Sobre la función Zeta de Riemann

Trabajo de Grado

Autor:
Luis Enrique PEDRAZA GARCÍA

Dirigido por:
PhD. Julián Andrés AGREDO ECHEVERRY

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Programa de Matemáticas
ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

MAYO DE 2019

A mi familia, amigos y profesores que, a pesar de las caídas, me animaron a no rendirme y contribuyeron en la formación de la persona que soy ahora.

Resumen

En este trabajo se presenta la construcción de la función zeta de Riemman, propiedades y otros resultados; a partir de herramientas de la variable compleja y el análisis. Hay que resaltar que esta no es la única manera de abordar este tema, ya que existen otras formas mucho más cortas, pero que involucran resultados y conocimientos más especializado. En la primera parte del documento se presentan algunos resultados preliminares de variable compleja y análisis que serán usados en la parte principal del trabajo, de igual manera se anexa en el apéndice un breve estudio sobre la función Gamma, que será importante en la extensión de la función zeta. A pesar de esto, se da por hecho que el lector tiene conocimiento y dominio de estos temas. El trabajo comienza con la definición de la función zeta como suma de Dirichlet y algunas de sus propiedades más importantes, por ejemplo, su definición como producto de términos que dependen de los números primos. Además de esto se trabajarán algunas de sus extensiones analíticas, principalmente a una función meromorfa en el plano complejo, que permitirá finalmente formular la ecuación funcional de la función ζ y a partir de aquí, estudiar brevemente el comportamiento de sus ceros triviales; pero más importante, la región donde se concentran los ceros no-triviales, que es donde se desenvuelve la hipótesis de Riemann.

Palabras clave: función zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, ceros no-triviales, Riemann, variable compleja, análisis complejo.

Abstract

In this paper we present the construction of the Riemman zeta function, properties and other results; using tools of the complex variable and analysis. It should be noted that this is not the only way to address this issue, since there are other forms that are much shorter, but that involve more specialized knowledge and results. In the first part of the document, some preliminary results of a complex variable and complex analysis are presented, which will be used in the main part of the work. A brief study on the Gamma function is also attached in the appendix, which will be important in the extension of the zeta function. Despite this, it is assumed that the reader has knowledge and command of these issues. The work begins with the definition of the zeta function as a sum of Dirichlet and some of its most important properties, for example, its definition as a product of terms that depend on prime numbers. In addition to this, some of its analytical extensions will be worked on, mainly to a meromorphic function in the complex plane, which will allow finally formulating the functional equation of the function *zeta* and from here, briefly study the behavior of its trivial zeros; but more importantly, the region where non-trivial zeros are concentrated, which is where the Riemann hypothesis unfolds.

Keywords: Riemann zeta function, Riemann hypothesis, non-trivial zeros, Riemann, complex variable, complex analysis.

Índice

Introducción

La hipótesis de Riemann, formulada por primera vez por Bernhard Riemann en su tesis de doctorado: *"Sobre los números primos menores que una magnitud dada"* en 1859, es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, en la que se plantea que todos los ceros no-triviales de la función ζ están en la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Se presentó al desarrollar una fórmula explícita para calcular la cantidad de primos menores que x, a pesar de esto, Riemann no intentó dar una demostración ya que no era esencial para el propósito central de su artículo, pero sabía que los ceros no triviales de la función zeta están distribuidos en torno a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$ y que todos los ceros no triviales debían estar en el rango $0 \leq \Re(s) \leq 1$

En 1900, Hilbert incluyó la hipótesis de Riemann en su famosa lista de los 23 problemas no resueltos y es el único problema de los que propuso Hilbert que está en el premio del milenio del Instituto Clay de Matemáticas. En 1914, Hardy demostró que existe un número infinito de ceros sobre la recta crítica Re(s) = 1/2, sin embargo todavía era posible que un número infinito de los ceros no-triviales se encontraran en algún otro lugar de la banda $0 \leq \Re(s) \leq 1$.

La mayor parte de la comunidad matemática piensa que la conjetura es correcta, aunque otros grandes matemáticos como J. E. Littlewood y Atle Selberg se han mostrado escépticos. Agregado a esto, los ceros de la función zeta y los números primos satisfacen ciertas propiedades de dualidad que muestran, usando análisis de Fourier, que los ceros de la función zeta de Riemann pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Por esta relación, la hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática actual y para llegarlo a entender es necesario acercarse primero a la función zeta de Riemann que en este trabajo se desarrolla a partir de herramientas de variable compleja y análisis complejo. De esta manera se evitan involucrar resultados avanzados que requieren un conocimientos más especializado, pero que a su vez acortan el trabajo a realizar.

1. Preliminares

A continuación se presentan los resultados mas relevantes y que serán usados en la parte principal del texto. Estos están divididos en los resultados relacionados con funciones de valor complejo, productos infinitos y finalmente integrales de Lebesgue. Se dejan las referencias a los libros, que se encuentran en la bibliografía, donde se puede encontrar las demostraciones.

1.1. Funciones complejas

Teorema 1.1. *Sea $h(t,z)$ una función de valor complejo continua, definida para $t \in [a,b]$ y $z \in D \subseteq \mathbb{C}$, donde D es un dominio. Si para cada t fijo , $h(t,z)$ es analítica en D, entonces*

$$H(z) = \int_a^b h(t,z)dt \qquad , z \in D$$

es analítica en D

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 121 □

Definición 1.1. *Una sucesión $\{f_i\}$ de funciones sobre un dominio E **converge uniformemente** a f en E si, para todo i, existe ϵ_i tal que*

$$|f_i(z) - f(z)| \leq \epsilon_i \qquad \forall z \in E$$

Donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$

Teorema 1.2. *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente a f en D, entonces f es analítica en D*

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 136 □

Teorema 1.3. *Sea γ una curva suave a trozos en el plano complejo. Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones continuas de valor complejo sobre γ y $\{f_j\}$ converge uniformemente a f sobre γ, entonces $\int f_j(z)dz$ converge a $\int f(z)dz$.*

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 153... □

Teorema 1.4 (Principio de unicidad)**.** *Si f y g son funciones analíticas en un dominio D y $f(z) = g(z)$ para $z \in A \subseteq D$, donde A es un conjunto con un punto de acumulación, entonces*

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D$$

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 156 □

Teorema 1.5. *Sea z_0 una singularidad aislada de f. z_0 es un polo de orden N de f si y solo si*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$$

Donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 191 □

Teorema 1.6. *Sea $a \in \mathbb{C}$ y f una función compleja, entonces*

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} -N & \text{si } a \text{ es un polo de orden } N \\ N & \text{si } a \text{ es un cero de orden } N \\ 0 & \text{si } f \text{ es analítica en } a \text{ y } f(a) \neq 0 \end{cases}$$

Demostración. Si a es un polo de orden N de f, entonces $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N}$ donde g es una función analítica en a y $g(a) \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{g'(z)(z-a)^N - N(z-a)^{N-1}g(z)}{(z-a)^{2N}} \\ &= \frac{g'(z) - N(z-a)^{-1}g(z)}{(z-a)^N} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} &= \lim_{z\to a}\frac{(z-a)g'(z) - Ng(z)}{g(z)} \\ &= \frac{-Ng(a)}{g(a)} \\ &= -N \end{aligned}$$

Por otro lado, si a es un cero de orden N de f, entonces $f(z) = (z-a)^N g(z)$ donde g es una función analítica en a y $g(a) \neq 0$. Así que

$$\begin{aligned} f'(z) &= N(z-a)^{N-1}g(z) + (z-a)^N g'(z) \\ &= (z-a)^N \left[N(z-a)^{-1}g(z) + g'(z)\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} & \lim_{z\to a}\frac{Ng(z) + (z-a)g'(z)}{g(z)} \\ &= \frac{Ng(a)}{g(a)} \\ &= N \end{aligned}$$

Finalmente, si f es analítica en a, entonces $f'(z)$ también lo es. Ademas como $f(a) \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = 0$$

□

1.2. Productos Infinitos

Definición 1.2. *Decimos que un producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} p_j$, donde $p_j \in \mathbb{C}$ para todo j,* ***converge*** *si $p_j \to 1$ y $\sum \operatorname{Log} p_j$ converge, donde la suma solo considera los términos $p_j \neq 0$. Además*

$$\prod_{j=1}^{\infty} p_j = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_j\right)$$

Si en el producto infinito existe j tal que $p_j = 0$, se dice que el producto converge a 0.

Definición 1.3. *El producto infinito $\prod(1+a_j)$ es* ***convergente absolutamente*** *si $a_j \to 0$ y $\sum \operatorname{Log}(1+a_j)$ converge absolutamente.*

Teorema 1.7. *Si el producto infinito $\prod(1+a_j)$ converge absolutamente entonces $\prod(1+a_j)$ converge.*

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 354 □

Teorema 1.8. *El producto infinito $\prod(1+a_j)$ converge absolutamente si y solo si $\sum a_j$ converge absolutamente. Esto ocurre si y solo si $\prod(1+|a_j|)$ converge.*

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 354 □

Teorema 1.9. *Suponga que $g_k(z) = 1 + h_k(z)$, con $k > 1$, son funciones en un conjunto E y existen constantes $M_k > 0$ tales que $\sum M_k$ converge y $|h_k(z)| < M_k$ para todo $z \in E$. Entonces $\prod_{k=1}^{m} g_k(z)$ converge a $\prod_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ uniformemente en E, cuando $m \to \infty$.*

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 354 □

Teorema 1.10. *Sea $g_k(z)$, con $k > 1$, una función analítica en un dominio D, tal que $\prod_{k=1}^{m} g_k(z)$ converge normalmente en D a $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g_k(z)$. Entonces*

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k'(z)}{g_k(z)} \qquad \text{, con } z \in D$$

Donde la suma converge normalmente en D.

Demostración. Ver Gamelin, *Complex Analysis*, p. 355 □

Teorema 1.11 (Versión generalizada del producto de Cauchy)**.** *Si $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 1$ y $\sum_{k_1=0}^{\infty} a_{1,k_1}, \ldots, \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{n,k_n}$ series infinitas con coeficientes complejos, donde todas, a excepción de la n-ésima, convergen absolutamente y la n-ésima converge. Entonces la serie*

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{k_{n-1}} a_{1,k_n} a_{2,k_{n-1}-k_n} \cdots a_{n,k_1-k_2}$$

converge y además:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{k_{n-1}} a_{1,k_n} a_{2,k_{n-1}-k_n} \cdots a_{n,k_1-k_2} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k_j=0}^{\infty} a_{j,k_j} \right)$$

Demostración. Ver Wikipedia, *Generalizations, Cauchy product* □

1.3. Integral de Lebesgue

Al momento de extender la función zeta de Riemann a una función meromorfa en el plano complejo, sera necesario utilizar el teorema de la convergencia dominada y monótona. Para esto nos detendremos en algunos resultados de la integral de Lebesgue.

Teorema 1.12. *Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ que es cerrado y acotado. Si f es Riemann integrable sobre $[a,b]$, entonces es Lebesgue integrable sobre $[a,b]$ y las dos integrales son iguales.*

Demostración. Ver Royden y Fitzpatrick, *Real Analysis*, p. 73 □

Teorema 1.13 (Teorema de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles no-negativas sobre E, que es un conjunto medible. Si $\{f_n\} \to f$ puntualmente sobre E, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Demostración. Ver Royden y Fitzpatrick, *Real Analysis*, p. 83 □

Definición 1.4. *Una función medible no-negativa f en un conjunto medible E es Lebesgue integrable sobre E, si*

$$\int_E f < \infty$$

Teorema 1.14 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea E un conjunto medible y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre E. Suponga que existe una función g Lebesgue integrable sobre E tal que, para todo n, $|f_n| \leq g$ sobre E. Si $\{f_n\} \to f$ puntualmente sobre E, entonces f es Lebesgue integrable sobre E y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Demostración. Ver Royden y Fitzpatrick, *Real Analysis*, p. 88 □

2. Definición de la función zeta como serie de Dirichlet

Sea $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$, un numero complejo . Consideremos la serie de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \tag{1}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx = \begin{cases} \ln x\big|_1^{\infty} & \text{si } \sigma = 1 \\ \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\Big|_1^{\infty} & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{si } \sigma \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma-1} & \text{si } \sigma > 1 \end{cases}$$

Entonces $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx$ converge si y solo si $\sigma > 1$. Y como $f(x) = \dfrac{1}{x^\sigma}$ es una función real monótona decreciente, por el criterio de la integral tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right|$

converge para $\sigma > 1$. Así que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$.

Mas aun, (1) converge uniformemente para $\sigma \geq R > 1$, ya que si $k \in \mathbb{Z}_{>1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^R} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^R} \\
&= \epsilon_k
\end{aligned}$$

Donde $\epsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ converge. Además, como $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$ son funciones analíticas para $\Re(s) > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ define una función analítica en este dominio. Los resultados anteriores se pueden condensar en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *La función*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

Es una función analítica en el dominio $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, que converge absolutamente para $\Re(s) > 1$ y uniformemente para $\Re(s) \geq R$, con $R > 1$. Esta función se conoce como la ***función zeta de Riemann****.*

Teorema 2.2 (Producto de Euler). *Si $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$ entonces*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Donde el producto es sobre todos los primos p.

Demostración. Ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$, entonces $\displaystyle\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ converge absolutamente y por lo tanto $\displaystyle\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ converge. Así que $\displaystyle\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ también lo hace.

Como $\left|\dfrac{1}{p^s}\right| = \dfrac{1}{p^\sigma} < 1$, ya que $p > 1$ para todo primo p, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Luego, si consideramos el producto parcial sobre los primeros N primos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P_N &= \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}\\
&= \prod_{n=1}^{N}\left[\sum_{k_n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n^s}\right)^{k_n}\right]\\
&= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{k_1}\cdots\sum_{k_N}^{k_{N-1}}\left[\left(\frac{1}{p_1^s}\right)^{k_N}\left(\frac{1}{p_2^s}\right)^{k_{N-1}-k_N}\cdots\left(\frac{1}{p_N^s}\right)^{k_1-k_2}\right]\\
&= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_2}^{k_1}\cdots\sum_{k_N}^{k_{N-1}}\frac{1}{\left(p_1^{k_1}p_2^{k_{N-1}-k_N}\cdots p_N^{k_1-k_2}\right)^s}\\
&= \sum_{m\in A}\frac{1}{m^s}
\end{aligned}$$

Donde A es el conjunto de números enteros con factores primos menores o iguales que p_N y la tercera igualdad es el resultado de aplicar el producto de Cauchy en su forma generalizada. Más aun, $\displaystyle\sum_{m\in A}\frac{1}{m^s}=\sum_{m=1}^{p_N}\frac{1}{m^s}+\sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\frac{1}{m^s}$, entonces

$$P_N = S_{p_N}+\sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\frac{1}{m^s} \tag{3}$$

Con $\displaystyle S_{p_N}=\sum_{n=1}^{p_N}\frac{1}{n^s}$ una suma parcial de (2).

Como

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\frac{1}{m^s}\right| &\leq \sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\left|\frac{1}{m^s}\right|\\
&= \sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\frac{1}{m^\sigma}\\
&\leq \sum_{m>p_N}\frac{1}{m^\sigma}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\sigma}-\sum_{m=1}^{p_N}\frac{1}{m^\sigma}\\
&= \epsilon_{p_N}
\end{aligned}$$

Si $N\to\infty$ entonces $p_N\to\infty$ y por lo tanto $\epsilon_{p_N}\to 0$. Es decir $\displaystyle\sum_{\substack{m\in A\\ m>p_N}}\frac{1}{m^s}\to 0$ cuando $N\to\infty$.

Luego si $N \to \infty$ en (3), tenemos que:

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

□

Corolario 2.2.1. *$\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$*

Demostración. Sea p un primo. Como $\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0$ para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, entonces

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0 \quad \forall s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$$

□

3. Continuación Analítica de ζ

En esta sección procedemos a extender la función zeta de Riemann a dominios más amplios, primero se mostrara una forma de extenderla al semiplano $\Re(s) > 0$ y finalmente nos centraremos en la extensión al plano complejo, que nos permitirá deducir la ecuación funcional de la función ζ.

3.1. Extensión al semiplano $\Re(s) > 0$

Teorema 3.1. *La función $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$ es una función analítica en $\Re(s) > 0$ con $s \neq 1$.*

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{k} \frac{n-n+1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{n^s} - \sum_{n=1}^{k} \frac{n-1}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{n^s} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l}{(l+1)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{n^s} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{(l+1)^s} + \frac{k}{(k+1)^s} - \frac{k}{(k+1)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{n^s} - \sum_{l=1}^{k} \frac{l}{(l+1)^s} + \frac{k}{(k+1)^s}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{n}{n^s} - \frac{n}{(n+1)^s}\right) + \frac{k}{(k+1)^s} \qquad (*)$$

Y además $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{(k+1)^s}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{(k+1)^{\Re(s)}} = 0$, ya que $\Re(s) > 1$; entonces si $k \to \infty$ en $(*)$, tenemos que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \tag{4}$$

Mas aún, $\int_{n+1}^{n}\frac{s}{x^{s+1}}dx = -\left.\frac{1}{x^s}\right|_{n+1}^{n} = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}$, si reemplazamos en (4) obtenemos:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\int_{n}^{n+1}\frac{s}{x^{s+1}}dx \\ &= s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{n}{x^{s+1}}dx\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x = [x] + \{x\}$; donde $\{x\}$ es la parte no entera de x. además, $[x] = n$ si $x \in [n, n+1)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{[x]}{x^{s+1}}dx \\ &= s\int_{1}^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}dx \\ &= s\int_{1}^{\infty}\frac{x}{x^{s+1}}dx - s\int_{1}^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx \\ &= \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\end{aligned}$$

□

Sea $k \in \mathbb{N}$ y

$$h(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\{x\}}{x^{s+1}} & \text{cuando } x \in [k, k+1) \\ \dfrac{1}{(k+1)^{s+1}} & \text{cuando } x = k+1 \end{cases}$$

con $s \in D_R = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq R > 0\}$. Como h es continua para $x \in [k, k+1]$ y $s \in D_R$, y además h es analítica en D_R para cada x fijo; por el teorema 1.1 se tiene que $\int_{k}^{k+1} h(x,s)\,dx = \int_{k}^{k+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\,dx$ es analítica en D. Y como la suma finita de funciones analíticas es analítica , también lo es

$$f_n(s) = \int_{1}^{n}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$

Sea $s \in D_R$ tal que $s = \sigma + it$ con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$. Como $\{x\} < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| f_n(s) - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| &= \left| \int_1^n \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| \\
&= \left| \int_n^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| \\
&\leq \int_n^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx \\
&\leq \int_n^\infty \frac{1}{x^{R+1}} dx \\
&= \left. \frac{x^{-R}}{-R} \right|_n^\infty \\
&= \frac{n^{-R}}{-R} = \epsilon_n
\end{aligned}$$

Por lo tanto , $\epsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $\{f_n(s)\}$ converge uniformemente a $\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ y por el teorema 1.2, esta ultima es una función analítica en D_R para todo $R > 0$. Así que $\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ es una función analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$.
Luego $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s \displaystyle\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ define una función analítica en $\Re(s) > 0$ con $s \neq 1$.

Teorema 3.2. *La función* $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s \displaystyle\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ *posee un polo simple en* $s = 1$ *y tiene residuo* 1.

Demostración. Ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s) &= s - s(s-1) \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$, con $\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1$ □

Así que $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s \displaystyle\int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$ es una extensión analítica de (2).

3.2. Extensión al plano complejo

Ahora procedemos a extender la función ζ a una función meromorfa en el plano complejo por medio de la función Γ, la cual es estudiada junto con algunas de sus propiedades en el apéndice. Recordemos que una función f es **meromorfa** en un dominio D si f es analítica en D excepto en singularidades aisladas, las cuales son polos de la función.

Sea $s \in \mathbb{C}$, tal que $\Re(s) > 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, si $t = nx$ entonces $dt = ndx$. Así que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-nx} (nx)^{s-1} n dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} n^s dx \\
&= n^s \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} e^{-nx} x^{s-1} dx \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx
\end{aligned}
$$

La ultima igualdad esta justificada por la convergencia uniforme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ en $[R,\infty)$ para $R \geq 0$. Además, como $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x-1}$, ya que $\left|\frac{1}{e^x}\right| \leq 1$ para todo $x \geq 0$, entonces para $\Re(s) > 1$:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Para que ζ sea una función meromorfa en $\mathbb{C}$, es necesario que esta ultima integral también lo sea, pero esta diverge para $\Re(s) \leq 1$. Por lo tanto primero vamos a considerar la siguiente integral, para la cual estaremos interesados en su analiticidad, su independencia del camino de integración en el que se define y la relación con la función ζ por medio de la integral de la ecuación (5).

Teorema 3.3. *Sea* $z \in \mathbb{C} \setminus [\{z \in \mathbb{C} | z = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}\} \cup [0,\infty)]$, $s \in \mathbb{C}$ *y* $\{\delta, \epsilon\} \subset \mathbb{R}$ *tales que* $0 < \epsilon < \delta < 2\pi$. *Si* $g(s,z) = \dfrac{z^{s-1}}{e^z - 1}$ *y* $C(\delta,\epsilon)$ *es el camino indicado en la figura 1, entonces*

$$
I(s) = \int_{C(\delta,\epsilon)} g(s,z) dz
$$

es una función entera.

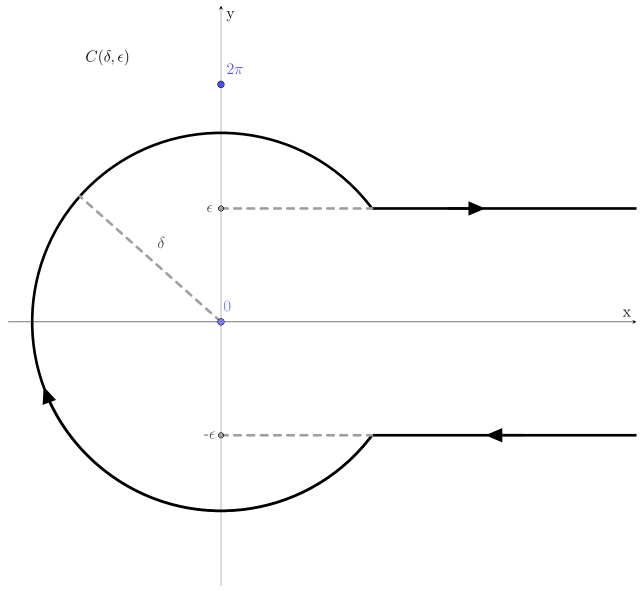


Figura 1: Camino de integración $C(\delta, \epsilon)$

Demostración. Considere el camino $C_n(\delta, \epsilon)$ indicado en la figura 2 y $\gamma_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ una parametrización de $C_n(\delta, \epsilon)$.

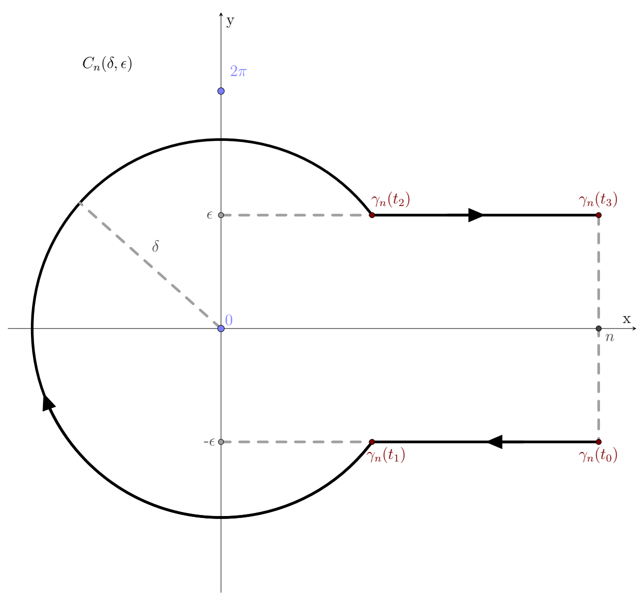


Figura 2: Camino de integración truncado $C_n(\delta, \epsilon)$

Si $h(s, t) = g(s, \gamma_n(t))\gamma_n^{'}(t)$ con $t \in [t_k, t_{k+1}]$ para $k \in \{0, 1, 2\}$, como γ_n es derivable en $[t_k, t_{k+1}]$ para cada k, entonces h esta bien definida y es continua en $[t_k, t_{k+1}]$. Esto debido a que g es continua para todo $\gamma(t)$, además h es continua respecto a $s \in \mathbb{C}$ ya que g también

lo es.
Mas aún, para $z \in D$ fijo , g es analítica respecto a s, entonces para $t \in [t_k, t_{k+1}]$ fijo , h es analítica respecto a s. Luego por el teorema 1.1, $\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(s,t)dt$ es analítica para $s \in \mathbb{C}$ y por lo tanto

$$H(s) = \sum_{k=0}^{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(s,t)dt = \int_{C_n(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz$$

es entera.
Por otro lado, si $x > 0$ y $s = \alpha + i\beta$, como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1}}{\sqrt{e^x-1}} = 0$, entonces para $\lambda = \frac{1}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $x > N$, se tiene que

$$\left| \frac{2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1}}{\sqrt{e^x-1}} \right| = \frac{2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1}}{\sqrt{e^x-1}} < \frac{1}{2}$$

Así, $2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1} < \dfrac{\sqrt{e^x-1}}{2}$ y por lo tanto $\dfrac{2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1}}{e^x-1} < \dfrac{1}{2\sqrt{e^x-1}}$
Luego, si $n > \max\{\epsilon, N\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_n(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz - \int_{C_{(\delta,\epsilon)}} g(s,z)dz \right| &= \left| \int_{l_1 \cup l_2} g(s,z)dz \right| \\ &\leq \int_{l_1 \cup l_2} \left| \frac{z^{s-1}}{e^z-1} \right| dz \\ &\leq \int_{l_1 \cup l_2} \frac{|z|^{\alpha-1} e^{-\beta \arg(z)}}{|e^z|-1} dz \\ &< \int_{l_1 \cup l_2} \frac{|z|^{\alpha-1} e^{|\beta|2\pi}}{|e^z|-1} dz\end{aligned}$$

Donde $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = x + i\epsilon, n \leq x\}$ y $l_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = x - i\epsilon, n \leq x\}$. Usando estas parametrizaciones en la desigualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_n(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz - \int_{C_{(\delta,\epsilon)}} g(s,z)dz \right| &\leq \int_n^\infty \frac{(x^2+\epsilon^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^x-1} dx + \int_n^\infty \frac{(x^2+\epsilon^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^x-1} dx \\ &= 2\int_n^\infty \frac{(x^2+\epsilon^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^x-1} dx \\ &< 2\int_n^\infty \frac{(2x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^x-1} dx \\ &< 2\int_n^\infty \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} dx \\ &= 2\arctan(\sqrt{e^x-1})\Big|_n^\infty \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e^n-1})\right)\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e^n - 1})\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, entonces $\left\{\int_{C_n} g(s,z)dz\right\}$ converge uniformemente a $\int_{C(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz$ y por lo tanto esta ultima integral define una función entera. $\square$

Teorema 3.4. *La integral I es independiente del valor de ϵ y δ*

Demostración. Considere $\{\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2\} \subset \mathbb{R}$ tales que $\delta_1 < \delta_2$, $\epsilon_1 < \epsilon_2$ y $0 < \epsilon_i < \delta_i < 2\pi$ para $i \in \{1,2\}$. Sea λ el contorno compuesto por $C_n(\delta_1, \epsilon_1)$ y $C_n(\delta_2, \epsilon_2)$, donde $n > \epsilon_2$, que es recorrido como lo indica la figura 3:

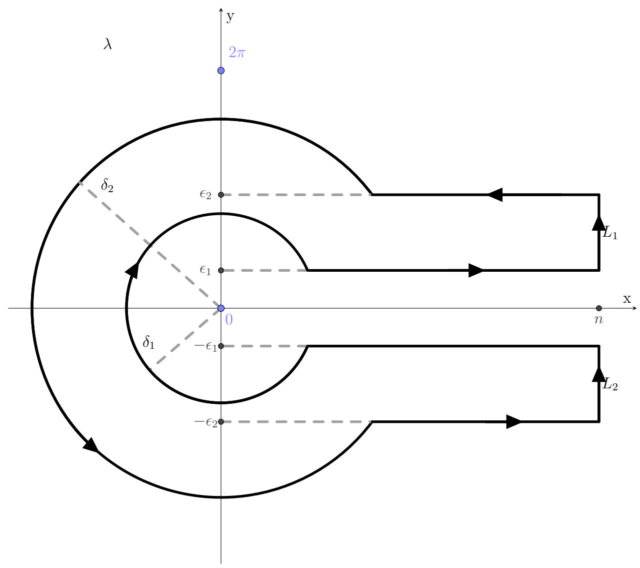


Figura 3: Contorno de integración λ

Como g es analítica para $z \in D$ y $\lambda \subset D$, entonces por el Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\lambda} g(s,z)dz \\
&= \int_{-C_n(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz + \int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{C_n(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz \qquad (6)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\left|\int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz\right| &\leq \int_{L_2}\left|\frac{z^{s-1}}{e^z - 1}dz\right| + \int_{L_1}\left|\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\right| \\
&< \int_{L_2} \frac{|z|^{\alpha-1}e^{|\beta|2\pi}}{|e^z| - 1}|dz| + \int_{L_1} \frac{|z|^{\alpha-1}e^{|\beta|\pi}}{|e^z|-1}|dz| \\
&= \int_{\epsilon_2}^{\epsilon_1} \frac{(n^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|2\pi}}{e^n - 1}dy + \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(n^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{|\beta|\pi}}{e^n-1}dy \\
&= \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(n^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{e^n-1}\left(e^{|\beta|\pi} - e^{|\beta|2\pi}\right)dy
\end{aligned}$$

y además $n > \epsilon_2$, entonces:

$$\left|\int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz\right| < \left(e^{|\beta|\pi} - e^{|\beta|2\pi}\right)\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{(2n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{e^n - 1}dy$$
$$= \left(e^{|\beta|\pi} - e^{|\beta|2\pi}\right)\frac{(2n^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{e^n - 1}(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

Si $n \to \infty$ el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 y por lo tanto $\int_{L_2} g(s,z)dz + \int_{L_1} g(s,z)dz$ también lo hace. Entonces si $n \to \infty$ en (6) tenemos que

$$0 = -\int_{C(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz + \int_{C(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz$$

Es decir,

$$\int_{C(\delta_1,\epsilon_1)} g(s,z)dz = \int_{C(\delta_2,\epsilon_2)} g(s,z)dz$$

Luego la integral $\int_{C_{(\delta,\epsilon)}} g(s,z)dz$ no depende de δ o ϵ. $\square$

Teorema 3.5. *Para $\Re(s) > 1$, se tiene que*

$$I(s) = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}{\Gamma(1-s)}$$

Demostración. Para $x > 0$ fijo, tenemos que $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1} = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$ y

$$\left|\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}\right| \leq \frac{(x^2+\epsilon^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\beta\arg(x+i\epsilon)}}{e^x - 1}$$
$$< \frac{(2x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{|\beta|2\pi}}{e^x - 1}$$
$$= 2^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{|\beta|2\pi}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$$

Mas aun, si $h(x) = 2^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{|\beta|2\pi}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}$, entonces h es una función continua no negativa para $x \geq \sqrt{\delta^2+\epsilon^2} > 0$ y por lo tanto $\{f_n(x)\}$ es una sucesión creciente no negativa de funciones medibles , donde

$$f_n(x) = h(x)\chi_{I_n}(x) \qquad \text{con } I_n = \left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}, n\right]$$

Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x)$ para $x \geq \sqrt{\delta^2+\epsilon^2}$, por el teorema de la convergencia monótona

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)} f_n(x)dx = \int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)} h(x)dx$$

Así que

$$\int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)} h(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)} h(x)\chi_{I_n}(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} h(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{n} h(x)dx \\
&= \int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{\infty} h(x)dx
\end{aligned}
$$

Donde el paso de la segunda a la tercera igualdad esta justificado por el teorema 1.12. Como se mostró anteriormente, para $\lambda = \frac{1}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, si $x > N$, se tiene que $\dfrac{2^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{|\beta|2\pi} x^{\sigma-1}}{e^x - 1} < \dfrac{1}{2\sqrt{e^x-1}}$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{\infty} h(x)dx &= \int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{N} h(x)dx + \int_{N}^{\infty} h(x)dx \\
&< \int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{N} h(x)dx + \int_{N}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}dx \\
&= \int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{N} h(x)dx + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e^N-1})\right) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Esto ultimo es debido a que la continuidad de h sobre $\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}, N\right]$, implica la convergencia de $\displaystyle\int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{N} h(x)dx$.

Ahora, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{(0,\infty)} \frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1} \chi_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)}(x)dx &= \int_{(0,\infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} \chi_{[\delta,\infty)}(x)dx \\
&= \int_{[\delta,\infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para $x > \delta$, $\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}\chi_{[\delta,n)}(x)$ converge puntualmente a $\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}$ cuando $n \to \infty$, es continua y $\left|\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}\chi_{[\delta,n)}(x)\right| \leq e^{|\beta|2\pi}\dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}$; así que por el teorema de la convergencia dominada

$$
\begin{aligned}
\int_{[\delta,\infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{[\delta,\infty)} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\chi_{[\delta,n]}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[\delta,n]} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{n} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \\
&= \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx
\end{aligned}
$$

De manera analoga para $\dfrac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}\chi_{[\delta,n)}(x)$, se tiene que

$$\int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)}\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}dx=\int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{\infty}\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}dx$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{\infty}\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)}\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{(0,\infty)}\frac{(x+i\epsilon)^{s-1}}{e^{x+i\epsilon}-1}\chi_{\left[\sqrt{\delta^2+\epsilon^2},\infty\right)}(x)dx\\ &= \int_{(\delta,\infty)}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\\ &= \int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\end{aligned}$$

Similarmente, como $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{(x-i\epsilon)^{s-1}}{e^{x-i\epsilon}-1}=\dfrac{x^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}}{e^x-1}$ y $\left|\dfrac{(x-i\epsilon)^{s-1}}{e^{x-i\epsilon}-1}\right|\leq 2^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{|\beta|2\pi}\dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}$
Entonces

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\sqrt{\delta^2+\epsilon^2}}^{\infty}\frac{(x-i\epsilon)^{s-1}}{e^{x-i\epsilon}-1}dx=\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}}{e^x-1}dx$$

Finalmente si $\epsilon\to 0$ en $I(s)=\int_{C_{(\delta,\epsilon)}}g(s,z)dz$, obtenemos que

$$\begin{aligned}I(s) &= -\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx+\int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz+\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}}{e^x-1}dx\\ &= \int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz+\left(e^{2\pi i(s-1)}-1\right)\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \qquad (7)\end{aligned}$$

Debido a que

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\right| &\leq \int_{|z|=\delta}\frac{|z|^{\alpha-1}e^{-\beta\arg(z)}}{|e^z-1|}|dz|\\ &\leq \int_{|z|=\delta}\frac{\delta^{\alpha-1}e^{|\beta|2\pi}}{e^x-1}|dz|\\ &\leq \int_{|z|=\delta}\frac{\delta^{\alpha-1}e^{|\beta|2\pi}}{e^{-\delta}-1}|dz|\\ &= \frac{\delta^{\alpha-1}e^{|\beta|2\pi}}{e^{-\delta}-1}2\pi\delta\end{aligned}$$

y $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\delta^{\alpha}e^{|\beta|2\pi}}{e^{-\delta}-1}2\pi=0$ cuando $\alpha\geq 0$, entonces $\displaystyle\int_{|z|=\delta}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz\to 0$ cuando $\delta\to 0$. Así que , si $\delta\to 0$ en la ecuación (7) y teniendo en cuenta la igualdad (5), entonces

$$I(s)=\left(e^{2\pi i(s-1)}-1\right)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(e^{2\pi i(s-1)} - 1\right)\Gamma(s)\zeta(s)\\
&= \left(e^{2\pi i s} - 1\right)\Gamma(s)\zeta(s)\\
&= e^{\pi i s}\left(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}\right)\Gamma(s)\zeta(s)\\
&= e^{\pi i s}2i\operatorname{sen}(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)
\end{aligned}
$$

Finalmente, como $\operatorname{sen}(\pi s) = \dfrac{\pi}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}$ (ver anexo de la función Gamma), tenemos que

$$I(s) = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{2\pi i e^{\pi i s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}{\Gamma(1-s)} \qquad \text{para } \Re(s) > 1$$

□

Teorema 3.6. *La función*

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)e^{-i\pi s}}{2\pi i} I(s) \tag{8}$$

es una extensión meromorfa en el plano complejo de (2) *con un polo simple en* $s = 1$ *y residuo* 1*.*

Demostración. Como I, $\frac{e^{-i\pi s}}{2\pi i}$ son funciones enteras y $\Gamma(1-s)$ es meromorfa con polos simples para $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, ya que $\Gamma(s)$ tiene polos simples en $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$; entonces ζ es meromorfa. Pero, para $\Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)e^{-i\pi s}}{2\pi i}\left(\frac{2\pi i e^{\pi i s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}{\Gamma(1-s)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Luego ζ es analítica, así que para $s = 2, 3, 4, 5, \ldots$, la función ζ no posee polos y por lo tanto el único polo posible es $s = 1$. Puesto que

$$
\begin{aligned}
I(1) &= \int_{|z|=\delta}\frac{1}{e^z - 1}dz + \left(e^0 - 1\right)\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{e^x - 1}dx\\
&= \int_{|z|=\delta}\frac{1}{e^z - 1}dz\\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{e^z - 1}\\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

y $\Gamma(1-s) = \dfrac{\phi(s)}{s-1}$, con ϕ analítica en 1 y $\phi(1) \neq 0$, ya que 1 es polo simple de $\Gamma(1-s)$. Entonces

$$\zeta(s) = \frac{\phi(1-s)e^{-i\pi s}I(s)(2\pi i)^{-1}}{s-1}$$

Donde el numerador es analítico en 1 y diferente de 0. Así que 1 es un polo simple de ζ. Finalmente, como

1.
$$\lim_{s\to 1} \frac{e^{-i\pi s} I(s)}{2\pi i} = \frac{e^{-i\pi} I(1)}{2\pi i} = -1$$

2.
$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}(s-1)\Gamma(1-s) &= \lim_{z\to 0} -z\Gamma(z) \\
&= \lim_{z\to 0} -\Gamma(z+1) \\
&= -\Gamma(1) \\
&= -(0!) = -1
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s) &= \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) \\
&= \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\Gamma(1-s)e^{i\pi s}}{2\pi i} I(s) \\
&= \lim_{s\to 1}(s-1)\Gamma(1-s) \cdot \lim_{s\to 1} \frac{e^{-i\pi s} I(s)}{2\pi i} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

4. Ecuación Funcional

Una vez que se tiene la extensión meromorfa de la función ζ, es posible empezar el estudio de los ceros de esta función. Sin embargo, primero es necesario derivar la ecuación funcional de la función zeta de Riemann.

Teorema 4.1. *Para $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{>0}$, la función ζ satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{9}$$

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, pero arbitrario. Considere el contorno γ compuesto por la curva $C_n(\delta, \epsilon)$ y el arco de circunferencia S_R, donde $n = 2\pi(N + \frac{1}{2})$ y $R = \sqrt{n^2 + \epsilon^2}$ es el radio de la circunferencia correspondiente al arco. Ademas γ esta recorrió como lo indica la figura 4.

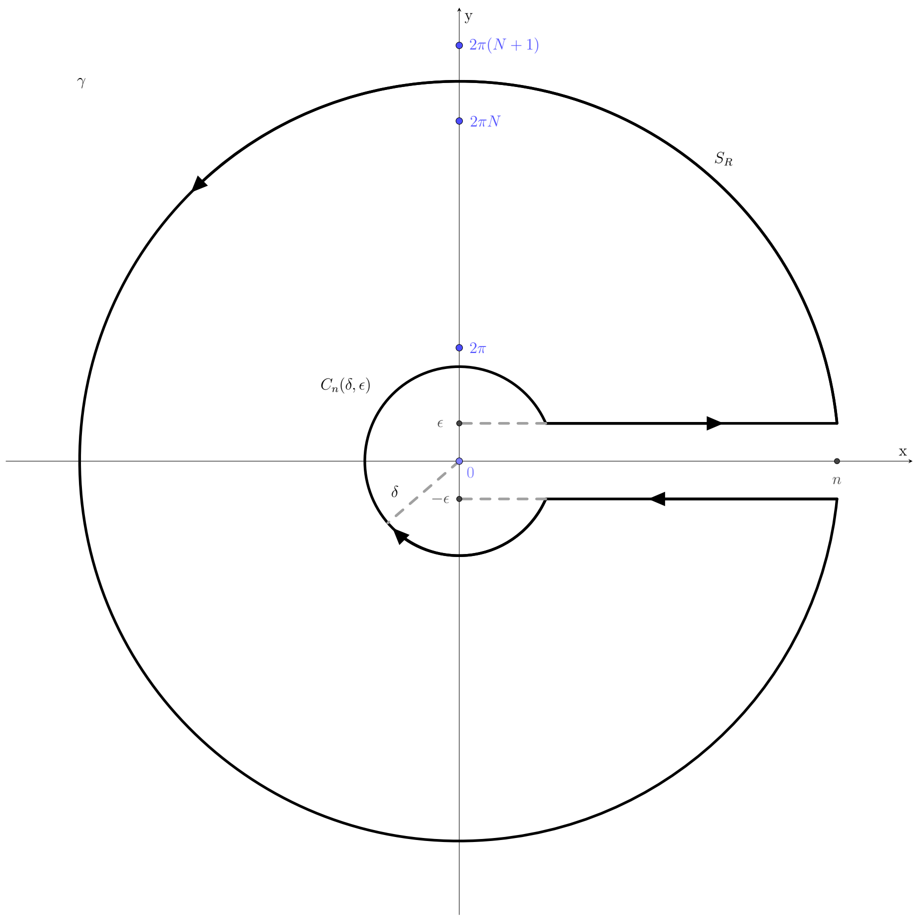


Figura 4: Contorno de integración γ para la Ec. Funcional

Si $I = \{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid -N \leq k \leq N\}$, por el teorema de los residuos se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(s,z)dz &= 2\pi i \sum_{k\in I} \operatorname*{Res}_{s=2k\pi i} g(s,z) \\ &= 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{s=2k\pi i} g(s,z) + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{s=-2k\pi i} g(s,z) \right)\end{aligned}$$

Ahora, para $k > 0$ tenemos que

- $\lim\limits_{z\to 2k\pi i} \frac{z-2k\pi i}{e^z-1} = \lim\limits_{z\to 2k\pi i} \frac{1}{e^z} = 1$
- $\lim\limits_{z\to 2k\pi i} z^{s-1} = (2k\pi i)^{s-1}$

Luego

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=2k\pi i} g(s,z) &= \lim_{z\to 2k\pi i} (z-2k\pi i)\frac{z^{s-1}}{e^z-1} \\ &= \left(\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z-2k\pi i}{e^z-1} \right) \left(\lim_{z\to 2k\pi i} z^{s-1} \right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2k\pi i)^{s-1} \\
&= e^{(s-1)[\ln|2k\pi i| + i\arg(2k\pi i)]} \\
&= (2k\pi)^{s-1} e^{i(s-1)\arg(2k\pi i)} \\
&= k^{s-1}(2\pi)^{s-1} e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

De manera análoga, para $s = -2k\pi i$ obtenemos que

$$\operatorname*{Res}_{s=-2k\pi i} g(s,z) = k^{s-1}(2\pi)^{s-1} e^{i(s-1)\frac{3\pi}{2}}$$

Como $\int_\gamma g(s,z)dz = \int_{S_R} g(s,z)dz + \int_{C_n(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz$, esto debido a que que la curva $C_n(\delta,\epsilon)$ se definió orientada de manera negativa, entonces

$$
\begin{aligned}
\int_{S_R} g(s,z)dz + \int_{C_n(\delta,\epsilon)} g(s,z)dz = &= 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{N} k^{s-1}(2\pi)^{s-1} e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{N} k^{s-1}(2\pi)^{s-1} e^{i(s-1)\frac{3\pi}{2}} \right) \\
&= (2\pi)^s i \left(e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}} + e^{i(s-1)\frac{3\pi}{2}} \right) \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} \\
&= (2\pi)^s i e^{i\pi(s-1)} \left(e^{-i(s-1)\frac{\pi}{2}} + e^{i(s-1)\frac{\pi}{2}} \right) \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} \\
&= (2\pi)^s i e^{i\pi(s-1)} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) \sum_{k=1}^{N} k^{s-1} \\
&= 2i(2\pi)^s e^{i\pi s} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{1-s}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si consideramos s real , tal que $s < 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{S_R} g(s,z)dz \right| &\leq \int_{S_R} \frac{|z^{s-1}|}{|e^z - 1|} |dz| \\
&\leq \int_{S_R} \frac{|z|^{s-1}}{|e^z| - 1} |dz| \\
&\leq \int_{S_R} \frac{R^{s-1}}{e^{-R} - 1} |dz| \\
&= \frac{R^{s-1}}{e^{-R} - 1} \int_{S_R} |dz| \\
&= \frac{R^{s-1}}{e^{-R} - 1} R \left[2\pi - 2\arg(n + i\epsilon) \right]
\end{aligned}
$$

Si $N \to \infty$ entonces $n \to \infty$ y por lo tanto $R \to \infty$. Luego $\frac{R^s}{e^{-R}-1}\left[2\pi - 2\arg(n+i\epsilon)\right] \to 0$ cuando $N \to \infty$ y así $\int_{S_R} g(s,z)dz \to 0$ si $N \to \infty$. Entonces, si $N \to \infty$ en (10) , se obtiene que

$$I(s) = 2i(2\pi)^s e^{i\pi s} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Pero por (8)

$$\frac{2\pi i e^{\pi i s}\zeta(s)}{\Gamma(1-s)} = 2i(2\pi)^s e^{i\pi s} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Es decir, para $s<0$

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Finalmente por el principio de la unicidad, como ζ y $2^s(\pi)^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$ son analíticas en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\geq 0}$, entonces

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \qquad \text{para } s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

□

5. Ceros de la función ζ

Por el Teorema 2.2.1 , para $\Re(s)>1$, $\zeta(s)\neq 0$. Por otro lado, si $\Re(s)<0$, por la ecuación funcional tenemos que $2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)=0$ si y solo si $\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)=0$. Esto ultimo, ya que $\Gamma(z)\neq 0$ para $z\in\mathbb{C}$ y $\zeta(1-s)\neq 0$ cuando $\Re(1-s)>1$.
Luego en esta región, $\zeta(s)=0$ si $s=2k$ con $k\in\mathbb{Z}_{<0}$. A partir de esto podemos clasificar los ceros de la función ζ en dos:

Definición 5.1. *Los ceros de ζ determinados por la función* $\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)$ *son conocidos como los* ***ceros triviales***

Definición 5.2. *Los ceros* ***no-triviales*** *de la función ζ pertenecen a la región $\{z\in\mathbb{C}: 0\leq\Re(s)\leq 1\}$. Esta región se conoce como la* ***región crítica*** *o la* ***banda crítica*** *de la función ζ.*

Sobre esta banda es que se desenvuelve la famosa hipótesis de Riemann, sin embargo es posible reducir un poco más la región crítica. Para esto, primero probaremos que existe una simetría en esta banda para los ceros no-triviales y luego que no existen ceros-no triviales en los bordes de la banda.

Teorema 5.1. *Los ceros no-triviales de ζ son simétricos respecto a $\Re(s)=\frac{1}{2}$.*

Demostración. Si s es un cero no-trivial, entonces

$$2^s\pi^{s-1}\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)=0$$

Pero esto solo ocurre si $\zeta(1-s)=0$. Luego $1-s$ es un cero de ζ y como $0\leq\Re(1-s)\leq 1$, entonces $1-s$ es un cero no-trivial. Así que los ceros de la función ζ son simétricos a la recta $\Re(s)=\frac{1}{2}$. □

Procedemos a demostrar que no existen ceros no-triviales en la recta $\Re(s)=1$ y $\Re(s)=0$.

Lema 5.2. *Si* $\Re(s) > 1$, *entonces*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{p^{-s}\ln p}{1-p^{-s}}$$

Donde el indice de la serie indica la suma sobre todos los primos p.

Demostración. Sea $D_k = \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) \geq k > 1\}$ y considere $g_p(s) = 1 - p^{-s}$. Como

$$\left|-p^{-s}\right| = \frac{1}{p^{\Re(s)}} \leq \frac{1}{p^k}$$

Y $\sum_p p^{-k}$ converge , ya que

$$\sum_p p^{-k} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = \zeta(k)$$

y $\zeta(s)$ converge para $k > 1$; entonces por el Teorema 1.9 se tiene que $\prod_{p\leq M}(1-p^{-s})$ converge uniformemente a $\prod_p (1-p^{-s})$ en D_k. Así que $\prod_{p\leq M}(1-p^{-s})^{-1}$ converge uniformemente a $\prod_p (1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$ en D_k, es decir, converge normalmente a ζ en $D = \{z \in \mathbb{C}|\Re(z) > 1\}$. Por otro lado, como $f_p(s) = (1-p^{-s})^{-1}$ son funciones analíticas en D, por el teorema 1.10 tenemos que:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{p^{-s}\ln p}{1-p^{-s}}$$

□

Lema 5.3. *Para* $\sigma > 1$ *y* $t \in \mathbb{R}^*$, *tenemos que*

$$\Re\left[-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} - \frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right] \geq 0 \tag{11}$$

Demostración. Si $s = \sigma + it$, por el lema anterior tenemos que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{p^{-s}\ln p}{1-p^{-s}}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} = \frac{1}{1-p^{-s}}$, entonces

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{sn}}$$

Así que

$$\begin{aligned}\Re\left[-3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} - \frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}\right] &= \Re\left[\sum_p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\ln p}{p^{n\sigma}} + \frac{4\ln p}{p^{n(\sigma+it)}} + \frac{\ln p}{p^{n(\sigma+2it)}}\right)\right] \\ &= \sum_p \sum_{n=1} \Re\left[\frac{\ln p}{p^{n\sigma}}\left(3 + 4p^{-nit} + p^{-2nit}\right)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_p \sum_{n=1} \frac{\ln p}{p^{n\sigma}} \left[3 + 4\cos(nt\ln p) + \cos(2nt\ln p)\right] \\
&= \sum_p \sum_{n=1} \frac{\ln p}{p^{n\sigma}} \left[3 + 4\cos(nt\ln p) + 2\cos^2(nt\ln p) - 1\right] \\
&= 2\sum_p \sum_{n=1} \frac{\ln p}{p^{n\sigma}} \left[\cos(nt\ln p) + 1\right]^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Donde el intercambio entre las sumas y la parte real es valido, ya que la función que a cada $z \in \mathbb{C}$ le asigna su parte real, es continua y es una aplicación lineal. □

Teorema 5.4. *No hay ceros no-triviales de ζ en la recta $\Re(s) = 1$*

Demostración. Por el teorema 1.6, como ζ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y tiene un polo simple en $s = 1$, entonces:

- $\lim\limits_{\sigma \to 1} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = -1$
- $\lim\limits_{\sigma \to 1} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = N_1 \geq 0$
- $\lim\limits_{\sigma \to 1} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} = N_2 \geq 0$

Donde $\{N_1, N_2\} \subset \mathbb{Z}$. Luego si $\sigma \to 1$ en $(\sigma - 1) * (11)$, tenemos que $3 - 4N_1 - N_2 \geq 0$. Pero $N_2 \geq 0$, así que $3 - 4N_1 \geq 0$ y por lo tanto $N_1 \leq \frac{3}{4}$.
Ya que $N_1 \in \mathbb{Z}$, la única opción es que $N_1 = 0$. Así que

$$\lim_{\sigma \to 1} (\sigma - 1) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = 0$$

y esto solo ocurre si $\zeta(1 + it) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^*$, como se quería demostrar. □

Corolario 5.4.1. *No hay ceros no-triviales de ζ en la recta $\Re(s) = 0$*

Demostración. Como no existen ceros no-triviales de ζ en la recta $\Re(s) = 1$, por el teorema 5.1, tampoco los hay en la recta $\Re(s) = 0$. □

Recapitulando, tenemos que la región libre de ceros no-triviales, señalada en verde en la figura 5, se divide en dos:

- $\Re(s) \geq 1$, donde no existen ceros de la función ζ
- $\Re(s) \leq 0$, donde solo existen ceros triviales y estos son de la forma $-2k$ con $k \in \mathbb{N}$

Más aún, los ceros no triviales poseen una simetría al rededor de la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Resumimos estos hechos en la siguiente imagen.

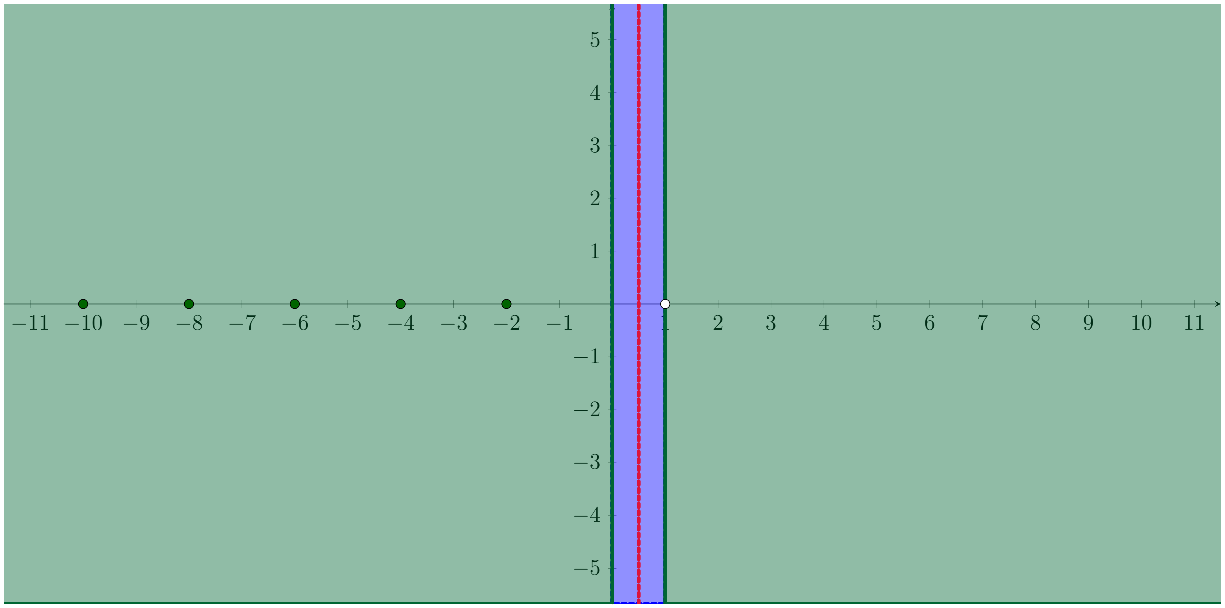


Figura 5: Región crítica de la función ζ

Cabe resaltar que los ceros que han sido encontrados de la función zeta se encuentran todos en la la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$, por lo tanto mientras la hipótesis de Riemann siga sin demostrarse o refutarse, seguirá siendo uno de los mayores problemas abiertos de la matemática. Para acercarse más a este punto, el enfoque que se puede tomar con el trabajo aquí hecho, puede girar entorno a los siguientes puntos:

- Se sabe que ζ tiene infinitos ceros en la región critica.
- Su distribución asintótica es conocida y se relaciona con la función $\pi(x)$.
- Se conoce que al menos la tercera parte de los ceros pertenecen a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Conclusiones

Con este trabajo se pudo evidenciar que la variable compleja permite abordar el estudio de la función zeta de Riemann, sus extensiones y su ecuación funcional y abordar el tema de los ceros de una manera más accesible, a pesar de que estos no son temas triviales. Sin embargo es necesario complementar estas herramientas con algunos resultados de la integral de Lebesgue, ya que a lo largo del estudio se presentaron casos donde no da a basto la convergencia uniforme y es necesario utilizar herramientas mucho más fuertes como lo es el teorema de la convergencia monótona.
Como trabajo futuro se propone investigar de una manera similar la conexión que tiene la función Zeta con la teoría de números, más específicamente con el teorema de los números primos, y de esta manera hacer una aproximación formal a la hipótesis de Riemann.

Bibliografía

[1] P. Borwein y col. *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*. CMS Books in Mathematics. Springer, 2008. ISBN: 9780387721255.

[2] Xu-Yan Chen. *The Riemann Zeta Function Part 1*. URL: `http://people.math.gatech.edu/~xchen/teach/comp_analysis/note-zeta.pdf`.

[3] Xu-Yan Chen. *The Riemann Zeta Function Part 3*. URL: `http://people.math.gatech.edu/~xchen/teach/comp_analysis/note-zeta3.pdf`.

[4] T. Gamelin. *Complex Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2001. ISBN: 9780387950938.

[5] H.L. Royden y P. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, 2010. ISBN: 9780131437470.

[6] Wikipedia. *Generalizations, Cauchy product*. URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_product#Generalizations`.

Apéndice

1.1. La función Gamma

a función gamma (denotada como Γ) es una función meromorfa que surge frecuentemente en análisis complejo y esta extiende la función factorial de los enteros positivos a todo el plano complejo.

Definición 1.3. *Para el semiplano $Re(z) > 0$ la función Γ esta definida como*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Teorema 1.5. *La función Γ es absolutamente convergente para $\Re(z) > 0$ y*

$$|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\Re(z))$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$, como:

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &\leq \int_0^\infty |e^{-t} t^{z-1}| dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt \\ &= \Gamma(\Re(z)) \end{aligned}$$

Entonces basta con demostrar que $\Gamma(\Re(z))$ converge. Ya que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{Re(z)-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$$

Para $\epsilon = 1$, existe $N > 0$ tal que, si $t > N$ entonces $\left| \frac{t^{Re(z)-1}}{e^{\frac{t}{2}}} \right| < 1$. Luego $t^{Re(z)-1} < e^{\frac{t}{2}}$ y así $\frac{t^{Re(z)-1}}{e^t} < e^{-\frac{t}{2}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma(\Re(z)) &= \int_0^1 e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt + \int_1^N e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt + \int_N^\infty e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt \\ &< \int_0^1 t^{\Re(z)-1} dt + \int_1^N e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt + \int_N^\infty e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Re(z)} + \int_0^N e^{-t} t^{\Re(z)-1} dt + 2e^{-\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

Como $e^{-t} t^{Re(z)-1}$ es continua en $[1, N]$, entonces esta ultima integral converge y por lo tanto $\Gamma(\Re(z))$ converge; así que $\Gamma(z)$ converge absolutamente. $\square$

Teorema 1.6. *Para $\Re(z) > 0$ tenemos que*

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$. Si $u = t^z, dv = e^{-t}dx$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^z dt \\ &= -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dx \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

□

Teorema 1.7. *Para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Demostración. Para $n = 1$ tenemos que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1 = 0!$$

Suponga para $n = k$, con $k \in \mathbb{N}$. Por el teorema anterior,

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$$

Así, por inducción matemática, tenemos que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$ □

Ahora podemos extender Γ a una función meromorfa en el plano complejo.

Teorema 1.8. *La función Γ es meromorfa en el plano complejo con polos simples en $z = 0, -1, -2, \cdots$*

Demostración. Aplicando el teorema 1.6 m veces, obtenemos que

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1)\cdot(z+1)z\Gamma(z) \qquad \text{para } \Re(z) > 0$$

Sea

$$g(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdot(z+1)z} \qquad \text{con } \Re(z) > -m$$

Donde g tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, \cdots, -(m+1)$. Como $g(z) = \Gamma(z)$ para $\Re(z) > 0$ entonces, por el principio de unicidad:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)\cdot(z+1)z} \qquad \text{para } \Re(z) > -m$$

y Γ tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, \cdots, -(m+1)$. Tomando $m \to \infty$, tenemos que Γ es una funcione meromorfa con los polos simples en $z = 0, -1, -2, \cdots$ □

Teorema 1.9 (Fórmula de reflexión de Euler)**.** *Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ se cumple que*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

Demostración. Como

- $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$
- $\Gamma(1-z) = \int_0^\infty s^{(1-z)-1}e^{-s}ds \qquad \forall z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) < 1$

Entonces $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $1 > Re(z) > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{-z}e^{-s}ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{z-1}s^{-z}dsdt\end{aligned}$$

Si $t = u^2$ y $s = v^2$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2(z-1)}v^{-2z}|4uv|dudv \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2z-1}v^{-(2z-1)}dudv \\ &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}dudv\end{aligned}$$

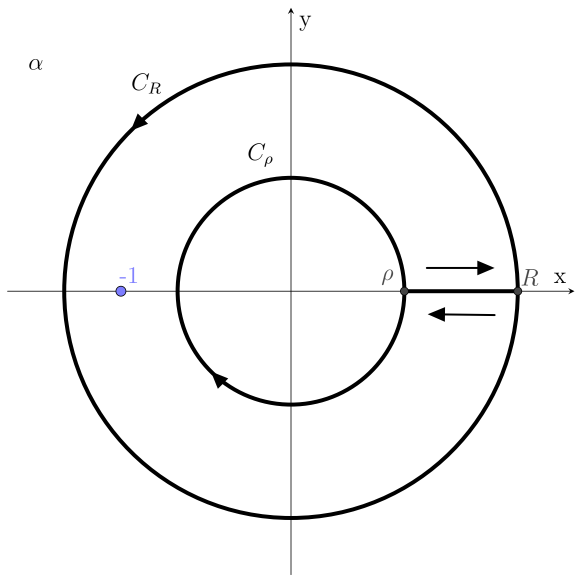
Ahora, si $u = r\operatorname{sen}\theta$ y $v = r\cos\theta$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2}(\tan\theta)^{2z-1}|-r|drd\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2z-1}d\theta \int_0^\infty e^{-r^2}rdr \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2z-1}d\theta\end{aligned}$$

Sea $\theta = \arctan(\sqrt{x})$, entonces

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= 2\int_0^\infty (\sqrt{x})^{2z-1}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x+1}dx\end{aligned}$$

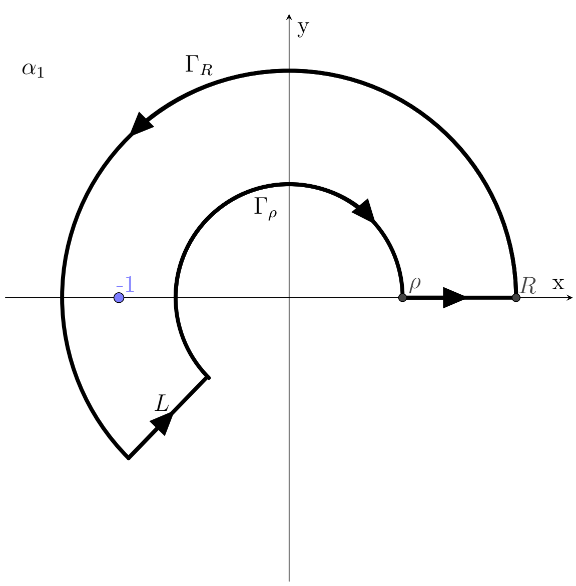
Consideremos el contorno α recorrido como se indica en la figura, donde $0 < \rho < 1 < R$

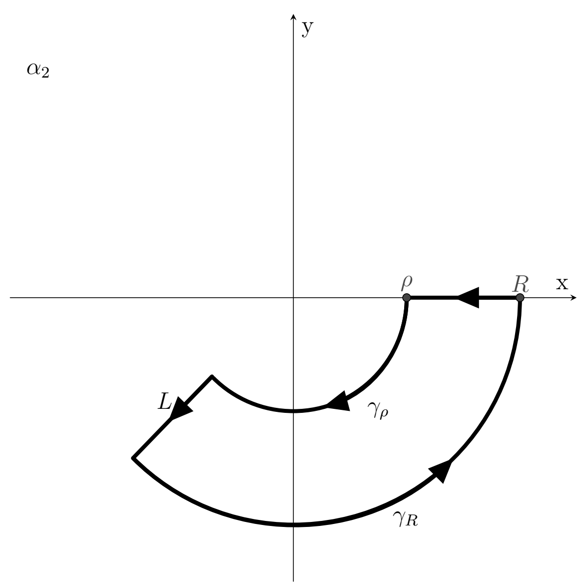


Si

$$f(w) = \frac{w^{z-1}}{w+1} = \frac{e^{(z-1)(\ln|w|+i\arg(w))}}{w+1} \qquad \text{con } w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$$

Entonces f es univaluada y continua a trozos sobre C_ρ y C_R. Consideremos los contornos α_1 y α_2 resultados de dividir α por el segmento L orientado sobre el rayo $Arg(w) = \theta_0$ con $\theta_0 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ y orientado como se indica en las figuras.





Sea

$$f_1(w) = \frac{w^{z-1}}{w+1} \qquad \text{con } |w| > 0 \text{ y } \arg(w) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Como f_1 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ y $z_0 = -1$ está en el interior de α_1, por el Teorema de los residuos:

$$\int_{\alpha_1} f_1(w)dw = \int_\rho^R f_1(w)dw + \int_{\Gamma_R} f_1(w)dw + \int_L f_1(w)dw + \int_{\Gamma_\rho} f_1(w)dw$$
$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=-1} f_1(w) \tag{12}$$

Por otro lado, si:

$$f_2(w) = \frac{w^{z-1}}{w+1} \qquad \text{con } |w| > 0 \text{ y } \arg(w) \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$$

Como f_2 es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, entonces también lo es en α_2 y en su interior, así por el Teorema de Cauchy-Goursat:

$$\int_{\alpha_2} f_2(w)dw = \int_\rho^R f_2(w)dw + \int_{\gamma_R} f_2(w)dw + \int_{-L} f_2(w)dw + \int_{\gamma_\rho} f_2(w)dw$$
$$= 0 \tag{13}$$

Sea $C_1 = \mathbb{C} \setminus \left\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right\}$ y $C_2 = \mathbb{C} \setminus \left\{z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in [0, \frac{\pi}{2}]\right\}$

1. Si $w \in C_1$, como $f_1(w) = \dfrac{w^{z-1}}{w+1}$ con $|w| > 0$ y $\arg(w) \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, entonces $f_1(w) = f(w)$

2. Si $w \in C_2$, como $f_2(w) = \dfrac{w^{z-1}}{w+1}$ con $|w| > 0$ y $\arg(w) \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, entonces $f_2(w) = f(w)$

Así que $f_1 = f$ sobre Γ_R, Γ_ρ, L y $f_2 = f$ sobre γ_R, γ_ρ, L. Si reemplazamos en (12) y (13) obtenemos que

$$\int_\rho^R f_1(w)dw + \int_{\Gamma_R} f(w)dw + \int_L f(w)dw + \int_{\Gamma_\rho} f(w)dw = 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=-1} f_1(w)$$

y

$$\int_\rho^R f_2(w)dw + \int_{\gamma_R} f(w)dw - \int_L f(w)dw + \int_{\gamma_\rho} f(w)dw = 0$$

Finalmente, sumando estas dos ultimas igualdades y teniendo en cuenta que $\Gamma_R \cup \gamma_R = C_R$ y $\Gamma_\rho \cup \gamma_\rho = C_\rho$ tenemos que

$$\int_\rho^R [f_1(w) - f_2(w)]dw + \int_{C_R} f(w)dw + \int_{C_\rho} f(w)dw = 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=-1} f_1(w) \tag{14}$$

Si $w = re^{i\theta} y$ con $\{r, \theta\} \subset \mathbb{R}$, $w \in (\rho, R)$ y $Re(w) = x$, entonces:

$$f_1(w) = \frac{w^{z-1}}{w+1} = \frac{e^{(z-1)(ln(x)+i0)}}{ve^{i0}+1} = \frac{x^{z-1}}{x+1}$$

y

$$f_2(w) = \frac{w^{z-1}}{w+1} = \frac{e^{(z-1)(ln(x)+i2\pi)}}{xe^{i2\pi}+1} = \frac{x^{z-1}e^{(z-1)(i2\pi)}}{x+1}$$

además, si $\phi(w) = w^{z-1}$ con $|w| > 0$ y $\arg(w) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, como ϕ es analítica en -1 y

$$\phi(-1) = e^{(z-1)(ln|-1|+i\pi)} = e^{i\pi(z-1)}$$

Luego f_1 tiene un polo simple en -1 y $\operatorname*{Res}_{w=-1} f_1(w) = e^{i\pi(z-1)}$.Así, reemplazando en (14)

$$(1 - e^{(z-1)(i2\pi)}) \int_\rho^R \frac{x^{z-1}}{x+1}dx + \int_{C_R} f(w)dw + \int_{C_\rho} f(w)dw = 2\pi i e^{i\pi(z-1)} \tag{15}$$

Por otro lado tenemos que:

(i)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(w)dw\right| &\leq \int_{C_R} \left|\frac{w^{z-1}}{w+1}\right| |dw| \\
&\leq \int_{C_R} \frac{|w|^{\Re(z)-1}e^{-\Im(z)\arg(w)}}{|w|-1}|dw| \\
&\leq \int_{C_R} \frac{|w|^{\Re(z)-1}e^{|\Im(z)|2\pi}}{|w|-1}|dw| \\
&= \frac{R^{Re(z)-1}e^{|\Im(z)|2\pi}}{R-1} \int_{C_R} |dw| \\
&= \frac{R^{Re(z)-1}e^{|\Im(z)|2\pi}}{R-1} 2\pi R \\
&= \frac{2\pi R^{Re(z)}e^{|\Im(z)|2\pi}}{R-1}
\end{aligned}$$

(ii) De manera análoga para C_ρ

$$\left|\int_{C_\rho} f(w)dw\right| \leq \frac{2\pi \rho^{Re(z)}e^{|\Im(z)|2\pi}}{\rho-1}$$

Como $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{2\pi R^{Re(z)}e^{|\Im(z)|2\pi}}{R-1} = 0$, ya que $0 < Re(z) < 1$, y $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{2\pi \rho^{Re(z)}e^{|\Im(z)|2\pi}}{\rho-1} = 0$; entonces $\displaystyle\int_{C_R} f(w)dw \to 0$ cuando $R \to \infty$ y $\displaystyle\int_{C_\rho} f(w)dw \to 0$ cuando $\rho \to 0$. Por lo tanto si $\rho \to 0$ en (15), tenemos que:

$$\left(1 - e^{(z-1)(i2\pi)}\right) \int_0^R \frac{x^{z-1}}{x+1}dx + \int_{C_R} f(w)dw = 2\pi i e^{i\pi(z-1)}$$

Finalmente si $R \to \infty$ en la igualdad anterior:

$$\left(1 - e^{(z-1)(i2\pi)}\right) \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x+1}dx = 2\pi i e^{i\pi(z-1)}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x+1}dx &= \frac{2\pi i e^{i\pi(z-1)}}{1-e^{(z-1)(i2\pi)}} \\
&= \frac{\pi}{\left(\dfrac{e^{\pi i(1-z)} - e^{-i\pi(1-z)}}{2i}\right)} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(1-z))} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi z) - \operatorname{sen}(\pi z)\cos(\pi)} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}
\end{aligned}$$

De esta manera $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ para $0 < \Re(z) < 1$.Pero $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, luego por el principio de unicidad (Teorema 1.4)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

$\square$

Teorema 1.10. *Para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ *tenemos que* $\Gamma(z) \neq 0$

Demostración. Ya que:

1. Si $z \in \mathbb{Z}_{>0}$, por el teorema 1.7, tenemos que $\Gamma(z) = z! \neq 0$.
2. Por el teorema anterior, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ entonces $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \neq 0$. Es decir $\Gamma(z) \neq 0$.

Así que por 1 y 2, $\Gamma(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$

$\square$