto y luego durante 0.7 segundo se aplica la carga muerta del sistema sin ningún tipo de vibración para lograr obtener el estado de esfuerzos del terreno en condición estática.

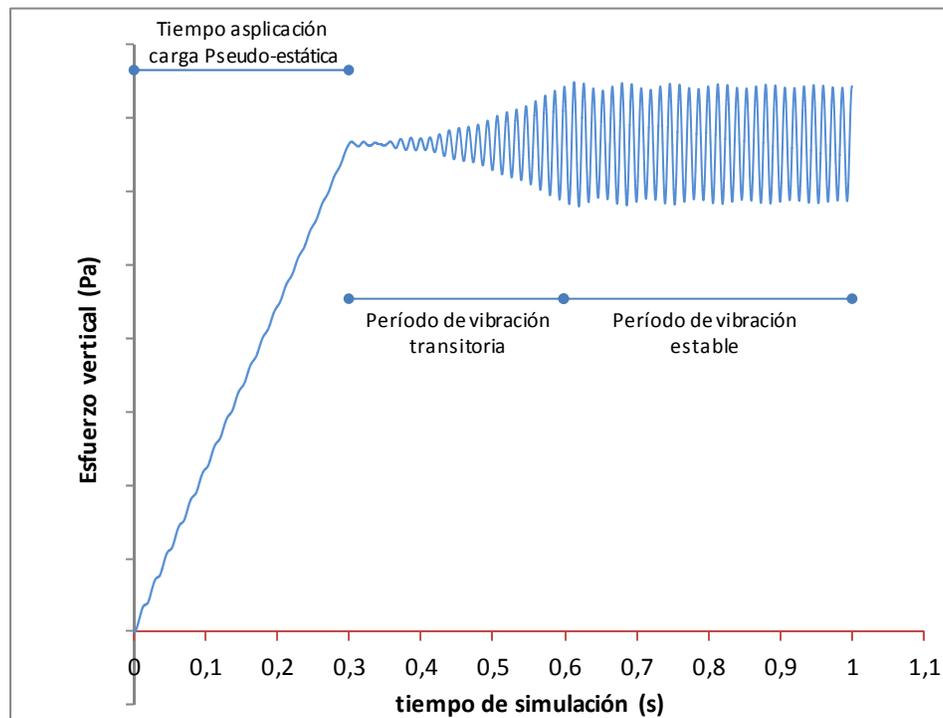


Figura 23 Historia de carga (Fuente: El autor)

#### 7.4 Sensibilidad de la Geometría del Dominio de Suelo

Antes de involucrarse directamente en las modelaciones numéricas fue necesario la revisión de la sensibilidad del modelo numérico a las variaciones del dominio de suelo, para ello se realizaron varias modelaciones con diferentes geometrías del dominio de suelo y se compararon contra las gráficas de bulbos de presiones publicados en los textos académicos de difundida aceptación en la comunidad geotécnica. En la tabla 7 se muestran los resultados de las modelaciones.

Tabla 7 Profundidad de disipación de esfuerzos versus geometría del dominio de suelo  
(Fuente: El autor)

Ancho del dominio, L (m)	Profundidad del dominio, H (m)	B (m)	Fr (Hz)	$\nu_1$	E1 (kN/m <sup>2</sup> )	Profundidad del 10% de esfuerzo
20	12	2.0	800	0.37	22.500	5.18B
20	14	2.0	800	0.37	22.500	6.21B
20	16	2.0	800	0.37	22.500	7.07B

En las gráficas de bulbos de presiones publicadas en los textos académicos de difundida aceptación en la comunidad geotécnica se observa que a una profundidad aproximada de 6.26 veces el ancho de la faja de carga de longitud infinita se experimenta el 10% del esfuerzo transmitido en superficie, lo equivalente a decir que se ha disipado el 90% del esfuerzo transmitido en superficie, y en el modelo realizado por el autor empleando la ecuación expuesta en los textos de geotecnia<sup>12</sup> se determinó que a una profundidad aproximada de 6.21 veces el ancho de la faja de carga de longitud infinita se experimenta el 10% del esfuerzo transmitido en superficie.

De acuerdo con los resultados se determinó que la geometría adecuada a usar en el modelo numérico sería un ancho de  $10B$  y una profundidad de  $7B$ .

#### 7.5 Sensibilidad del Modelo Ante Variación de Incrementos del Dominio de Suelo (tamaño de enmallado) y del Dominio del Tiempo.

En los modelos de análisis numérico la precisión de los resultados depende de la cantidad de particiones en que se divide el modelo (tamaño del enmallado), lo que se traduce en mayor o menor tamaño de los incrementos espaciales o temporales, es decir entre más pequeñas son las grillas en que se divide el modelo mayor es la precisión en los resultados obtenidos y en los casos donde se trata de un dominio del tiempo ocurre lo mismo, entre más pequeñas son las particiones del tiempo mayor es la precisión.

---

<sup>12</sup> Braja M. Das, "Principles of Geotechnical Engineering", Cap. 10.

La desventaja que presenta un modelo con intervalos de incrementos muy finos es que se multiplica el número de iteraciones que deben realizarse, con la consecuencia de requerir mayor tiempo de proceso los equipos de cómputo.

Sabiendo que el tamaño de la grilla (tamaño del enmallado), para este problema de propagación de ondas, es de importancia en cuanto a que de él depende el tamaño del error de la solución, en este trabajo se revisó la razón de discretización, que corresponde a la relación entre la longitud de onda a introducir,  $\lambda$ , y el tamaño de la grilla,  $\Delta x$  ó  $\Delta z$  ( $\lambda/\Delta x$ ). El criterio usado fue restringir la razón de discretización a valores mayores o iguales que 8 (es decir  $\Delta x \leq 1/8\lambda$ ) para tener un error aceptable (menor que 10%)<sup>13</sup>.

El tiempo,  $t$ , de modelación escogido en esta tesis fue 1 segundo y en principio se partió dividiendo el dominio del tiempo en incrementos,  $dt$ , iguales a 0.000001 para un total de iteraciones en el tiempo,  $nt$ , de 1'000.000, para lo que el ordenador disponible requirió de cuatro a cinco horas para correr cada modelo, por ello fue necesario hacer un análisis de sensibilidad para verificar la precisión con la variación del número de iteraciones. La tabla 8 muestra la sensibilidad del modelo a la variación en número de iteraciones en el tiempo.

Tabla 8 Sensibilidad del modelo a la variación del número de iteraciones (Fuente: El Autor)

<b>dt (s)</b>	<b>nt</b>	<b>B (m)</b>	<b>Fr (Hz)</b>	$\nu_1$	<b>E1 (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Z 0,1<math>\sigma_c</math></b>	<b>Asentamiento (cm)</b>
1x10 <sup>-6</sup>	1x10 <sup>6</sup>	2.0	50	0.37	22.500	6.08B	2.01
5x10 <sup>-6</sup>	2x10 <sup>5</sup>	2.0	50	0.37	22.500	6.23B	2.07
1x10 <sup>-5</sup>	1x10 <sup>5</sup>	2.0	50	0.37	22.500	6.28B	2.17

Se observó que la diferencia en el valor de asentamiento utilizando 1'000.000 de iteraciones en el tiempo comparado con tan solo 200.000 iteraciones o 100.000 iteraciones es de 9 y 3 mm respectivamente (4.4 y 1.5%). La profundidad de disipación de esfuerzos varió entre 6.08B y 6.28B para 100.000 y 1'000.000 de iteraciones respectivamente, siendo de 6.23B para 200.000 iteraciones. Por ello, teniendo en cuenta la diferencia relativamente baja, se decidió calcular los modelos con solo 100.000 iteraciones, que requieren de 25 a 30 minutos de proceso en el equipo de cómputo.

Con respecto a la diferencia entre dividir el dominio geotécnico en incrementos,  $dx$ , iguales a 0.1 para un total de iteraciones en el tiempo,  $nx$ , de 200, que requirió de 25 a 30 minutos del equipo de cómputo, a usar incrementos,  $dx$ , iguales a 0.05 para un total de iteraciones en el tiempo,  $nx$ , de 400, que requirió más de 4 horas del equipo de cómputo, se obtuvo que la diferencia de asentamientos calculados fue tan solo del 2%, entonces se optó por usar solo particiones,  $dx$ , para 200 iteraciones; pero es importante tener en cuenta que  $\Delta x$

<sup>13</sup> Medina, Francisco. Reyes, Alexander, "Precisión en la Discretización de Problemas Unidimensionales de Propagación de Ondas"

y  $\Delta z$  sean menores o iguales que  $1/8\lambda$  para poder garantizar un error aceptable (menor que 10%).

## 7.6 Validación del Modelo Numérico

Como primera medida, es preciso comprobar la validez y sensibilidad del modelo numérico propuesto, escrito en código FORTRAN 90. Para este fin se ha seleccionado un modelo geotécnico de una sola capa y se ha procedido a hacer dos corridas del modelo, una en condición estática y otra en condición dinámica, para representar los resultados como bulbo de esfuerzos o líneas isobaras con ayuda de algún programa de dibujo asistido por computador. A partir de otro código escrito en lenguaje FORTRAN 90, de la solución de Boussinesq para esfuerzo vertical debido a una carga continua de ancho finito y longitud infinita<sup>14</sup> (faja de carga), se establece la validez del modelo y la similitud de sus resultados con los expuestos para bulbos de esfuerzos mostrados en la bibliografía geotécnica ampliamente reconocida. La **Figura 24** muestra el esquema del modelo geotécnico de faja de carga y a continuación la ecuación que representa los esfuerzos en la masa de suelo<sup>15</sup>.

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_v = \frac{q}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta)]$$

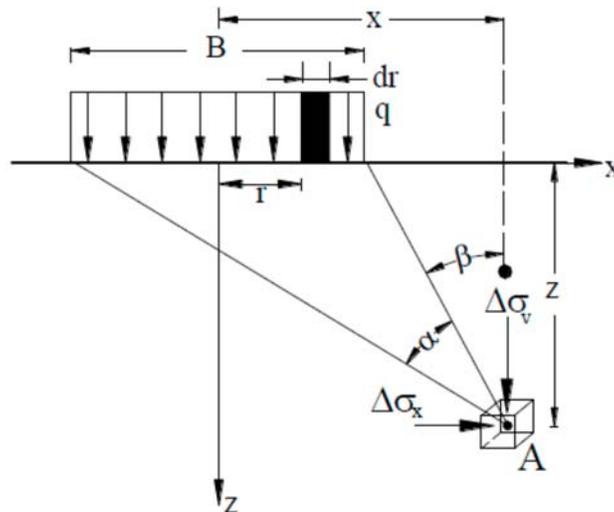


Figura 24 Incremento de esfuerzos debido una carga continua, definición de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  y demás parámetros del modelo (Fuente: Peter L Berry-David Reid, "Mecánica de Suelos". P. 69)

<sup>14</sup> Braja M. Das, "Principles of Geotechnical Engineering", Capítulo 10.

<sup>15</sup> Peter L Berry-David Reid, "Mecánica de Suelos", P. 61

Las presentes modelaciones se han realizado para relación de Poisson de 0.37, módulo de elasticidad de 22.500 kN/m<sup>2</sup>.

El código FORTRAN 90 del algoritmo de Virieux, seleccionando un incremento o ancho de particiones adecuado ( $dx$  y  $dy$ ) del suelo, arroja un archivo de texto con aproximadamente 28.000 nodos que representan esfuerzos en la masa de suelo y a partir de estos se ha dibujado las líneas isobaras que representan dichos esfuerzos. Las **figuras 25** y **26** muestran los bulbos de esfuerzos de los modelos estático y dinámico ejecutados y la **figura 27** muestra el bulbo de esfuerzos de la solución tradicional de Boussinesq, que es exactamente igual al mostrado en los textos académicos de geotecnia.

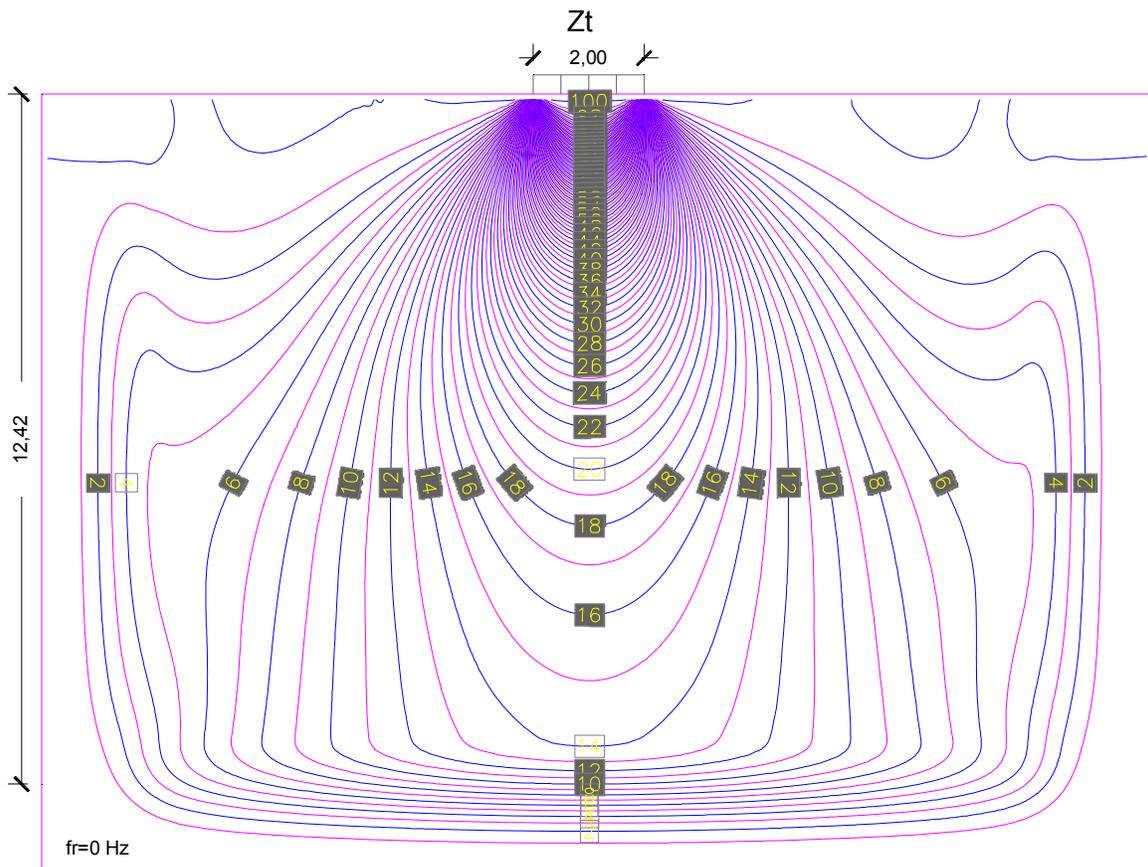


Figura 25 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita sin vibración – modelo Virieux (Fuente: el autor)

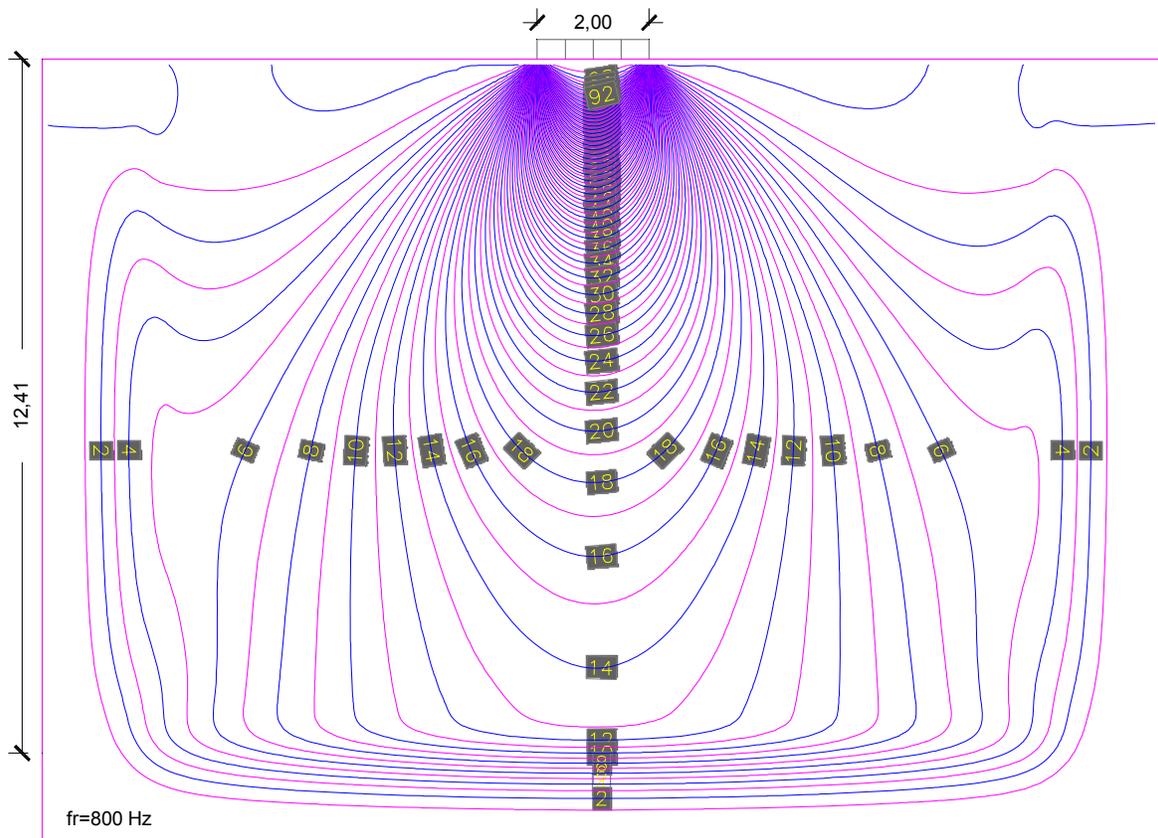


Figura 26 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita con vibración – modelo Virieux (Fuente: el autor)

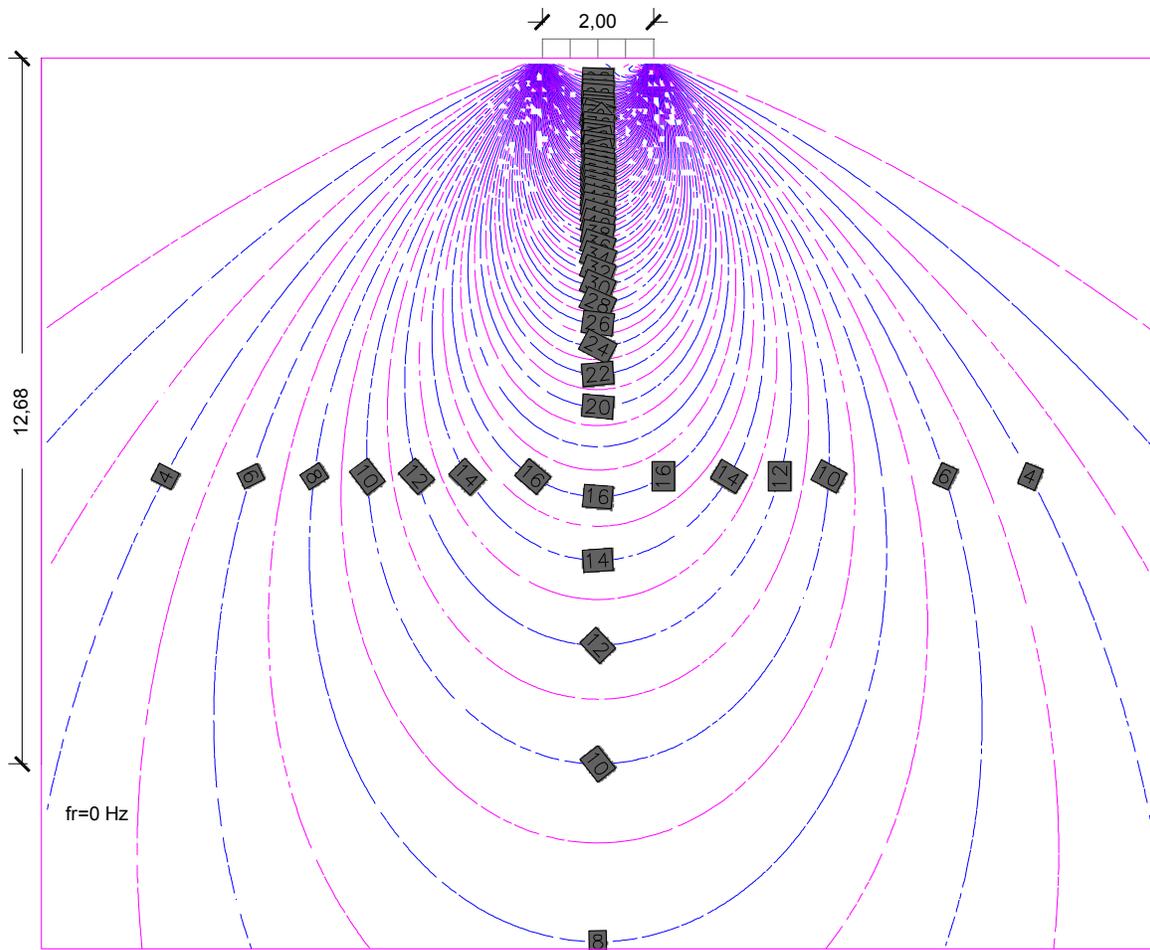


Figura 27 Bulbo de esfuerzos (isobaras) debido una carga continua infinita sin vibración – Solución de Boussinesq (Fuente: el autor)

Se puede observar en las figuras que a una profundidad de aproximadamente  $6,25B$  el esfuerzo en el suelo es 10% del esfuerzo transmitido en superficie y a una distancia horizontal de aproximadamente  $4,10B$  el esfuerzo en el suelo es 10% del esfuerzo transmitido en superficie.

Los valores de profundidad de disipación de esfuerzos obtenidos a partir de la solución de Boussinesq y el modelo de Virieux son aproximadamente iguales, con ello se verifica la validez del modelo propuesto en esta tesis.

Es preciso aclarar la razón por la que las gráficas obtenidas, que son parecidas a las de Boussinesq, están un poco achatadas hacia la frontera inferior y fronteras laterales. Lo anterior obedece a un problema de geometría del modelo, asociado con la ubicación de las condiciones de frontera utilizadas, lo que sucede es que al poner una frontera totalmente rígida en la parte inferior y en los laterales, a la distancia que se puso, genera dicho efecto en las gráficas. Para este inconveniente de fronteras se podría generar una tercera capa en la parte inferior y considerar un dominio de suelo infinito en el que solo interesen los resultados de las dos primeras capas. Lateralmente podría mejorarse poniendo las fronteras más alejadas para dar campo a una franja artificial, bien definida, de

amortiguamiento y que solo interesen los resultados localizados por dentro de dichas franjas. Estas alternativas no se consideran en esta tesis y para ellos se condicionó el dominio del suelo para hacer válido el modelo comparado con otras soluciones, lo cual se pudo lograr. Lo expuesto introduce limitaciones al modelo que pueden ser revisadas y ajustadas en otro trabajo de grado.

## 7.7 Sensibilidad del Modelo a la Variación en la Frecuencia de Vibración

A continuación se presentan los resultados del análisis de sensibilidad del modelo numérico con respecto a las variaciones de la frecuencia de vibración, versus los resultados sin vibración, para el modelo elástico lineal usado en esta tesis. Para esta validación se han realizados varias modelaciones con diferentes valores de frecuencia de vibración y sin vibración, para un solo estrato y también para dos estratos de suelo. La tabla 9 muestra la variación en la profundidad de disipación de esfuerzos para varios valores de frecuencia de vibración y sin vibración, para dos estratos de suelo. También se muestran resultados para el caso de un solo estrato de suelo.

Tabla 9 Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos para distintas frecuencias de vibración (Fuente: El autor)

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	Fr (Hz)	$\nu_1, \nu_2$	$E_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	Z $0,1\sigma_c$
14.0	0.0	2.0	10	0.37	22.500	-	6.1B
14.0	0.0	2.0	30	0.37	22.500	-	6.1B
14.0	0.0	2.0	800	0.37	22.500	-	6.2B
6.0	8.0	2.0	10	0.37	22.500	6.500	3.7B
6.0	8.0	2.0	30	0.37	22.500	6.500	3.8B
6.0	8.0	2.0	800	0.37	22.500	6.500	3.8B
6.0	8.0	2.0	10	0.37	6.500	22.500	6.2B
6.0	8.0	2.0	30	0.37	6.500	22.500	6.2B
6.0	8.0	2.0	800	0.37	6.500	22.500	6.2B
0.0	14.0	2.0	10	0.37	-	6.500	6.1B
0.0	14.0	2.0	800	0.37	-	6.500	6.1B
14.0	0.0	2.0	0	0.37	22.500	-	6.1B
0.0	14.0	2.0	0	0.37	-	6.500	6.2B

Se ha realizado cálculo de esfuerzos para modelos de una sola capa, casos de suelo blando y suelo duro, y también para dos capas de suelo, caso de suelo blando sobre suelo duro y viceversa, con variaciones de frecuencias desde 10 hasta 800 Hz. Los resultados obtenidos muestran que en el modelo elástico lineal usado en esta tesis, la variación en la frecuencia de vibración del sistema no refleja cambios significativos en el estado de esfuerzos y por consiguiente en el estado de deformaciones que experimenta el suelo.

Al realizar cálculos de disipación de esfuerzos para modelos de una sola capa se puede apreciar que la disipación de esfuerzos es similar para un único estrato de suelos blando que para el mismo caso con suelo duro y el 10% del esfuerzo transmitido en superficie se experimenta a una profundidad de 6.2 veces el ancho, B, de la faja de carga.

Al analizar modelos bicapa de suelo duro sobre suelo blando y suelo blando sobre suelo duro, se observa que para el caso de un estrato de suelo duro sobre suelo blando, los esfuerzos tienden a disiparse gran proporción en el estrato superior y por consiguiente la profundidad de disipación del 90% de los esfuerzos ocurre a una profundidad menor; mientras que en el caso opuesto se observa una profundidad de disipación de los esfuerzos similar que el caso de un solo estrato de suelo.

La profundidad de disipación de esfuerzos es casi igual para el caso de un solo estrato de suelo sin vibración que con vibración y lo mismo ocurre en el caso de suelos bicapa.

## 7.8 Comparación del Modelo Numérico Propuesto Versus Modelos con Cimentación de Geometría Definida

Con el fin de hacer la comparación del modelo numérico para una faja de carga infinita, tratado en esta tesis, contra modelos de distribución de esfuerzos para áreas con geometría definida, como es el caso de áreas rectangulares uniformemente cargadas, se ha procedido con el cálculo de asentamientos partiendo de áreas cuadradas hasta áreas rectangulares con longitud igual a varias veces su ancho.

Los asentamientos son producto del cambio en el estado de esfuerzos en el suelo. Es posible definir de manera general los asentamientos como la acumulación de desplazamientos producidos en la masa de suelo, producto del cambio en el estado de esfuerzos, a partir de siguiente ecuación<sup>16</sup>:

$$\Delta H = \int_0^z \varepsilon_z dz = \int_0^z \frac{\Delta q_z}{E_{m_z}} dz$$

Con:

$$E_m = \frac{1}{m_v} = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

La expresión  $\Delta q_z$  debe ser sustituida por una función que represente la variación del incremento de esfuerzo vertical respecto a la profundidad. Boussinesq (1885) obtuvo dicha función a partir de la teoría de la elasticidad, para una carga puntual vertical, en la superficie de un medio semi-infinito, homogéneo, isótropo y linealmente elástico. Soluciones similares fueron presentadas por Westergaard (1938) para medios con deformación lateral restringida y por Steinbrenner (1934) para medios anisotrópicos.

---

<sup>16</sup> Joseph Bowles , Foundation Analysis and Design, 5th ed, pág. 285

En esta tesis se va a emplear las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner para el cálculo de asentamientos.

La ecuación de Boussinesq para el cálculo de esfuerzos de una faja de carga infinita se citó en el numeral 6.6.

El asentamiento elástico vertical de una cimentación superficial se puede estimar utilizando la teoría de la elasticidad, por ley de Hooke, con la siguiente expresión<sup>17</sup>:

$$\delta_e = \int_0^z \varepsilon_z dz = \int_0^z \frac{1}{E_s} (\Delta\sigma_z - \nu_s \Delta\sigma_x - \nu_s \Delta\sigma_y)_z dz$$

Donde:

Q: carga uniformemente distribuida

E<sub>s</sub>: Módulo de elasticidad

ν<sub>s</sub>: Relación de Poisson

Δσ<sub>x</sub>, Δσ<sub>y</sub>, Δσ<sub>z</sub>: incremento del esfuerzo debido a la carga neta aplicada sobre la cimentación en las direcciones x, y e z, respectivamente

A partir de la distribución de esfuerzos, la deformación elástica debajo de un área rectangular se calcula con la siguiente expresión:

$$\delta_e = \int_0^z \frac{Q}{2E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} I_c$$

Donde:

Q: carga uniformemente distribuida

E: Módulo de elasticidad

ν: Relación de Poisson

I<sub>c</sub>: Factor de influencia de esfuerzos que varía con la profundidad

El factor de influencia de esfuerzos, I<sub>c</sub>, es calculado a partir de la teoría de Boussinesq.

I<sub>c</sub> se obtiene con la siguiente expresión:

---

<sup>17</sup> Braja M. Das, "Principles of Geotechnical Engineering", Cap. 5.

$$I_c = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1} \times \frac{m^2 + n^2 + 2}{m^2 + n^2 + 1} + \tan^{-1} \left( \frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2} \right) \right]$$

Donde:

$$m = B/z = x/z$$

$$n = L/z = y/z$$

B y L: Ancho y largo de la cimentación respectivamente

Z: Profundidad del punto analizado

La ecuación de Steinbrenner (1934)<sup>18</sup> para el cálculo de asentamientos en un punto debajo de una esquina de un área rectangular cargada es la siguiente:

$$\delta_e = \int_0^z \frac{QB}{E} (1 - \nu^2) I_p$$

Donde:

Q: carga uniformemente distribuida

B: Ancho del cimiento.

E: Módulo de elasticidad

$\nu$ : Relación de Poisson

$$I_p = \left( F_1 + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} F_2 \right)$$

$F_1$  y  $F_2$ : Factores de influencia de esfuerzos que varían con la profundidad y se obtienen con las siguientes expresiones:

$$F_1 = \frac{1}{\pi} \left[ m \cdot \ln \frac{(1 + \sqrt{m^2 + 1})\sqrt{m^2 + n^2}}{m(1 + \sqrt{m^2 + n^2 + 1})} + \ln \frac{(m + \sqrt{m^2 + 1})\sqrt{n^2 + 1}}{m + \sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \right]$$

$$F_2 = \frac{n}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{m}{n\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \right)$$

---

<sup>18</sup> Joseph Bowles , Foundation Analysis and Design, 5th ed, pág. 303

Donde:

$$m=Z/B, n=L/B$$

B y L: Ancho y largo de la cimentación respectivamente

Z: Profundidad del punto analizado

En la solución de Steinbrenner, debido a que la profundidad (Z) del punto analizado es medida desde la superficie, entonces para suelo estratificado es necesario aplicar la siguiente expresión para obtener  $I_p$  en el punto medio de cualquier estrato  $i$ , luego del primer estrato.

$$I_{p(i=n)} = \left( F_{1(n)} + \frac{1 - 2\nu(n)}{1 - \nu(n)} F_{2(n)} \right) - \left( F_{1(n-1)} + \frac{1 - 2\nu(n)}{1 - \nu(n)} F_{2(n-1)} \right)$$

### 7.8.1 Variación de asentamientos versus longitud del área cargada

La tabla 10 muestra los resultados de asentamientos bajo un área rectangular cargada para distintas longitudes de la superficie rectangular cargada y un solo estrato de suelo. Los valores de módulos de Poisson y elasticidad empleados en los cálculos son 0.37 y 650 t/m<sup>2</sup> respectivamente.

Tabla 10 Variación en la profundidad de disipación de esfuerzos y asentamientos para distintas longitudes del área cargada (Fuente: El autor).

Q (t/m <sup>2</sup> )	B (m)	L (m)	*δ (cm)	**δ (cm)	δ(área rectangular)/ δ(área cuadrada) Boussinesq	δ(área rectangular)/ δ(área cuadrada) Steinbrenner	Z 0,1σ <sub>c</sub>
14.0	2.0	1.0B	3.98	3.87			2.05B
14.0	2.0	5.0B	6.68	6.36	1.68	1.64	4.34B
14.0	2.0	10.0B	7.29	6.78	1.83	1.75	5.43B
14.0	2.0	15.0B	7.45	6.83	1.87	1.76	5.94B
14.0	2.0	20.0B	7.50	6.81	1.88	1.76	6.15B
14.0	2.0	25.0B	7.51	6.79	1.89	1.75	6.28B
14.0	2.0	30.0B	7.52	6.78	1.89	1.75	6.28B
14.0	2.0	35.0B	7.53	6.76	1.89	1.75	6.28B
14.0	2.0	40.0B	7.53	6.76	1.89	1.75	6.28B

\* Asentamiento elástico a partir de solución de Boussinesq  
 \*\* Asentamiento elástico a partir de solución de Steinbrenner

Al revisar cómo influye la longitud de un área uniformemente cargada como proporción de su ancho, se observa que a partir de una longitud del área cargada igual a 25 veces su ancho, la profundidad a la que se disipa el 90% del esfuerzo de contacto aplicado en superficie se hace constante, tendiendo este valor a 6.28 veces el ancho de la cimentación, lo que es aproximadamente igual a la profundidad a la que ocurre la misma situación en un cimiento de longitud infinita, analizado a partir del modelo tratada en esta tesis. De la misma manera el asentamiento tiende a hacerse constante.

El valor de asentamiento calculado a partir de la solución de Boussinesq para un área rectangular uniformemente cargada que tiende a infinito equivale aproximadamente a 1,9 veces el valor obtenido para un cimiento cuadrado que tiene el mismo ancho.

El valor de asentamiento calculado a partir de la solución de Steinbrenner para un área rectangular uniformemente cargada que tiende a infinito equivale aproximadamente a 1,8 veces el valor obtenido para un cimiento cuadrado que tiene el mismo ancho.

La figura 28 muestra la variación en la profundidad de disipación del 90% del esfuerzo impuesto en superficie en función de la relación Largo/Ancho del área cargada.

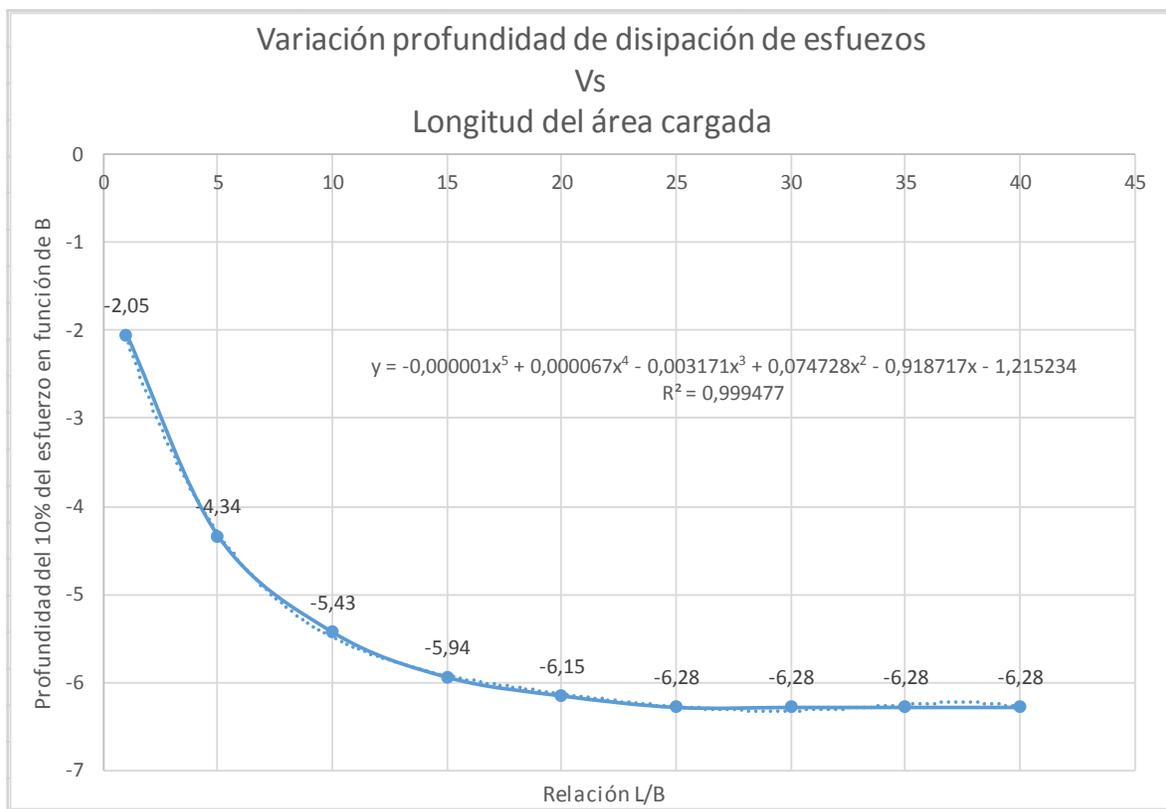


Figura 28 Variación de profundidad de disipación del 90% del esfuerzo impuesto en superficie versus relación L/B del área cargada (Fuente: el autor)

## 7.8.2 Variación de asentamientos versus longitud del área cargada sin vibración y con vibración

A continuación en la Tabla 11 se consignan los resultados de cálculo de asentamientos para un área rectangular cargada que tiende a infinito ( $L=30B$ ) y sin vibración. En la Tabla 12 se muestran los resultados de asentamiento para una faja infinita de carga y con vibración por el método de Virieux.

Tabla 11 Asentamiento y disipación de esfuerzos de un área cargada que tiende a infinita sin vibración, por solución de Boussinesq y Steinbrenner para una capa y bicapa (Fuente: El autor).

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	L (m)	$\nu_1, \nu_2$	$E_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	* $\delta$ (cm)	** $\delta$ (cm)	Z $0,1\sigma_c$
0.0	14.0	2.0	30.0B	0.37	-	6.500	7.52	6.78	6.28B
2.0	12.0	2.0	30.0B	0.37	22.500	6.500	5.45	5.23	6.28B
3.0	11.0	2.0	30.0B	0.37	22.500	6.500	4.82	4.62	6.28B
4.0	10.0	2.0	30.0B	0.37	22.500	6.500	4.25	4.05	6.28B
8.0	6.0	2.0	30.0B	0.37	22.500	6.500	3.13	2.93	6.28B
14.0	0.0	2.0	30.0B	0.37	22.500	-	2.17	1.96	6.28B

\* Asentamiento elástico a partir de solución de Boussinesq  
 \*\* Asentamiento elástico a partir de solución de Steinbrenner

Tabla 12 Asentamientos y disipación de esfuerzos con vibración por modelo de Virieux para una sola capa y bicapa (Fuente: El autor).

Estrato superior, h (m)	Estrato inferior, h' (m)	B (m)	Fr (Hz)	$\nu_1, \nu_2$	$E_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	$E_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\delta$ (cm)	Z $0,1\sigma_c$
0.0	14.0	2.0	800	0.37	-	6.500	8.89	6.2B
2.0	12.0	2.0	800	0.37	22.500	6.500	5.43	6.2B
3.0	11.0	2.0	800	0.37	22.500	6.500	4.20	6.15B
4.0	10.0	2.0	800	0.37	22.500	6.500	3.29	6.10B
8.0	6.0	2.0	800	0.37	22.500	6.500	2.50	4.5B
14.0	0.0	2.0	800	0.37	22.500	-	2.22	6.2B

Al comparar los resultados, se observa que el asentamiento elástico obtenido por la solución de Virieux para estrato de suelo blando tiende a ser 15.4% y 23.7% mayor a los obtenidos a partir de las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner respectivamente.

Al comparar los resultados se observa que el asentamiento elástico obtenido por la solución de Virieux para estrato de suelo rígido tiende a ser 2.3% y 11.7% mayor a los obtenidos a partir de las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner respectivamente.

La solución de Virieux para suelos no homogéneos (dos estratos), cuando el estrato rígido está arriba, arroja resultados de asentamiento elástico que tienden a ser menores, esto se

debe a que los esfuerzos tienden a disiparse en mayor proporción en el estrato rígido superior, que es el estrato que por su mayor rigidez se deforma menos.

Los resultados obtenidos entre las tres soluciones de cálculo se observan bastante consistentes entre sí.

### 7.9 Variación de la Deformación Versus Relación Entre Módulos de Elasticidad $E_1/E_2$

Debido a que uno de los objetos de esta tesis es el análisis de comportamiento del suelo sometido a cargas dinámicas para el caso de un dominio bicapa, a continuación se presentará en las **Figuras 29, 30 y 31** la forma como varía el asentamiento elástico del suelo bajo la acción de fajas de carga infinitas con valores de 50 kPa, 100 kPa y 200 kPa respectivamente, calculados para distintas relaciones entre módulos de elasticidad y diferentes relaciones h/B.

Las Tablas 13, 14 y 15 muestran los resultados que han sido graficados en las **Figuras 29, 30 y 31** respectivamente.

Tabla 13 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

		Q (N/m <sup>2</sup> )= 50.000			Q <sub>0</sub> (N/m <sup>2</sup> )= 1.000			fr (Hz)= 400		
parámetros del sauelo					h=1,0B	h=2,0B	h=3,0B	h=4,0B	h=5,0B	
					h=2,0	h=4,0	h=6,0	h=8,0	h=10,0	
$\gamma_{t1}, \gamma_{t2}$	$\nu_1, \nu_2$	$E_1$ (N/m <sup>2</sup> )	$E_2$ (N/m <sup>2</sup> )	$E_1/E_2$	$\delta_e$					
1.800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	1,06	0,97	0,9	0,85	0,81	
1.800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	1,13	1,07	1,04	1	0,98	
1.800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	1,25	1,24	1,23	1,23	1,23	
1.800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	1,44	1,5	1,5	1,46	1,43	
1.800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	1,76	1,91	1,89	1,89	2,13	
1.800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	2,75	3,15	3,96	5,24	5,01	
1.800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	4,64	6,35	8,83	6,35	5,98	

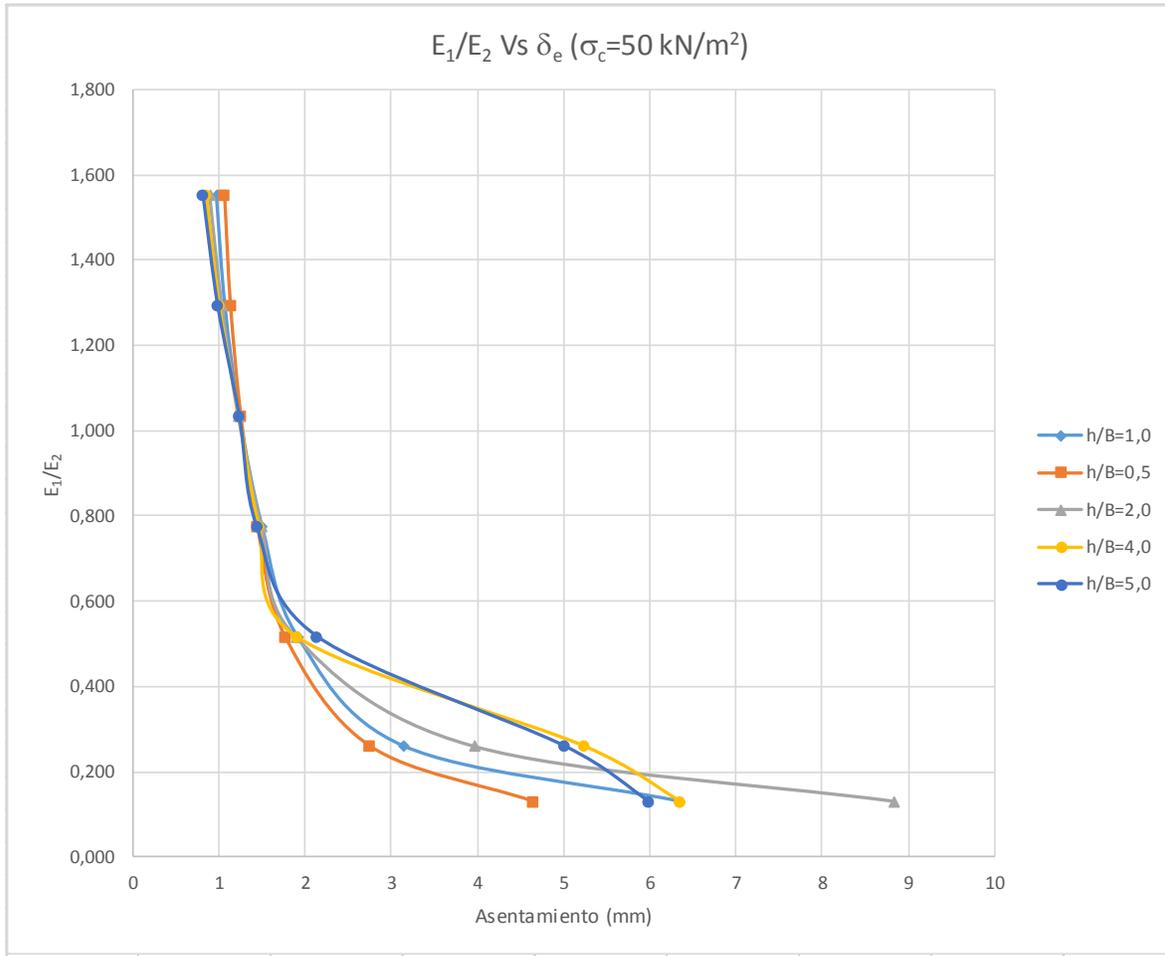


Figura 29 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

Tabla 14 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

		$Q \text{ (N/m}^2\text{)} = 100.000$			$Q_0 \text{ (N/m}^2\text{)} = 1.000$			$fr \text{ (Hz)} = 400$	
parámetros del sauelo					h=1,0B	h=2,0B	h=3,0B	h=4,0B	h=5,0B
$\gamma_{t1}, \gamma_{t2}$	$\nu_1, \nu_2$	$E_1$	$E_2$	$E_1/E_2$	h=2,0	h=4,0	h=6,0	h=8,0	h=10,0
					$\delta_e$				
1.800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	2,12	1,93	1,79	1,69	1,62
1.800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	2,27	2,15	2,08	2,01	1,96
1.800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	2,5	2,48	2,47	2,46	2,46
1.800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	2,88	3,01	3	2,93	2,85
1.800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	3,53	3,83	3,78	3,78	4,3
1.800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	5,49	6,31	7,92	10,48	10
1.800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	9,29	12,71	17,66	12,7	12

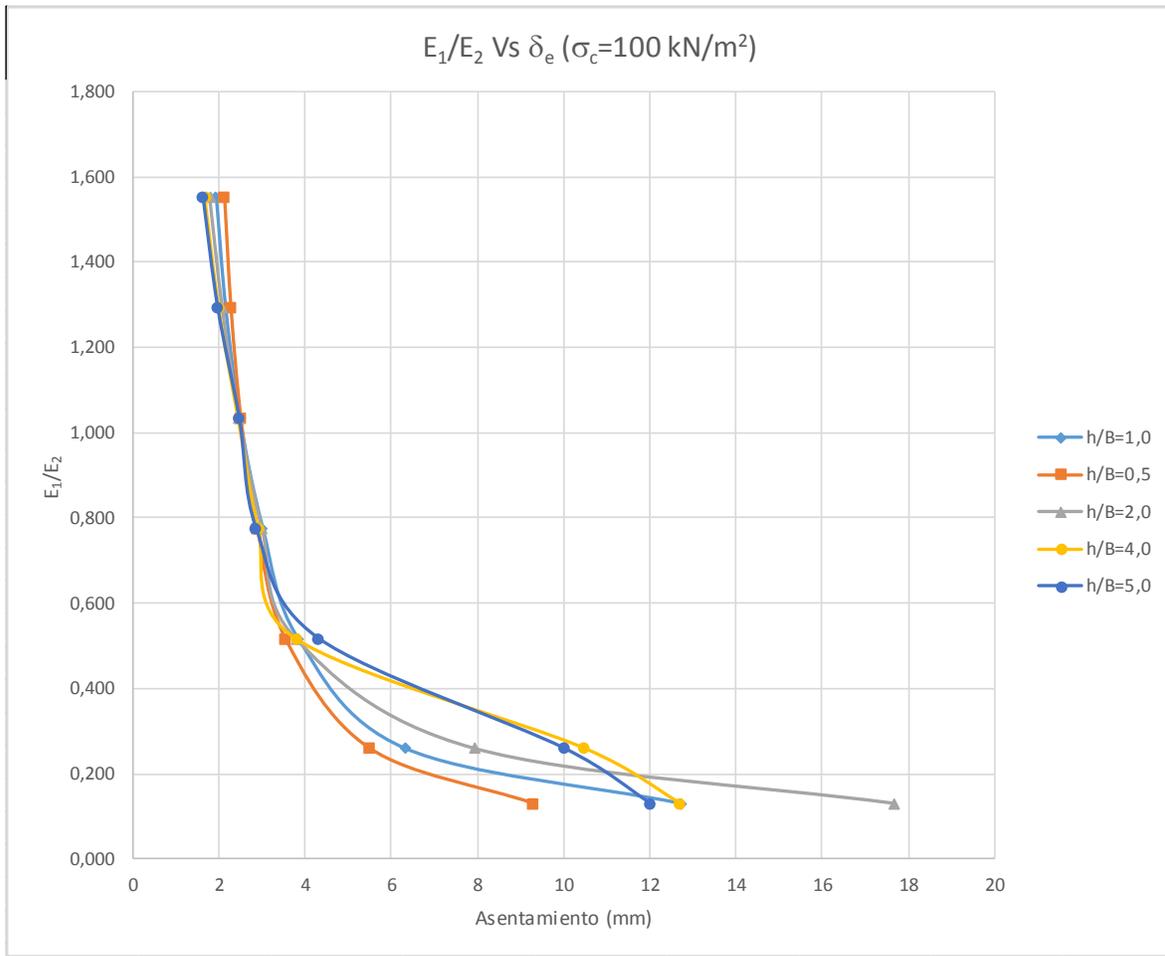


Figura 30 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

Tabla 15 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

		Q (N/m <sup>2</sup> )= 200.000			Q <sub>0</sub> (N/m <sup>2</sup> )= 1.000			fr (Hz)= 400		
parámetros del sauelo					h=1,0B	h=2,0B	h=3,0B	h=4,0B	h=5,0B	
γ <sub>t1</sub> , γ <sub>t2</sub>	υ <sub>1</sub> , υ <sub>2</sub>	E <sub>1</sub> (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>2</sub> (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>	h=2,0	h=4,0	h=6,0	h=8,0	h=10,0	
					δ <sub>e</sub> (cm)					
1.800	0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	4,23	3,87	3,58	3,38	3,25	
1.800	0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	4,53	4,29	4,15	4,02	3,92	
1.800	0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	5	4,96	4,94	4,92	4,91	
1.800	0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	5,75	6,01	6	5,86	5,7	
1.800	0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	7,06	7,66	7,58	7,57	8,54	
1.800	0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	10,98	12,61	15,84	20,97	20,04	
1.800	0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	18,57	25,44	35,3	25,4	23,93	

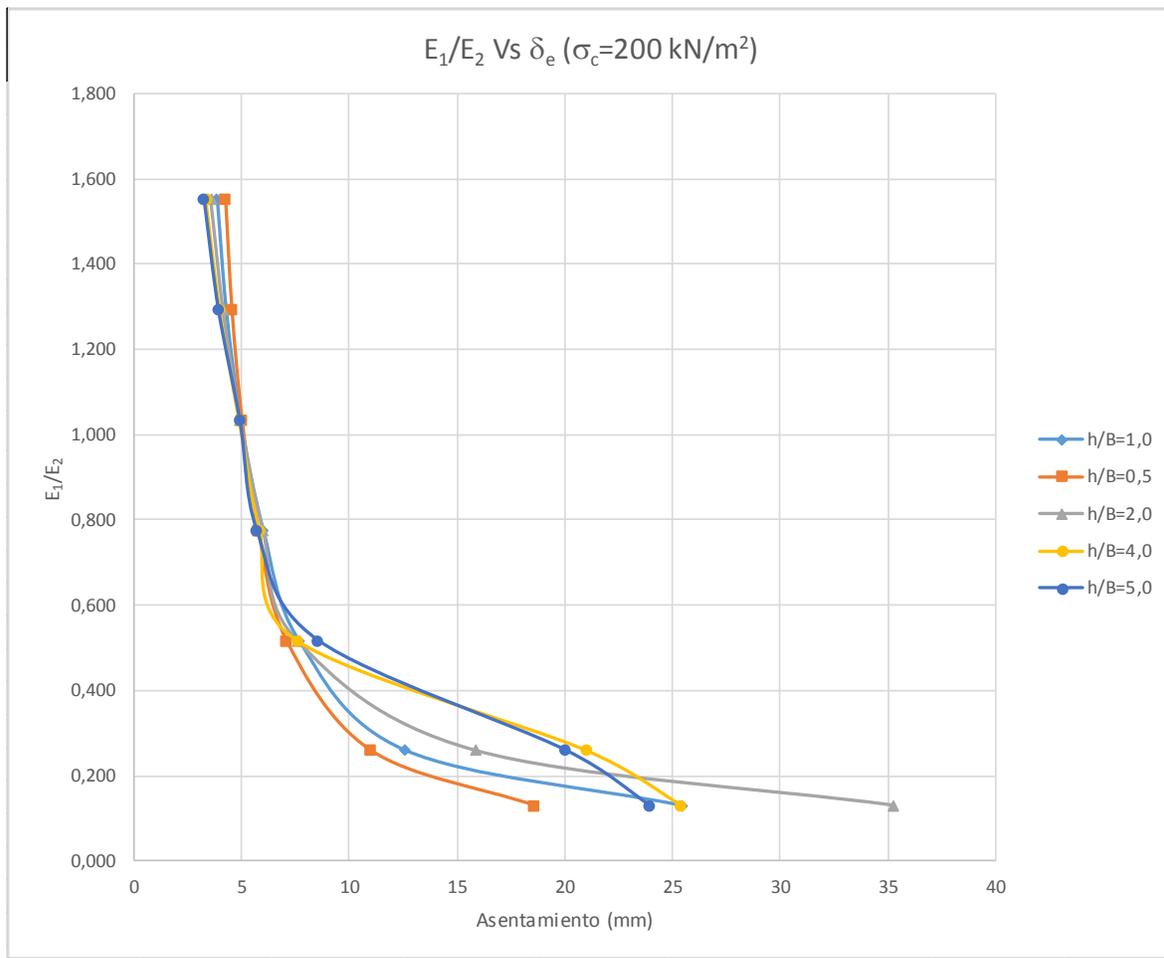


Figura 31 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

Se observa que la tendencia en los tres juegos de gráficas de asentamiento elástico es exactamente la misma, independientemente de los esfuerzos, para igual relación entre módulos de elasticidad y relación  $h/B$  y similar módulo de Poisson.

Se observa una particularidad en las gráficas, es que para espesores de estrato rígido superior muy grandes, con respecto al estrato blando inferior (cuatro y cinco veces el ancho del área cargada), la gráfica de asentamientos presenta una distorsión en los resultados y se aleja de su forma cóncava, que es la tendencia que se esperaría. Se revisó los mismos cálculos de asentamiento a partir de las soluciones de Boussinesq con el fin de poder analizar la situación y se obtuvo que es un problema de frontera, que se explica a continuación.

A continuación, en la Tabla 16, se muestra el resultado de asentamiento elástico para dos estratos, calculados para diferentes relaciones entre módulos de elasticidad y varias relaciones entre ancho de la zapata y espesor de los estratos, con el fin de hacer la comparación de resultados con los del modelo de Virieux, para un esfuerzo de contacto de 100 kPa.

Tabla 16 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Boussinesq y Steinbrenner (Fuente: el autor)

Q (N/m <sup>2</sup> )= 100.000				Q <sub>0</sub> (N/m <sup>2</sup> )= 0					fr (Hz)= 0					
parámetros del sauelo				h=1,0B h=2,0	h=2,0B h=4,0	h=3,0B h=6,0	h=4,0B h=8,0	h=5,0B h=10,0	h=1,0B h=2,0	h=2,0B h=4,0	h=3,0B h=6,0	h=4,0B h=8,0	h=5,0B h=10,0	
ν <sub>1</sub> , ν <sub>2</sub>	E <sub>1</sub> (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>2</sub> (N/m <sup>2</sup> )	E <sub>1</sub> /E <sub>2</sub>	δ <sub>e</sub> (cm) Boussinesq					δ <sub>e</sub> (cm) Steinbrenner					
0,37	22.500.000	14.500.000	1,552	2,08	1,89	1,78	1,71	1,65	1,92	1,73	1,63	1,55	1,49	
0,37	18.750.000	14.500.000	1,293	2,2	2,07	2,01	1,96	1,92	2,01	1,89	1,83	1,78	1,74	
0,37	15.000.000	14.500.000	1,034	2,38	2,36	2,35	2,34	2,34	2,15	2,13	2,12	2,11	2,11	
0,37	11.250.000	14.500.000	0,776	2,68	2,83	2,92	2,98	3,03	2,37	2,52	2,61	2,67	2,72	
0,37	7.500.000	14.500.000	0,517	3,28	3,78	4,05	4,25	4,41	2,82	3,31	3,59	3,78	3,94	
0,37	3.750.000	14.500.000	0,259	5,09	6,63	7,46	8,07	8,55	4,16	5,68	6,52	7,13	7,61	
0,37	1.875.000	14.500.000	0,129	8,7	12,32	14,28	15,71	16,83	6,84	10,42	12,38	13,82	14,95	

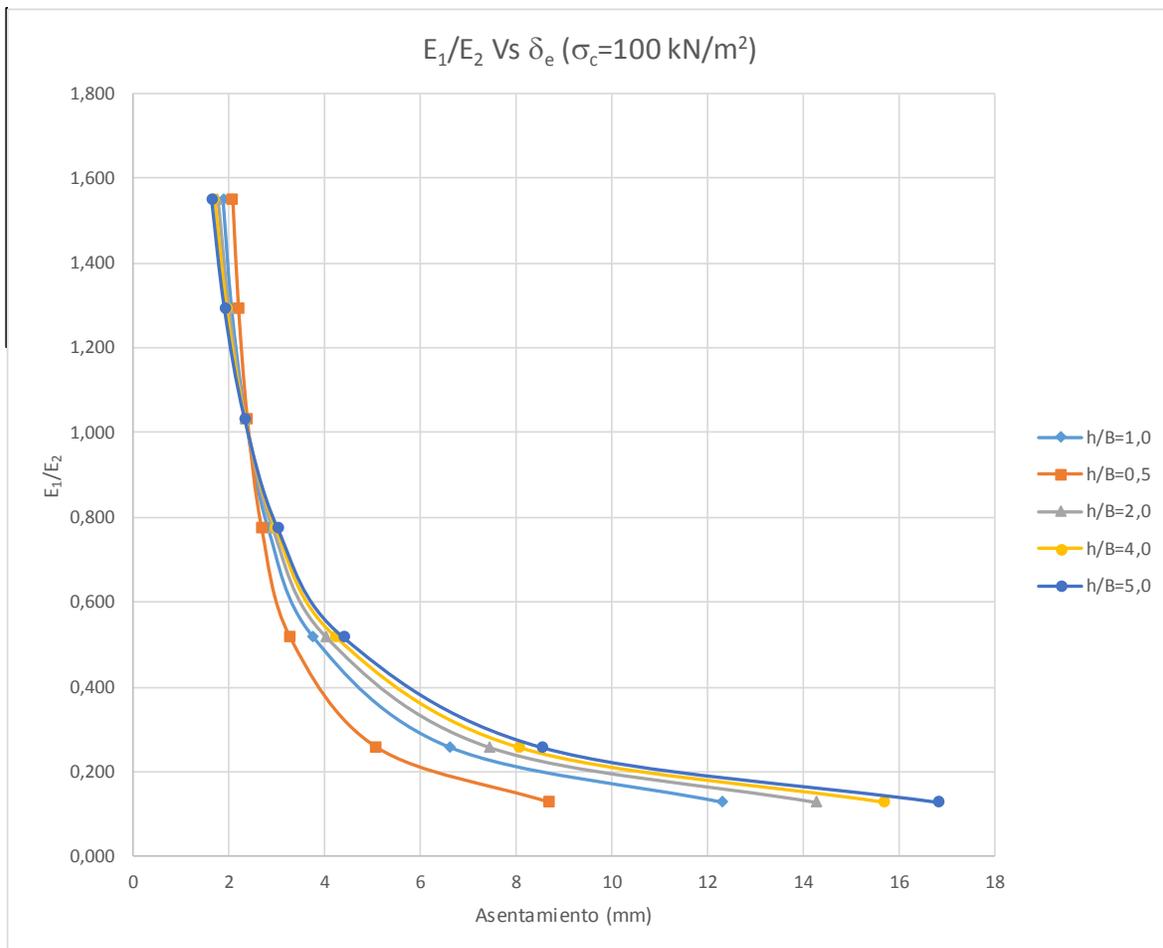


Figura 32 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Boussinesq (Fuente: el autor)

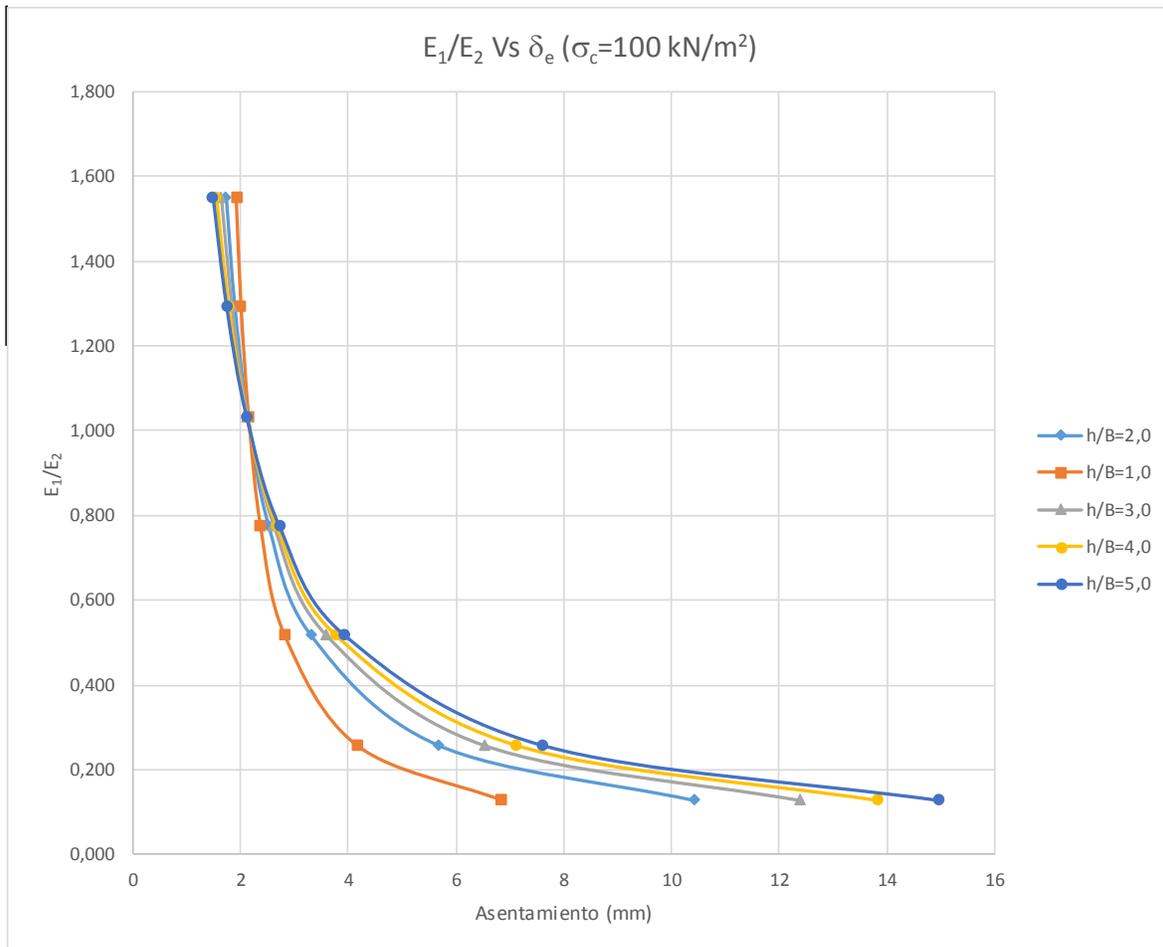


Figura 33 Variación del asentamiento con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos – solución de Steinbrenner (Fuente: el autor)

Al hacer el cálculo de asentamiento elástico para para dos estratos respecto a la relación entre módulos de elasticidad y la relación entre ancho de la zapata y espesor de los estratos, a partir de las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner, se observa que las gráficas difieren ligeramente en su forma para los casos de espesores de estrato rígido superior muy grandes, con respecto al estrato blando inferior (cuatro y cinco veces el ancho del área cargada), es decir, caso en que el estrato de suelo blando inferior adopta muy poco espesor. La razón puede ser una distorsión en los cálculos del modelo de Vireux, ya que al acercarse a la frontera inferior los resultados tienden a contraerse, y se puede deber a la condición de frontera adoptada para el modelo. Se piensa en esta razón debido a que lo que se esperaría es que la tendencia de las gráficas sea cóncava y en el modelo de Vireux no se está obteniendo tal tendencia; mientras que en las soluciones de Boussinesq y Steinbrenner sí se obtiene dicha tendencia.

### 7.10 Gráfica del Cuenco de Deformación Bajo la Carga su Área Aferente.

El programa escrito en FORTRAN 90 también arroja un conjunto de datos con el que es posible dibujar el cuenco de deformación bajo la carga y terreno aferente, en las **figuras 34**

a 39 se muestran los cuencos de deformación de varias áreas cargadas, obtenidas de modelos bicapa para diferentes esfuerzos y diferentes relaciones entre módulos de elasticidad.

En las gráficas se observa lo que ha de esperarse en este tipo de casos, a saber:

Para estrato blando superior y estrato inferior más rígido se observa que a medida que el estrato superior se hace más grueso, el valor del asentamiento elástico se hace más grande en todo el cuenco de deformación.

Para estrato rígido superior y estrato más blando inferior se observa que a medida que el estrato superior se hace más grueso, el valor del asentamiento elástico se hace más pequeño en todo el cuenco de deformación.

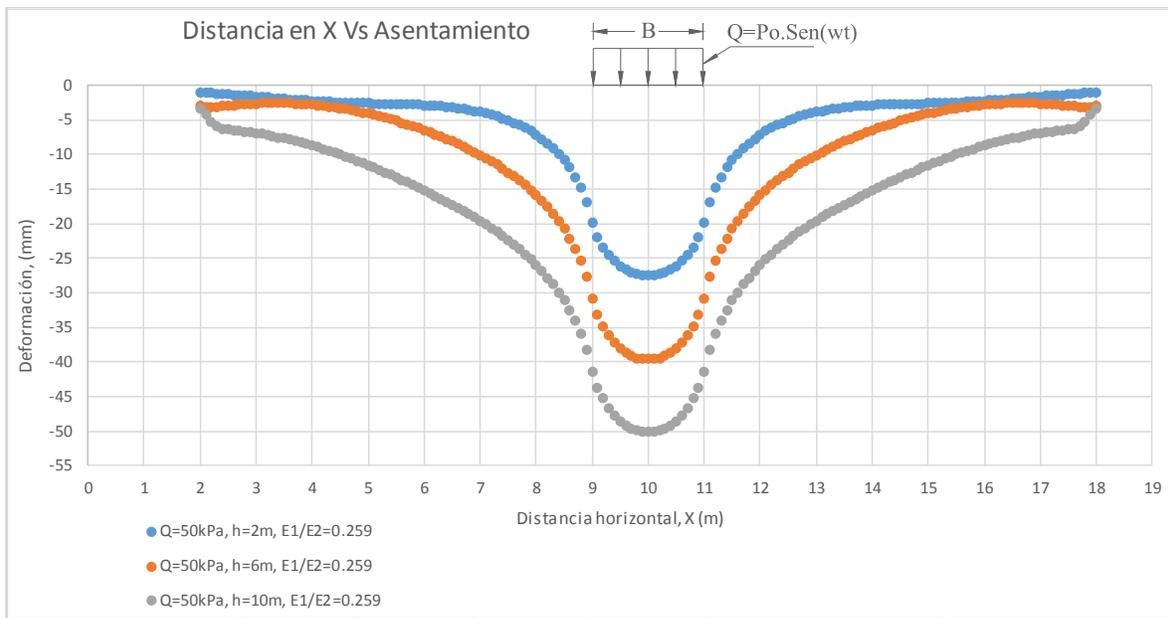


Figura 34 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 50 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación  $h/B$  – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

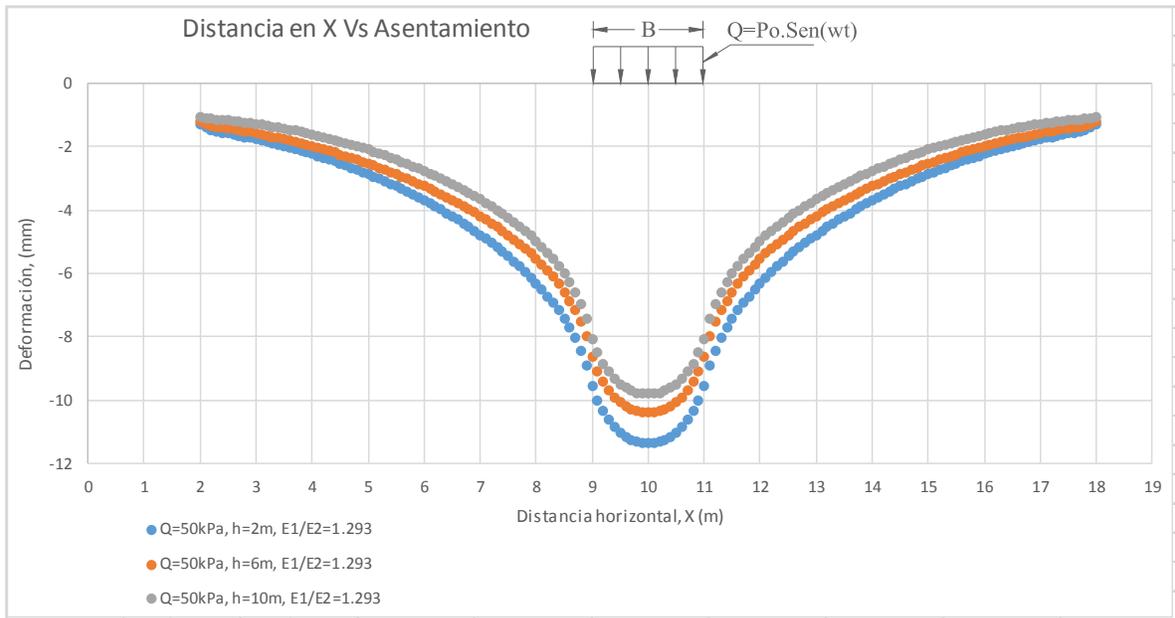


Figura 35 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 50 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

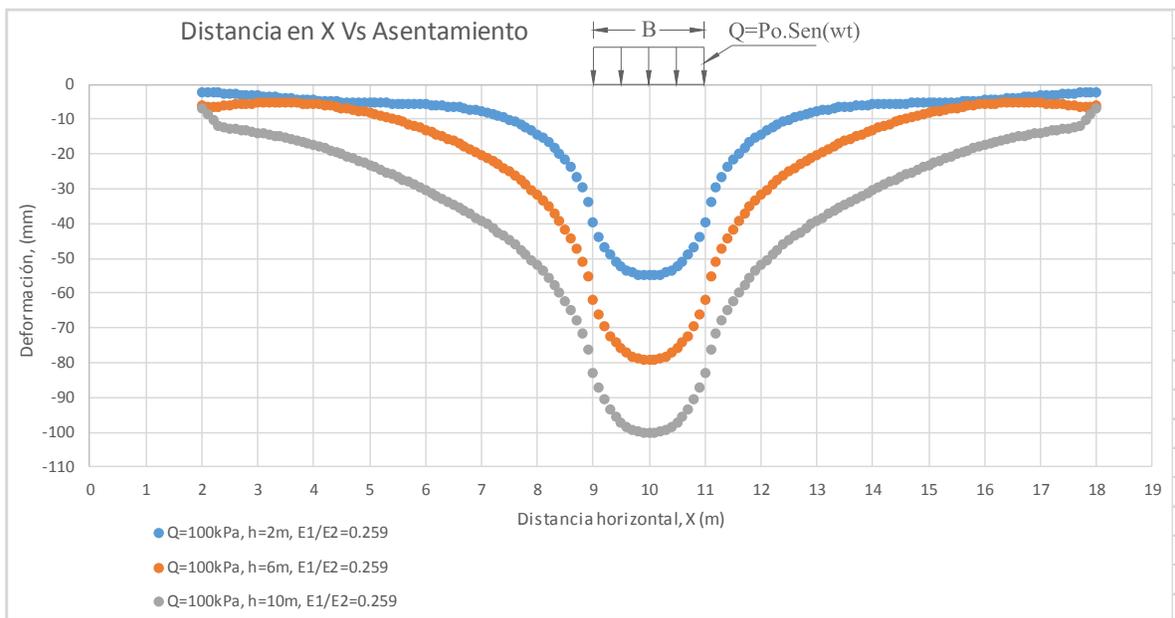


Figura 36 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 100 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

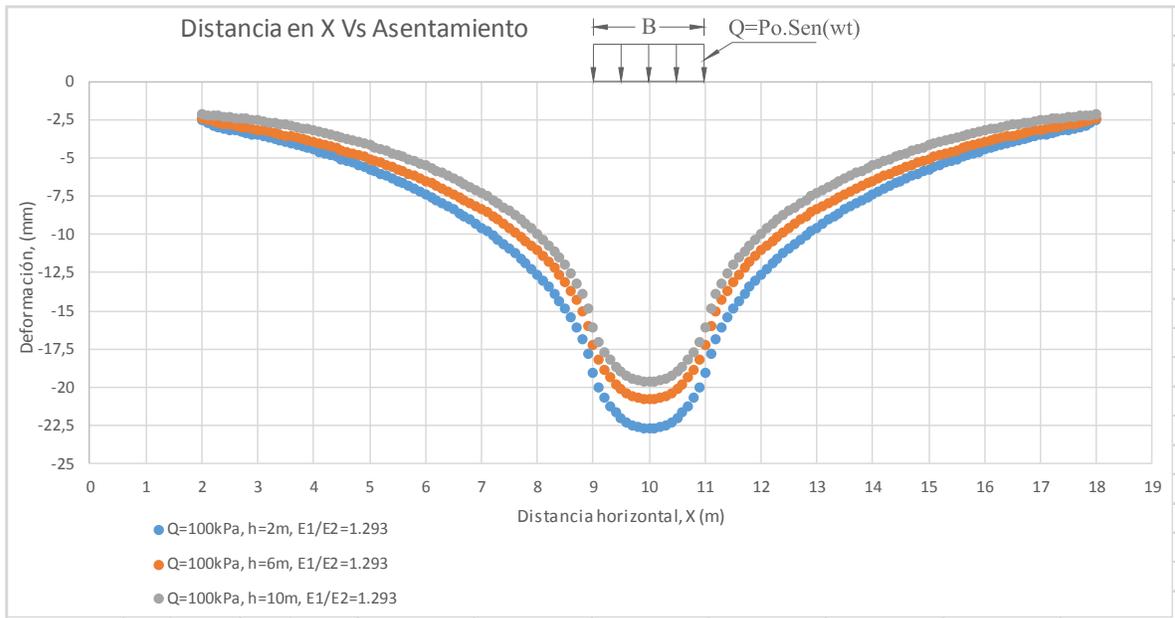


Figura 37 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 100 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

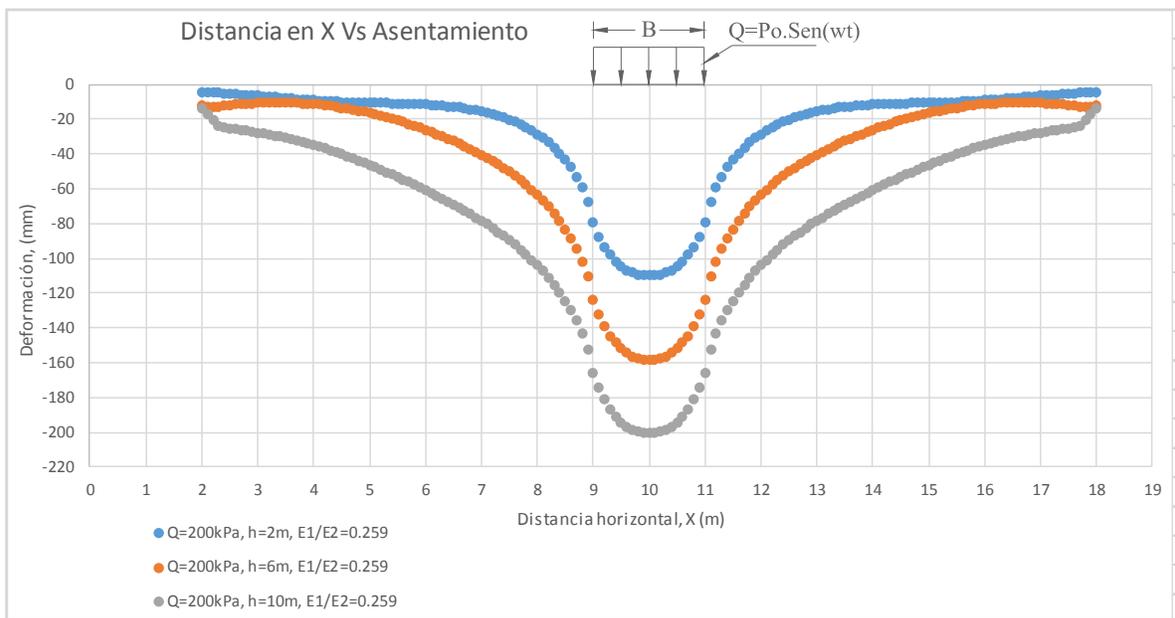


Figura 38 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 200 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

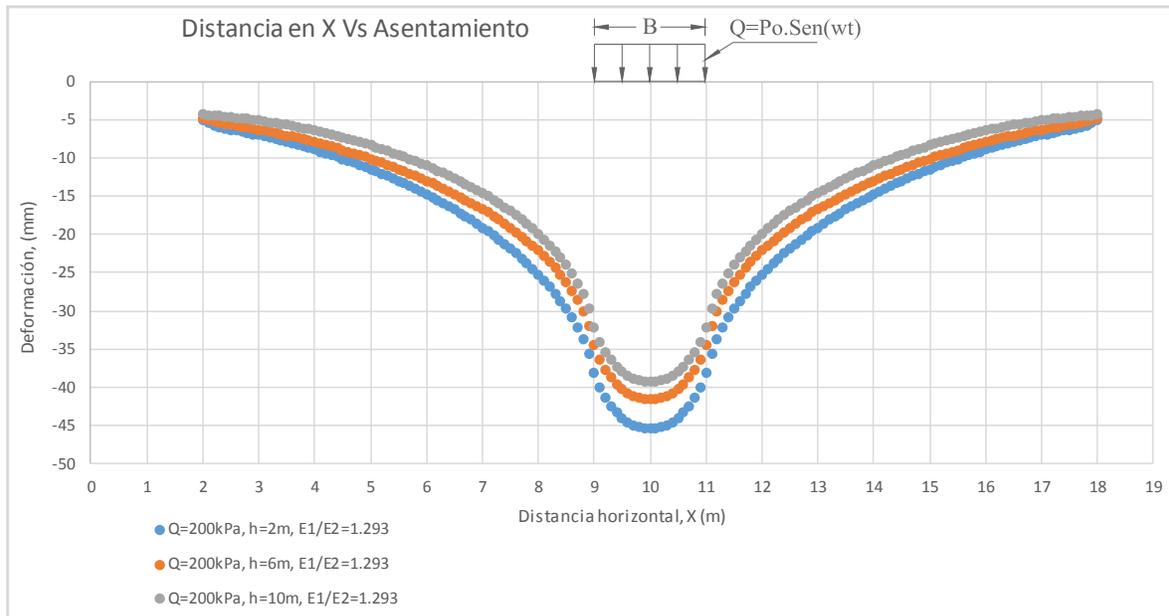


Figura 39 Variación del asentamiento para un esfuerzo de 200 kPa, con respecto a la relación entre módulos de elasticidad y relación h/B – modelo de Virieux (Fuente: el autor)

### 7.11 Gráfica de Bulbo de Disipación de Esfuerzos Para Diferentes Relaciones $E_1/E_2$ Conjugados con Varias Relaciones h/B.

En las gráficas 40 a 42 se mostrará cómo es el comportamiento del bulbo de disipación de esfuerzos para diferentes relaciones h/B, variando las relaciones  $E_1/E_2$ .

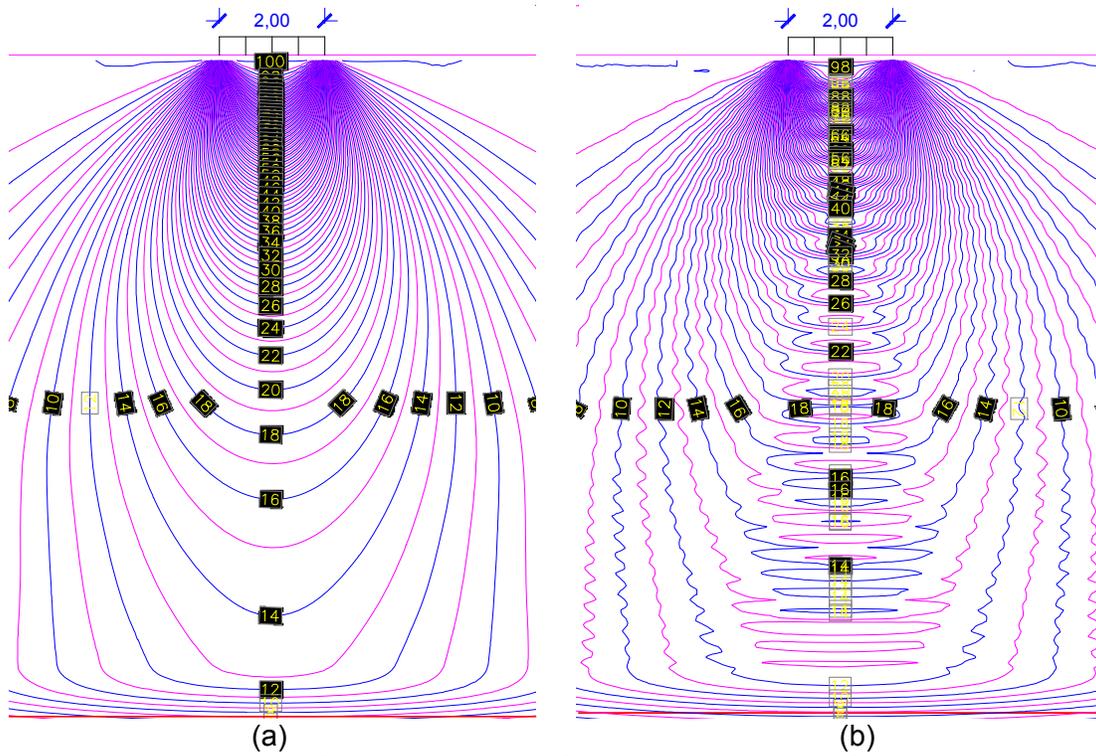


Figura 40 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a)  $f_r=0$  Hz,  $h=10$  m y  $E_1/E_2=1.552$  (b)  $f_r=200$  Hz y  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor)

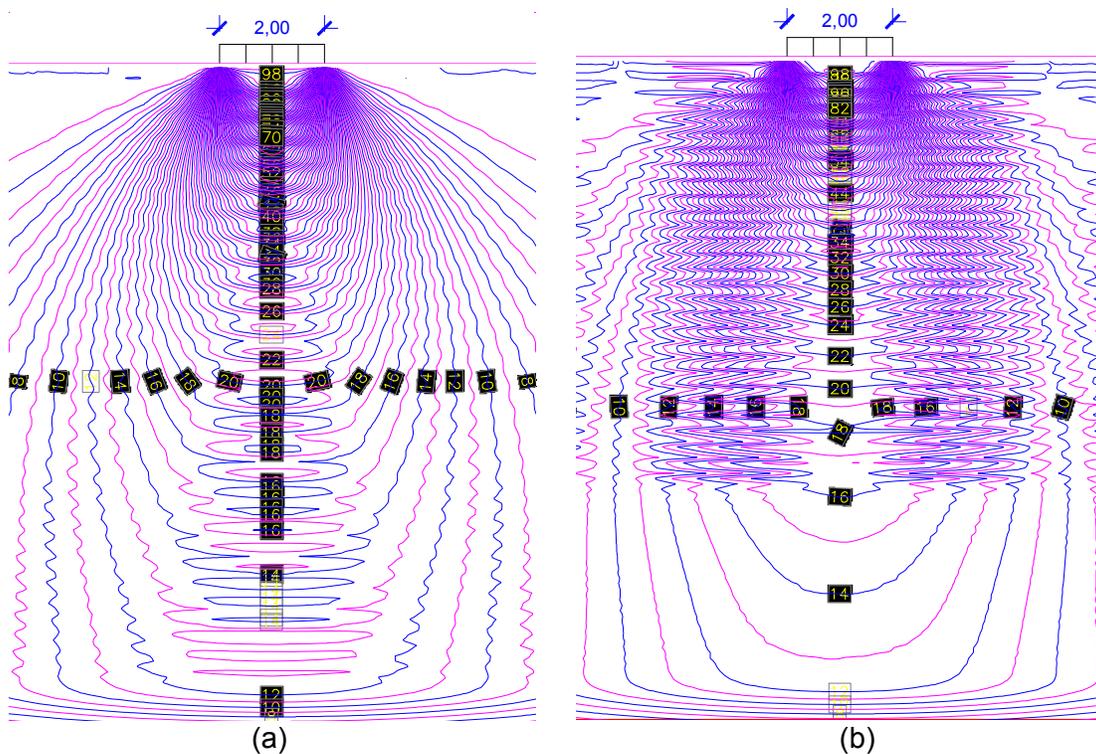


Figura 41 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a)  $f_r=300$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.293$  (b)  $f_r=400$  Hz y  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor)

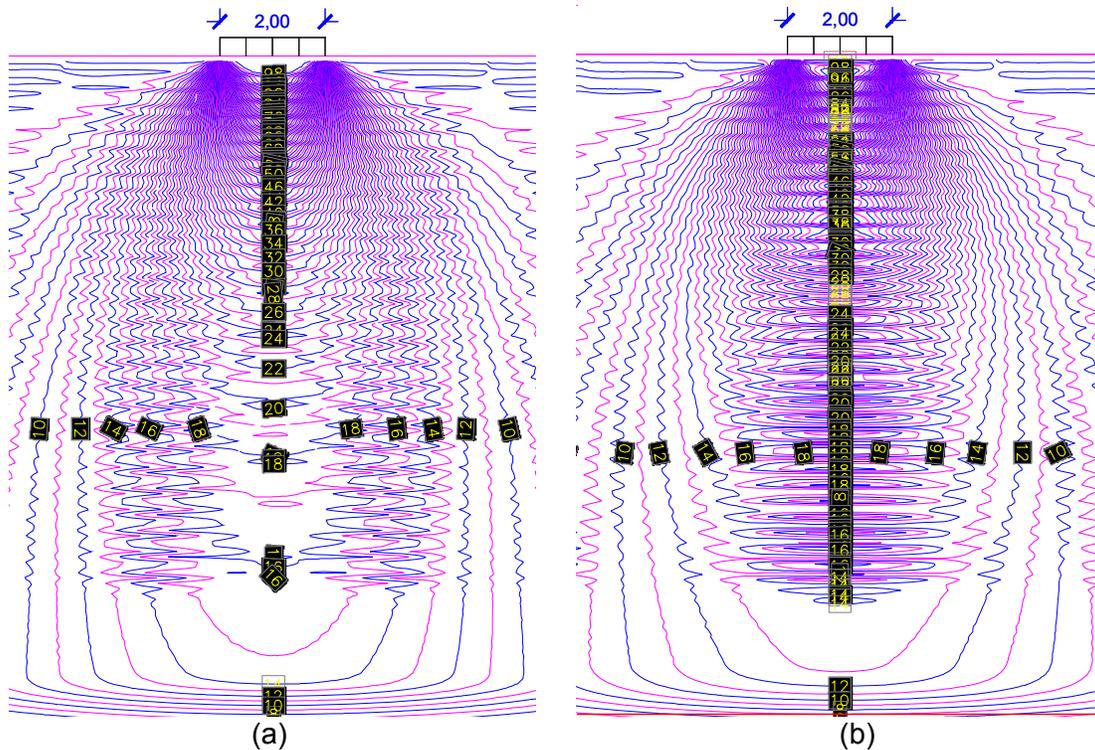


Figura 42 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a)  $f_r=400$  Hz,  $h=10$  m y  $E_1/E_2=1.293$  (b)  $f_r=400$  Hz y  $h=10$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor)

En las gráficas de bulbos de presiones se tienen los siguientes comentarios:

Las líneas isobaras que representan bulbos de presiones completamente uniforme y no muestran ningún tipo de salto o perturbación corresponden a casos de cargas sin vibración.

Las líneas isobaras que representan el bulbo de presiones comienzan a mostrar un trazado irregular algo sinusoidal, para el caso de la carga con frecuencias de vibración de 200 y 300 Hz, adicionalmente la irregularidad es parecida en todo el bulbo.

Las líneas isobaras que representan el bulbo de presiones presentan un trazado completamente irregular y tienden a confundirse entre sí, para el caso de la carga con frecuencias de vibración de 400 Hz; pero con una particularidad, es que en este caso se puede apreciar el cambio de estrato. Obsérvese que después de cierta profundidad, profundidad que corresponde a 8.0 m, se suavizan bastante las líneas, esa es la profundidad donde se pasa de un estrato bastante rígido a otro mucho menos rígido.

Las líneas isobaras de las figuras 42 (a) y (b), ambas con igual frecuencia y el mismo espesor de estrato superior, muestran algo muy importante, es que en el caso de la figura 42(a) se aprecian mucho menos irregulares que en la figura 42(b). La figura 42(a) corresponde a un estrato superior menos rígido y con rigidez más cercana a la del estrato que le subyace; en cambio las líneas de la figura 42(b) corresponde a un estrato superior más rígido y con rigidez más alejada a la del estrato que le subyace. En ambos casos se puede apreciar el cambio de estrato. Obsérvese que después de cierta profundidad, profundidad que corresponde a 10.0 m, se suavizan bastante las líneas, esa es la

profundidad donde se pasa de un estrato más rígido a otro mucho menos rígido. Lo que está mostrando este comportamiento de las líneas de esfuerzo es la relación existente entre la rigidez de un material y la resonancia, es bien sabido que la resonancia es un fenómeno que afecta, en mayor proporción a los cuerpos rígidos y que pueden vibrar u oscilar con mayor facilidad. En cuerpos blandos (menos rígidos) es mucho más difícil que ocurra resonancia, aunque también se puede dar, porque las vibraciones se absorben más rápidamente y esto es lo que está mostrando el comportamiento de las gráficas.

Para verificar si el comportamiento mostrado en las gráficas, explicado en el párrafo anterior, si es un efecto de la vibración y que se mantiene en el tiempo, y no un comportamiento asociado al tiempo tan reducido de la modelación, situación que pudiera asociarse a la vibración desordenada de la etapa de oscilación transitoria, se efectuó la modelación para tiempos de modelación de 1,5 s, 2,0 s y 2,5 s y se revisó la sensibilidad del modelo.

### **7.12 Sensibilidad del Bulbo de Disipación de Esfuerzos Para Diferentes Tiempos de Modelación.**

A continuación, en las gráficas 43 y 44, se muestra cómo es el comportamiento del bulbo de disipación de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa,  $f_r=400$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux, para tiempos de modelación de 1,5 s, 2,0 s, 2,5 s y 5,0 s. Las gráficas de resultados obtenidos con diferentes tiempos de modelación pueden ser comparados con la gráfica 41(b) que corresponde a los mismos parámetros del modelado; pero para tiempo de modelación de 1,0 s.

En las gráficas de bulbos de presiones de las figuras 43 y 44 se puede apreciar que no se presenta variación alguna cuando se incrementa el tiempo de modelación, son similares a los de la gráfica 41(b), por tanto se verifica lo anunciado con respecto al efecto de la vibración sobre los bulbos de esfuerzos.

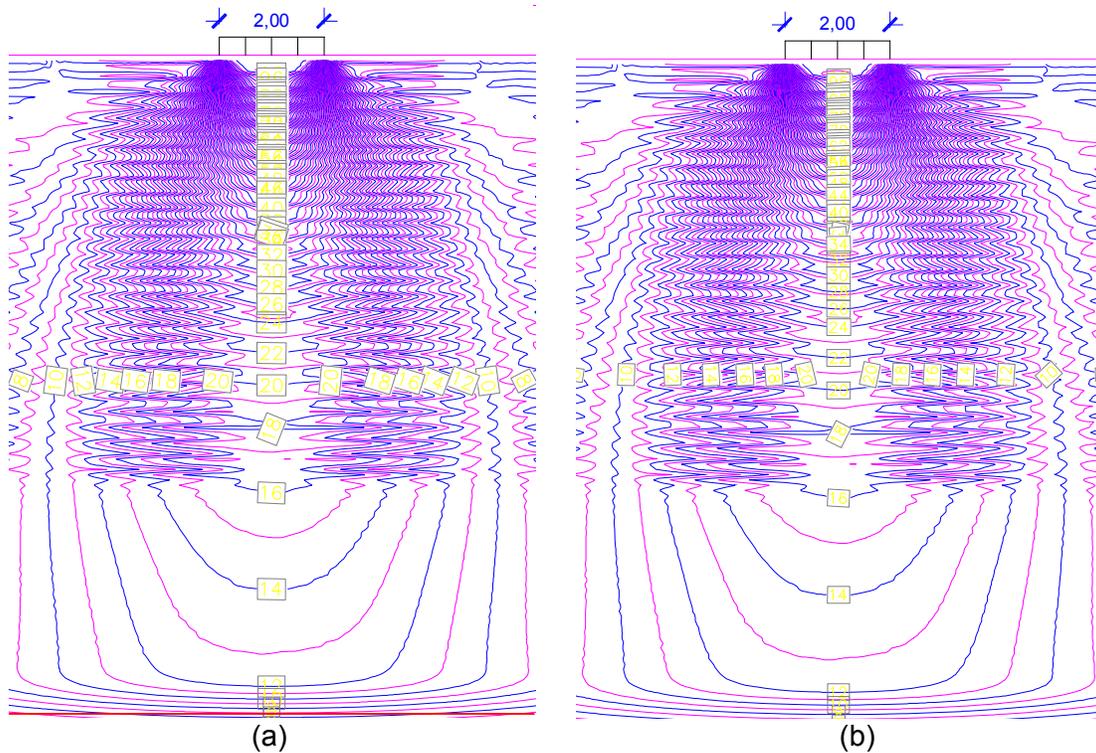


Figura 43 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a)  $f_r=400$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$  (b)  $f_r=400$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor)

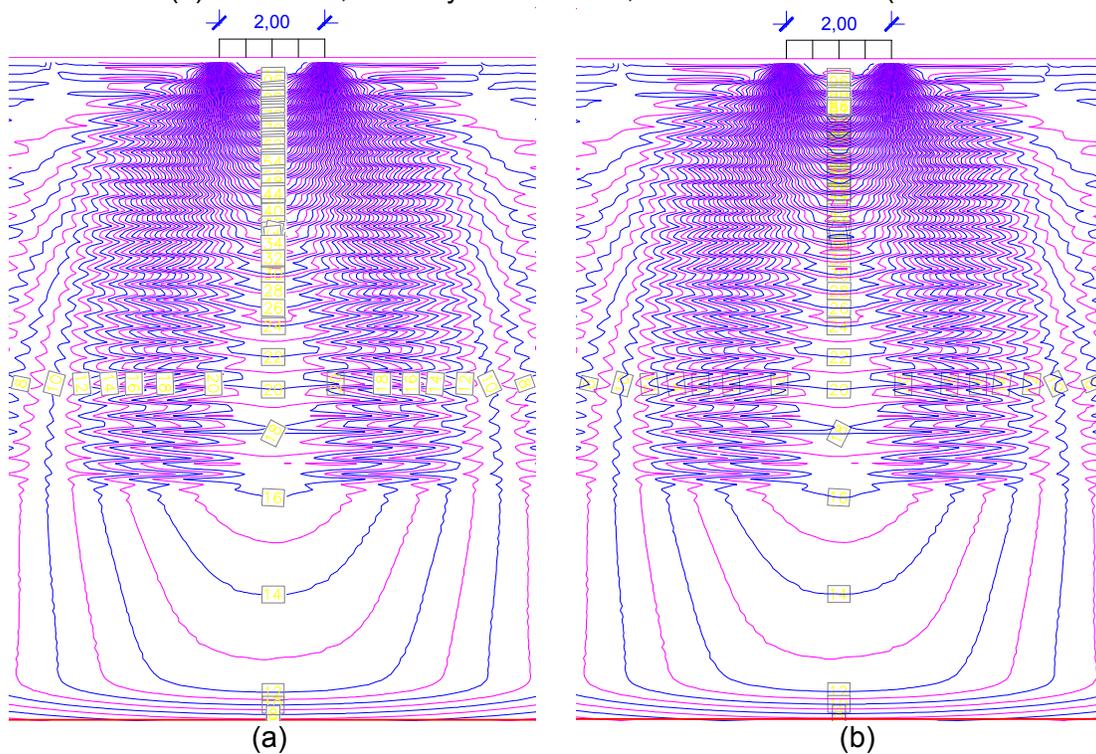


Figura 44 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa (a)  $f_r=400$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$  (b)  $f_r=400$  Hz,  $h=8$  m y  $E_1/E_2=1.552$ , modelo de Virieux (Fuente: el autor)

## 8 Conclusiones

Se ha podido verificar con este trabajo de investigación que el modelo de Virieux, implementado en el desarrollo de esta tesis, resulta ser un algoritmo de gran utilidad debido a que permite analizar con bastante precisión, comparando con las soluciones tradicionales, la distribución de esfuerzos y deformaciones en la masa de suelo bien sea cuando el esfuerzo aplicado en superficie es estático o está sometido a vibraciones. La razón de ello radica en que se trabaja en el dominio del tiempo, lo que permite involucrar el efecto del incremento del esfuerzo a través del tiempo, situación que no se puede implementar con las soluciones tradicionales de Boussinesq.

Una limitación que se identifica con la implementación del algoritmo de Virieux en este trabajo es que por tratarse de una distribución de esfuerzos sin geometría definida, ya que corresponde al análisis de una faja de carga dinámica de ancho finito y longitud infinita, no ha sido posible comparar los resultados contra valores de parámetros de comportamiento dinámico del suelo existentes en la bibliografía de uso académico, ya que estos últimos corresponden a modelos de cimentaciones con geometría bien definida.

Una gran ventaja que representa en modelo de Virieux, adicional a que permite introducir la carga vibratoria en el análisis, es que permite involucrar parámetros como el módulo de Young,  $E$ , y la relación de Poisson,  $\nu$ , que determinan la rigidez del suelo, además del módulo de rigidez al corte,  $\mu$ , cuyo uso es común para representar la rigidez del suelo en análisis dinámicos, parámetros que no están representados en las soluciones tradicionales de Boussinesq.

El modelo de Virieux permitió observar que los diagramas de disipación de esfuerzos para cada configuración estratigráfica, en modelos sometidos a cargas vibratorias, presentan una perturbación en las líneas isobaras, especialmente perceptibles en el estrato más rígido. Esto corresponde a la existencia de vibración que es indicativo de la existencia de una frecuencia de resonancia, situación que no se presentó en la gráfica de líneas isobaras para el caso de modelos bajo carga estática únicamente.

Aunque el modelo de Virieux permite ver, a partir del dibujo de las líneas isobaras, la perturbación que se genera en la masa de suelo, no es posible determinar con precisión la existencia de la frecuencia de resonancia o determinar algún valor que la represente.

Al hacer el análisis de disipación de esfuerzos con el modelo de Virieux se concluye que para estratos rígidos de espesor menor o muy cercano al ancho del área cargada, subyacentes por estratos de suelo blando, la vibración pasa inadvertida debido a que las vibraciones son absorbidas rápidamente por la existencia cercana del estrato blando.

Se ha comprobado con el modelo de Virieux que para una faja de superficie del terreno, de ancho finito y longitud infinita, uniformemente cargada, la profundidad a la que se disipa el 90% del esfuerzo transmitido en superficie es aproximadamente 6.2 veces el ancho de la faja de carga y en la horizontal esto ocurre aproximadamente 4.0 veces el ancho de la faja de carga.

Se ha comprobado en esta investigación, al hacer los análisis de disipación de esfuerzos para comparar con el modelo de Virieux, que en el caso de un área rectangular cargada de

longitud finita, ésta se hace equivalente, en cuanto a profundidad de disipación de esfuerzos, a una franja de longitud infinita de aproximadamente 25 veces su ancho.

A partir de la solución de Boussinesq, un área rectangular de ancho B uniformemente cargada y que tiende a infinita ( $L \geq 25$  veces B), presenta un asentamiento aproximadamente igual a 1.9 veces el valor obtenido un área cuadrada cargada uniformemente del mismo ancho.

A partir de la solución de Steinbrenner, un área rectangular de ancho B uniformemente cargada y que tiende a infinita ( $L \geq 25$  veces B), presenta un asentamiento aproximadamente igual a 1.8 veces el valor obtenido un área cuadrada cargada uniformemente del mismo ancho.

El valor de asentamiento elástico, calculado a partir de teoría de elasticidad lineal y por soluciones tradicionales, para el caso de cimentaciones sometidas a carga estática no presenta diferencia considerable con el calculado a partir del método de Virieux.

El bulbo de disipación de esfuerzos en una masa de suelo, calculado a partir de teoría de elasticidad lineal y por soluciones tradicionales, para el caso de cimentaciones sometidas a carga estática no presenta diferencia considerable con el calculado a partir del método de Virieux.

El modelo de Virieux ha mostrado que los esfuerzos en la masa de suelo, cuando se tiene un estrato superior bastante rígido subyacente por un estrato de menor rigidez, tienden a disiparse en mayor proporción en el estrato superior.

A partir de las gráficas de líneas isobaras (que representan las líneas de igual esfuerzo en la masa de suelo debido a la carga impuesta) dibujadas con los resultados obtenidos con el modelo de Virieux, se puede observar que, debido a la implementación de unas condiciones de frontera, estas líneas experimentan una distorsión en cercanías éstas, razón por la cual ha sido necesario ajustar el tamaño del dominio para que, al menos, dentro del área del dominio la tendencia de las líneas isobaras sea la esperada en estos análisis.

El modelo de Virieux permite concluir, al hacer análisis de disipación de esfuerzo y análisis de deformación, para sistemas bicapa con diferentes relaciones de módulos elásticos, que para estratos de suelo rígido superior con espesor muy grande, respecto al estrato de suelo blando que le suprayace, tiende a presentarse una distorsión en los valores de deformación elástica obtenida, comparando con las soluciones tradicionales. Esto puede deberse a la condición del frontera inferior asumida para los análisis.

## **9 Algunas Sugerencias Para Futuras Investigaciones**

Debido a que esta investigación estuvo enfocada al estudio de comportamiento del suelo bajo franja de carga infinita, que reduce el problema a dos dimensiones, sería interesante escribir un código para modelar áreas cargadas de geometría definida (p. e. áreas rectangulares) y ajustar la geometría del modelo y localización de condiciones de frontera para eliminar la forma achatada que se origina en la parte inferior y lateral de las gráficas de isobaras.

Debido a que en este trabajo de grado no se tuvo en cuenta la inercia del área cargada, sino que la carga se implementó como esfuerzos aplicados directamente sobre la superficie, un trabajo futuro de investigación sería el estudio de la variable masa inercial dentro del modelo numérico.

Sería interesante poder implementar un código para modelar cimentaciones donde se considere el empotramiento o profundidad de cimentación.

## 10 APÉNDICE A.1: MÉTODOS DE ANÁLISIS DE BLOQUES DE CIMENTACIÓN

### 1 Teoría del semi-espacio elástico análogo

En la teoría del semi-espacio elástico el medio elástico (suelo) es considerado como homogéneo e isotrópico. La teoría supone que las ondas generadas debido a la vibración de las zapatas circulares que descansan sobre el semi-espacio elástico se alejan en direcciones radiales desde la base. A medida que se aleja, lleva consigo parte de la energía que se impone al suelo. Como esta energía no está disponible para participar en un fenómeno de resonancia, se introduce un efecto de amortiguación. Este tipo de amortiguación se denomina amortiguación geométrica o amortiguación de radiación. La teoría del semi-espacio elástico, por lo tanto, no considera el sistema de amortiguamiento viscoso como se usa en el método de parámetro agrupado, el cual se basa en la suposición que las vibraciones inducidas dentro del sistema fundación-suelo por el funcionamiento de una maquinaria obedecen a un movimiento armónico simple con un grado de libertad. Los parámetros básicos del suelo utilizados para el desarrollo de la teoría son el módulo de corte,  $G$ , el peso unitario del suelo,  $\gamma$ , y la relación de Poisson,  $\nu$ . La teoría hace uso de ciertas simplificaciones matemáticas que son bastante realistas.

Sin embargo, la solución analítica sirve como una guía útil para un medio racional de evaluar las constantes de resorte y amortiguamiento que se utilizan en el método de las constantes elásticas suelo-resorte, que se explicará más adelante.

La teoría del semi-espacio elástico para la oscilación vertical fue desarrollada por primera vez por Reissner (1936), ampliada por Quinlan (1953) y Sung (1953). Hsieh (1962) mejoró las ecuaciones básicas para la amortiguación geométrica presentadas por Reissner. Reissner (1937) y Reissner y Sagoci (1944) presentaron soluciones analíticas para la oscilación torsional de una base circular que descansaba sobre un semi-espacio elástico. Las soluciones analíticas para el modo de balanceo fueron presentados por Arnold, Bycroft y Warburton (1955), y Bycroft: (1956). La oscilación deslizante de un disco circular fue analizada por Arnold, Bycroft y Warburton (1955) y por Bycroft (1956).

Los esfuerzos de todos estos investigadores se dirigieron hacia el desarrollo de soluciones analíticas para calcular la *frecuencia de resonancia* y el desplazamiento (amplitud de vibración) de zapatas circulares bajo cargas dinámicas (Richart et al, 1970).

Para obtener los resultados como la frecuencia, deformación y esfuerzos del sistema, se hacen necesarios parámetros característicos del suelo, geometría de la fundación y la máquina.

### 2. Método análogo suelo-resorte sin considerar el peso del suelo

Barkan (1962), al utilizar el concepto de módulo de reacción del suelo ha simplificado el método de análisis comparativo de vibraciones.

**Carga dinámica:** En ciertos tipos de máquinas, las fuerzas desequilibradas se desarrollan a propósito, por ejemplo, en planchas vibratorias, rodillos vibratorios para la compactación

de superficies, etc. En estos casos, la excitación de la amplitud de fuerza se puede evaluar a partir de la siguiente ecuación:

$$Q_0 = m_e \cdot e \cdot \omega^2$$

Dónde:  $m_e$ : Masa total desbalanceada.

$e$ : Excentricidad al centro de gravedad de la masa total desbalanceada.

$\omega$ : Frecuencia angular de la máquina vibratoria.

### 3. Procedimiento de diseño para bloques de cimentación

En la actualidad existen dos propuestas comúnmente utilizadas para el diseño de cimentaciones de máquinas vibratorias:

- Método del semi-espacio elástico análogo (Richart et al., 1970) que trabaja con la hipótesis de que el suelo es un espacio semi-infinito homogéneo, isotrópico y elástico, llamado simplemente semi-espacio elástico
- Método de los resortes lineales elásticos sin considerar el peso del suelo (Barkan, 1962).

Cuando se diseñan cimentaciones sometidas a cargas dinámicas, la primera condición que se debe garantizar es que el esfuerzo en el suelo no exceda el esfuerzo admisible. Esta situación se resuelve, en la práctica común, diseñando para una capacidad portante menor o igual al 50% de la capacidad admisible no drenada,  $\sigma_c \leq 0.5 \sigma_{adm}$ . Con este principio de diseño se garantiza bajas deformaciones cortantes, presiones de poros bajas y un comportamiento predominantemente elástico que garanticen la no generación de ablandamiento cíclico<sup>19</sup>. Adicionalmente se garantiza, teóricamente, que los asentamientos por cargas no serán excesivos. Pero principalmente en el diseño de sistemas máquina-fundación-suelo debe garantizar que la frecuencia de dicho sistema sea diferente de la frecuencia de oscilación de la máquina para evitar que las amplitudes del sistema excedan los límites permisibles. Por ello es necesario calcular los siguientes parámetros:

1. Frecuencia natural de vibración del sistema ( $\omega_n$ ).
2. Amplitud de vibración del sistema ( $A_z$ ).
3. Esfuerzos y deformaciones en la masa de suelo.

El análisis dinámico viene siendo estudiado desde el año 1900 y existen varios métodos con los que se busca determinar los parámetros que describen la respuesta dinámica del suelo. Fue Lamb (1904) quien publicó la primera investigación donde planteó soluciones matemáticas para calcular la respuesta de un sistema máquina-fundación-suelo sometida

---

<sup>19</sup> N. E. Wilson & J. R. Greenwood. "Pore Pressures and Strains After Repeated Loading of Saturated Clay". Canadian Geotechnical Journal, National Research Council of Canada, vol. 11, pp. 269-277, 1974.

a vibraciones en su trabajo “Respuesta de un Semi-espacio Elástico Excitado por una Fuerza Vertical Periódica”.

Este trabajo de Lamb sentó el fundamento de análisis dinámico de fundaciones. Luego Reissner (1936) adelantó trabajos tendientes a ampliar la investigación de Lamb y se basó también en el semi-espacio elástico. Los parámetros necesarios para describir el comportamiento dinámico del suelo fueron módulo de corte ( $G$ ), relación de Poisson ( $\nu$ ) y la densidad de la masa de suelo ( $\rho=\gamma/g$ ), representando la cimentación como una masa vibratoria (oscilatoria) generando una presión vertical periódica actuando uniformemente sobre un área circular de radio  $r_0$ , *en la superficie del semi-espacio* elástico, a partir de estos fundamentos Reissner desarrolla la solución analítica para el desplazamiento vertical periódico,  $z_0$ , conocido comúnmente como  $A_z$ .

Más tarde Quinlan y Sung (1953) ampliaron la solución de Reissner. Para esta época se define la formulación del valor de la constante equivalente de resorte para vibraciones verticales en el sistema máquina vibratoria –fundación-suelo ( $k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$ ).

Hsieh (1962) modifica las soluciones de Reissner y propone la obtención de una ecuación para vibraciones verticales, similar a la ecuación para vibraciones amortiguadas de un sistema de un grado de libertad. Con esta investigación Hsieh ilustra cómo las vibraciones verticales de una cimentación en el semi-espacio elástico pueden ser representadas desde el punto de vista de un modelo equivalente masa-resorte-amortiguamiento, a partir de la ecuación diferencial del movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento; pero en este caso la constante de resorte ( $k_z$ ) y el amortiguamiento ( $C_z$ ) dependen de la frecuencia.

Lysmer y Richart (1962) proponen una analogía simplificada masa-resorte-amortiguamiento para calcular la respuesta de una cimentación circular rígida sujeta a oscilaciones verticales.

Esta última es la propuesta más reciente sobre el cálculo de la respuesta dinámica.

Lo que se tiene finalmente es que la ecuación del movimiento de una cimentación cilíndrica rígida de peso  $W = mg$ , sobre un semi-espacio elástico y excitado por una fuerza periódica vertical,  $Q$ , está dado por la siguiente expresión.

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + C \frac{dz}{dt} + kz = Q_0 e^{i\omega t}$$

La fuerza periódica vertical,  $Q$ , puede obedecer a dos situaciones perfectamente viables. La primera es que corresponda a una fuerza armónica constante, en el sentido que su magnitud no depende de su frecuencia  $\omega_f$ . La otra posible situación es que la fuerza corresponda a la de una masa que rota con excentricidad, caso de las máquinas giratorias, en este evento la magnitud de la fuerza depende de la frecuencia,  $Q_0 = m_e e \omega_f^2$ , donde  $m_e$  es la masa rotatoria excéntrica y  $e$  es su excentricidad. Las ecuaciones del movimiento para las dos situaciones expuestas son las siguientes:

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + C_z \frac{dz}{dt} + k_z z = Q_0 \text{Sen}(\omega_f t) \text{ (Situación 1)}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + C_z \frac{dz}{dt} + k_z z = m_e e \omega_f^2 \text{Sen}(\omega_f t) \text{ (Situación 2)}$$

Las expresiones generales empleadas en el cálculo del comportamiento dinámico de sistemas máquina vibratoria-fundación-suelo, para el método del semi-espacio elástico análogo, son las siguientes:

$$B_z = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{m_z}{\rho r_0^3} \text{ (Relación de masas)}$$

$$k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \text{ (Constante de rigidez del suelo)}$$

Donde:

$$\gamma_t = \rho \cdot g \text{ (Peso unitario total del suelo)}$$

$$W_z = m_z \cdot g \text{ (Masa de la zapata + equipo + fuerza excitada)}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{\pi}} \text{ (Radio de cimentación equivalente)}$$

$G$ : Módulo cortante

$\nu$ : Módulo de Poisson del suelo

$$C_z = \frac{3.4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{\rho \cdot G} \text{ (Amortiguamiento del suelo)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_z}{m_z}} = \sqrt{\frac{4Gr_0}{m_z(1-\nu)}}, \text{ ó, } f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n \text{ (Frecuencia natural del Sistema)}$$

$$\therefore m \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{3.4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{\rho \cdot G} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{4Gr_0}{1-\nu} \cdot z = Q$$

La relación de amortiguamiento está dada por:

$$\xi_z = \frac{C_z}{C_c} = \frac{C_z}{2\sqrt{k_z \cdot m_z}} = \frac{3.4r_0^2}{1-\nu} \frac{\sqrt{\rho \cdot G}}{\sqrt{\frac{4Gr_0 m_z}{1-\nu}}}$$

$$\acute{o}, \xi_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$$

Donde:

$$C_c = 2\sqrt{k_z \cdot m_z} = 2m_z\omega_f$$

$C_c$  : Amortiguamiento cr3tico, que desde el punto de vista f3sico corresponde a un desplazamiento sin vibraci3n.

Un aspecto importante definido por la teor3a es que si  $B_z \geq 0.3$  ocurre resonancia.

A continuaci3n se presentar3n las formulaciones para dos condiciones a saber:

- F3rmulas aproximadas para la condici3n de resonancia para una fuerza de excitaci3n independiente de la frecuencia:

$$\omega_{mr} = \frac{V_s}{r_0} \cdot \frac{\sqrt{B_z-0.36}}{B_z} = \frac{4V_s\rho r_0^2 \sqrt{B_z-0.36}}{m_z(1-\nu)} \quad (\text{Frecuencia de resonancia})$$

$$\acute{o}, \omega_{mr} = \frac{f_n}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4Gr_0}{m_z(1-\nu)-0.7225\rho r_0^3}} \quad (\text{Frecuencia de resonancia})$$

$$A_z = \frac{Q_0}{k_z} \cdot \frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z-0.18}}, \acute{o}, A_z = \frac{(1-\nu)Q_0}{4Gr_0} \cdot \frac{B_z}{0.85\sqrt{B_z-0.18}} \quad (\text{Amplitud de vibraci3n})$$

$$\acute{o}, A_z = \frac{Q_z}{k_z\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi_z\beta)^2}}, \text{ Esto usando la teor3a de vibraciones } (\beta = \frac{\omega_f}{\omega_n})$$

- F3rmulas aproximadas para la condici3n de resonancia para una fuerza de excitaci3n dependiente de la frecuencia:

$$\omega_{mr} = \frac{V_s}{r_0} \cdot a_{0m} \quad (\text{Frecuencia de resonancia})$$

Donde:

$$a_{0m} = \sqrt{\frac{0.9}{B_z-0.18}}$$

## **11 ANEXO 1: Artículo De Virieux**

# GEOPHYSICS

## ***P-SV* wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method**

Jean Virieux\*

### ABSTRACT

I present a finite-difference method for modeling *P-SV* wave propagation in heterogeneous media. This is an extension of the method I previously proposed for modeling SH-wave propagation by using velocity and stress in a discrete grid. The two components of the velocity cannot be defined at the same node for a complete staggered grid: the stability condition and the *P*-wave phase velocity dispersion curve do not depend on the Poisson's ratio, while the *S*-wave phase velocity dispersion curve behavior is rather insensitive to the Poisson's ratio. Therefore, the same code used for elastic media can be used for liquid media, where *S*-wave ve-

locity goes to zero, and no special treatment is needed for a liquid-solid interface. Typical physical phenomena arising with *P-SV* modeling, such as surface waves, are in agreement with analytical results. The weathered-layer and corner-edge models show in seismograms the same converted phases obtained by previous authors. This method gives stable results for step discontinuities, as shown for a liquid layer above an elastic half-space. The head wave preserves the correct amplitude. Finally, the corner-edge model illustrates a more complex geometry for the liquid-solid interface. As the Poisson's ratio  $\nu$  increases from 0.25 to 0.5, the shear converted phases are removed from seismograms and from the time section of the wave field.

### INTRODUCTION

Many different methods proposed for modeling waves in heterogeneous media have their own range of validity and interest. Ray theory (Červený et al., 1977), a high-frequency approximation, breaks down in many common situations. At caustics the predicted amplitude is infinite, and in shadow zones the amplitude is zero. Using spectral transformations in space and time, several extensions for overcoming these difficulties have been proposed, depending on how the inverse transformations are performed. Reflectivity (Fuchs and Müller, 1971), which integrates numerically on the slowness vector, is routinely used for vertically heterogeneous media. Numerical integration over wavenumber is used by Aki and Larner (1970) and Bard and Bouchon (1980), who introduced the Rayleigh ansatz for the diffraction sources, in order to model laterally heterogeneous media. More recently, Alekseev

and Mikhailenko (1980) and Mikhailenko and Korneev (1984) performed integration over wavenumber for any interface. Going to the complex slowness plane allows inversion by inspection, giving generalized ray theory (Helmberger, 1968). For computing reflection and refraction coefficients glorified optics (Hong and Helmberger, 1978) introduces two-dimensional (2-D) wave curvature at the interface, while Lee and Langston (1983) took into account two curvatures for a three-dimensional (3-D) wavefront. Chapman (1978) performed the frequency integration before the integration over real slowness, and obtained a WKB seismogram which is regular at caustics. By using the Maslov asymptotic transformation, Chapman and Drummond (1982) extended the WKB seismogram for laterally inhomogeneous media. Another method called Gaussian beam, which also gives finite results at caustics, is seen as a perturbation of spectral decomposition (Madariaga and Papadimitriou, 1985).

Manuscript received by the Editor July 9, 1985; revised manuscript received September 3, 1985.

\*Laboratoire de Sismologie, Institut de Physique du Globe de Paris, Université de Paris 7, 4 Place Jussieu, tour 24, 4ème étage, 75005 Paris, France.

© 1986 Society of Exploration Geophysicists. All rights reserved.

On the other hand, fully numerical techniques in space-time domain, in the finite-difference formulation (Boore, 1972) or finite-element formulation (Smith, 1975), handle any kind of waves in complex media but are limited mainly because numerical dispersion prevents them from propagating waves over large distances. In other words, enough low-frequency waves must be used. Another difficulty that arises with numerical techniques is the interpretation of numerical seismograms. The situation is better than for the real Earth, because the medium is known and fields may be displayed inside the whole medium, thereby defining the shape of wavefronts. Of course, the interpretation becomes more difficult as the complexity of the medium increases.

To model *P-SV* wave propagation, I apply a finite-difference scheme used in Madariaga (1976) for crack propagation modeling. *SH*-wave modeling has already been discussed in a previous article (Virieux, 1984). Here I follow the same formulation of the problem. Numerical analysis is lengthier, because of several interesting features of the *P-SV* scheme. Explosive source and surface waves are compared with analytical results to gain confidence in this modeling. After comparing other numerical simulations with the weathered-layer model and the corner-edge model, I discuss the discrepancy between results obtained for the corner-edge model in the homogeneous and heterogeneous formulations (Kelly et al., 1976). Pictures of the medium display the evolution of wavefronts with respect to time. The liquid-solid interface is studied, and stable results obtained for a liquid layer over an elastic half-space are shown. The case of a complex interface is illustrated by a corner-edge and numerical seismograms for Poisson's ratios  $\nu$  ranging from 0.25 to 0.5 are presented. Pictures of the medium at a given time for different Poisson's ratios help demonstrate its effects on seismograms. For modeling a more complex medium like a salt dome, future work is necessary.

## PROBLEM FORMULATION

I closely follow the development in my previous paper on *SH*-wave propagation (Virieux, 1984). I consider a vertical 2-D medium with a horizontal axis  $x$  and a vertical axis  $z$  pointing downward. The medium is assumed linearly elastic and isotropic.

### Equations

Instead of using the wave equation which is a second-order hyperbolic system, I go back to the elastodynamic equations which are:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \\ \tau_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

and

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

In these equations,  $(u_x, u_z)$  is the displacement vector and  $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$  is the stress tensor.  $\rho(x, z)$  is the density, and  $\lambda(x, z)$  and  $\mu(x, z)$  are Lamé coefficients. This system is transformed into the following first-order hyperbolic system:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= b \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= b \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

In these equations  $(v_x, v_z)$  is the velocity vector.  $b(x, z)$ , the lightness or the buoyancy, is the inverse of density.

### Initial conditions

The medium is supposed to be in equilibrium at time  $t = 0$ , i.e., stress and velocity are set to zero everywhere in the medium. Because of these initial conditions, propagating stress and velocity is also equivalent to propagating "time-integrated stress" and displacement.

### Boundary conditions

Internal interfaces are not treated by explicit boundary conditions because they are in a homogeneous formulation (Kelly et al., 1976). They are represented naturally by changes of elastic parameters and density as they are in a heterogeneous formulation. Only four explicit boundary conditions have to be considered: the four edges of the finite-sized vertical grid. Depending on the problem, different boundary conditions can be used on the edges: approximate-radiation conditions (for simulating an infinite medium), stress-free conditions (also known as the Neumann condition or free-surface condition), or zero-velocity conditions equivalent to zero-displacement conditions (the Dirichlet condition or rigid-surface condition). The radiation conditions are equivalent to the condition B-1 of Clayton and Engquist (1980), and correspond to plane-wave radiation conditions.

### Source excitation

I use an explosive source in this paper. Because, as shown later, stresses  $\tau_{xx}$  and  $\tau_{zz}$  are defined at the same nodal point, equal incremental amplitudes are added to  $\tau_{xx}$  and  $\tau_{zz}$  at the point source to simulate a given source excitation. Because  $v_x$  and  $v_z$  are not computed at the source point, infinite amplitudes are avoided. As shown by Gauthier (1983), this implementation of the source excitation is equivalent to the one

used in Alterman and Karal (1968) for this scheme and it saves computer time. Two source excitations for stress are used: the Gaussian pulse

$$f(t) = e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (3)$$

for the Lamb's problem with the parameter  $\alpha$ , which controls the wavelength content of the excitation, equal to 200, and the derivative of a Gaussian pulse for the other models

$$g(t) = -2\alpha(t-t_0)e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (4)$$

with the parameter  $\alpha$  equal to 40. This means that, for a  $P$ -wave velocity of 6 000 m/s, the  $P$ -wave half-wavelength is 1 800 m and the  $S$ -wave half-wavelength is 1 000 m for a Poisson's ratio  $\nu = 0.25$ . Consequently, a good choice for the grid spacing is around 100 m.  $t_0$  is chosen to give a causal signal which is approximately zero for negative time. Throughout this paper,  $f(t)$  is written for a Gaussian pulse and  $g(t)$  for its derivative.

### NUMERICAL ANALYSIS

Derivatives are discretized by using centered finite-differences. Because the system is a first-order hyperbolic system, the interpolation functions are linear functions (Zienkiewicz and Morgan, 1982, p. 154). Assuming equations are verified at nodes, discretization leads to a unique staggered grid, as shown in Figure 1. The discretization of the medium is the last step in the finite-difference formulation. The major difference from usual schemes is that the different components of the velocity field are not known at the same node. The explicit numerical scheme, equivalent to the system (2), is:

$$U_{i,j}^{k+1/2} = U_{i,j}^{k-1/2} + B_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Sigma_{i+1/2,j}^k - \Sigma_{i-1/2,j}^k) + B_{i,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (\Xi_{i,j+1/2}^k - \Xi_{i,j-1/2}^k),$$

$$V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2} = V_{i+1/2,j+1/2}^{k-1/2} + B_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Xi_{i+1,j+1/2}^k - \Xi_{i,j+1/2}^k) + B_{i+1/2,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (T_{i+1/2,j+1}^k - T_{i+1/2,j}^k),$$

$$\Sigma_{i+1/2,j}^{k+1} = \Sigma_{i+1/2,j}^k + (L+2M)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}) + L_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (V_{i,j+1}^{k+1/2} - V_{i,j}^{k+1/2}),$$

$$T_{i+1/2,j}^{k+1} = T_{i+1/2,j}^k + (L+2M)_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta z} (V_{i,j+1}^{k+1/2} - V_{i,j}^{k+1/2}) + L_{i+1/2,j} \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2}),$$

and

$$\Xi_{i,j+1/2}^{k+1} = \Xi_{i,j+1/2}^k + M_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta z} (U_{i,j+1}^{k+1/2} - U_{i,j}^{k+1/2})$$

$$+ M_{i,j+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_{i+1/2,j}^{k+1/2} - V_{i,j}^{k+1/2}). \quad (5)$$

In these equations,  $k$  is the index for time discretization,  $i$  for  $x$ -axis discretization, and  $j$  for  $z$ -axis discretization.  $\Delta t$  is the grid step in time,  $\Delta x$  and  $\Delta z$  are the grid steps for the  $x$ -axis and for the  $z$ -axis, respectively, which are assumed equal in the following applications. Numerical velocity  $(U, V) = (v_x, v_z)$  at time  $(k+1/2)\Delta t$ , and numerical stress  $(\Sigma, \Xi, T) = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$  at time  $(k+1)\Delta t$  are computed explicitly from velocity at time  $(k-1/2)\Delta t$  and stress at time  $k\Delta t$ .  $B$  represents the buoyancy inside the medium, while  $L, M$  represent Lamé coefficients ( $\lambda, \mu$ ), as shown in Figure 1.

For homogeneous media, standard spectral analysis gives the following numerical stability condition for this explicit scheme:

$$V_p \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1, \quad (6)$$

where  $V_p$  is the  $P$ -wave velocity. The stability condition is independent of the  $S$ -wave velocity  $V_s$ , or of the Poisson's ratio  $\nu$ . For the special case  $\Delta x = \Delta z$ , the stability condition reduces to

$$V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7)$$

The generalization of this stability condition for an  $n$ -D space is straightforward and gives the following condition

$$V_p \cdot \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta x_i^2}} < 1, \quad (8)$$

and, for  $\Delta x_i = \Delta x$ ,

$$V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (9)$$

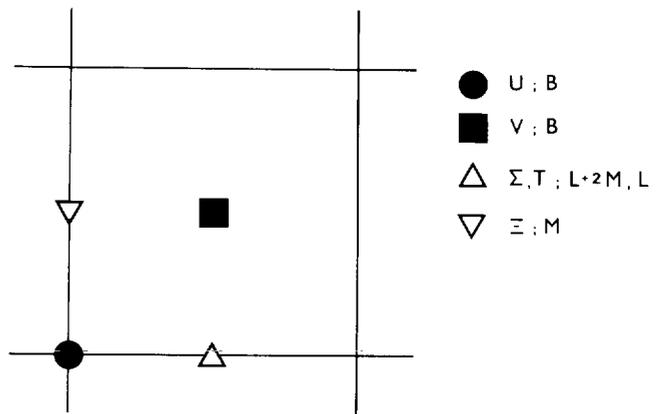


FIG. 1. Discretization of the medium on a staggered grid. Black symbols are for velocities and buoyancy at time  $k\Delta t$ . White symbols are for stresses and Lamé coefficients at time  $(k+1/2)\Delta t$ .

where  $n$  is the dimension of the space. This condition has been verified by Virieux and Madariaga (1982) for 3-D crack modeling. This stability condition is more restrictive than the one obtained for usual finite-difference schemes (Bamberger et al., 1980 or Stephen, 1983) which, for  $\Delta x = \Delta z$ , gives

$$\sqrt{V_p^2 + V_s^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1, \tag{10}$$

because the  $S$ -wave velocity is lower than the  $P$ -wave velocity. This is the price paid for a complete staggered grid.

Using the same mathematical framework in Bamberger et al., (1980), stability in heterogeneous media is expected provided the condition in equation (6) or (7) holds everywhere on the grid. For the scheme used here, this seems to be true for any Poisson's ratio, as shown later for a liquid-solid interface.

I do not develop the numerical analysis of the finite-difference scheme here because it is lengthy and because it follows standard lines found in many textbooks on numerical analysis (Marchuk, 1975). However I do analyze phase velocity, because it illustrates why a liquid-solid interface is correctly modeled with this finite-difference scheme.

Consider a plane wave with wavenumber  $k$ , which makes an angle  $\theta$  with the  $x$ -axis. Following Bamberger et al. (1980), the quantity  $\gamma$  given by

$$\gamma = \sqrt{2} V_p \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{11}$$

controls the numerical dispersion, and the quantity  $H$  defined by

$$H = \frac{\Delta x}{\lambda}, \tag{12}$$

controls the number of nodes per wavelength of the plane wave. The resulting nondimensional  $P$ -wave phase velocity (defined by the ratio of numerical  $P$ -wave phase velocity to true  $P$ -wave velocity) is:

$$q_p = \frac{\sqrt{2}}{\pi\gamma H} \sin^{-1} \left[ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(\pi H \cos \theta) + \sin^2(\pi H \sin \theta)} \right], \tag{13}$$

where  $q_p$  is independent of Poisson's ratio  $\nu$ . Similarly, the nondimensional  $S$ -wave phase velocity is:

$$q_s = \frac{V_p \sqrt{2}}{V_s \pi\gamma H} \sin^{-1} \times \left[ \frac{V_s \gamma}{V_p \sqrt{2}} \sqrt{\sin^2(\pi H \cos \theta) + \sin^2(\pi H \sin \theta)} \right], \tag{14}$$

where  $q_s$  depends on the Poisson's ratio through  $V_s/V_p$ . For  $\gamma = 0.8$ ,  $q_p(H)$  is shown on Figure 2 for different angles  $\theta$ . The figure is valid for any Poisson's ratio, which is not the case for standard finite-difference schemes. The quantity  $q_p$  is always lower than 1 and approaches 1 for small  $H$ . For  $H \approx 0.1$ ,  $q_p \approx 1$ . This is the rule of thumb stating that ten nodes are needed inside a wavelength for correct modeling. For  $\gamma = 0.8$ ,  $q_s(H)$  is shown on Figure 3 for different angles  $\theta$  and for different Poisson's ratios  $\nu$ . The quantity  $q_s$  is always lower than 1. This is not the case for usual finite-difference schemes where  $q_s$  may be found to be higher than 1 (Bamberger et al., 1980), which means that the numerical- $S$ -wave propagates faster than the true  $S$ -wave. The quantity  $q_s$  approaches 1 for small  $H$ , giving the same rule of thumb as for the  $P$ -wave modeling. Because the  $S$ -wave velocity is lower than the  $P$ -wave velocity, the condition on the  $S$ -wave is more restrictive and will overrule the one on the  $P$ -wave. Moreover, the behavior of  $q_s$  does not degrade as  $\nu$  goes to 0.5, while  $q_s$  becomes infinite inside liquids for standard finite-difference schemes (Bamberger et al., 1980). This suggests, as is confirmed later, that our numerical scheme behaves correctly inside liquids, and at liquid-solid interfaces.

Finally, for a medium of size  $400 \times 200$ , a computer memory of 850 K words is needed. 100 s are necessary to perform 1 200 time steps on a CRAY 1-S. Although the numerical code was designed to handle any size of medium by using its own virtual memory, this option was not used because it increases drastically the I/O computing cost.

COMPARISON WITH ANALYTICAL RESULTS

Two problems arise in the modeling of  $P$ - $SV$  wave propagation which require a numerical solution. These are source modeling and surface wave (Rayleigh wave) modeling. These features are not simple extensions from the  $SH$ -wave case, and need to be checked with simple analytical solutions.

Explosive source

Although any kind of source may be implemented, an explosive source is easily modeled by adding a known value to

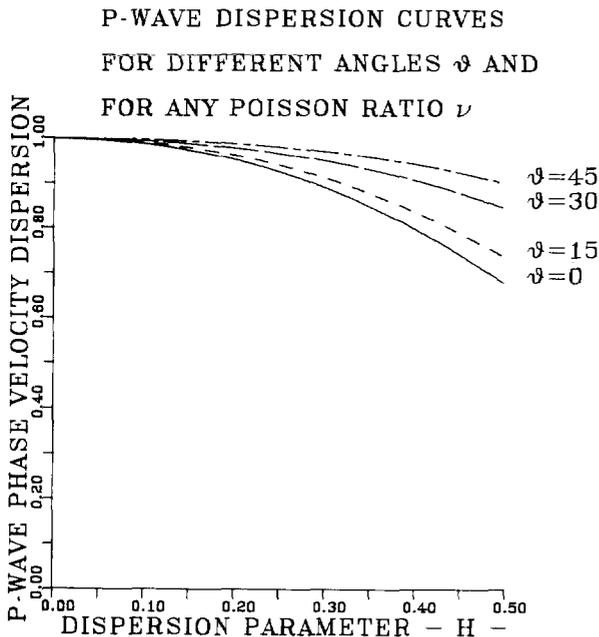


FIG. 2. Dispersion curves for nondimensional  $P$ -wave phase velocity with a dispersion parameter  $\gamma = 0.8$ . Results for different angles  $\theta$  of the plane wave with respect to the  $x$ -axis are shown. They are independent of Poisson's ratio  $\nu$ .

stress ( $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{zz}$ ) at the point source. A point force at the free surface of a half-space is modeled incrementing only  $\tau_{zz}$  at this point source.

For a source excitation  $g(t)$  given by equation (4) with a parameter  $\alpha$  equal to 40, I compared the radial numerical displacement with the analytical solution in an infinite medium of  $P$ -wave velocity equal to 4 000 m/s. Figure 4 pictures the seismogram at a station 400 m from the source. The tangential displacement, which is not zero because of numerical dispersion, remains negligible. Its amplitude decreases when the parameter  $\gamma$  diminishes or when the spectral content of the source shifts to lower frequencies.

**Lamb's problem**

Rayleigh surface waves are strongly excited by a source at the free surface of a half-space. Since the work of Lamb (1904), analytical solutions have been presented in many textbooks (Ewing et al., 1957; Aki and Richards, 1980). The Cagniard-De Hoop method is an elegant way of computing body wave seismograms (Achenbach, 1975, p. 303). Moreover, the Cagniard path is known analytically for a source at the free surface. A difficulty arises when the station is also at the free surface. The Rayleigh pole in the complex slowness plane is located on the Cagniard path: its contribution must be evaluated by the theorem of residues (Ben-menahem and Singh, 1981, p. 545). The seismogram for any source excitation is obtained by convolution of the solution for Dirac's  $\delta$  pulse with the source time function.

Figure 5, shows the horizontal component due to a vertical Gaussian point source  $f(t)$  of the type (3), with a spectral

parameter  $\alpha = 200$ . Observe the propagation without dispersion of the surface wave and the build-up of the conical wave. The numerical Rayleigh wave has a lower amplitude than does the analytical Rayleigh wave. This slight misfit, which is the same for  $X = 1\ 500$  m or  $X = 3\ 000$  m, does not depend on the propagation and may be explained by the discretization of the medium at the source. At early times, interaction between the source and the free surface involves a few nodes. Because the propagation is correctly modeled, I consider that the agreement between numerical and analytical solutions is satisfactory.

**COMPARISON WITH NUMERICAL RESULTS**

For more complex models of the medium, only numerical solutions are available for comparison. Two models are presented: the weathered-layer model for Rayleigh wave excitation by a point source at depth, and the corner-edge model for diffraction. These models were chosen because they present more complex wave patterns than do the analytical solutions and because they have been studied by Kelly et al. (1976) which makes qualitative comparison achievable.

**Weathered-layer model**

The geometry of the medium is shown in Figure 6. The upper layer has a very low  $P$ -wave velocity of 2 000 m/s compared to the velocity of the half-space which is 6 000 m/s. Density is taken as a constant of 2 500 kg/m<sup>3</sup>. The source  $g(t)$ , with a spectral content defined by  $\alpha = 40$ , see equation (4), is

**S-WAVE DISPERSION CURVES**

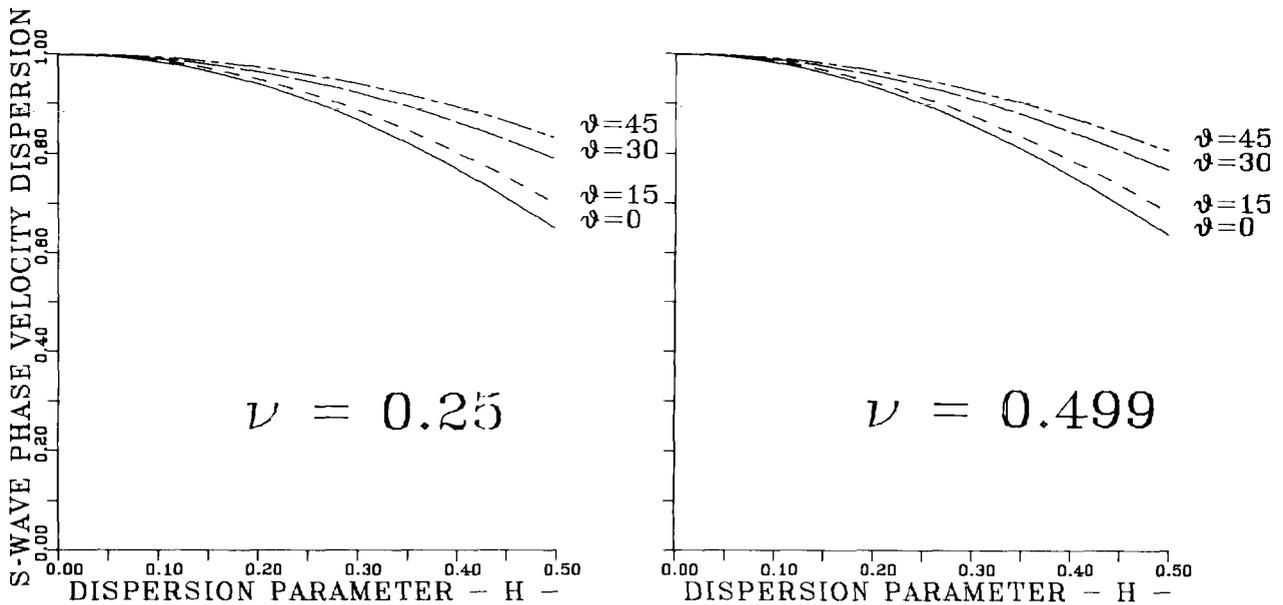


FIG. 3. Dispersion curves for nondimensional S-wave phase velocity with a dispersion parameter  $\gamma = 0.8$ . Results for different angles  $\theta$  of the plane wave with respect to the  $x$ -axis are shown on the same graph for different Poisson's ratios  $\nu$ .

located near the surface in order to obtain efficient Rayleigh wave excitation. In Figure 7, seismograms lasting 5 s present the features already studied in Kelly et al. (1976). A quantitative comparison is difficult because of the unknown spectral source content of Kelly et al. (1976) and because of the graphical representation of seismograms. The direct *P*-wave and the Rayleigh wave dominate the seismograms. The *PP*- and *PS*-wave reflections clearly show a phase shift after the critical angle. The reflection at the free surface, which seems to come from a ghost source above the free surface, is called *GP* for the *P*-wave reflection and *GS* for the *S*-wave reflection. These phases are usually called *pP* and *sP* but I use the nomenclature of Kelly et al. The *GP* phase is again reflected upward by the interface as a *P*-wave. This so-called *GPP* phase stands between the *PP* and *PS* reflection. The head wave can be guessed, mainly when it arrives before the direct *P*-wave. With another choice of saturation for the picture, it would have been clearly seen. Then, the *S* reflection of *GP* phase, called *GPS*, and the *P* reflection of *GS* phase, called *GSP*, arrive in front of the phase obviously called *GSS*. The *PPPP* phase, which is the *P* incident phase twice reflected at the interface and once at the free surface, can hardly be seen at the bottom of the seismogram.

I now show raster pictures instead of the more conventional representation in Figure 7. Small energetic phases are better seen on raster images.

**Corner-edge model**

This model is a stringent test for the quality of a finite-difference scheme. Kelly et al. (1976) showed unacceptable discrepancies between the solutions obtained with the homogeneous and heterogeneous formulations of the problem.

The geometry of the medium is shown in Figure 8. The velocity of the upper medium is 6 000 m/s while the lower medium has a velocity of 9 000 m/s. The density of the lower medium is 2 500 kg/m<sup>3</sup>. The source *g*(*t*) has a spectral content

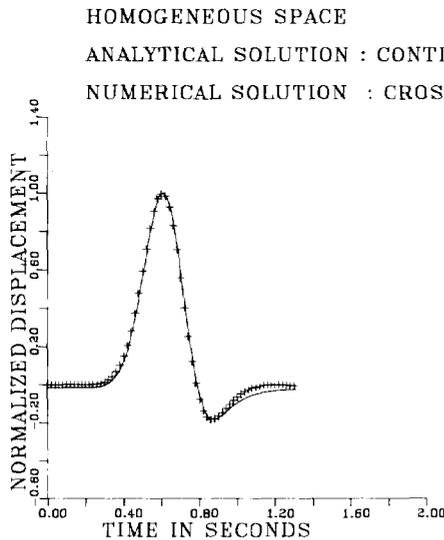


FIG. 4. Comparison between numerical and analytical seismograms for an explosive source in an infinite medium.

HALF-SPACE VELOCITY  $V_p = 4\ 000\ \text{M/S}$   
 CAGNIARD-DE HOOP CONTINUOUS LINE  
 FINITE-DIFFERENCE METHOD CROSSES

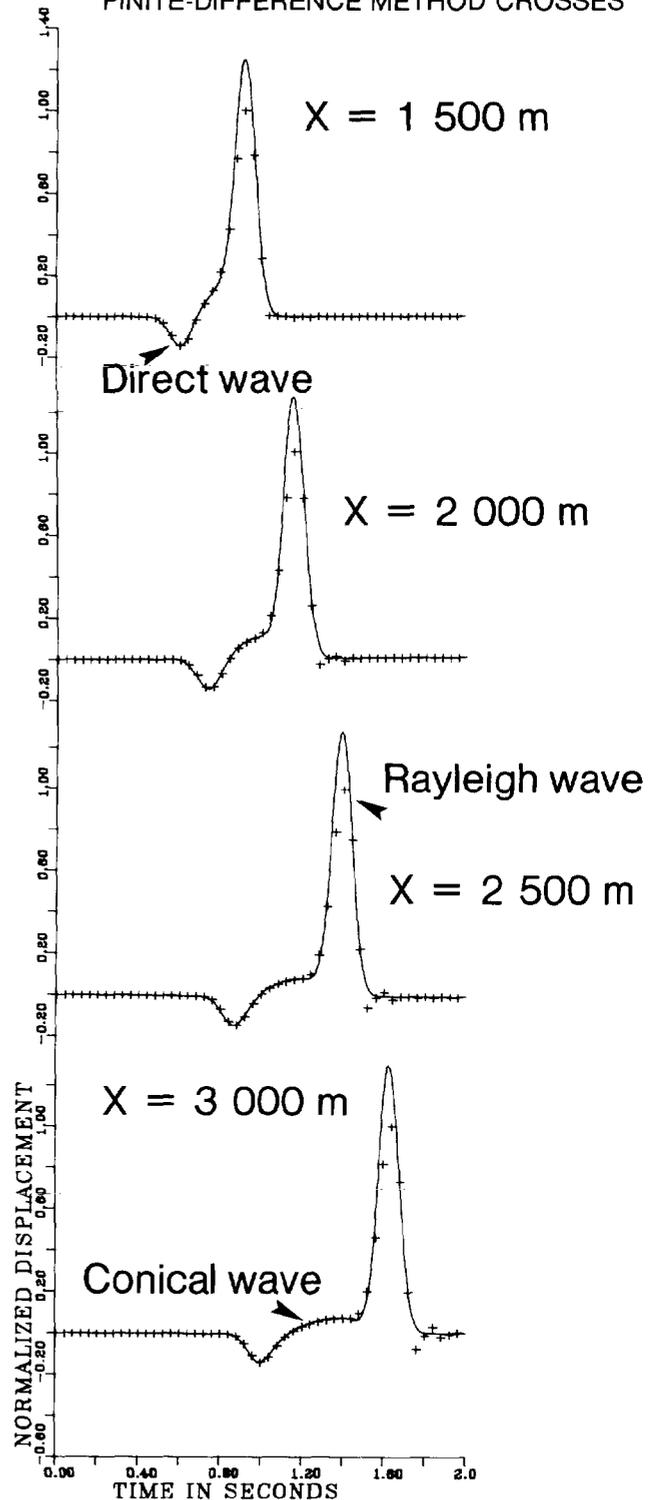


FIG. 5. Comparison between numerical and analytical horizontal components for Lamb's problem at different stations on the free surface.

defined by  $\alpha = 40$ , [see equation (4)]. Figure 9 presents seismograms lasting 6 s on the free surface for  $\Delta x = \Delta z = 100$  m. Two models were considered: (1) homogeneous density, where the two media have the same density, and (2) homogeneous Lamé coefficients; where the two media have the same  $\lambda$  and  $\mu$ . They illustrate the phase shifts for the different waves at the interface. Time arrivals of numerical waves are compared with those obtained by ray tracing. I use the same nomenclature of phases used in the previous example. After the direct P-wave, the  $PP_{refl}$  reflection is associated with the  $PP_{diff}$  diffraction. The  $PS_{refl}$  is clearly seen on the horizontal component, but interferes later with the ghost  $GPP_{refl}$  reflection and the ghost  $GPP_{diff}$  diffraction, which are strong above the corner and source area. Another group of energetic waves,  $GPS$  and  $GSP$  waves, which are the S-wave reflection of the  $GP$  phase at the interface or the P-wave reflection of the  $GS$  phase, are not hidden by the residual reflection coming from the bottom where numerical radiation conditions were applied. Kelly et al. (1976) mainly observed this reflection because they did not apply absorbing radiation conditions.

These different phases may be followed by snapshots of the medium at successive times. Figure 10 shows the horizontal and vertical components. Wavefronts are indicated with arrows. Attention must be drawn on diffracted fronts, head fronts, and corner fronts. The corner front is the same one observed for the *SH* case (Virieux, 1984). This front, called C phase in Figure 10, corresponds to the P-wave refracted on the horizontal interface, and reflected again on the vertical wall as an S wave.

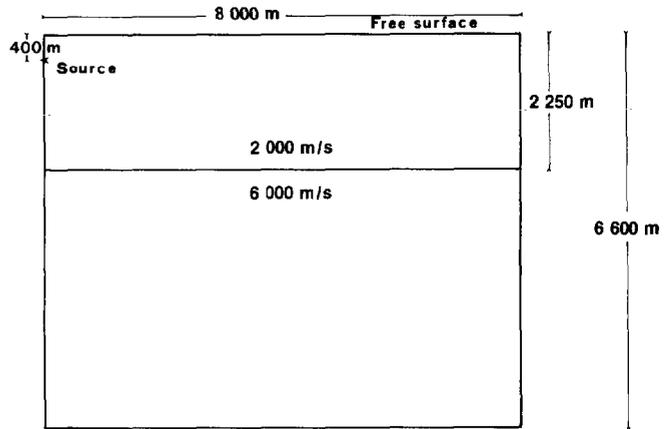


FIG. 6. Geometry of the weathered-layer model.

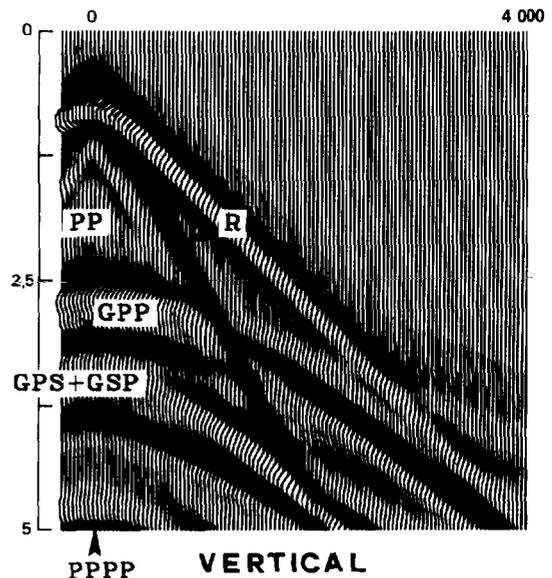
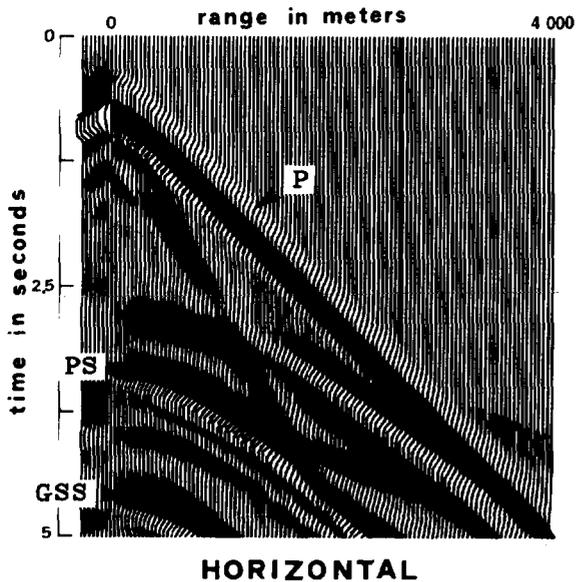
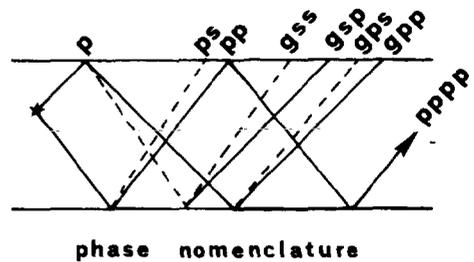


FIG. 7. Numerical seismograms at the free surface for the weathered-layer model. The horizontal seismogram is shown on the left and the vertical seismogram is shown on the right. Phases are indicated by arrows following the ray nomenclature given in the upper right corner.

Returning to the discrepancy between the homogeneous and heterogeneous formulations of finite-differences at interfaces, Kelly et al. (1976) argue that a possible explanation may come from the numerical smoothing of Lamé coefficients in the heterogeneous formulation. There is a numerical transition zone which is not found in the homogeneous formulation because of the explicit boundary conditions. With the increasing power of computers this argument may be reexamined by numerical scaling. By decreasing the grid size, the transition zone is reduced, and results for the heterogeneous formulation are expected to improve. This is not the case. Taking  $\Delta x = 200$  m,  $\Delta x = 100$  m and  $\Delta x = 50$  m, results are remarkably stable and give a very weak *PS* diffracted signal in the forward direction compared with that in the backward direction. This signal is not as strong as that found by the homogeneous formulation of Kelly et al. (1976) and the result confirms numerically Gupta's results (Gupta, 1966) on analytical transition zones. A source with a wavelength content between 10 and 20 nodes cannot distinguish drastically a transition zone over 1, 2, or 3 nodes from an abrupt change of physical parameters because the source does not have enough resolution. Therefore, another explanation may be sought. I give two arguments for a weak *PS* diffraction.

The energy of the incident wave is divided in two parts at a plane interface: the reflected part, going upward and the refracted part, going downward. The diffraction phase, which comes from an abrupt end of the interface, connects the upward reflected phase to the downward incident phase. The incident phase, where the interface is missing, is stronger than the refracted phase. Therefore, only a small amount of energy is expected to go upward with the diffracted front, while the incident phase brings downward the main part of the energy.

A possible analytical way is to look at asymptotic solutions in the high-frequency approximation. I could compare numerical solutions for a high-frequency source with solutions obtained by the geometrical theory of diffraction (Keller, 1962) applied to elastic waves. Instead, I argue qualitatively from results presented in Achenbach et al. (1982). The corner-edge model is not too different from the semiinfinite crack diffraction problem. The contribution of the vertical wall of the corner is missing, but the contribution from the interruption of the horizontal wall is expected to be correctly modeled. Illuminating the horizontal wall by a compressional plane wave making an angle  $\theta_1$  with the  $x$ -axis, Achenbach et al. (1982, p. 126–148) obtained *PS* diffraction coefficients. For any angle  $\theta_1$  between 0 and  $\pi/2$  of this plane wave, the amplitude was an order of magnitude smaller in the forward direction than in the backward direction.

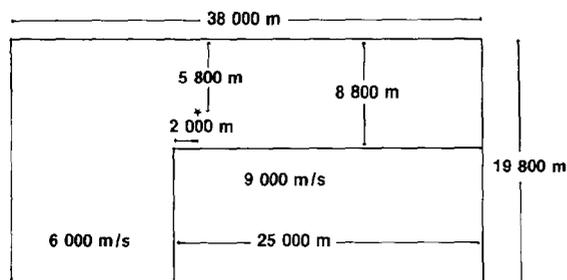


FIG. 8. The geometry of the corner-edge model.

As a partial conclusion, the heterogeneous formulation of Kelly et al. (1976) or the heterogeneous formulation of this article present reasonable solutions while the homogeneous formulation of Kelly et al. (1976) presents features difficult to explain. For a more precise analysis the computer program used by Kelly et al. for the homogeneous formulation is needed.

#### LIQUID OVER SOLID INTERFACE: CORNER-EDGE MODEL

Interest in the liquid-solid interface increases with marine seismic exploration. Waves propagate inside water before hitting the ocean basement and penetrating an elastic medium. Does the problem require a new formulation?

The heterogeneous formulation of standard finite-difference schemes exhibits instabilities for step discontinuities at a liquid/solid interface or inaccuracies for gradient discontinuities, as clearly shown in Stephen (1983). Solving this problem requires the homogeneous formulation of finite-difference schemes. Propagation inside water is solved by the acoustic equation, while the propagation inside an elastic medium is solved by the elastodynamic equations. The liquid-solid interface is a common boundary. Different approximations used at this interface yield different numerical schemes. Modeling complex interfaces with a homogeneous formulation is a difficult computational task, and has not yet been performed, to my knowledge.

I illustrate the liquid-solid interface with two models: the 2-D step discontinuity model for showing stable results, and the corner-edge model for analyzing the complex liquid/solid interface.

#### Step-discontinuity model

Stephen (1983) studied the same problem but used cylindrical symmetry to simulate point sources. He found unstable results for a step discontinuity of velocity and density with depth, using a heterogeneous formulation. This instability does not come from the cylindrical symmetry of his problem, but results from the numerical feature of the standard finite-difference scheme he used. Figure 11 presents results for the same medium, using my heterogeneous formulation which gives stable results. Unfortunately, comparison with Stephen's results is not possible because my flat 2-D geometry is different from his cylindrical calculations. My results exhibit reasonable amplitudes at any range and a good modeling of conical phases at supercritical (4 000 m) range.

#### Corner-edge model

Now consider the corner-edge model presented previously. Figure 12 presents seismograms for the same medium as Figure 9, but for different Poisson's ratios ranging from 0.25 to 0.5. The pattern for the direct *P*-wave and the *PP*-wave remains essentially the same for the different Poisson's ratios, while the *PS*-wave moves downward because the *S*-wave velocity decreases and then disappears completely for the Poisson's ratio  $\nu = 0.5$ . Small oscillations coming from the *S*-wave generated by the free surface may be observed when the number of nodes inside the *S* wavelength is too small. For this scheme, they go to zero when  $\nu$  tends toward 0.5.

A better understanding of these seismograms may be obtained from the snapshots of the medium for different Pois-

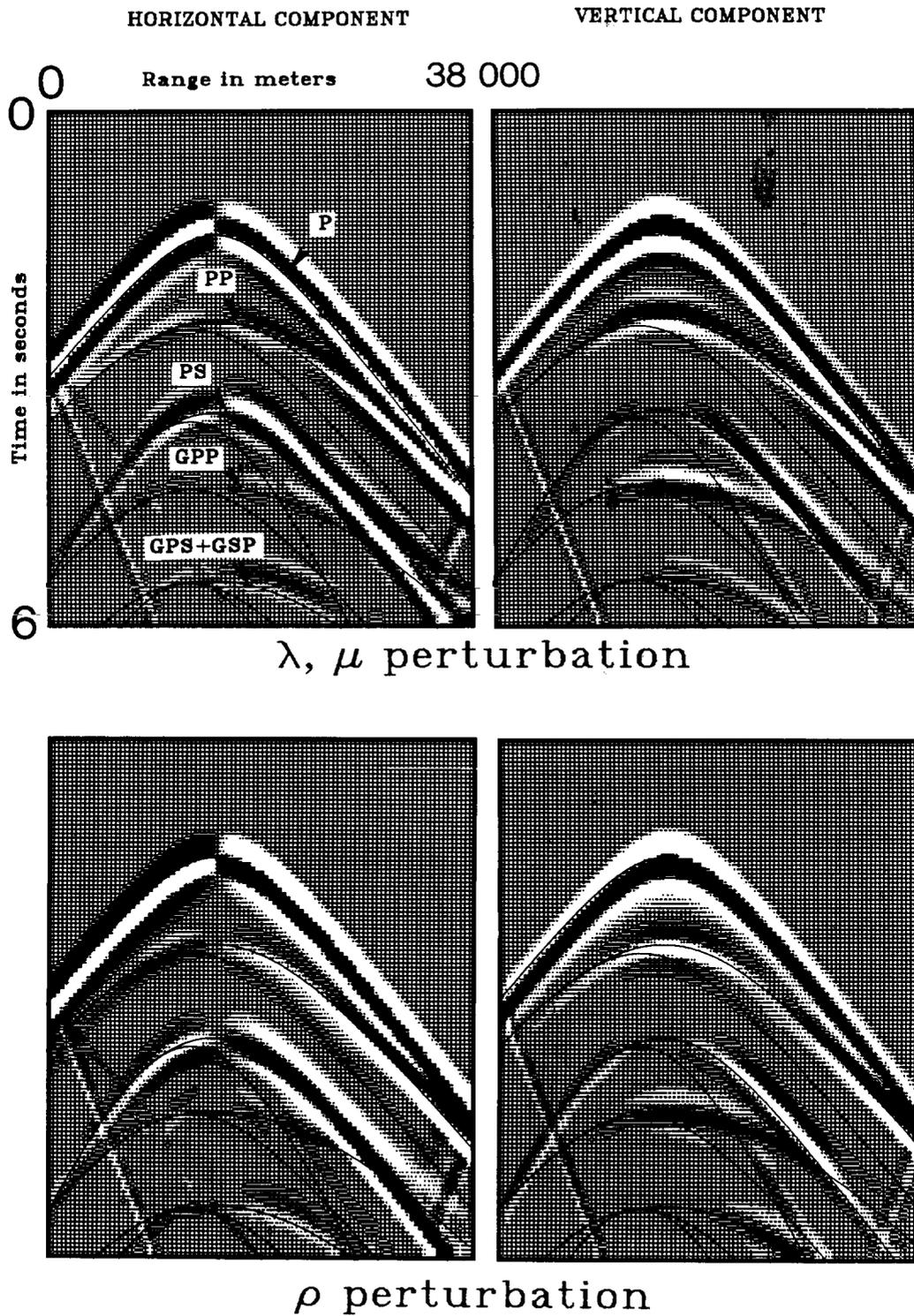


FIG. 9. Numerical seismograms at the free surface for the corner-edge model. The horizontal seismogram is shown on the left and the vertical seismogram is shown on the right. Continuous lines are arrival times of different waves from ray tracing.

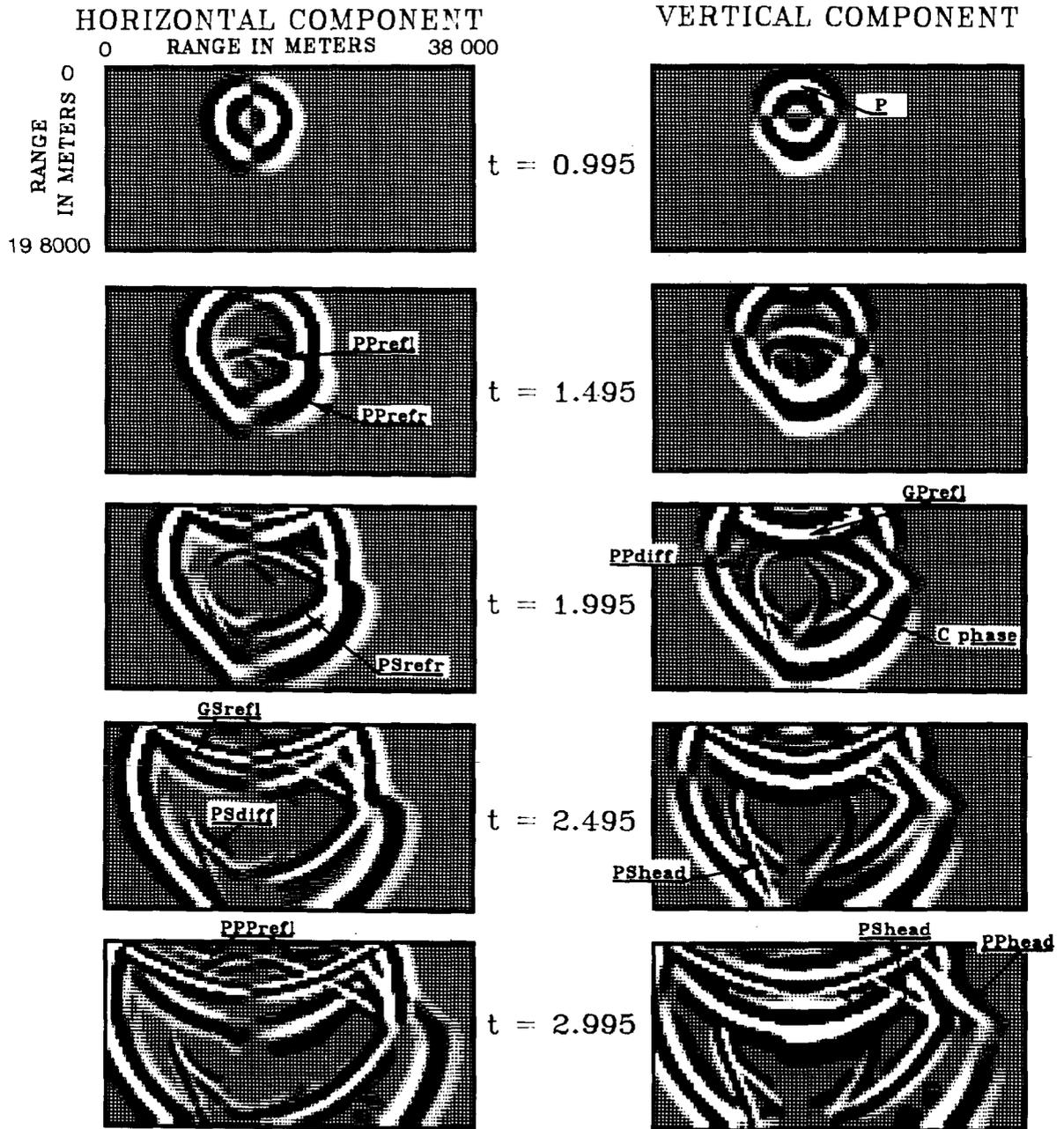


FIG. 10. Pictures of the corner-edge medium for different times. Wavefronts are indicated by arrows.

son's ratios  $\nu$ . Figure 13 shows vertical component at time  $t = 2.995$  s inside the medium. To observe the modification of the wave pattern, look at the *PS* reflection/diffraction on the corner edge. As the Poisson's ratio tends toward 0.5, the *PS* wavefront becomes increasingly confined near the interface. Another modification comes from the free surface. The *PS* reflection at the free surface precedes slightly the *GPP* reflection for  $\nu = 0.25$ . For  $\nu = 0.45$ , the *PS* reflection is behind the *GPP* reflection, while, for greater  $\nu$ , the *PS* is unnoticeable and disappears for  $\nu = 0.5$ .

Stable and accurate results were obtained in Nicoletis (1981) at a liquid-solid interface. Using variational methods, she designed a numerical scheme for the acoustic problem inside the liquid and another scheme for the elastic problem inside the solid with an explicit boundary between them. In our technique, it is not necessary to use an explicit boundary condition between the solid and liquid. The same unique numerical scheme is applied to the liquid and solid media. Therefore, propagation of elastic waves and acoustic waves across a liquid-solid interface is modeled with the same code. No special treatment of the interfaces is needed to allow our method to model complex geometries of the interfaces.

### CONCLUSION

I have shown that elastodynamic equations can be solved by a finite-difference technique using velocity and stress as conjugate physical quantities distributed on a staggered grid. The numerical solution is valid for any Poisson's ratio. Liquid areas can be introduced inside the heterogeneous medium and the wave equation can be solved using the same formulation used for a solid, thereby avoiding use of the acoustic equation inside the liquid and escaping the rather complex problem of connecting the liquid and solid areas along an interface.

The main limitations of our stress-velocity finite-difference method come from the numerical dispersion and the finite numerical size of the grid. With these restrictions, interpretation of numerical seismograms may be very difficult for complex media. By choosing different hypothetical media, differential seismograms may be built to analyze where the energy is coming from. Ray theory and its extension may also be used to locate different phases. These different methods are essential for understanding wave propagation in a complex medium (George et al. 1985).

Another alternative to this trial-and-error method consists of applying inverse techniques to the nonlinear problem. Techniques are currently being developed using this stress-velocity formulation (Gauthier et al., 1985).

### ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by ATP "Géophysique appliquée à la prospection" and by ATP "Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche n°2 250." Prof. Madariaga critically reviewed this paper. Discussions with P. Bernard, A. Deschamps, V. Farra, O. Gauthier, T. Georges, and M. Greffet were of great benefit to me during the fall seminar on "synthetic body-wave modeling" led by R. Madariaga. Discussions with P. Lailly and L. Nicoletis were also helpful. Finally, many thanks to "Lettres et Sciences Humaines-LSH-de l'Université de PARIS 7" for allowing me to use their laser printer for raster images, through a local microcomputer network. I also thank two unknown reviewers for their helpful comments.

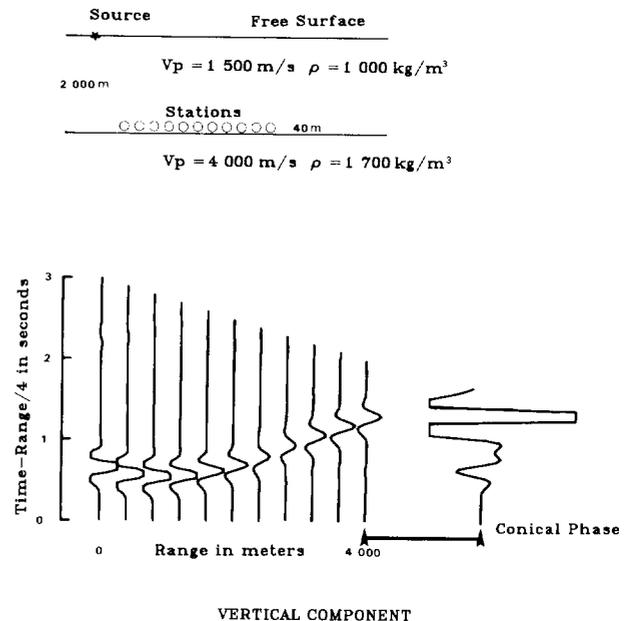


FIG 11. Numerical vertical seismograms above the interface between liquid and solid media, as depicted in the upper left. The seismogram at offset 4 000 m is amplified in order to see the conical phase propagating at 4 000 m/s.

### REFERENCES

- Achenbach, J. D., 1975, Wave propagation in elastic solids: North Holland Publ. Co.  
 Achenbach, J. D., Gantesen, A. K., and McMaken, H., 1982, Ray methods for waves in elastic solids: Pitman Publ. Inc.  
 Aki, K., and Larner, K. L., 1970, Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane *SH*-waves: *J. Geophys. Res.*, **75**, 933-954.  
 Aki, K., and Richards, P., 1980, Quantitative seismology, theory and methods: W. H. Freeman & Co.  
 Alekseev, A. S., and Mikhailenko, B. G., 1980, The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods: *J. Geophys.*, **48**, 161-172.  
 Alterman, Z., and Karal, F. C., 1968, Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 367-398.  
 Bamberger, A., Chavent, G., and Lailly, P., 1980, Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire: *Rapports de recherche* **41**, INRIA.  
 Bard, P. Y., and Bouchon, M., 1980, The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1: The case of incident *SH* waves: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **70**, 1263-1286.  
 Ben-menahem, A., and Singh, S. J., 1981, Seismic waves and sources: Springer-Verlag New York Inc.  
 Boore, D. M., 1972, Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, in Bolt, B. A. Ed., *Methods in computational physics*, **11**: Academic Press, Inc.  
 Červený, V., Molotkov, I. A., and Pšeničák, I., 1977, Ray method in seismology: Univ. of Karlova.  
 Chapman, C. H., 1978, A new method for computing synthetic seismograms: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **64**, 321-372.  
 Chapman, C. H., and Drummond, R., 1982, Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 5277-5317.

- Clayton, R. W., and Engquist, B., 1980, Absorbing boundary conditions for wave-equation migration: *Geophysics*, **45**, 895-904.
- Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., and Press, F., 1957, *Elastic waves in layered media*: McGraw-Hill Book Co.
- Fuchs, K., and Müller, G., 1971, Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **23**, 417-433.
- Gauthier, O., 1983, Inversion de données de sismique réflexion dans l'approximation acoustique: Rapport de stage de D.E.A., Univ. de PARIS 7.
- Gauthier, O., Virieux, J., and Tarantola, A., 1985, Two-dimensional non-linear inversion of seismic waveforms: numerical results in press.

- George, T., Virieux, J., and Madariaga, R., 1985, Gaussian beam of complex structures: comparison with other techniques in press.
- Gupta, R. N., 1966, Reflection of elastic waves from a linear transition layer: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **56**, 511-526.
- Helmberger, D. V., 1968, The crust-mantle transition in the Bering Sea: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **58**, 179-214.
- Hong, T. L., and Helmberger, D. V., 1978, Glorified optics and wave propagation in nonplanar structure: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 2013-2032.
- Keller, J. B., 1962, Geometrical theory of diffraction: *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 116-130.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms: A finite-difference approach: *Geophysics*, **41**, 2-27.

## VERTICAL COMPONENT

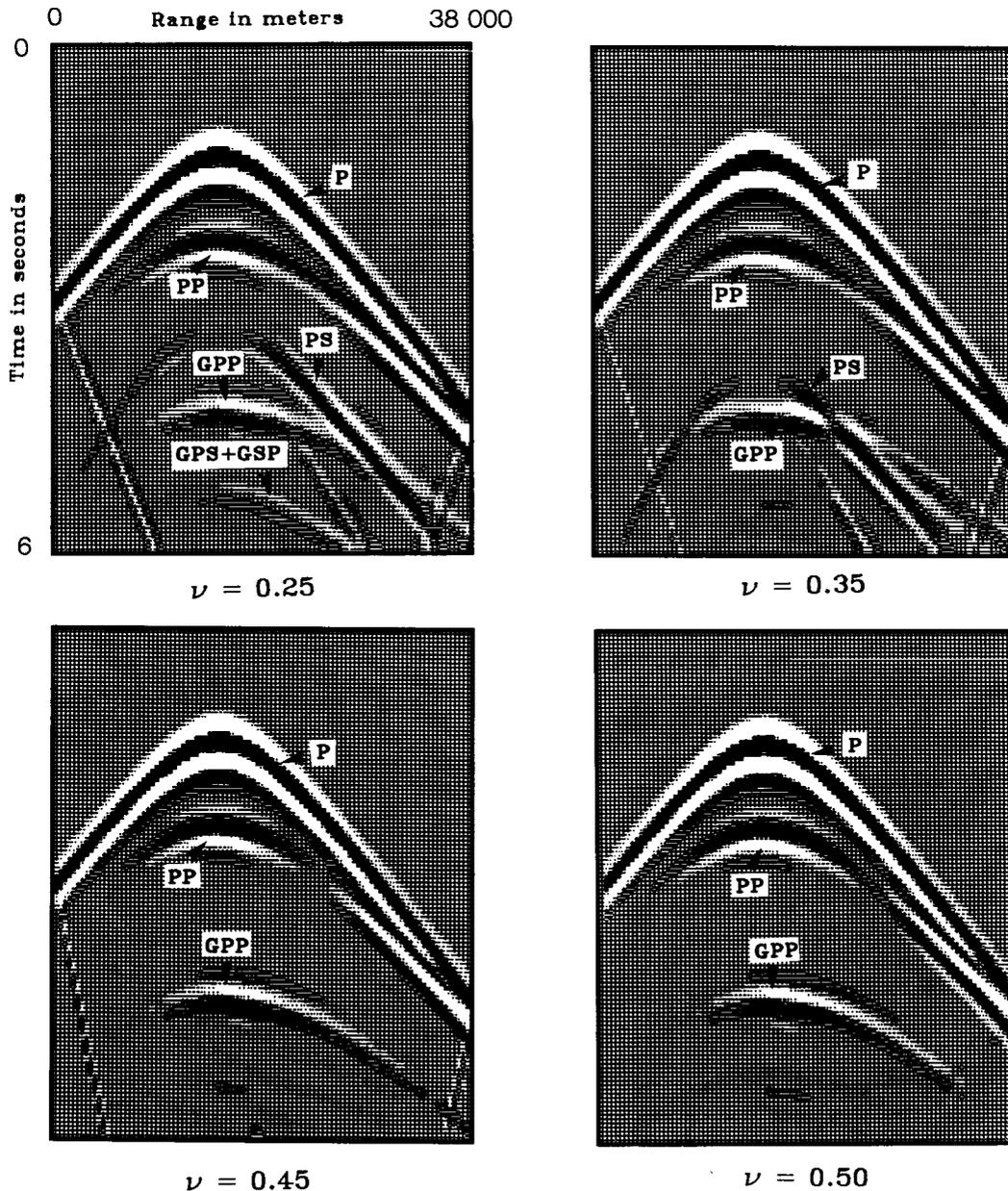


FIG. 12. Evolution of vertical numerical seismograms from the solid-solid corner-edge model to the liquid-solid corner-edge model. Different Poisson's ratios  $\nu$  are taken for 0.25 to 0.5.

Lamb, H., 1904, On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid: *Phil. Trans. Roy. Soc. London.*, **A203**, 1-42.  
 Lee, J. J., and Langston, C. A., 1983, Three-dimensional ray tracing and the method of principal curvature for geometric spreading: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 765-780.  
 Madariaga, R., 1976, Dynamics of an expanding circular fault: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **66**, 163-182.  
 Madariaga, R., and Papadimitriou, P., 1985, Gaussian beam modelling of upper mantle phases: *Annal. Geophys.*, in press.  
 Marchuk, G. I., 1975, *Methods of numerical mathematics*: Springer-Verlag New York, Inc.  
 Mikhailenko, B. G., and Korneev, V. I., 1984, Calculation of synthetic seismograms for complex subsurface geometries by a combination of finite integral Fourier transforms and finite difference techniques: *J. Geophys.*, **54**, 195-206.  
 Nicoletis, L., 1981, Simulation numérique de la propagation d'ondes

sismiques dans les milieux stratifiés à deux et trois dimensions: contribution à la construction et à l'interprétation des sismogrammes synthétiques: Thèse, Univ. Pierre et Marie Curie.  
 Smith, W. D., 1975, The application of finite-element analysis to body wave propagation problems: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **42**, 747-768.  
 Stephen, R. A., 1983, A comparison of finite difference and reflectivity seismograms for marine models: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **72**, 39-58.  
 Virieux, J., 1984, *SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method*: *Geophysics*, **49**, 1933-1957.  
 Virieux, J., and Madariaga, R., 1982, Dynamic faulting studied by a finite difference method: *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 345-369.  
 Zienkiewicz, O. C., and Morgan, K., 1982, *Finite elements and approximation*: John Wiley & Sons, Inc.

### VERTICAL COMPONENT

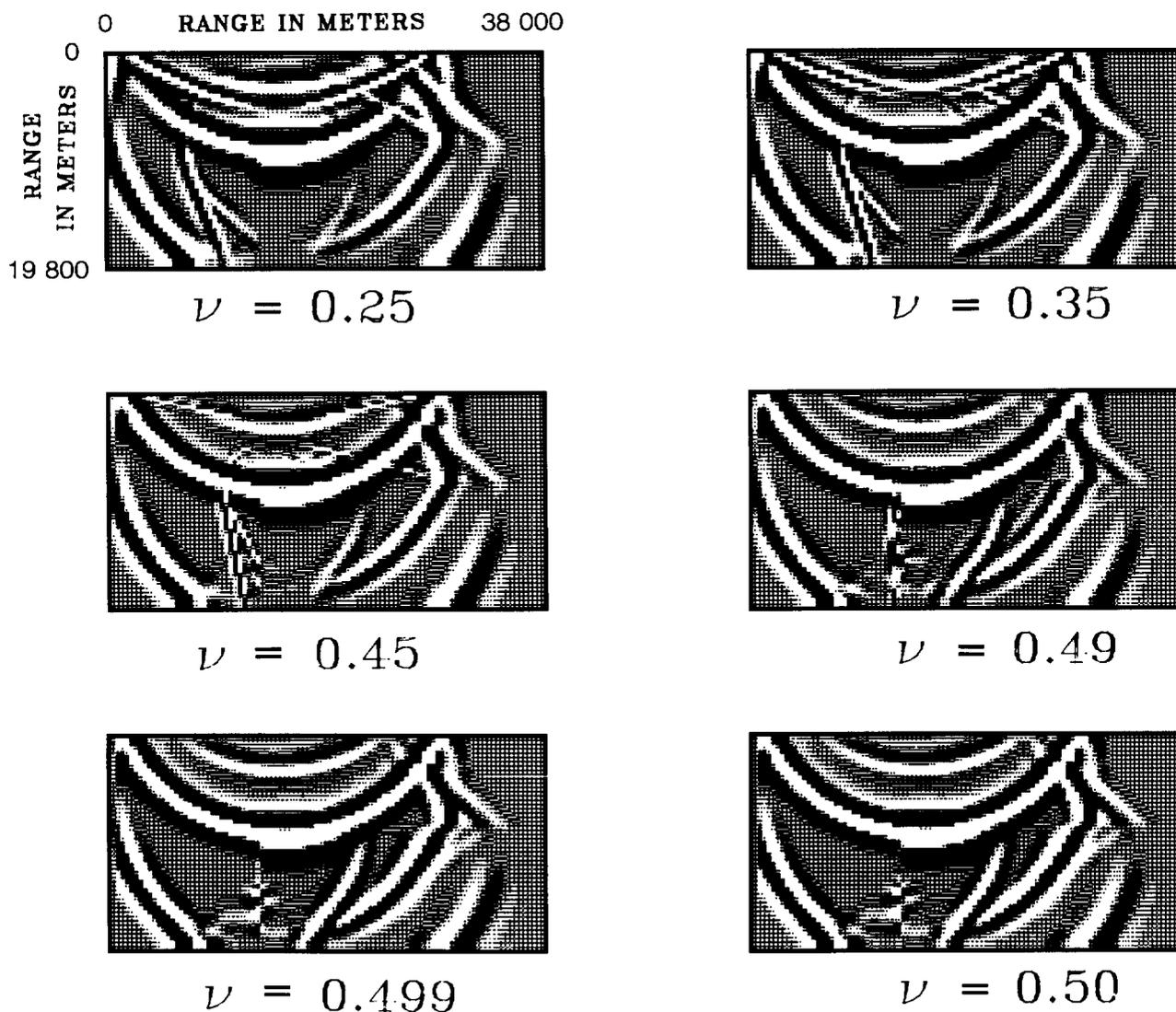


FIG. 13. Pictures of the corner-edge medium for different Poisson's ratios at the same time  $t = 2.995$  s. See figure 10 for the wavefront interpretation.

## **12 ANEXO 2: Código del Programa**

```

!*****
!
! PROGRAM: ProgramaMaestria
!
! PURPOSE: Trabajo de grado para optar titulo de maestría
!          Programa Final de Virieux Oh^2
!          Codigo fortran para integracion de ecuacion de onda P-SV
!          Diferencias finitas en el dominio del tiempo Virieux 1986
!          Maximiliano Villadiego
!
!*****
! CONTROL DE CAMBIOS:
! 28/08/2018
!*****
  program ProgramaMaestria

    implicit none

! declaracion de variables

!Dominio geometrico y temporal
real::bb, XI,ZJ, h, deformacion !son ancho faja de carga, dimensiones en x y en z EJE
Z POSITIVO HACIA ABAJO EJE X POSITIVO HACIA DERECHA y espesor del suelo 1
real::dx,dz,dt !son los pasos en x, en z, y en t
integer::nx,nz,nt !numero de nodos x, en z, y en t
real::t0,tn, maxVsig, maxSzs sig !son los tiempos inicial y final de la moleación
integer::n,i,j,t, ix, jz, conta, ir, imv, jmv, ims, jms !contadores en tiempo y dimensión
x & z

!parámetros de material
real::ro_1,l_1,m_1,v_1,E_1 !que son los parametros de lamé, la densidad, módulos de
poisson y young estrato 1.
real::ro_2,l_2,m_2,v_2,E_2,sumAsent, sumAsentCol !que son los parametros de lamé, la
densidad, módulos de poisson y young estrato 2.

real,dimension(:,:),allocatable::ro !densidad matricial
real,dimension(:,:),allocatable::l,m,v,E !constantes de lamé matricial

!Variable principal velocidad
real, dimension(:,:),allocatable::Usig,Vsig !velocidad siguiente +1/2
real, dimension(:,:),allocatable::Uact,Vact !velocidad anterior -1/2

!Variable principal esfuerzo
real, dimension(:,:),allocatable::Sxsig,Szs sig,Sxzs sig !esfuerzo siguiente +1
real, dimension(:,:),allocatable::Sxact,Szact,Sxzact,temp !esfuerzo anterior +0

!Variable para almacenar la columna y su suma total de asentamiento
real, dimension(:,:),allocatable::AsentamientosCol

!Para impresiones periodicas
real, dimension(:,:),allocatable::graf1, puntosModelar !captura esfuerzo y/o desplazamiento
para un punto especifico

!variables para la carga
integer::ini,nD,anD !contadores de rampas y numero de nodos
real::Q0,Fr,xFr !Carga muerta que corresponde a la máquina y la cimentación, frecuencia de
carga, fraccion de frecuencia para magnitud de vibracion
real::Qe !Fuerza excentrica u oscilante
real::Fs !variable auxiliar para esfuerzo de contacto

!
!*****
! DE VALORES INICIALES
!
bb=0 !ancho de faja de carga
print *, "
print *, "Escuela Colombiana de Ingenieria Julio Garavito
print *, "Trabajo de grado para optar titulo de maestría Ingenieria Civil

```

```

print *, "Maximiliano Villadiego"
print *, "
print *, "
print *, "Escriba el ancho de faja de carga (m):"
read *, bb !ancho de faja de carga
!bb=0.2
print *, "Escriba el espesor del estrato 1 (m):" !h
read *, h !espesor del estrato 1 (m)
!h=0.2
print *, "Escriba el delta en la dirección x(m):" !dx
read *, dx !delta en la dirección x(m)
!dx=0.01
print *, "Escriba el delta en la dirección z(m):" !dz
read *, dz !delta en la dirección z(m)
!dz=0.01
!print *, "Escriba el delta en la dirección t(s):" !dt
!read *, dt !delta en la dirección t(s)
dt=0.00001

!MATERIAL #1 - Suelo superior
print *, "Escriba la densidad del estrato 1 (kg/m3):" !ro_1 (kg/m3)
read *, ro_1 !densidad del estrato 1 (kg/m3)
!ro_1=2000.
print *, "Escriba módulo de elasticidad del estrato 1 (N/m2):" !E_1 Módulo de elasticidad
(N/m2)
read *, E_1 !módulo de elasticidad del estrato 1 (N/m2)
!E_1=3333333333.32
print *, "Escriba módulo de Poisson del estrato 1:" !v_1 módulo de Poisson
read *, v_1 !módulo de Poisson del estrato 1
!v_1=0.25

!MATERIAL #2 - Suelo inferior
print *, "Escriba la densidad del estrato 2 (kg/m3):"
read *, ro_2 !densidad del estrato 2 (kg/m3)
!ro_2=1800.
print *, "Escriba módulo de elasticidad del estrato 2 (N/m2):" !E_2 Módulo de elasticidad
(N/m2)
read *, E_2 !módulo de elasticidad del estrato 2 (N/m2)
!E_2=60000015.82
print *, "Escriba módulo de Poisson del estrato 2:" !v_2 módulo de Poisson
read *, v_2 !módulo de Poisson del estrato 2
!v_2=0.25

print *, "Escriba la fuerza excentrica u oscilante (N):"
read *, Qe !fuerza excentrica u oscilante (N)
!Qe=50.
print *, "Escriba la frecuencia de carga (revoluciones por segundo - Hz):" !Fr (Hz)
read *, Fr !frecuencia de carga (revoluciones por segundo - Hz)
!Fr=30.

!ingreso de valores

XI=10.*bb !largo del dominio unidades m
ZJ=7.*bb !alto del dominio unidades m
t0=0. !tiempo inicial de la propagación unidades s
tn=1.0 !tiempo final de la propagación unidades s
Q0=0

l_1=E_1*v_1/((1.+v_1)*(1.-2.*v_1)) !Primer parámetro de lamé estrato 1
m_1=E_1/(2.*(1+v_1)) !Segundo parámetro de lamé estrato 1
l_2=E_2*v_2/((1.+v_2)*(1.-2.*v_2)) !Primer parámetro de lamé estrato 2
m_2=E_2/(2.*(1+v_2)) !Segundo parámetro de lamé estrato 2

print *, "Escriba la carga muerta, corresponde a la máquina y la cimentación(N):"
read *, Q0 !carga muerta, corresponde a la máquina y la cimentación(N)
!Q0=50000.

anD=aint(bb/dx/2.) !numero de nodos del centro al extremo de la faja de carga

```

```

!calculo de numero de nodos
nx=XI/dx+1. !Numero de nodos del eje x
nz=ZJ/dz+1. !Numero de nodos del eje z
nt=(tn-t0)/dt+1 !Numero de nodos del eje t (tiempo)
ini=aint(0.3/dt) !paso de inicio del vibrado

!Punto central de la superficie
nD=aint(0.5*nx)

!Declaracion de tamaño de matrices
allocate(Uact(1:nx,1:nz))
allocate(Usig(1:nx,1:nz))
allocate(Vact(1:nx,1:nz))
allocate(Vsig(1:nx,1:nz))
allocate(Sxact(1:nx,1:nz)) !esfuerzo en X
allocate(Sxsig(1:nx,1:nz))
allocate(Szact(1:nx,1:nz)) !esfuerzo en Z
allocate(Szsig(1:nx,1:nz))
allocate(Sxzact(1:nx,1:nz)) !esfuerzo en XZ
allocate(Sxzsig(1:nx,1:nz))
allocate(temp(1:nx,1:nz))
allocate(graf1(1:nt,6)) !para captura de datos
allocate(puntosModelar(1:nt,3))
allocate(AsentamientosCol(1:nx,2))
!---!PROPIEDADES DE LOS MATERIALES!---!
allocate(ro(1:nx,1:nz))
allocate(l(1:nx,1:nz))
allocate(m(1:nx,1:nz))
allocate(v(1:nx,1:nz))
allocate(E(1:nx,1:nz))

imv=0
jmv=0
ims=0
jms=0
Uact=0.
Usig=0.
Vact=0.
Vsig=0.
Sxact=0.
Sxsig=0.
Szact=0.
Szsig=0.
Sxzact=0.
Sxzsig=0.
temp=0.
graf1=0.
v=0.
E=0.

!Ensamble de matriz de parametros de material (Global)
do i=1,nx
  do j=1,nz
    if(j>= (h/dz)+1) then
      ro(i,j)=ro_2
      l(i,j)=l_2
      m(i,j)=m_2
      v(i,j)=v_2
      E(i,j)=E_2
    else
      ro(i,j)=ro_1
      l(i,j)=l_1
      m(i,j)=m_1
      v(i,j)=v_1
      E(i,j)=E_1
    endif
  enddo
enddo

```

```

!+++++-----INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN-----
!+++++
COMIENZA DELTA DE TIEMPO

do n=1,nt

!
!***** INICIO
CARGA SINUSOIDAL
!
  if(n<=ini)then !FRACCIONES PARA RAMPA LINEAL DE CARGA - PESO MUERTO
    do i=-anD,anD-1
      Fs=Q0*n/ini
      Szact(nD+i,1)=-Fs
    enddo
  else !YA PASO LOS 0.3 SEGUNDOS COMIENZA A VIBRAR
    xFr=0.5*Fr*n/ini !se evalua la fracción de frecuencia para aumento lineal de amplitud
de vibracion
    if(xFr>=Fr)Then !control rampa vibracion
      xFr=Fr
    endif
    do i=-anD,anD-1
      Fs=Q0
      Szact(nD+i,1)=-Fs-Qe*(xFr/Fr)*cos(2.*3.141592654*Fr*n*dt) !carga muerta mas vibración
    enddo
  endif
!
!***** FIN CARGA
SINUSOIDAL
!

!
!***** INICIO CARGA SINUSOIDAL
VALOR n+1 para calculo de Sx
!
  if(n+1<=ini)then !FRACCIONES PARA RAMPA LINEAL DE CARGA - PESO MUERTO
    do i=-anD,anD-1
      Fs=Q0*(n+1)/ini
      Szsigt(nD+i,1)=-Fs
    enddo
  else !YA PASO LOS 0.3 SEGUNDOS COMIENZA A VIBRAR
    xFr=0.5*Fr*(n+1)/ini !se evalua la fracción de frecuencia para aumento lineal de
amplitud de vibracion
    if(xFr>=Fr)Then !control rampa vibracion
      xFr=Fr
    endif
    do i=-anD,anD-1
      Fs=Q0
      Szsigt(nD+i,1)=-Fs-Qe*(xFr/Fr)*cos(2.*3.141592654*Fr*(n+1)*dt) !carga muerta mas
vibración
    enddo
  endif
!
!***** FIN CARGA SINUSOIDAL VALOR n
+1 para calculo de Sx
temp(nD,1)=Szact(nD,1)
!PARA MOSTRAR DATOS en pantalla valores de V y paso de integración
deformacion=Szsigt(nD,41)*(1.+v(nD,41))*(1.-2.*v(nD,41))/(E(nD,41)*(1.-v(nD,41)))*dz
print*,n,Szact(nD,1),Uact(nD,1),Vact(nD,1),Szsigt(nD,41),deformacion !Uact(nD,1) quitar
anD de U DONDE SE ME ANTOJE

!
  if(n==100)then
!
  pause
!
  endif
!
!***** INICIO

```

```

VELOCIDADES
!
!hacemos una iteración entonces es "medio" paso en el tiempo total de actualización de las
ecuaciones

! Velocidad en X --> U nodo interno
do i=2,nx
  do j=2,nz
    !un paso para la velocidad +1/2 en tiempo
    Usig(i,j)=Uact(i,j)+1./ro(i,j)*dt/dx*(Sxact(i,j)-Sxact(i-1,j))&
      +1./ro(i,j)*dt/dz*(Sxzact(i,j)-Sxzact(i,j-1))
  enddo
enddo

!PARA SUPERFICIE LIBRE j=1 PARA U
do i=2,nx-1
  j=1
  Usig(i,1)=Uact(i,1)+1./ro(i,j)*dt/dx*(Sxact(i,1)-Sxact(i-1,1))&
    +1./ro(i,j)*dt/dz*(2.*Sxzact(i,1))
enddo

! Velocidad en Z --> V NODO INTERNO y superficie libre
do i=1,nx-1
  do j=1,nz-1
    !un paso para la velocidad +1/2 en tiempo
    Vsig(i,j)=Vact(i,j)+1./ro(i,j)*dt/dx*(Sxzact(i+1,j)-Sxzact(i,j))&
      +1./ro(i,j)*dt/dz*(Szact(i,j+1)-Szact(i,j))
  enddo
enddo

!
!***** fin de
velocidades
!
!
!***** INICIO
esfuerzos
!
! Esfuerzo compresion en X nodo interno
do i=1,nx-1
  do j=2,nz
    !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
    Sxsig(i,j)=Sxact(i,j)+(1(i,j)+2.*m(i,j))*dt/dx*(Usig(i+1,j)-Usig(i,j))&
      +1(i,j)*dt/dz*(Vsig(i,j)-Vsig(i,j-1))
  enddo
enddo

! Esfuerzo en Z nodo interno
do i=1,nx-1
  do j=2,nz
    !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
    Szsig(i,j)=Szact(i,j)+(1(i,j)+2.*m(i,j))*dt/dz*(Vsig(i,j)-Vsig(i,j-1))&
      +1(i,j)*dt/dz*(Usig(i+1,j)-Usig(i,j))
  enddo
enddo

! Esfuerzo XZ nodo interno
do i=2,nx
  do j=1,nz-1
    !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
    Sxzsig(i,j)=Sxzact(i,j)+m(i,j)*dt/dz*(Usig(i,j+1)-Usig(i,j))&
      +m(i,j)*dt/dx*(Vsig(i,j)-Vsig(i-1,j))
  enddo
enddo

! Esfuerzo en Z superficie libre ZONA POR FUERA DE LA CARGA

```

```

do i=1,-anD-1
  j=1
  !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
  Szsig(i,j)=0.
  Szact(i,j)=0.
enddo
do i=anD,nx
  j=1
  !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
  Szsig(i,j)=0.
  Szact(i,j)=0.
enddo

! Esfuerzo compresion en X nodo interno
do i=1,nx-1
  j=1
  !un paso para calculo de esfuerzos +1/2 de tiempo para completar el paso 1
  Sxsig(i,j)=Sxact(i,j)+(l(i,j)+2.*m(i,j))*dt/dx*(Usig(i+1,j)-Usig(i,j))&
    +l(i,j)*dt/dz*(Szsig(i,j)-Szact(i,j)-l(i,j)*(Usig(i+1,j)-Usig(i,j)))/(l(i,j)+2
  .*m(i,j)))
enddo

!-----
!-----CONDICIONES ABSORBENTES CERJAN-----
!---FRONTERA izquierda
do i=1,25
  do j=1,nz
    Usig(i,j)=exp(-(0.007397101*(25-i)**2))*Usig(i,j)
    Vsig(i,j)=exp(-(0.007397101*(25-i)**2))*Vsig(i,j)
  enddo
enddo

!---FRONTERA derecha
do i=nx-25,nx
  do j=1,nz
    Usig(i,j)=exp(-(0.007397101*((nx-25)-i)**2))*Usig(i,j)
    Vsig(i,j)=exp(-(0.007397101*((nx-25)-i)**2))*Vsig(i,j)
  enddo
enddo

!---FRONTERA inferior
do i=1,nx
  do j=nz-25,nz
    Usig(i,j)=exp(-(0.007397101*((nz-25)-j)**2))*Usig(i,j)
    Vsig(i,j)=exp(-(0.007397101*((nz-25)-j)**2))*Vsig(i,j)
  enddo
enddo

!-----
!-----CAPTURA DE SISMOGRAMAS-----

! V es velocidad en Z
! W es desplazamiento en Z
! cinematica W=V*t
! pero se esta integrando paso a paso (dt)
! delat_W=Vmedia*dt
! W=sumatoria de los deltas_W
! sumAsent: es la suma de la deformación en cada nodo

if(n>1) then
  graf1(n,1)=n
  graf1(n,2)=-temp(nD,1)
  graf1(n,3)=Usig(nD,1)
  graf1(n,4)=Vsig(nD,1)
  graf1(n,5)=-Szsig(nD,41)
  graf1(n,6)=deformacion
  !Puntos para modelar

```

```

    if (n==nt) then
      conta=1
      do i=2,nx-1,1
        do j=2, nz-1, 1
          print *, i, j, -Szsigs(i,j)/graf1(n,2)*100
          puntosModelar(conta,1)=(i-1)*dx
          puntosModelar(conta,2)=(j-1)*dz
          puntosModelar(conta,3)=-Szsigs(i,j)/graf1(n,2)*100
          conta=conta+1
          !pause 1
        enddo
      enddo
    endif

else
  graf1=0
endif

if(n==nt) then
  !Inicio*****12/09/2018*****
  maxVsig=0
  do i=2,nD, 1
    sumAsentCol = 0
    do j=2,nz,1
      sumAsentCol=sumAsentCol + graf1(n,2)*bb*(1.-v(i,j))/((1.+v(i,j))*(1.-2.*v(i,j)))*(4
      *E(i,j))*(Szsigs(i,j)/graf1(n,2))*dz
    enddo
    AsentamientosCol(i,1)=i
    AsentamientosCol(i,2)=sumAsentCol
    !*****Inicio 12/09/2018
    do j=1,nz-1
      if(Vsig(i,j)>maxVsig)then
        maxVsig=Vsig(i,j)
        imv=i
        jmv=j
      endif
      if(Szsigs(i,j)>maxSzsigs)then
        maxSzsigs=Szsigs(i,j)
        ims=i
        jms=j
      endif
      print *, "Coordenada actual (" ,i," ,",j,") Vsig ",Vsig(i,j), " max Vsig ",maxVsig,"
      Coord ",imv," ,",jmv," Szsigs ",Szsigs(i,j), " max Szsigs ",maxSzsigs," Coord ",ims," ,",jms
      !pause 1
    enddo

    !*****Fin 12/09/2018

  enddo

  !Fin*****12/09/2018*****

  sumAsent = 0
  do j=2,nz,1

```

```

sumAsent = sumAsent + graf1(n,2)*bb*(1.-v(i,j))/((1.+v(i,j))*(1.-2.*v(i,j))*(4.*E(i,
j)))*(Szsig(nD,j)/graf1(n,2))*dz
enddo

!Inicio*****12/09/2018*****
open (unit=1, file='asentamientosDominio.txt', action='write')
write (1,*) "          #columna          SumaAsentamientoColumna"
do i=2,nx-3, 1 !imprime
write (1,*) AsentamientosCol(i,1), AsentamientosCol(i,2)
enddo
write (1,*) "Ancho faja de carga (m) = ", bb
write (1,*) "Ancho dominio de suelo (m) = ", XI
write (1,*) "Profundidad dominio de suelo (m) = ", ZJ
write (1,*) "Espesor estrato 1 (m) = ", h
write (1,*) "Incrementos en X, dx (m) = ", dx
write (1,*) "Incrementos en Z, dz (m) = ", dz
write (1,*) "Incrementos en el tiempo, dt (m) = ", dt
write (1,*) "Densidad estrato 1, ro_1 (kg/cm3) = ", ro_1
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 1, E_1 (N/m3) = ", E_1
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 1, v_1 = ", v_1
write (1,*) "Densidad estrato 2, ro_2 (kg/cm3) = ", ro_2
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 2, E_2 (N/m3) = ", E_2
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 2, v_2 = ", v_2
write (1,*) "Carga excéntrica u oscilante, Qe (N) = ", Qe
write (1,*) "Frecuencia de oscilación, fr (rev/s ó Hz) = ", Fr
write (1,*) "Carga muerta,peso máquina y cimentación, Q0 (N) = ", Q0
close(1)
!Fin*****12/09/2018*****

!IMPRESIONES EN ARCHIVOS TXT
open (unit=1, file='acelero2.txt', action='write')
write (1,*) "          nt          Sz(nD,1)          Vx(nD,1)          Vz(nD,1)          Sz(nD
,41)          Asentamiento(nD,41)"
do i=1,n,20 !imprime cada 20 pasos para lograr 50 mil filas
write (1,*) graf1(i,1),graf1(i,2),graf1(i,3),graf1(i,4),graf1(i,5),graf1(i,6)
!105 format(F8.0,F7.2,3(1x,F20.12))
enddo
write (1,*) "Asentamiento total (m) = ", sumAsent
write (1,*) "Máximo de Szsig ", maxSzsig, " Szsig (",ims,",",jms,")"
write (1,*) "Máximo de Vsig ", maxVsig, " Vsig (",imv,",",jmv,")"
write (1,*) "Ancho faja de carga (m) = ", bb
write (1,*) "Ancho dominio de suelo (m) = ", XI
write (1,*) "Profundidad dominio de suelo (m) = ", ZJ
write (1,*) "Espesor estrato 1 (m) = ", h
write (1,*) "Incrementos en X, dx (m) = ", dx
write (1,*) "Incrementos en Z, dz (m) = ", dz
write (1,*) "Incrementos en el tiempo, dt (m) = ", dt
write (1,*) "Densidad estrato 1, ro_1 (kg/cm3) = ", ro_1
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 1, E_1 (N/m3) = ", E_1
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 1, v_1 = ", v_1
write (1,*) "Densidad estrato 2, ro_2 (kg/cm3) = ", ro_2
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 2, E_2 (N/m3) = ", E_2
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 2, v_2 = ", v_2
write (1,*) "Carga excéntrica u oscilante, Qe (N) = ", Qe
write (1,*) "Frecuencia de oscilación, fr (rev/s ó Hz) = ", Fr
write (1,*) "Carga muerta,peso máquina y cimentación, Q0 (N) = ", Q0

close(1)

!IMPRESIONES EN ARCHIVOS TXT
open (unit=1, file='puntosModelar.txt', action='write')
write (1,*) "          X          Z          Sz"

do i=1,conta,1
write (1,*) puntosModelar(i,1),puntosModelar(i,2),puntosModelar(i,3)
!105 format(F8.0,F7.2,3(1x,F20.12))
enddo
write (1,*) "Asentamiento total (m) = ", sumAsent
write (1,*) "Ancho faja de carga (m) = ", bb

```

```
write (1,*) "Ancho dominio de suelo (m) = ", XI
write (1,*) "Profundidad dominio de suelo (m) = ", ZJ
write (1,*) "Espesor estrato 1 (m) = ", h
write (1,*) "Incrementos en X, dx (m) = ", dx
write (1,*) "Incrementos en Z, dz (m) = ", dz
write (1,*) "Incrementos en el tiempo, dt (m) = ", dt
write (1,*) "Densidad estrato 1, ro_1 (kg/cm3) = ", ro_1
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 1, E_1 (N/m3) = ", E_1
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 1, v_1 = ", v_1
write (1,*) "Densidad estrato 2, ro_2 (kg/cm3) = ", ro_2
write (1,*) "Módulo elasticidad estrato 2, E_2 (N/m3) = ", E_2
write (1,*) "Coeficiente de Poisson estrato 2, v_2 = ", v_2
write (1,*) "Carga excéntrica u oscilante, Qe (N) = ", Qe
write (1,*) "Frecuencia de oscilación, fr (rev/s ó Hz) = ", Fr
write (1,*) "Carga muerta, peso máquina y cimentación, Q0 (N) = ", Q0
close(1)
endif
!-----ACTUALIZACIÓN DE VARIABLES DE INTEGRACIÓN-----
!vectores
Uact=Usig
Vact=Vsig
Sxact=Sxsig
Szact=Szsig
Sxzact=Sxzsig

enddo !paso de tiempo
!+++++
TERMINA DELTA DE TIEMPO

end program ProgramaMaestria
```

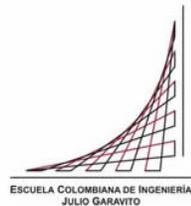
**13 ANEXO 3: Manual de Usuario del Programa Para Integración de Ecuación de Onda P-SV “Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo Virieux 1986”**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA CIVIL**

**MANUAL DE USUARIO DEL PROGRAMA DE MODELACIÓN CON DIFERENCIAS  
FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DE SUELO BICAPA SOMETIDOS A CARGAS  
DINÁMICAS EN SUPERFICIE: CASO 2D**

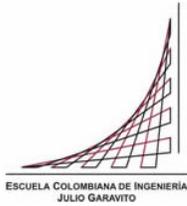
**MAXIMILIANO VILLADIEGO ESTRADA**

**Bogotá D.C. Febrero de 2019**



## Índice general

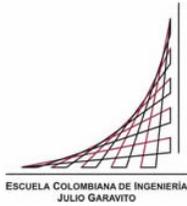
ÍNDICE DE FIGURAS .....	3
MANUAL DE USUARIO .....	4
1 MODELO NUMÉRICO .....	5
1.1 ARREGLO O GRILLA DE CELDAS .....	7
2 DETALLES DE INTERFACE DEL USUARIO .....	8
2.1 EJECUCIÓN DE LA APLICACIÓN .....	8
2.2 SALIDA DE DATOS .....	12
2.3 LIMITACIONES DEL PROGRAMA .....	19



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

### Índice de Figuras

Figura 1 Esquema que representa el modelo numérico (Fuente: El autor) .....	5
Figura 2 Esquema de arreglo en cuadrícula del modelo geotécnico (Fuente: El autor) .....	7
Figura 3 Imagen de la aplicación en el explorador de Windows (Fuente: El autor) ..	8
Figura 4 Ventana de inicio de ejecución de la aplicación (Fuente: El autor) .....	9
Figura 5 Ventana de la aplicación con datos ingresados (Fuente: El autor) .....	11
Figura 6 Ventana de la aplicación iterando (Fuente: El autor) .....	12
Figura 7 Imagen del explorador de Windows con el archivo de la aplicación y los archivos de texto generados (Fuente: El autor) .....	13
Figura 8 Imagen del archivo de texto asentamientosDominio (Fuente: El autor) ..	14
Figura 9 Cuencos de deformación superpuestos en una misma gráfica (Fuente: el autor) .....	15
Figura 10 Imagen del archivo de texto asentamientosDominio (Fuente: El autor) 16	
Figura 11 Imagen del archivo de texto puntosModelar (Fuente: El autor) .....	17
Figura 12 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa, $f_r=0$ Hz, $h=10$ m, $h'=4$ m y $E_1/E_2=1.552$ (Fuente: el autor) .....	18



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

---

### **Manual de Usuario**

La aplicación CargaDinámica2D es un programa escrito en lenguaje FORTRAN 90 usando la plataforma libre INTEL VISUAL STUDIO, que se puede descargar de la página del proveedor, que es un software libre en la medida en que sea usado para fines académicos. Este programa hace el cálculo de distribución de esfuerzos en un dominio finito de suelo de dos estratos sometido a esfuerzo dinámico, transmitido por una faja infinita de carga.

El programa fue escrito para analizar el comportamiento dinámico de un suelo estratificado bicapa en dos dimensiones con el fin brindar un apoyo exclusivamente académico a estudiantes y docentes interesados en el tema.

El siguiente manual tiene como objetivo mostrar a los posibles usuarios el correcto funcionamiento de la aplicación, a continuación se ilustrarán los detalles de uso de la misma.

El manual se compone de dos capítulos, el primero pretende explicar a grandes rasgos, sin entrar en explicación de teorías y modelos de cálculo, el esquema que compone el modelo numérico de cálculo y los términos o definiciones que lo constituyen. El segundo capítulo explica los detalles de la interface del usuario y su modo de uso.

## 1 Modelo Numérico

El modelo numérico de que trata esta aplicación consiste en el análisis del comportamiento, a nivel de distribución de esfuerzos dinámicos, de un dominio geotécnico bicapa (dos estratos de suelo), a partir de un modelo elástico lineal, el cual superficialmente es sometido a una faja de carga dinámica de ancho finito y longitud infinita. Para este fin se definió un modelo numérico con cuyo dominio espacial y temporal se ha representado los estratos de suelo en un espacio semi-infinito y una historia de carga.

El esquema que representa el dominio del modelo numérico se muestra en la figura 1.

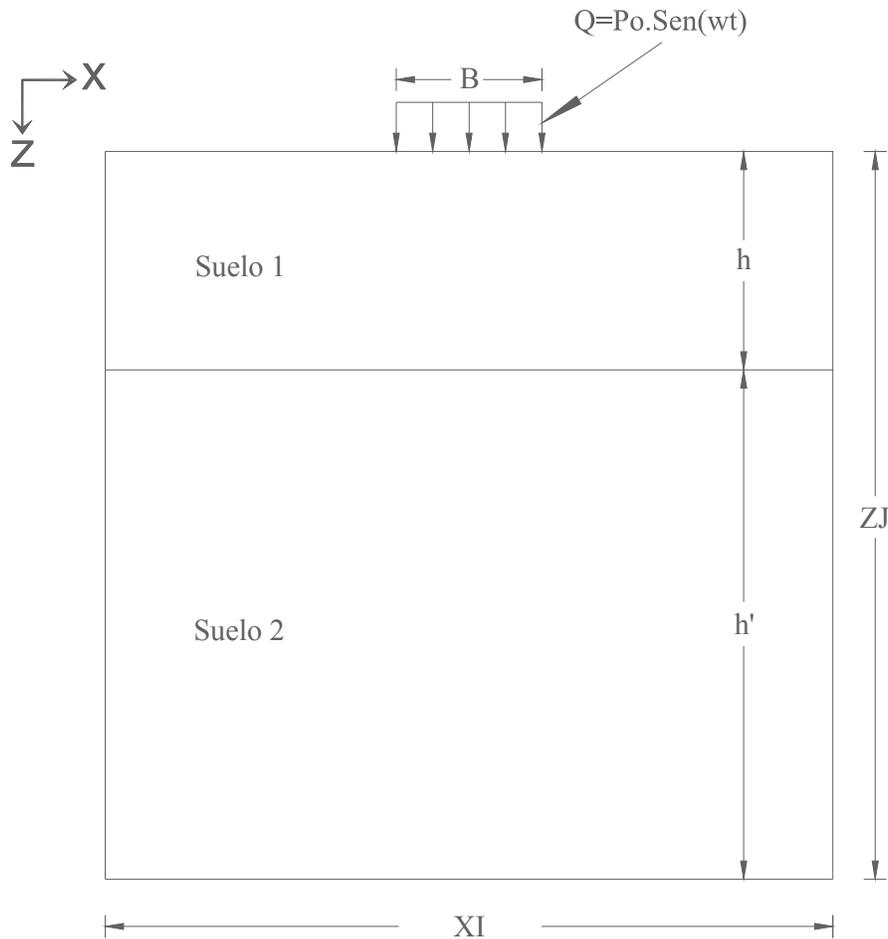
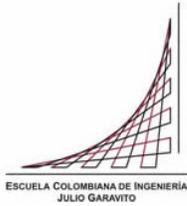


Figura 1 Esquema que representa el modelo numérico (Fuente: El autor)



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

---

La Figura 1 muestra el dominio geotécnico de que trata este análisis numérico, en dos dimensiones, dividido en dos estratos horizontales,  $h$  y  $h'$ , y con una faja de carga localizada en superficie y en el centro del dominio. El ancho,  $B$ , de la faja de carga es definido por el usuario, el ancho y alto del dominio geotécnico dependen del ancho de la faja de carga, el espesor del estrato de suelo superior también es definido por el usuario y el espesor del estrato subyacente es definido por defecto.

El usuario debe definir la magnitud de la carga estática en términos de esfuerzo, la magnitud de la fuerza oscilante y la frecuencia de oscilación de acuerdo con rangos conocidos de vibración de máquinas. Adicionalmente se debe definir los parámetros de los suelos involucrados en el modelo, así:

- ✚ Densidad del estrato 1.
- ✚ Módulo de elasticidad del estrato 1.
- ✚ Módulo de Poisson del estrato 1.
- ✚ Densidad del estrato ( $\rho_2$ ).
- ✚ Módulo de elasticidad del estrato 2.
- ✚ Módulo de Poisson del estrato 2 ( $\nu_2$ )

El modelo numérico lo que hace es simular el proceso de aplicación de cargas al suelo en una secuencia lógica de operación, mediante la ejecución del algoritmo de Virieux a partir de la integración con diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) de las ecuaciones elastodinámicas para el caso 2D de deformaciones en el plano, así:

- ✚ Se inicia con la aplicación de la carga Pseudo-Estática a velocidad constante durante 0.3 s.
- ✚ Continúa con aplicación de vibración transitoria sobre esa carga Pseudo-Estática durante 0.3 s hasta alcanzar el valor máximo de fuerza excitadora o lo que se conoce como estado estacionario de vibración.
- ✚ Finalmente mantiene el estado estacionario de vibración durante otros 0.4 s y termina la modelación.

## 1.1 Arreglo o Grilla de Celdas

Para la solución del problema el modelo se basa en un arreglo, que consiste en dividir el dominio geotécnico en una grilla de celdas rectangulares o cuadrícula, que consiste en subdividir el dominio geotécnico, en un conjunto de rectángulos de lados  $dx$  y  $dz$ , con lo cual se obtiene un espacio constituido por filas y columnas, donde las filas, por conveniencia son enumeradas de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha, de tal suerte que la esquina superior izquierda es el inicio de numeración tanto de las filas como de las columnas, la Figura 2 muestra un esquema de la cuadrícula.

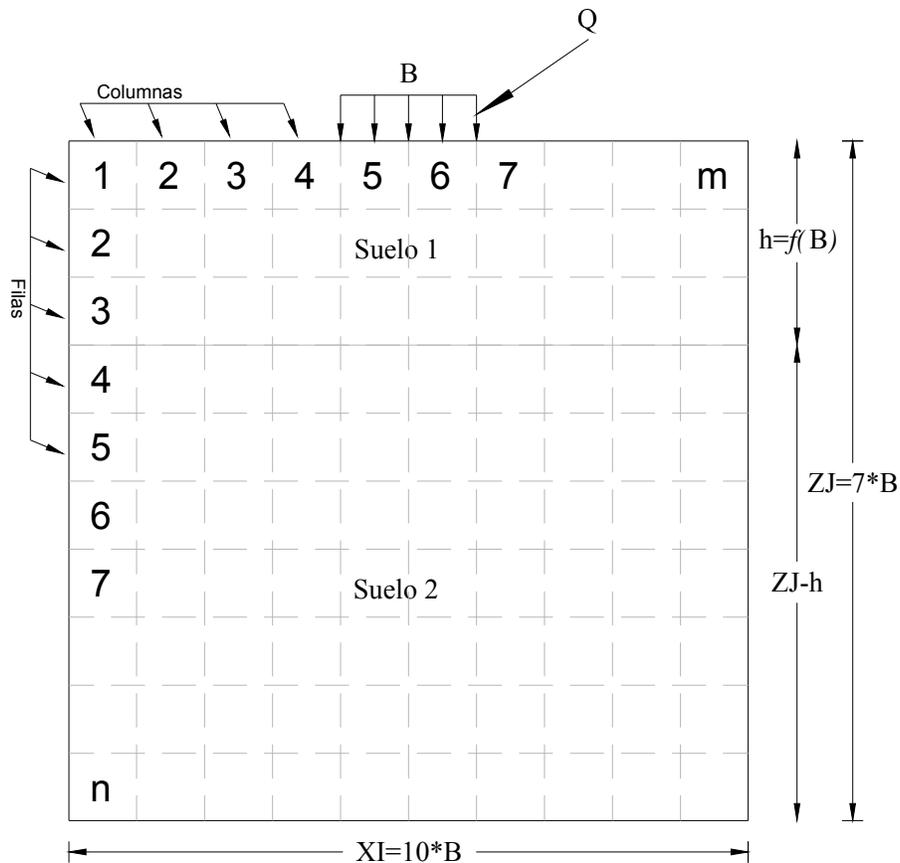
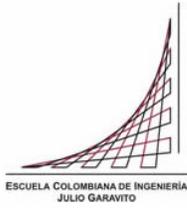


Figura 2 Esquema de arreglo en cuadrícula del modelo geotécnico (Fuente: El autor)



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

Si se tiene que cada cuadrícula corresponde a un par ordenado de la forma  $(x, z)$ , donde  $x$  es el número de columna y  $z$  es el número de fila, y se acepta que cada par ordenado representa el centro geométrico de cada cuadrícula, entonces cualquier cuadrícula posee la siguiente coordenada:

$$(0.5dx+(m-1)dx, 0.5dz+(n-1)dz)$$

## 2 Detalles de Interface del Usuario

A continuación se mostrará la ejecución y modo de empleo de la aplicación.

### 2.1 Ejecución de la aplicación

#### Ingreso a la aplicación

Se abre el explorador de Windows y se localiza la carpeta donde se tiene almacenada la aplicación (ver Figura 3).

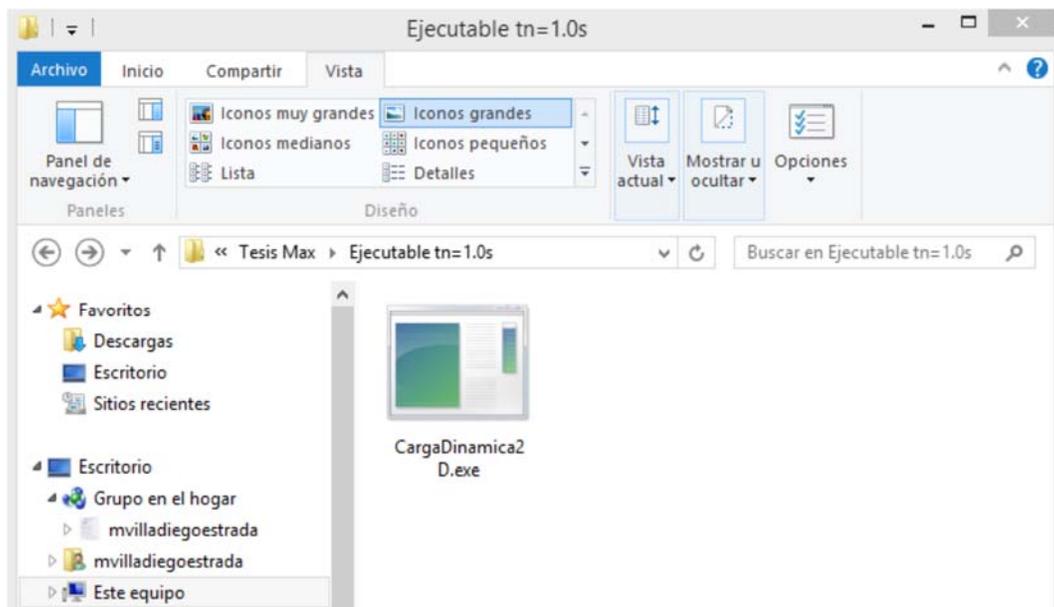
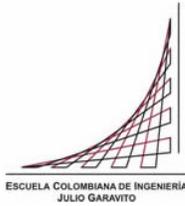


Figura 3 Imagen de la aplicación en el explorador de Windows (Fuente: El autor)



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

Se ejecuta el programa haciendo ENTER sobre la aplicación, con lo que aparece la siguiente ventana (ver Figura 4).

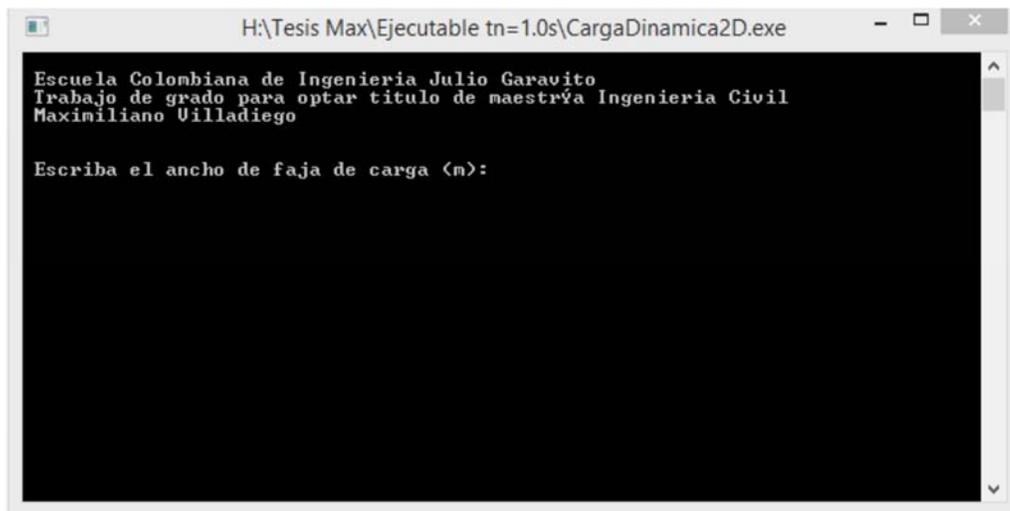


Figura 4 Ventana de inicio de ejecución de la aplicación (Fuente: El autor)

A continuación se ingresan los datos uno a uno y se avanza con ENTER cada vez que se ingresa un dato hasta completar los trece datos solicitados.

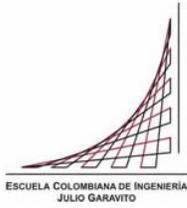
Toda la información que solicita la aplicación se explica a continuación:

1. Ancho,  $B$ , de la faja de carga el cual se debe introducir en metros
2. Espesor,  $h$ , del estrato superior el cual se debe introducir en metros

Aquí debe tenerse en cuenta que el programa define por defecto el ancho del dominio,  $XI=10B$ , y el alto del dominio,  $ZJ=7B$ .

3. Valor de incrementos en la dirección  $X$ ,  $dx$ , y valor de incrementos en la dirección  $Z$ ,  $dz$ , los cuales deben ser determinados manualmente por el usuario como:

$$dx=XI/nx$$



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

---

$$dz=ZJ/nz$$

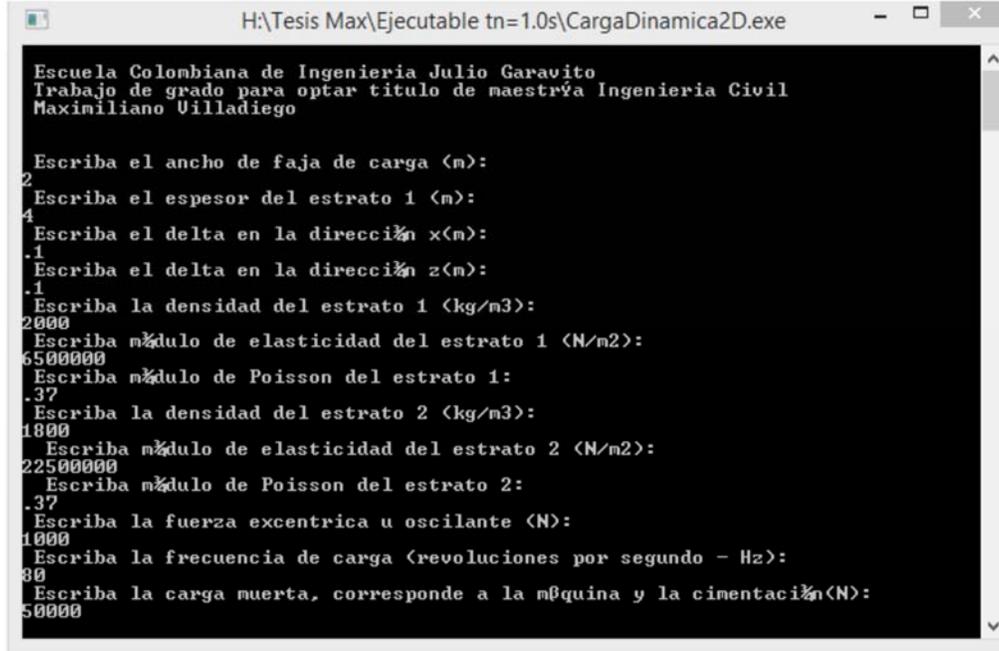
Lo ideal es que  $dx$  y  $dz$  sean iguales y que el valor de  $nx$  sea, por lo menos, 200 para garantizar que el cálculo sea lo más preciso posible, entre más grande sea el número de datos,  $nx$ , menor deberá ser  $dx$ ; pero se hace más lento el cálculo computacional.

Para definir este valor se debe tener en cuenta un criterio muy preciso, es que  $dx$  y  $dz$  sean menores o iguales que  $1/8\lambda$ , esto con el fin de poder garantizar un error aceptable (menor que 10%).

Como la ecuación que define la onda que representa la carga cíclica es de la forma  $P=P_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$ , entonces la longitud de onda se calcula como  $\lambda=2\pi/\omega$ .

4. Densidad del estrato 1 ( $\rho_{1}$ ), que se debe introducir en  $\text{kg/cm}^2$
5. Módulo de elasticidad del estrato 1 ( $E_{1}$ ), que se debe introducir en  $\text{N/m}^2$
6. Módulo de Poisson del estrato 1 ( $\nu_{1}$ ), que es adimensional
7. Densidad del estrato ( $\rho_{2}$ ), que se debe introducir en  $\text{kg/cm}^2$
8. Módulo de elasticidad del estrato 2 ( $E_{2}$ ), que se debe introducir en  $\text{N/m}^2$
9. Módulo de Poisson del estrato 2 ( $\nu_{2}$ ), que es adimensional
10. Fuerza oscilante,  $Q_e$ , que se debe introducir en Newton
11. Frecuencia de oscilación ( $f_r$ ), que se debe introducir en Hz (revoluciones por segundo)
12. Carga estática,  $Q_0$ , que se debe introducir en Newton y corresponde al peso del equipo completo más la cimentación.

Finalmente se tiene una ventana con toda la información ingresada y al dar click en ENTER para el treceavo dato el programa comienza a iterar (ver Figura 5).



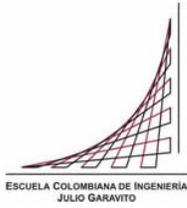
```
H:\Tesis Max\Ejecutable tn=1.0s\CargaDinamica2D.exe

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Trabajo de grado para optar título de maestría Ingeniería Civil
Maximiliano Villadiego

Escriba el ancho de faja de carga (m):
2
Escriba el espesor del estrato 1 (m):
4
Escriba el delta en la dirección x(m):
-1
Escriba el delta en la dirección z(m):
-1
Escriba la densidad del estrato 1 (kg/m3):
2000
Escriba módulo de elasticidad del estrato 1 (N/m2):
6500000
Escriba módulo de Poisson del estrato 1:
-.37
Escriba la densidad del estrato 2 (kg/m3):
1800
Escriba módulo de elasticidad del estrato 2 (N/m2):
22500000
Escriba módulo de Poisson del estrato 2:
-.37
Escriba la fuerza excentrica u oscilante (N):
1000
Escriba la frecuencia de carga (revoluciones por segundo - Hz):
80
Escriba la carga muerta, corresponde a la máquina y la cimentación(N):
50000
```

Figura 5 Ventana de la aplicación con datos ingresados (Fuente: El autor)

Cuando el programa está iterando se observa en pantalla una muestra de la secuencia de los cálculos, los cuales pueden ser usados por el usuario para hacer una inspección de la información que está obteniendo y de acuerdo con su experiencia y conocimiento hacerse algún juicio sobre los mismos (ver Figura 6).



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

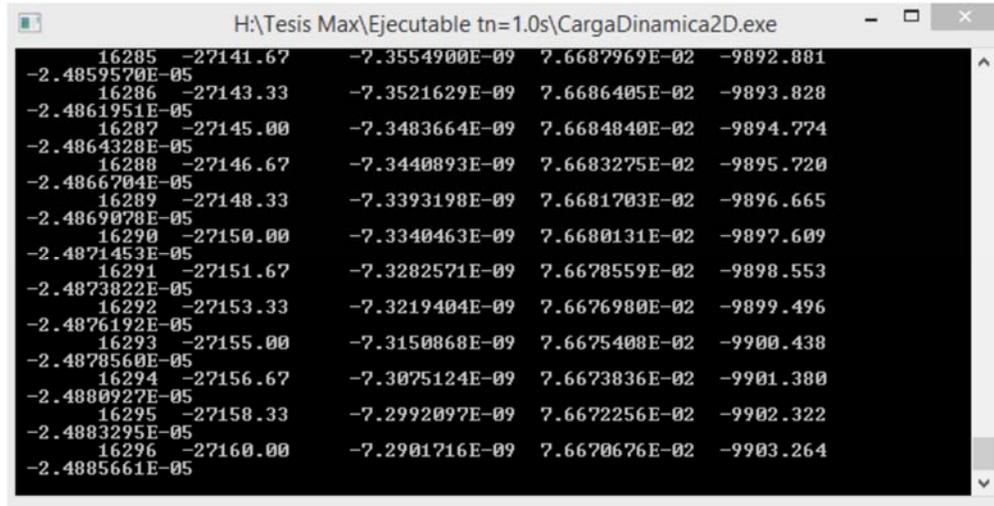


Figura 6 Ventana de la aplicación iterando (Fuente: El autor)

### 2.2 Salida de Datos

Al terminar la ejecución del programa, este genera tres archivos de texto, los cuales son almacenados en la misma carpeta donde se tiene guardada la aplicación (ver Figura 7).

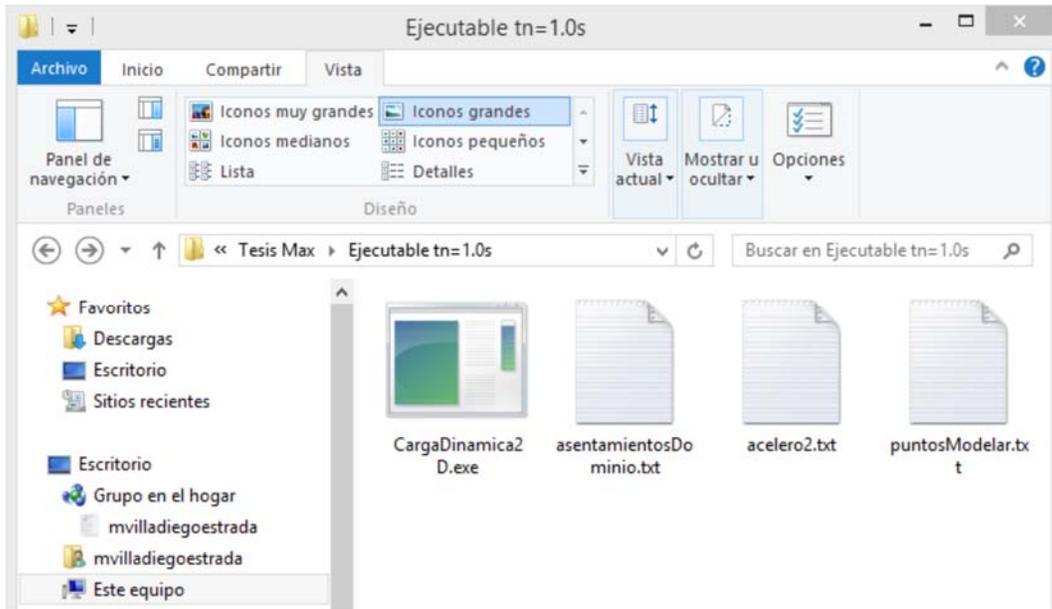
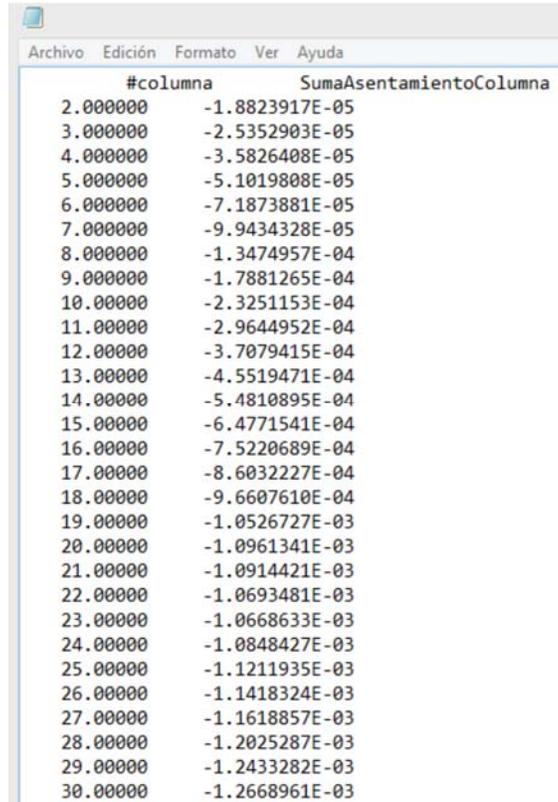


Figura 7 Imagen del explorador de Windows con el archivo de la aplicación y los archivos de texto generados (Fuente: El autor)

Los tres archivos de texto denominados “asentamientosDominio”, “acelero2” y “puntosModelar” contienen la siguiente información:

Archivo **asentamientosDominio**: Este archivo contiene un conjunto de datos organizados a modo de pares ordenados en dos columnas, la primera columna muestra el listado de columnas en que se ha dividido el dominio geotécnico iniciando en la columna 2 y terminando en la columna  $m-2$  (véase Figura 2) y la segunda columna muestra la sumatoria de la deformación elástica de todos los rectángulos localizados debajo de la respectiva columna. Al final del documento de texto aparece el listado de parámetros que constituyen el modelo analizado (ver Figura 8).

## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D



#columna	SumaAsentamientoColumna
2.000000	-1.8823917E-05
3.000000	-2.5352903E-05
4.000000	-3.5826408E-05
5.000000	-5.1019808E-05
6.000000	-7.1873881E-05
7.000000	-9.9434328E-05
8.000000	-1.3474957E-04
9.000000	-1.7881265E-04
10.000000	-2.3251153E-04
11.000000	-2.9644952E-04
12.000000	-3.7079415E-04
13.000000	-4.5519471E-04
14.000000	-5.4810895E-04
15.000000	-6.4771541E-04
16.000000	-7.5220689E-04
17.000000	-8.6032227E-04
18.000000	-9.6607610E-04
19.000000	-1.0526727E-03
20.000000	-1.0961341E-03
21.000000	-1.0914421E-03
22.000000	-1.0693481E-03
23.000000	-1.0668633E-03
24.000000	-1.0848427E-03
25.000000	-1.1211935E-03
26.000000	-1.1418324E-03
27.000000	-1.1618857E-03
28.000000	-1.2025287E-03
29.000000	-1.2433282E-03
30.000000	-1.2668961E-03

Figura 8 Imagen del archivo de texto asentamientosDominio (Fuente: El autor)

Con este conjunto de pares ordenados es posible dibujar el cuenco de deformación debido a la faja de carga aplicada en superficie, la Figura 9 muestra la gráfica de varios cuencos de deformación superpuestos.

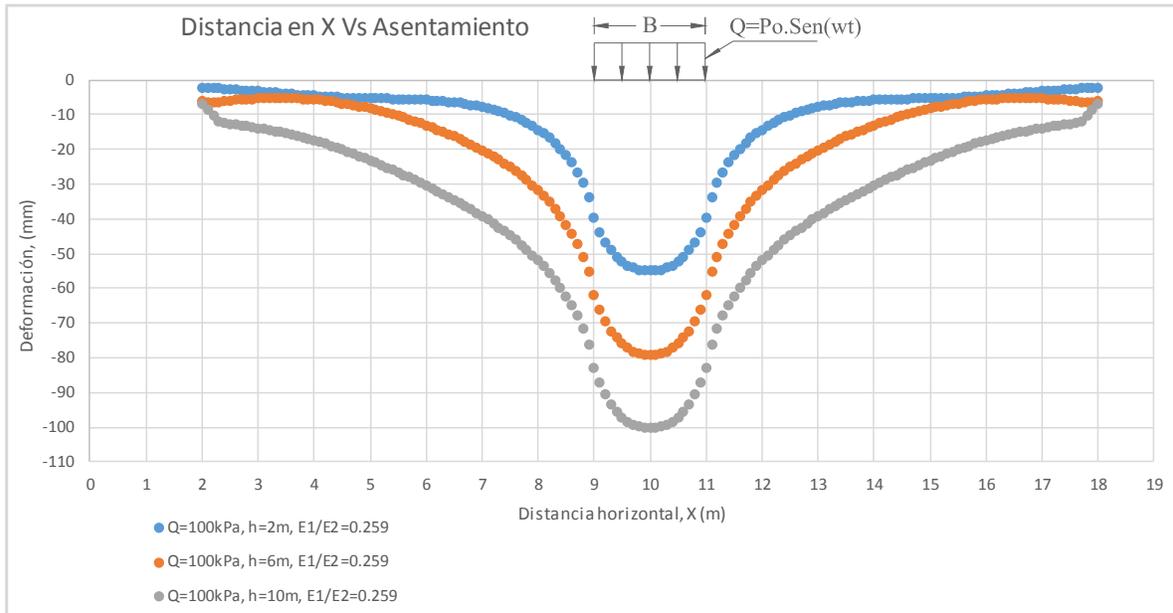


Figura 9 Cuencos de deformación superpuestos en una misma gráfica (Fuente: el autor)

Archivo **acelero2**: Este archivo de texto contiene un conjunto de datos organizados en seis columnas (ver Figura 10).

## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

acelero2.txt: Bloc de notas

nt	Sz(nD,1)	Vx(nD,1)	Vz(nD,1)	Sz(nD,41)
Asentamiento(nD,41)				
0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
0.000000E+00	21.00000	0.000000E+00	1.9207657E-05	0.000000E+00
0.000000E+00	41.00000	0.000000E+00	7.1162722E-05	0.000000E+00
0.000000E+00	61.00000	0.000000E+00	1.5477090E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	81.00000	0.000000E+00	2.6816761E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	101.0000	0.000000E+00	4.0888539E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	121.0000	0.000000E+00	5.7396386E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	141.0000	0.000000E+00	7.6007895E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	161.0000	0.000000E+00	9.6368534E-04	0.000000E+00
0.000000E+00	181.0000	0.000000E+00	1.1811624E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	201.0000	0.000000E+00	1.4089582E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	221.0000	0.000000E+00	1.6437215E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	241.0000	0.000000E+00	1.8824177E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	261.0000	0.000000E+00	2.1224206E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	281.0000	0.000000E+00	2.3615803E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	301.0000	0.000000E+00	2.5982587E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	321.0000	0.000000E+00	2.8313380E-03	0.000000E+00
0.000000E+00	535.0000	0.000000E+00		

Figura 10 Imagen del archivo de texto asentamientosDominio (Fuente: El autor)

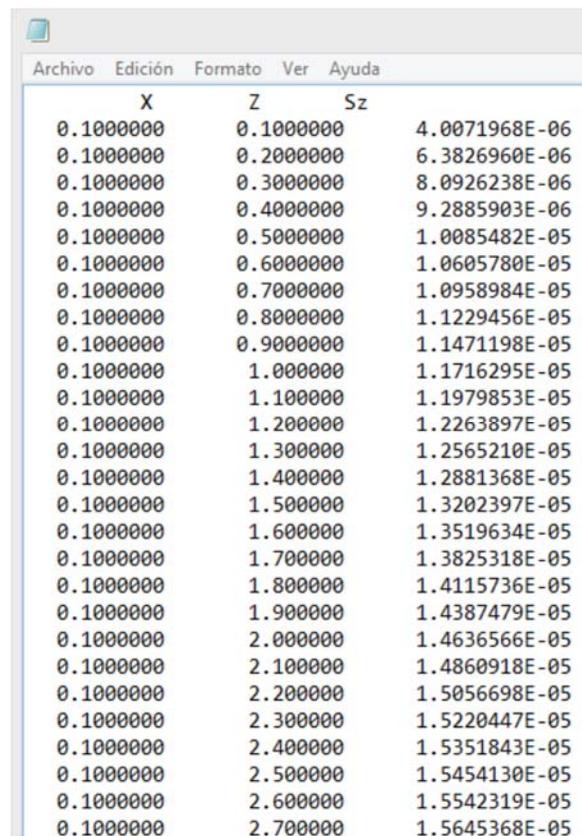
Nota: como el archivo de texto tiene muchas columnas, el valor correspondiente a la sexta columna quedó corrido y se observa ubicado debajo del primer valor (Ver Figura 10).

Los valores que aquí se observan son tiempo de modelación,  $nt$ , esfuerzo en  $Z$  en un punto en el centro de la faja de carga y a la mitad de la primera fila,  $Sz(nD,1)$ , velocidad en  $X$  en un punto en el centro de la faja de carga y a la mitad de la primera fila,  $Vx(nD,1)$ , velocidad en  $Z$  en un punto en el centro de la faja de carga y a la mitad de la primera fila,  $Vz(nD,1)$ , esfuerzo en  $Z$  en un punto en el centro de la faja de carga y a la mitad de la fila 41,  $Sz(nD,41)$ , deformación elástica en un punto en el centro de la faja de carga y en un punto

a la mitad de la fila 41, *Asentamiento(nD,41)*. Al final del documento aparece el asentamiento elástico total en el centro de la faja de carga y el listado de parámetros que constituyen el modelo analizado.

Este conjunto de datos no se emplea para hacer ninguna gráfica, solo se obtiene para ser usados por el usuario y hacer inspección de la información que está obteniendo y de acuerdo con su experiencia y conocimiento hacerse algún juicio sobre la misma.

Archivo **puntosModelar**: Este archivo de texto contiene un conjunto de datos organizados en tres columnas, X, Z y Sz (ver Figura 11).



X	Z	Sz
0.100000	0.100000	4.0071968E-06
0.100000	0.200000	6.3826960E-06
0.100000	0.300000	8.0926238E-06
0.100000	0.400000	9.2885903E-06
0.100000	0.500000	1.0085482E-05
0.100000	0.600000	1.0605780E-05
0.100000	0.700000	1.0958984E-05
0.100000	0.800000	1.1229456E-05
0.100000	0.900000	1.1471198E-05
0.100000	1.000000	1.1716295E-05
0.100000	1.100000	1.1979853E-05
0.100000	1.200000	1.2263897E-05
0.100000	1.300000	1.2565210E-05
0.100000	1.400000	1.2881368E-05
0.100000	1.500000	1.3202397E-05
0.100000	1.600000	1.3519634E-05
0.100000	1.700000	1.3825318E-05
0.100000	1.800000	1.4115736E-05
0.100000	1.900000	1.4387479E-05
0.100000	2.000000	1.4636566E-05
0.100000	2.100000	1.4860918E-05
0.100000	2.200000	1.5056698E-05
0.100000	2.300000	1.5220447E-05
0.100000	2.400000	1.5351843E-05
0.100000	2.500000	1.5454130E-05
0.100000	2.600000	1.5542319E-05
0.100000	2.700000	1.5645368E-05

Figura 11 Imagen del archivo de texto puntosModelar (Fuente: El autor)

X y Z son las coordenadas del centro de todas las cuadrículas en que se ha dividido el dominio geotécnico (ver Figura 2) y la columna Sz corresponde al porcentaje de esfuerzo (en tantos por uno), con respecto al esfuerzo total impuesto en superficie experimentado en el centro de cada cuadrícula. Al final del documento aparece el asentamiento elástico total en el centro de la faja de carga y el listado de parámetros que constituyen el modelo analizado.

Con este conjunto de datos es posible dibujar y representar los resultados como bulbo de esfuerzos o líneas isobaras con ayuda de algún programa de dibujo asistido por computador, la Figura 12 muestra la gráfica de bulbo de esfuerzos o líneas isobaras para una faja de carga de 100 kPa y 2,0 m de ancho aplicados en superficie para un suelo de dos estratos.

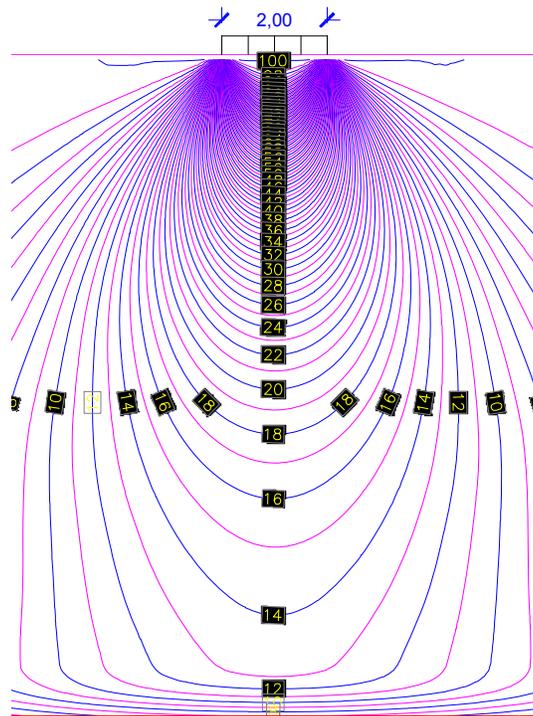
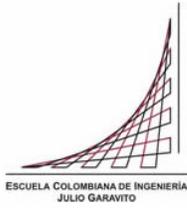


Figura 12 Bulbo de esfuerzos para un esfuerzo de 100 kPa,  $f_r=0$  Hz,  $h=10$  m,  $h'=4$  m y  $E_1/E_2=1.552$  (Fuente: el autor)



## MODELACIÓN CON DIFERENCIAS FINITAS DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE SUELOS ESTRATIFICADOS SOMETIDOS A CARGAS EN SUPERFICIE: CASO 2D

---

### 2.3 Limitaciones del Programa

El módulo de Poisson de los suelos es un valor entre 0.0 y 0.5, para efecto de evitar error de división por cero se debe limitar el uso de módulos de Poisson de 0.5.

El tamaño del enmallado ( $\Delta x$  y  $\Delta z$ ) debe limitarse a valores menores o iguales que  $1/8\lambda$ .

## 14 Bibliografía

- Alterman, Z., & Karal, F. (1968). Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 367-398.
- Cerjan, C., & Dan, K. (1985). A Nonreflecting Boundary Condition for Discrete Acoustic and Elastic Wave Equation. *Geophysics*, 705-708.
- Clayton, R., & Engquist, B. (1977). Absorbing Boundary Conditions For Acoustic and Elastic Wave Equation. *Bulletin of The Seismological Society of America*, 1529-1540.
- Clayton, R., & Engquist, B. (1980). Absorbing boundary conditions for wave-equation migration. *Geophysics*, 985-904.
- Fridtjov, I. (2008). *Continuum Mechanics*. Springer.
- Gray, W. (1984). Comparison of Finite Difference and Finite Element Methods. *NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Fluids in Porous Media* (págs. 901-952). Martinus Nijhoff.
- Heaton, T. (2005). *California Institute of Technology*. Obtenido de [http://www.its.caltech.edu/~heatont/Eng\\_Seism\\_Notes/ch3\\_waves.pdf](http://www.its.caltech.edu/~heatont/Eng_Seism_Notes/ch3_waves.pdf)
- K.R. Kelly, e. a. (1976). Syntetich Seismograms: A Finite Difference Approach. *GEOPHYSICS Vol. 41*, 2-27.
- Kelly, K., & Ward, R. (1976). Synthetic Seismograms: a Finite-Difference Approach. *Geophysics*, 2-27.
- Lamb, H. (1904). On the Propagation of tremors Over de Surface of an Elastic Solid. *Philosophical Transactions*.
- Lautrup, B. (2011). *Physics of Continuous Matter*. CRC Press.
- LeVeque, R. (2005). *Finite Dierence Methods for Dierential Equations (Draft Version)*. University of Washington.
- Lynch, D. (2005). *Numerical Partial Differential Equeations for Enviromental Scientists and Engineers*. Srpinger.
- Moczo, P. (2004). The Finite-Difference Method For Seismologists. *Comenius University Bratislava*, SPICE.
- Moczo, P., & Kristek, J. (2004). *The Finite-Difference Method for Seismologists. An Introduction*. Comenius University Bratislava.
- Müller, G. (2007). *Theory of Elastic Waves*. Germany: Universität Potsdam.
- Reddy, J. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. Mc Graw Hill.
- Rodriguez del Rio, R., & Zuazua, E. (2002). *Universidad Complutense de Madrid*. Obtenido de [http://www.bcamath.org/documentos\\_public/archivos/personal/conferencias/cubo.pdf](http://www.bcamath.org/documentos_public/archivos/personal/conferencias/cubo.pdf)

- Schneider, J. (2014). *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method*.
- Tristancho, J., & Caicedo, B. (2012). *Contribuciones para un Mejor Entendimiento de la Modelación Física y Numérica de la Interacción Suelo-Atmósfera en Centrifuga Geotécnica*. Bogotá: Universidad de Los Andes.
- Verruijt, A. (2001). *Soil Mechanics*. Delft University of Technology.
- Virieux, J. (1984). SH-wave Propagation in heterogeneous media. *Geophysics*, 1933-1957.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave Propagation in Heterogeneous Media. *Geophysics*, 889-901.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 889-901.
- Z. Alterman, e. a. (1968). Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods. *BULLETIN OF THE SEISMOLOGICAL SOCIETY OF AMERICA Vol. 58*, 367-398.
- González, M. (2001). "El Terreno". Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Edicions Virtuals: [www.edicionsups.es](http://www.edicionsups.es), pp. 240. Obtenido junio de 2016.
- Rondón, H. Alexander. Reyes, F. (2009) "Deformación permanente de materiales granulares en pavimentos flexibles: Estado del conocimiento". Revista Ingenierías Universidad de Medellín, volumen 8, 71-94. Obtenido de <https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKewi5ne6p2cPeAhXExlkKHSEYDgwQFjAAeqQICBAC&url=http%3A%2F%2Fwww.scielo.org.co%2Fpdf%2Frium%2Fv8n14%2Fv8n14a06.pdf&usq=AOvVaw3YpuZ8RjVytkcMrnn2L-dv> (junio de 2016)
- Pérez Ruiz, Juan A. (2007) "Un método de diferencias finitas para el análisis de la propagación de ondas. Aplicación al modelado de la respuesta sísmica de estructuras geológicas en entornos de computación en paralelo". Tesis doctoral universidad de Almería. España. Edición Virtual: [https://books.google.com.co/books?id=JqtfGruzLEC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=%22se+puede+escribir+de+una+manera+compacta+de+la+siguiente+forma%22&source=bl&ots=FiX74DbjOr&sig=zfbKyKqFc70P4XV5STZU-9bTrjE&hl=es-419&sa=X&ved=2ahUKewjWYrv\\_tjeAhVJmlkKHVeqBeYQ6AEwCHoECAgQAQ#v=onepage&q=%22se%20puede%20escribir%20de%20una%20manera%20compacta%20de%20la%20siguiente%20forma%22&f=false](https://books.google.com.co/books?id=JqtfGruzLEC&pg=PA18&lpg=PA18&dq=%22se+puede+escribir+de+una+manera+compacta+de+la+siguiente+forma%22&source=bl&ots=FiX74DbjOr&sig=zfbKyKqFc70P4XV5STZU-9bTrjE&hl=es-419&sa=X&ved=2ahUKewjWYrv_tjeAhVJmlkKHVeqBeYQ6AEwCHoECAgQAQ#v=onepage&q=%22se%20puede%20escribir%20de%20una%20manera%20compacta%20de%20la%20siguiente%20forma%22&f=false). Obtenido noviembre de 2018.
- Herrera Castiblanco, Fredy A. (2017) "Manual Para Diseño de Cimentaciones Para Equipos Vibratorios". Tesis de Maestría Escuela Colombiana de Ingeniería. Colombia. P 19-21. Obtenido de <https://repositorio.escuelaing.edu.co/handle/001/550>. Obtenido noviembre de 2018.
- Peter L Berry-David Reid (sin fecha), "Mecánica de Suelos". Department of Civil Engineering University of Salford. Traducción Universidad del Cauca. Colombia. P 61-77. Obtenido de [https://www.academia.edu/31824775/Mec%C3%A1nica\\_De\\_Suelos\\_-\\_Peter\\_L\\_Berry\\_and\\_David\\_Reid.pdf](https://www.academia.edu/31824775/Mec%C3%A1nica_De_Suelos_-_Peter_L_Berry_and_David_Reid.pdf). Obtenido noviembre de 2018

- Braja M., Das (2006) "Principles of Geotechnical Engineering". Seventh edition. Canada. Cengage Learnig.
- Steven L. Kramer (1996), "Geotechnical Earthquake Engineering", New Jersey. Prentice Hall.
- Bowles, Joseph E. (1997), "Foundation Analysis and Design", Fifth edition. Singapore. McGraw-Hill.
- Di bartolomeo O. Ymoli E. (2008) "Análisis Sobre Fundaciones Aisladas Superficiales Sometidas a Vibraciones Inducidas por Bombas Centrífugas y Reciprocantes". Tesis trabajo especial de grado Universidad Rafael Urdaneta. P. 87-88. Obtenido de <https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjH2-Tzz5XgAhWEjFkKHZQnBAQQFjAAegQICRAC&url=http%3A%2F%2F200.35.84.131%2Fportal%2Fbases%2Fmarc%2Ftexto%2F2301-08-02358.pdf&usg=AOvVaw1PeebW4qxfKrdYXvOXCV-w>. Obtenido Agosto de 2017.
- Diaz R. Jorge A. (Sin fecha), Caracterización Dinámica de los Suelos – Ensayos de Campo y Laboratorio. Obtenido de [https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ved=2ahUKEwjJ87Wg-ZXgAhWGNfKkHY4YAj0QFjANegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.imt.mx%2Farchivos%2Fpublicaciones%2FpublicacionTecnica%2Fpt420.pdf&usg=AOvVaw0-2gEyFmqBNyqTrNaCJQ\\_W](https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=14&ved=2ahUKEwjJ87Wg-ZXgAhWGNfKkHY4YAj0QFjANegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fwww.imt.mx%2Farchivos%2Fpublicaciones%2FpublicacionTecnica%2Fpt420.pdf&usg=AOvVaw0-2gEyFmqBNyqTrNaCJQ_W) Obtenido Agosto de 2017.
- Medina, Francisco. Reyes, Alexander (1986), "Precisión en la Discretización de Problemas Unidimensionales de Propagacion de Ondas". Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 2, 2, 121-134. Universidad de Chile. Obtenido de [https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwjmic6Ok5bgAhUmja0KHd\\_DCAUQFjAAegQIChAC&url=https%3A%2F%2Fupcommons.upc.edu%2Fbitstream%2Fhandle%2F2099%2F8751%2FArticle01.pdf%3Fsequence%3D1%26isAllowed%3Dy&usg=AOvVaw0U4ibc2uRnEwWTqV5cC7Xw](https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwjmic6Ok5bgAhUmja0KHd_DCAUQFjAAegQIChAC&url=https%3A%2F%2Fupcommons.upc.edu%2Fbitstream%2Fhandle%2F2099%2F8751%2FArticle01.pdf%3Fsequence%3D1%26isAllowed%3Dy&usg=AOvVaw0U4ibc2uRnEwWTqV5cC7Xw) Obtenido Enero de 2019.