Dinámica de funciones de variable compleja en el disco

Nicolás Castillo Soto

TRABAJO DIRIGIDO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DIRIGIDO POR: PHD. JULIÁN ANDRÉS AGREDO ECHEVERRY

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

SISTEMAS DINÁMICOS

MAYO 2019

Agradecimientos

A mi familia, a mis profesores y a mis amigos que me han ayudado en la vida y en el desarrollo de mi carrera.

Resumen

En este trabajo se estudian las funciones holomorfas del disco unidad y sus propiedades relacionadas a la dinámica en puntos en el interior y el borde del disco. Este estudio se realizará usando la métrica pseudo hiperbólica, en particular hacemos uso de las bolas pseudo hiperbólicas. Definimos y estudiamos límites angulares y la relación entre diferentes resultados acerca de la dinámica de estos iterados.

TABLA DE CONTENIDOS

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Teniendo en cuenta el trabajo *Algunas consecuencias del Lema de Schwarz*, este trabajo continua el estudio de las funciones holomorfas el disco y estudiar algunas propiedades de la función generadora de probabilidad, para ello a continuación se mencionan aquellos resultados y definiciones necesarios para la teoría trabajada junto con los esquemas o referencia de sus demostraciones.

1.1. Preliminares y notación

Definición 1.1.1 (Mapeos iterados): Sea X un conjunto y $f : X \longrightarrow X$ una función. Definimos f^n como la n-ésima iteración de f cuando n es entero no negativo por :

$$f^n = \begin{cases} id & \text{si } n = 0, \\ f \circ f^{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Definición 1.1.2 (Función holomorfa): Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $A \subseteq D$, f es holomorfa en Asi para todo $z_0 \in A$ existe un abierto $U \subset A$ tal que $z_0 \in U$ y $f'(z)$ existe para todo $z \in U$.

Definición 1.1.3 (Transformación conforme): Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $A \subseteq D$, f es conforme en $z_0 \in A$ si f es diferenciable en z_0 y f preserva el ángulo formado entre sí por dos curvas diferenciables en z_0.

La relación de "ser conformemente equivalente"denotada por $\mathscr{C}$ está definida por

$$D_1 \mathscr{C} D_2 \longleftrightarrow \text{Existe un mapeo conforme } f : D_1 \longrightarrow D_2$$

Es fácil ver que $\mathscr{C}$ es una relación de equivalencia.

Definición 1.1.4 : Se consideran como conjuntos conformemente equivalentes la Esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, Plano complejo $\mathbb{C}$ y el Disco unidad-unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Notación 1.1.1: El conjunto de todas las funciones holomorfas en D que toma valores en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ será denotado por $\mathrm{Hol}(D, \Omega)$. Se usará $\mathrm{Hol}(D)$ para denotar el conjunto $\mathrm{Hol}(D, D)$.

Nota 1.1.1: Si f y g están en $\mathrm{Hol}(D)$, entonces $\Phi = f \circ g$ está también en $\mathrm{Hol}(D)$, donde $\Phi(z) = f(g(z))$.

Teorema 1.1.1 (Fórmula Integral de Cauchy):
Si $f \in \mathrm{Hol}(D, \mathbb{C})$ entonces para cada curva cerrada $\gamma \in D$ y cada $z \in D \backslash \gamma$.

$$\tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ está dentro de } \gamma \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(Para ver una demostración, consultar [4] página 113).

Notación 1.1.2: $\Delta_r(z_0)$ es el disco centrado en z_0 y de radio r

Teorema 1.1.2 (Principio del módulo máximo): Si una función f es holomorfa y no constante en un dominio dado D, entonces $|f|$ no alcanza su máximo en D. Esto es, que no existe $z_0 \in D$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in D$. (Para ver una demostración, consultar [3] página 88)

Teorema 1.1.3 (Lema de Shwarz): Sea $f \in Hol(\Delta)$ tal que $f(0) = 0$. Entonces

(1) $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \Delta$

(2) $|f'(0)| \leq 1$

Más aún, si existe $z_0 \in \Delta$, $z_0 \neq 0$ tal que se tiene la igualdad en (1), o se tiene la igualdad en (2), entonces f es una rotación, es decir, $f(z) = e^{i\alpha}z$, para algún $\alpha \in [0, 2\pi]$. (Para ver una demostración, consultar [2] página 11)

Este lema implica que una función holomorfa del disco unidad en el disco unidad que fija el origen, mantiene las distancias fijas o las contrae.

Teorema 1.1.4 (Principio del punto fijo de Brouwer): Sea $F : D \to D$ continua, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Si D es convexo, cerrado, acotado y no vacío entonces F tiene un punto fijo en D, es decir existe $z_0 \in D$ tal que $F(z_0) = z_0$. (Para ver una demostración, consultar [6] página 31)

Teorema 1.1.5 (Propiedad de unicidad): Sea D un dominio en $\mathbb{C}$, y sean f, g funciones definidas sobre D para las cuales existen expansiones en serie para cada punto de D. Si f y g coinciden en una sucesión de puntos distintos en D con un punto límite en D, o si tienen expansión en serie idéntica en un solo punto de D, entonces $f \equiv g$ (en D). (Véase [2] página 8)

Teorema 1.1.6 (Desigualdad del valor medio en varias variables): Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $f : A \to \mathbb{R}^n$ derivable en A, entonces para todo $\{a, b\} \subseteq A$ existe $c \in A$ tal que:

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||Df(c)||\ ||b - a||$$

donde $Df(c)$ es el jacobiano de f evaluado en c. (Para ver una demostración, consultar [7] página 121)

Teorema 1.1.7 (Teorema del punto fijo de Banach): Sea (D, d) un espacio métrico completo y sea $F : D \to D$ una contracción estricta en (D, d) en el sentido que:

$$d(F(x), F(y)) \leq q.d(x, y),\ x, y \in D$$

para algún $0 < q < 1$.

Entonces F tiene un único punto fijo en D. Más aún, para cada $x \in D$ la sucesión de $\{F^n(x)\}$ converge a este punto fijo. (Véase [1] página 8)

Teorema 1.1.8 (Teorema de Vitali): Si $\{f_n\} \subseteq \text{Hol}(D, \mathbb{C})$ está acotada en el interior de D, es decir para todo f_n existe $M > 0$ tal que para todo $z \in D$ $\mid f_n(z) \mid < M$. Si $\{f_n\}$ converge para un conjunto de puntos con punto límite en D, entonces $\{fn\}$ converge localmente uniformemente en D a alguna $f \in \text{Hol}(D, \mathbb{C})$. (Véase [1] página 8)

Teorema 1.1.9 (Teorema de Riemann en singularidades removibles): Sea z_0 una singularidad aislada de $f(z)$. Si $f(z)$ es acotada cerca de z_0 entonces $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0. (Véase [3] página 172)

Teorema 1.1.10 (Teorema de Montel): La familia $\mathcal{F}$ esta uniformemente acotada en el interior de D si y solo si esta es compacta en la topología de convergencia local uniforme en D, es decir, cada sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una subsucesión la cual converge localmente uniforme en D. (Véase [1] página 6)

Proposición 1.1.1: Sean (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ si y solo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) existe una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ de (x_{n_k}) tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ entonces toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) converge a x, aplicando nuevamente el mismo argumento entonces toda subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ de (x_{n_k}) converge a x en particular la subsucesión idéntica $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_{n_k}) converge a x.

($\Leftarrow$) Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k > k$ tal que $\mid x_{n_k} - x \mid > \epsilon$, tomando la sucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vemos que (x_{n_k}) es una subsucesión de (x_n) que no tiene subsucesiones convergentes ya que para $\epsilon > 0$ y $s \in \mathbb{N}$ $x_{n_s} \in (x_{n_k})$ y $\mid x_{n_s} - x \mid > \epsilon$.

1.2. Acerca de puntos fijos de automorfismos en Δ

En el trabajo [2] se trabajan caracterizaciones de los automorfismos del disco y sus dinámicas en puntos y en esta parte introductoria retomaremos parte del trabajo y concluimos con dos resultados necesarios en la teoría posterior.

El término automorfismo se refiere a un isomorfismo de un objeto matemático en él mismo. Para nosotros el término estará delimitado en un contexto en especial:

Definición 1.2.1: Un automorfismo del disco unidad es una función holomorfa $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ y además biyectiva. El conjunto de todos los automorfismos del disco unidad se denotará por $\mathrm{Aut}(\Delta)$. ($(\mathrm{Aut}(\Delta), \circ)$ es un grupo donde $\circ$ es la operación de composición de funciones y la identidad del grupo es $id_\Delta(z) = z$).

Nota: Como consecuencia del Lema de Shwarz tenemos que los automorfismos del disco unidad que fijan al origen son rotaciones.

Definición 1.2.2: Se define la transformación de Möebius $m_a(z)$ en el disco unidad por:

$$m_a(z) := \frac{z + a}{1 + \overline{a}z} \tag{1.1}$$

donde $a \in \Delta$.

Usando la anterior notación y el lema de Schwartz podemos probar el Lema 1.2.1.

Lema 1.2.1 (Lema de Pick): Si $F \in Hol(\Delta)$. Entonces para todo par z y w en Δ se tiene que:

$$|m_{-F(w)}(F(z))| \leq |m_{-w}(z)| \tag{1.2}$$

Si la igualdad se verifica en la desigualdad anterior, entonces F es un automorfismo de Δ. (Para ver una demostración, consultar [2] página 14)

Nota 1.2.1: Si además suponemos $F(0) = 0$ en el Lema 1.2.1, entonces tenemos la hipótesis del Lema de Shwarz, es decir este Lema es una generalización del Lema de Shwarz.

Observación 1.2.1 (Notación): $\Delta_r = \{z \in \Delta : |z| < r\}$, $\Omega_r(a) := m_a(\Delta_r)$, donde $\Omega_r(a)$ es conocida como la bola pseudo hiperbólica.

Por el Lema de Pick y la proposición anterior tenemos una descripción del comportamiento de las funciones $f \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ en los dominios $\Omega_r(a)$, $r \in (0,1)$ y $a \in \Delta$. Ya que si $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ entonces:

$$F(\Omega_r(a)) \subseteq \Omega_r(F(a)) \tag{1.3}$$

Definición 1.2.3: Se define la métrica pseudo-hiperbólica $d : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}^+$ por :

$$d(z,w) :=\mid \tfrac{z-w}{1-\overline{w}z} \mid=\mid m_{-w}(z) \mid \tag{1.4}$$

esta métrica será de importancia en el desarrollo de este trabajo ya que varios resultados se pueden escribir en términos de la métrica como lo es el Lema de Pick además de estar vinculada en el estudio de la dinámica en secciones posteriores.

Observación 1.2.2: Las demostraciones de las proposiciones 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 se pueden encontrar con detalle en el trabajo [2].

Proposición 1.2.1: Si $\zeta \in \Delta$ es un punto fijo de $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$. Entonces F deja la bola pseudo-hiperbólica $\Omega_r(\zeta)$ invariante; en otras palabras para cada $r \in (0,1)$

$$F(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta) \tag{1.5}$$

Una consecuencia adicional del lema de Pick-Shwarz es que si $\zeta \in \Delta$ es un punto fijo de $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ entonces:

$$|F'(\zeta)| \leq 1 \tag{1.6}$$

La igualdad se tiene en las afirmaciones anteriores si y solo si F es un automorfismo de Δ.

Proposición 1.2.2 (Puntos fijos de los automorfismos de Δ):
Si $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ entonces se puede representar de la siguiente forma:

$$F(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \tag{1.7}$$

Para algún $a \in \Delta$ y $\varphi \in \mathbb{R}$.

Entonces para $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, la ecuación $F(z) = z$ es equivalente a la ecuación cuadrática.

$$\overline{a}z^2 + (e^{i\varphi} - 1)z - e^{i\varphi}a = 0 \tag{1.8}$$

o

$$a\overline{z}^2 + (e^{-i\varphi} - 1)\overline{z} - e^{-i\varphi}\overline{a} = 0 \tag{1.9}$$

Entonces:
(i). Si $a = 0$, de (1.7) tenemos que:

$$F(z) = e^{i\varphi}z$$

Es decir F es una rotación alrededor del origen y tiene como único punto fijo $z = 0$ en Δ siempre que $\varphi \neq 0$; y tenemos que si $\varphi = 0$ entonces $F(z) = z$ por lo cual F tendrá infinitos puntos fijos en Δ.

(ii). Si pensamos en el contra recíproco de (i), podemos afirmar que si F no es la identidad y no es una rotación alrededor del origen entonces $a \neq 0$, por lo tanto $z = 0$ no es una raíz de la ecuación anterior. Luego, podemos multiplicar por $\frac{-e^{i\varphi}}{\overline{z}^2}$ en ambos lados de la igualdad y obtenemos:

$$\overline{a}(\tfrac{1}{\overline{z}})^2 + (e^{i\varphi} - 1)\tfrac{1}{\overline{z}} - e^{i\varphi}a = 0$$

En otras palabras, $z \neq 0$ es una raíz de la ecuación anterior si y solo si $1/\overline{z}$ es una raíz de la ecuación. Consecuentemente, la ecuación tiene máximo una solución dentro de Δ, además, si asumimos que la ecuación tiene una solución unimodular, entonces es única o la segunda solución también tiene módulo 1.

De (i) y (ii) podemos dar una descripción de un automorfismo F según sus puntos fijos:

1. F tiene un solo punto fijo en Δ (Y el otro por fuera).
2. F tiene un solo punto fijo en $\partial\Delta$ y ningún punto fijo en Δ.
3. F tiene dos puntos fijos diferentes en $\partial\Delta$

Definición 1.1.4:

- Si F está descrito por (1) diremos que F es *Elíptico*
- Si F está descrito por (2) diremos que F es *Hiperbólico.*
- Si F está descrito por (3) diremos que F es *Parabólico.*

Proposición 1.2.3: Si $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ no es un automorfismo elíptico, entonces la sucesión de iteraciones $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente. Aún más, si F no es la identidad, entonces el límite de esta sucesión es una constante unimodular, la cual es un punto fijo de F en la frontera de Δ.

Demostración:

- Si F es un automorfismo hiperbólico entonces

$$F^{(n)}(z) = L^{-1}(\lambda^n L(z))$$

donde $L(z) = \frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}$ y $\lambda := \frac{1-\bar{a}\zeta_2}{1-\bar{a}\zeta_1}$ donde $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ son puntos fijos de F tales que $\mid \zeta_1 \mid = \mid \zeta_2 \mid = 1$. Por un resultado previo (véase [2] página 29), tenemos que para cada $z \in \Delta$:

i. Si $|\lambda| < 1$ entonces la sucesión $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $\zeta_1 = L^{-1}(0)$.

ii. Si $|\lambda| > 1$ entonces la sucesión $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a ζ_2.

De i. y ii. se deduce que en el caso en que F es un automorfismo hiperbólico $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a una constante unimodular, la cual es un punto fijo de F en la frontera de Δ.

- Si F es un automorfismo parabólico entonces

$$\frac{\zeta}{F^{(n)}(z)-\zeta} = n\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+1} + \frac{\zeta}{z-\zeta}$$

para todo $z \in \Delta$ y $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, donde ζ es el único punto fijo de F tal que $|\ \zeta\ |= 1$.

i. Si F es la identidad entonces $\varphi = 0$, luego $\frac{\zeta}{F^{(n)}(z)-\zeta} = \frac{\zeta}{z-\zeta}$, por lo tanto $F^{(n)}(z) = z$ y la sucesión converge.

ii. Si F no es la identidad entonces $\varphi \neq 0$, luego:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{|F^{(n)}(z)-\zeta|} \\
= \quad & \langle\ |\zeta| = 1\ \rangle \\
& \left|\frac{\zeta}{F^{(n)}(z)-\zeta}\right| \\
= \quad & \langle \text{ Definición anterior } \rangle \\
& \left|n\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+1} + \frac{\zeta}{z-\zeta}\right| \\
\geq \quad & \langle\ |a+b| \geq |a| - |b|\ \rangle \\
& \left|n\frac{e^{i\varphi}-1}{e^{i\varphi}+1}\right| - \left|\frac{\zeta}{z-\zeta}\right| \\
\geq \quad & \langle\ |\zeta| = 1,\ |nz| = n|z|,\ |e^{i\varphi}+1| \leq 2\ \rangle \\
& n\frac{|e^{i\varphi}-1|}{2} - \frac{1}{|z-\zeta|}
\end{aligned}
$$

donde esta ultima expresión diverge cuando $n \to \infty$.
Por lo tanto $|F^{(n)}(z)-\zeta| \to 0$ o de manera equivalente $F^{(n)}(z) \to \zeta$, luego $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a una constante unimodular, la cual es un punto fijo de F en la frontera de Δ.

Proposición 1.2.4 : Sean $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ y $\zeta \in \Delta$ punto fijo de F. Entonces:

i) Para cada $r \in (0,1)$ y $n = 0, 1, 2, ...$, se satisface la siguiente condición de invarianza:

$$F^{(n)}(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta) \tag{1.10}$$

donde $\Omega_r(\zeta) = \{w \in \Delta : |w - \frac{1-|\zeta|^2}{1-r^2|\zeta|^2}| < \frac{1-r^2}{1-r^2|\zeta|^2}\}$.

ii) Si F no es la identidad entonces el punto $\zeta \in \Delta$ es el único punto fijo de F en Δ. Más aun, si F no es la identidad las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Para cada $z \in \Delta$, la secuencia $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ (la órbita) converge a ζ cuando n tienda a infinito.

b) El mapeo $F : \Delta \mapsto \Delta$ no es un automorfismo de Δ.

c) $|F'(\zeta)| < 1$

Demostración: i) Por inducción:

- $n = 0$. Si $n = 0$ entonces F es la identidad, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& F^{(0)}(\Omega_r(\zeta)) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de función identidad } \rangle \\
& \Omega_r(\zeta) \\
\subseteq \quad & \langle\ A \subseteq A\ \rangle \\
& \Omega_r(\zeta) \\
= \quad & \langle\ F(\zeta) = \zeta\ \rangle \\
& \Omega_r(F(\zeta))
\end{aligned}$$

  En el caso de $n = 1$ el lema de Pick anteriormente demostró que

$$F(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta)$$

- $n > 1$. Supongamos que para $n = k$ la proposición es cierta (es decir $F^{(k)}(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta))$, ahora:

$$
\begin{aligned}
& F^{(k+1)}(\Omega_r(\zeta)) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de composición } \rangle \\
& F(F^{(k)}(\Omega_r(\zeta))) \\
\subseteq \quad & \langle \text{ Hipótesis de inducción, } F \text{ es función } \rangle \\
& F(\Omega_r(\zeta)) \\
\subseteq \quad & \langle \text{ Lema de Pick } \rangle \\
& \Omega_r(\zeta)
\end{aligned}
$$

ii) Supongamos que F tiene dos puntos fijos diferentes, digamos ζ_1 y ζ_2, $\zeta_1 \neq \zeta_2$, entonces podemos escoger r_1 y r_2 en $(0,1)$ tales que $\zeta_2 \notin \overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)}$, $\zeta_1 \notin \overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)}$ y $\overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)} \cap \overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)} = \Omega \neq \emptyset$, como $\overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)}$, $\overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)}$ son conexos y su intersección es no vacía, entonces Ω es conexo, $\Omega \subseteq \Delta$ porque es la intersección de dos subconjuntos de Δ, por lo tanto Ω es acotado y además

$$
\begin{aligned}
& F(\Omega) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } \Omega \ \rangle \\
& F(\overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)} \cap \overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)}) \\
\subseteq \quad & \langle \ F \text{ es función, entonces } F(A \cap B) \subseteq F(A) \cap F(B) \ \rangle \\
& F(\overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)}) \cap F(\overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)}) \\
\subseteq \quad & \langle \ F \text{ es continua, luego } F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)} \ \rangle \\
& \overline{F(\Omega_{r_1}(\zeta_1))} \cap \overline{F(\Omega_{r_2}(\zeta_2))} \\
\subseteq \quad & \langle \text{ Lema de Pick: } F(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta) \ \rangle \\
& \overline{\Omega_{r_1}(\zeta_1)} \cap \overline{\Omega_{r_2}(\zeta_2)} \\
\subseteq \quad & \langle \text{ Definición de } \Omega \ \rangle \\
& \Omega
\end{aligned}
$$

así $F(\Omega) \subseteq \Omega$, entonces se sigue del Principio del punto fijo de Brouwer que existe $\zeta_3 \in \Omega$ tal que $F(\zeta_3) = \zeta_3$ el cual es diferente de ζ_1 y ζ_2. Repitiendo este argumento podemos hallar una sucesión $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Delta$ tal que $F(\zeta_n) = \zeta_n$. Por la propiedad de unicidad esto implica que $F(z) = z$ para todo z lo cual contradice la hipótesis de que F no es la identidad.

Para demostrar las equivalencias lo realizaremos mediante una cadena de implicaciones.

- **a)⇒b):** Por contradicción. Si $F \in \text{Aut}(\Delta)$ y F tiene un punto fijo $\zeta \in \Delta$ entonces F es un automorfismo elíptico, luego F es una rotación alrededor de ζ (véase [1] página 27) y por lo tanto la sucesión $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ no converge para todo $z \in \Delta$ (De hecho la sucesión solo converge para ζ).

- **b)⇒c):** Nuevamente por contradicción. Si $|F'(\zeta)| \geq 1$, entonces $|F'(\zeta)| = 1$ porque F es un holomorfismo. Consideremos el holomorfismo $G = m_{-\zeta} \circ F \circ m_\zeta$ donde $m_\zeta(z) := \dfrac{z+\zeta}{1+\bar{\zeta}z}$ y $m'_\zeta(z) := \dfrac{1-|\zeta|^2}{(1+\bar{\zeta}z)^2}$, ahora:

$$
\begin{array}{ll}
 & G(0) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de G } \rangle \\
 & m_{-\zeta} \circ F \circ m_\zeta(0) \\
= & \quad \langle\ m_\zeta(0) = \zeta,\ F(\zeta) = \zeta,\ m_{-\zeta}(\zeta) = 0\ \rangle \\
 & 0
\end{array}
$$

Además:

$$
\begin{array}{ll}
 & |G'(0)| \\
= & \quad \langle \text{ Regla de la cadena } \rangle \\
 & |m'_{-\zeta}(F(m_\zeta(0))) * F'(m_\zeta(0)) * m'_\zeta(0)| \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } m_\zeta \text{ y la expresión obtenida para } m'_\zeta \ \rangle \\
 & |\dfrac{1-|\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2} * F'(\zeta) * (1-|\zeta|^2)| \\
= & \quad \langle \text{ Simplificando términos } \rangle \\
 & |F'(\zeta)| \\
= & \quad \langle \text{ Hipótesis } \rangle \\
 & 1
\end{array}
$$

Por el lema de Schwarz se tiene que G es una rotación y por lo tanto

$$F = m_\zeta \circ r_\varphi \circ m_{-\zeta}$$

lo cual implica que F es un automorfismo elíptico.

- **c)⇒a):** Como F' es una función continua en Δ, existe un disco $\Delta_r(\zeta) \subset \Delta$ centrado en ζ y con radio $r > 0$ tal que

$$|F'(z)| < 1$$

para todo $z \in \overline{\Delta_r(\zeta)}$, la clausura de $\Delta_r(\zeta)$. Por la desigualdad del valor medio en varias variables se tiene que para todo $\{z, w\} \subseteq \overline{\Delta_r(\zeta)}$ existe $u_{z,w} \in \overline{\Delta_r(\zeta)}$ tal que

$$\begin{aligned}
& |F(z) - F(w)| \leq \det J_F(u_{z,w}) \; |z - w| \\
\equiv \quad & \langle \; \det J_F(u_{z,w}) = |F'(u_{z,w})|^2 \; \rangle \\
& |F(z) - F(w)| \leq |F'(u_{z,w})|^2 \; |z - w| \\
\Rightarrow \quad & \langle \; |F'(u_{z,w})| < 1 \text{ entonces } |F'(u_{z,w})|^2 < |F'(u_{z,w})| \; \rangle \\
& |F(z) - F(w)| \leq |F'(u_{z,w})| \; |z - w|
\end{aligned}$$

Como $\overline{\Delta_r(\zeta)}$ es compacto y F' es continua existe $q = max\{|F'(z)| : z \in \overline{\Delta_r(\zeta)}\}$, luego :

$$\begin{aligned}
& |F(z) - F(w)| \leq q \; |z - w| \\
\Rightarrow \quad & \langle \; q < 1 \; \rangle \\
& |F(z) - F(w)| < |z - w| \\
\Rightarrow \quad & \langle \; w = \zeta, \; F(\zeta) = \zeta \; \rangle \\
& |F(z) - \zeta)| \leq |z - \zeta|
\end{aligned}$$

Así F es un auto mapeo de $\overline{\Delta_r(\zeta)}$ el cual es una contracción estricta. El teorema del punto fijo de Banach implica que $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a ζ para todo $z \in \overline{\Delta_r(\zeta)}$. Utilizando el teorema de Vitali se tiene que $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge para todo $z \in \Delta$

Corolario 1.2.1: Suponga que $F \in \text{Hol}(\Delta)$ mapea Δ estrictamente en su interior, es decir, para algún $r \in (0, 1)$

$$|F(z)| \leq r$$

para todo $z \in \Delta$. Entonces F tiene un único punto fijo $\zeta \in \Delta$, $|\zeta| \leq r$, y para cada $z \in \Delta$ la orbita $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge a ζ cuando n tiende a infinito.

Demostración: Como $|F(z)| \leq r$ para todo $z \in \Delta$ entonces F no es la identidad, luego por la proposición anterior parte **ii).** se tiene que ζ es único, además

$$|\zeta| = |F(\zeta)| \leq r$$

Así $|\zeta| \leq r$. Como F mapea Δ estrictamente en su interior, entonces F no es biyectiva y por lo tanto no es un automorfismo y por las equivalencias anteriores se concluye la convergencia de la órbita.

1.3. Comportamiento en $\partial\Delta$ de automapeos holomorfos

Estudiaremos los iterados de una bola pseudo hiperbólica bajo una aplicación holomorfa donde el centro de dicha bola es aplicado a $\partial\Delta$

Definición 1.3.1: Para un punto $\zeta \in \overline{\Delta}$ y $K > 1 - |\zeta|^2$ se define el conjunto $D(\zeta, K)$ como

$$D(\zeta, K) = \{z \in \Delta : \tfrac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2} < K\}$$

Veremos que para un punto $\zeta \in \Delta$ el conjunto $D(\zeta, K)$, $K > 1- \mid \zeta \mid^2$, es exactamente la bola pseudo hiperbólica $\Omega_r(\zeta)$ centrada en el punto ζ con radio $r = \sqrt{1 - \frac{1-|\zeta|^2}{K}}$.

Note que $D(\zeta, K)$ tiene sentido incluso si ζ es un punto frontera. En este caso los cálculos que se presentan más adelante muestran que para cada $K > 0$ el conjunto $D(\zeta, K)$ es geométricamente un disco en Δ, centrado en $\frac{1}{1+K}\zeta$ con radio $\frac{K}{K+1} < 1$ es decir:

$$D(\zeta, K) = \{z \in \Delta : \mid z - \tfrac{1}{1+K}\zeta \mid < \tfrac{K}{K+1}\}$$

Dicho disco es tangente internamente a la frontera de Δ en el punto ζ. Este disco es llamado un horociclo en Δ.

Más concretamente tenemos lo siguiente

Proposición 1.3.1: Para $\zeta \in \overline{\Delta}$ y $K \leq 1- \mid \zeta \mid$ el conjunto

$$D(\zeta, K) = \left\{ z \in \Delta : \frac{\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2}{1- \mid z \mid^2} < K \right\}$$

Cumple que:

(i) Si $\zeta \in \Delta$ entonces los conjuntos $\Omega_r(\zeta)$ y $D(\zeta, K)$ coinciden donde $r = \sqrt{1 - \frac{1-|\zeta|^2}{k}}$.

(ii) Si $\zeta \in \partial\Delta$ entonces para cada $K > 0$ el conjunto $D(\zeta, K)$ es un disco centrado en $\frac{\zeta}{K+1}$ con radio $\frac{K}{K+1}$

Demostración

(i) Sea $z \in D(\zeta, K)$ entonces

$\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2 < \frac{1-|\zeta|^2}{1-r^2}(1- \mid z \mid^2)$

$\equiv$ $\langle$ Expandiendo $\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2$, propiedad distributiva $\rangle$

$1 - 2\mathrm{Re}(\overline{\zeta}z) + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2 < \frac{1-|z|^2-|\zeta|^2+|z|^2|\zeta|^2}{1-r^2}$

$\equiv$ $\langle$ Multiplicando ambos lados por $(1 - r^2)$ $\rangle$

$(1 - r^2)(1 - 2Re(\overline{\zeta}z) + \mid \zeta \mid^2 \mid z \mid^2) < 1- \mid z \mid^2 - \mid \zeta \mid^2 + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2$

$\equiv$ $\langle$ Propiedad distributiva $\rangle$

$1 - 2Re(\overline{\zeta}z) + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2 - r^2 + 2Re(r^2\overline{\zeta}z) - r^2 \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2 < 1- \mid z \mid^2$

$- \mid \zeta \mid^2 + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2$

$\equiv$ $\langle$ Si $k \in \mathbb{R}$, entonces, $\mathrm{Re}(kz) = k\mathrm{Re}(z)$, asociando convenientemente $\rangle$

$\mid z \mid^2 - 2Re(\overline{\zeta}z) + \mid \zeta \mid^2 < r^2(1 - 2Re(\overline{\zeta}z) + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2)$

$\equiv$ $\langle$ Factorizando $\mid z - \zeta \mid^2$, $\mid 1 - \overline{\zeta}z \mid^2$ y despejando r^2 $\rangle$

$\frac{|z-\zeta|^2}{|1-\overline{\zeta}z|^2} < r^2$

$\equiv$ $\langle$ Tomando raíz en ambos lados de la desigualdad $\rangle$

$\frac{|z-\zeta|}{|1-\overline{\zeta}z|} < r$

Así $z \in \Omega_r(\zeta)$.

(ii) Sean $K > 0$ y $\zeta \in \partial\Delta$ y $z \in D(\zeta, K)$ así

$\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2 < K(1- \mid z \mid^2)$

$\equiv$ $\langle$ Expandiendo $\mid 1 - z\zeta \mid^2$ $\rangle$

$1 - 2\mathrm{Re}(\overline{\zeta}z) + \mid z \mid^2 \mid \zeta \mid^2 < K(1- \mid z \mid^2)$

$\equiv$ $\langle$ Propiedad distributiva, $\mid \zeta \mid = 1$ $\rangle$

$$
\begin{aligned}
& \mid \zeta \mid^2 -2\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z)+ \mid z \mid^2 < K - K \mid z \mid^2 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Factor común } \mid z \mid^2 \rangle \\
& \mid z \mid^2 (K+1) - 2\mathrm{Re}(\overline{\zeta} z) + \mid \zeta \mid^2 < K \mid \zeta \mid^2 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Diviendo en ambos lados por } K+1,\ \mathrm{Re}(kz) = k\mathrm{Re}(z) \rangle \\
& \mid z \mid^2 -2Re(z\tfrac{\overline{\zeta}}{K+1}) + \tfrac{|\zeta|^2}{K+1} < \tfrac{K|\zeta|^2}{K+1} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Ordenando convenientemente } \rangle \\
& \mid z \mid^2 -2Re(z\tfrac{\overline{\zeta}}{K+1}) < -\tfrac{|\zeta|^2}{K+1} + \tfrac{K|\zeta|^2}{K+1} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Suma de fracciones (Heterogéneas) } \rangle \\
& \mid z \mid^2 -2Re(z\tfrac{\overline{\zeta}}{K+1}) < \tfrac{(K(K+1)|\zeta|^2 - |\zeta|^2(K+1)}{(K+1)^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Sumando y restando } \mid \zeta \mid^2 \text{ convenientemente } \rangle \\
& \mid z \mid^2 -2Re(z\tfrac{\overline{\zeta}}{K+1}) < \tfrac{(K(K+1)|\zeta|^2 - (K+1)|\zeta|^2 + |\zeta|^2 - |\zeta|^2}{(K+1)^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Sumando en ambos lados } \tfrac{|\zeta|^2}{(K+1)^2} \rangle \\
& \mid z \mid^2 -2Re(z\tfrac{\overline{\zeta}}{K+1}) + \tfrac{|\zeta|^2}{(K+1)^2} < \tfrac{(K(K+1)|\zeta|^2 - (K+1)|\zeta|^2 + |\zeta|^2}{(K+1)^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Factorizando, } \mid \zeta \mid = 1, \text{ operando } \rangle \\
& \mid z - \tfrac{\zeta}{K+1} \mid^2 < \tfrac{K^2+K-K+1-1}{(K+1)^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Simplificando } \rangle \\
& \mid z - \tfrac{\zeta}{K+1} \mid^2 < \tfrac{K^2}{(K+1)^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Tomando raíz en ambos lados de la desigualdad } \rangle \\
& \mid z - \tfrac{\zeta}{K+1} \mid < \tfrac{K}{K+1}
\end{aligned}
$$

así z pertenece al disco centrado en $\frac{\zeta}{K+1}$ de radio $\frac{K}{K+1}$.

Proposición 1.3.2 (Lema de Julia): Sea $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ y sea $\zeta \in \partial\Delta$. Suponga que existe una sucesión de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Delta$ convergente a ζ cuando n tiende a ∞, tal que los límites

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1- \mid F(z_n) \mid}{1- \mid z_n \mid} \tag{1.11}$$

y

$$\eta = \lim_{n\to\infty} F(z_n) \tag{1.12}$$

existen (es decir son finitos); entonces, para cada $z \in \Delta$ las siguientes desigualdades se tienen

$$\frac{\mid 1 - F(z)\overline{\eta} \mid^2}{1- \mid F(z) \mid^2} \leq \alpha \frac{\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2}{1- \mid z \mid^2} \tag{1.13}$$

En otras palabras, para cada $K > 0$ tenemos la siguiente inclusión;

$$F(D(\zeta, K)) \subseteq D(\eta, \alpha K) \tag{1.14}$$

Observación 1.3.1: La condición (1.11) y (1.12) nos dice en particular que $z_n \to \zeta$ y $F(z_n) \to \eta$ pero la convergencia de la sucesión z_n a η no puede ser mas rápida que la convergencia de la sucesión $\{F(z_n)\}$ a ζ.

Demostración: Se tiene de (1.11) y (1.12) que $\mid \eta \mid= 1$; esto es por:

$$\mid \eta \mid= 1 - \lim_{n\to\infty} 1- \mid F(z_n) \mid= 1 - \lim_{n\to\infty} \tfrac{(1-|F(z)|)(1-|z_n|)}{1-|z_n|} = 1 - \alpha(1- \mid \zeta \mid) = 1.$$

Para $\{z, w\} \subset \Delta$ se define la función

$$\sigma(z, w) = \frac{(1- \mid w \mid^2)(1- \mid z \mid^2)}{\mid 1 - \overline{w}z \mid^2} \tag{1.15}$$

Es claro que se puede escribir la desigualdad de Pick-Schwarz de la forma

$$\sigma(z, w) \leq \sigma(F(z), F(w)) \tag{1.16}$$

puesto que

$$\frac{|F(z)-F(w)|^2}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2} \geq \frac{|z-w|^2}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Expandiendo $| F(z) - F(w) |^2$ y $| z - w |^2$ $\rangle$

$$\frac{|F(z)|^2-2Re(F(z)\overline{F(w)})+|F(w)|^2}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2} \geq \frac{|z|^2-2Re(z\overline{w})+|w|^2}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Suma y restando convenientemente $\rangle$

$$\frac{1-1+|F(z)|^2|F(w)|^2-|F(z)|^2|F(w)|^2+(|F(z)|^2-2Re(F(z)\overline{F(w)})+|F(w)|^2)}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2}$$

$\geq$

$$\frac{(1-1+|z|^2|w|^2-|z|^2|w|^2)+(|z|^2-2Re(z\overline{w})+|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Asociando convenientemente $\rangle$

$$\frac{1-2Re(F(z)\overline{F(w)})+|F(z)|^2|F(w)|^2-(1-|F(z)|^2)(1-|F(w)|^2)}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2}$$

$\geq$

$$\frac{(1-2Re(z\overline{w})+|z|^2|w|^2)-(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Factorizando $\rangle$

$$\frac{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2-(1-|F(z)|^2)(1-|F(w)|^2)}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2} \geq \frac{|1-z\overline{w}|^2-(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Separando en fracciones y simplificando $\rangle$

$$1 - \frac{(1-|F(z)|^2)(1-|F(w)|^2)}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2} \geq 1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Restando 1 y multiplicando por -1 en ambos lados $\rangle$

$$\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2} \leq \frac{(1-|F(z)|^2)(1-|F(w)|^2)}{|1-F(z)\overline{F(w)}|^2}$$

$\equiv$ $\langle$ Definición de la función σ $\rangle$

$$\sigma(z,w) \leq \sigma(F(z),F(w))$$

para todo $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ y $\{z,w\} \subset \Delta$. En particular, tenemos:

$$\sigma(z,z_n) \leq \sigma(F(z),F(z_n))$$

para cada $z \in \Delta$ y todo $n = 1,2,3,...,$. Escribiendo esta desigualdad explícitamente y haciendo unas simples operaciones obtenemos

$$\frac{| 1 - \overline{F(z_n)}F(z) |^2}{1- | F(z) |^2} \leq \frac{(1- | F(z_n) |^2) | 1 - \overline{z_n}z |^2}{(1- | z |^2)(1- | z_n |^2)}$$

haciendo tender n a infinito obtenemos

$$\frac{|1-\overline{\eta}F(z)|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha\frac{(1+|\eta|)|1-\overline{\zeta}z|^2}{(1+|\zeta|)(1-|z|^2)}$$

$$\equiv \quad \langle \mid \eta \mid = \mid \zeta \mid = 1 \rangle$$

$$\frac{|1-\overline{\eta}F(z)|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha\frac{|1-\overline{\zeta}z|^2}{1-|z|^2}$$

Por último faltaría ver que se cumple la contenencia

Sea $w \in F(D(\zeta, K))$. entonces, existe $z \in D(\zeta, K)$ tal que $w = F(z)$. Veamos que $w \in D(\eta, K)$:

$$\frac{|1-w\overline{\eta}|^2}{1-|w|z^2}$$

$$= \quad \langle \ w = F(z) \ \rangle$$

$$\frac{|1-F(z)\overline{\eta}|^2}{1-|F(z)|^2}$$

$$\leq \quad \langle \ (1.13) \ \rangle$$

$$\alpha\frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2}$$

$$\leq \quad \langle \ z \in D(\zeta, K) \ \rangle$$

$$\alpha K$$

Que era lo que se buscaba así $w \in D(\eta, \alpha K)$

Definición 1.3.2 (Número de Julia en ζ): Para $F \in Hol(\Delta)$ y $\zeta \in \partial\Delta$, se define el número de Julia $\alpha(\zeta, F)$ por la fórmula:

$$\alpha(\zeta, F) = \liminf_{z \to \zeta} \frac{1- \mid F(z) \mid}{1- \mid z \mid} \tag{1.17}$$

donde z tiende a ζ sin restricciones en Δ. Si $\alpha(\zeta, F)$ es finito, adaptando la demostración del Lema de Julia se tiene que

$$\frac{\mid 1 - \overline{\eta}F(z) \mid^2}{1- \mid F(z) \mid^2} \leq \alpha(\zeta, F)\frac{\mid 1 - \overline{\zeta}z \mid^2}{(1- \mid z \mid^2)} \tag{1.18}$$

Donde $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} F(z_n)$ y $\{z_n\}$ es una sucesión sobre la cual el límite inferior (1.17) se alcanza.

Nota 1.3.2: La demostración de la existencia del límite η anterior y la existencia de su módulo se encuentra en el Corolario 1.3.1 como consecuencia de (1.17).

Observación 1.3.1: La desigualdad (1.13) significa que para cada $K > 0$, bajo las condiciones (1.11) y (1.12), F mapea el horociclo con radio $R = \frac{K}{K+1}$

centrado en $\frac{\zeta}{K+1}$ en el horociclo con radio $r = \frac{\alpha K}{\alpha K+1}$ centrado en $\frac{\eta}{\alpha K+1}$.

Proposición 1.3.2: Muestre que si F es un mapeo holomorfo no constante, entonces el número α en (1.17) debe ser positivo.

Solución: De (1.18) tenemos que:

$$\frac{|1-\overline{\eta}F(z)|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha\frac{|1-\overline{\zeta}z|^2}{(1-|z|^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ 1- \mid \overline{\eta}F(z) \mid \leq \mid 1-\overline{\eta}F(z) \mid,\ \mid 1-\overline{\zeta}z \mid \leq 1+ \mid \overline{\zeta}z \mid\ \rangle$$

$$\frac{(1-|\overline{\eta}F(z)|)^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha\frac{(1+|\overline{\zeta}z|)^2}{(1-|z|^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \mid z.w \mid = \mid z \mid . \mid w \mid,\ \mid \zeta \mid = \mid \eta \mid = 1\ \rangle$$

$$\frac{(1-|F(z)|)^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha\frac{(1+|z|)^2}{(1-|z|^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \text{Diferencia de cuadrados y propiedad simplificativa}\ \rangle$$

$$\frac{1-|F(z)|}{1+|F(z)} \leq \alpha\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \text{Como } F \in \text{Hol}(\Delta)\text{: } 1\pm \mid F(z) \mid > 0,\ 1\pm \mid z \mid > 0\ \rangle$$

$$0 < \alpha$$

Observación 1.3.3: El hecho de que el límite α en (1.11) exista para un sucesión $z_n \to \zeta \in \partial\Delta$ implica la existencia del límite $\eta \in \partial\Delta$ de (1.12). En efecto si $z_n \to \zeta$, $\mid F(z_n) \mid \to 1$ cuando $n \to \infty$ entonces si tomamos una subsucesión de $\{F(z_n)\}$ tenemos que $F(z_{n_k}) = e^{i\varphi_{n_k}} \mid F(z_{n_k}) \mid$, como $\varphi_{n_k} \in [0, 2\pi]$ entonces existe una subsucesión n_k^β de n_k tal que $\varphi_{n_k^\beta} \to \beta \in [0, 2\pi]$, luego

$$\lim_{k\to\infty} F(z_{n_k^\beta}) = \lim_{n_k\to\infty} e^{i\varphi_{n_k^\beta}} \mid F(z_{n_k^\beta}) \mid$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \text{Propiedad del producto de límites}\ \rangle$$

$$\lim_{k\to\infty} F(z_{n_k^\beta}) = \lim_{n_k\to\infty} e^{i\varphi_{n_k^\beta}} \lim_{k\to\infty} \mid F(z_{n_k^\beta}) \mid$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \text{Implicación de la existencia de } \alpha \text{ en (1.11)}\ \rangle$$

$$\lim_{k\to\infty} F(z_{n_k^\beta}) = \lim_{n_k\to\infty} e^{i\varphi_{n_k^\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ \text{Continuidad de la función } e^z\ \rangle$$

$$\lim_{k\to\infty} F(z_{n_k^\beta}) = e^{i\beta}$$

Por lo tanto cada subsucesión de $\{F(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión la cual converge a algún punto unimodular. Escojamos dos subsucesiones y tomemos sus puntos límites, digamos η_1 y η_2, $\mid \eta_1 \mid = \mid \eta_2 \mid = 1$. Si $\eta_1 \neq \eta_2$ para un K lo suficientemente pequeño podemos encontrar dos horociclos $D(\eta_1, \alpha K)$ y $D(\eta_2, \alpha K)$ cuya intersección sea vacía, sin embargo de (1.14) para cada $z \in D(\zeta, K)$ el elemento $F(z)$ deberá estar en ambos horociclos $D(\eta_1, \alpha K)$ y $D(\eta_2, \alpha K)$ lo cual es una contradicción a que su intersección es vacía, luego $\eta_1 = \eta_2$ y el límite (1.12) existe.

Hemos probado que cada subsucesión de $\{F(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a un punto común η lo que implica que la sucesión $\{F(z_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a η.
De hecho mostraremos que α existe (y así también η) para cada sucesión $\{z_n\}$ convergiendo a ζ a lo largo de direcciones no tangenciales.

Definición 1.3.3: Para un punto ζ en el círculo unidad $\partial\Delta$ y $\kappa > 1$ una región de aproximación no tangencial a ζ es el conjunto

$$\Gamma(\zeta, \kappa) = \{z \in \Delta : \mid z - \zeta \mid < \kappa(1 - \mid z \mid)\} \tag{1.19}$$

Discusión de la región de aproximación no tangencial
A continuación realizaremos un breve estudio a esta región no tangencial con el fin de entender algunas de sus propiedades y una mejor comprensión a resultados posteriores.
Sea $\zeta \in \partial\Delta$ y $0 < r < 1$ dado. Consideremos la circunferencia de radio r centrada en el origen y los segmentos que van desde el punto ζ y son tangentes a la circunferencia.
entonces por la propiedad geométrica de los segmentos tangentes tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \mid z_1 \mid = r \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Teorema de Pitágoras } \rangle \\
& \mid z_1 \mid^2 + \mid z_1 - \zeta \mid^2 = 1 \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Reorganizando } \rangle \\
& \mid z_1 - \zeta \mid^2 = 1 - \mid z_1 \mid^2 \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Tomando raíz en ambos lados y racionalizando } \rangle \\
& \mid z_1 - \zeta \mid = \sqrt{\tfrac{1+|z_1|}{1-|z_1|}}(1 - \mid z_1 \mid)
\end{aligned}$$

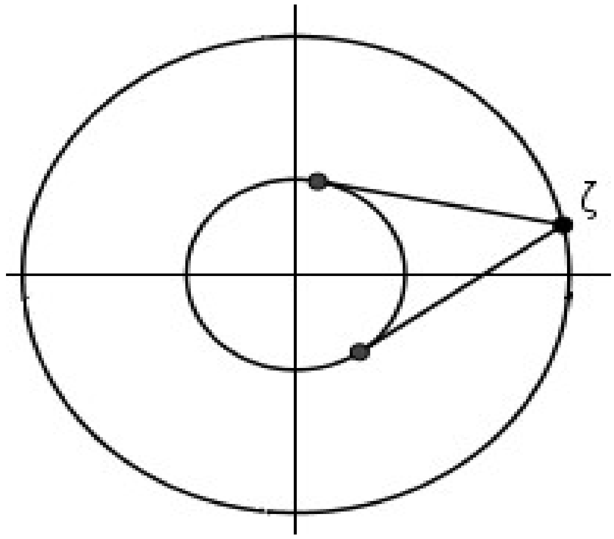

Figura 1.1: Circunferencia de radio r y segmentos tangentes

Así para cada $\kappa > 1$ tenemos la circunferencia de radio r donde $r = 1 - \frac{2}{\kappa^2+1}$ de lo que se deduce $\kappa = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$. Del cálculo anterior tenemos que existen z_1 y z_2 tales que $\mid z_1 \mid = \mid z_2 \mid = r$ y

$$\mid z_1 - \zeta \mid = \mid z_2 - \zeta \mid = \sqrt{\frac{1+\mid z_1 \mid}{1-\mid z_1 \mid}}(1-\mid z_1 \mid) = \sqrt{\frac{1+\mid z_2 \mid}{1-\mid z_2 \mid}}(1-\mid z_2 \mid).$$

Entonces si consideramos el sector singular $\angle z_1OP$ tenemos que para un punto β en el interior del sector angular se sigue de la ley de los cosenos que

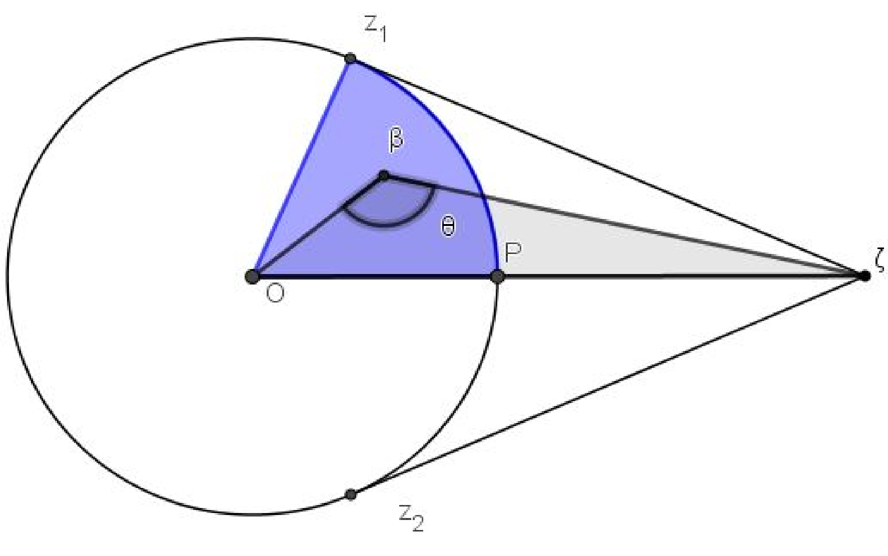

Figura 1.2: Puntos de tangencia z_1, z_2 y sector circular

$$
\begin{aligned}
& 1^2 = \mid \beta \mid^2 + \mid \beta - \zeta \mid^2 - 2 \mid \beta \mid\mid \beta - \zeta \mid \cos\theta \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Si } \theta \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi),\ -1 < \cos(\theta) < 0 \ \rangle \\
& 1 > \mid \beta \mid^2 + \mid \beta - \zeta \mid^2 \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Despejando } \mid \beta - \zeta \mid \ \rangle \\
& \mid \beta - \zeta \mid < \sqrt{\tfrac{1+|\beta|}{1-|\beta|}}(1- \mid \beta \mid)
\end{aligned}
$$

como la funcion $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ es monótona creciente para todo $x \neq 1$ ya que $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ entonces

$$
\frac{1+ \mid \beta \mid}{1- \mid \beta \mid} \leq \frac{1+ \mid z_1 \mid}{1- \mid z_1 \mid} = \kappa
$$

luego $\mid \beta - \zeta \mid < \kappa(1- \mid \beta \mid)$, es decir $\beta \in \Gamma(\zeta, \kappa)$. De manera análoga esta propiedad se cumple para cualquier punto β en el sector $\angle z_2 OP$.

Ahora si consideramos un punto en el segmento $O\zeta$ entonces este punto estará dado por la parametrización $r\zeta$ donde $r \in [0, 1)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
& \mid r\zeta - \zeta \mid \\
= \quad & \langle \text{ Factorizando } \zeta,\ \mid \zeta \mid = 1 \ \rangle \\
& \mid r - 1 \mid \\
= \quad & \langle\ r \in [0, 1)\ \rangle \\
& 1- \mid r \mid \\
< \quad & \langle\ \kappa > 1\ \rangle \\
& \kappa(1- \mid r \mid)
\end{aligned}
$$

entonces $r\zeta \in \Gamma(\zeta, \kappa)$ para $r \in [0, 1)$. En el caso en que $r \in (-x, 0]$, determinemos el valor de x para el cual $r\zeta \in \Gamma(\zeta, \kappa)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
& \mid r\zeta - \zeta \mid \\
= \quad & \langle \text{ Factorizando } \zeta,\ \mid \zeta \mid = 1 \ \rangle \\
& \mid r - 1 \mid \\
= \quad & \langle\ r \in (-x, 0]\ \rangle \\
& 1+ \mid r \mid \\
= \quad & \langle \text{ Multiplicando y dividiendo por } 1- \mid r \mid \ \rangle \\
& \tfrac{1+|r|}{1-|r|}(1- \mid r \mid)
\end{aligned}
$$

donde en lo anterior es necesario que $\frac{1+|r|}{1-|r|} < \kappa$ para que $r\zeta \in \Gamma(\zeta,\kappa)$, entonces $| r |< 1 - \frac{2}{\kappa+1}$, luego $x = \frac{2}{\kappa+1} - 1$ y se obtiene que para $r \in (\frac{2}{\kappa+1} - 1, 1)$, $r\zeta \in \Gamma(\zeta,\kappa)$.

Por último veamos que el conjunto $\Gamma(\zeta,\kappa)$ es convexo. Sean β_1, β_2 en $\Gamma(\zeta,\kappa)$, y sea $r\beta_1 + (1-r)\beta_2$ para $r \in (0,1)$ un punto en el segmento que une a β_1 y β_2, entonces:

$$\begin{aligned}
& | r\beta_1 + (1-r)\beta_2 - \zeta | \\
= & \quad \langle \text{ Asociando convenientemente } \rangle \\
& | r(\beta_1 - \zeta) + (1-r)(\beta_2 - \zeta) | \\
\leq & \quad \langle \text{ Desigualdad triangular } \rangle \\
& | r(\beta_1 - \zeta) | + | (1-r)(\beta_2 - \zeta) | \\
< & \quad \langle\ r > 0,\ 1-r > 0,\ \{\beta_1, \beta_2\} \subseteq \Gamma(\zeta,\kappa)\ \rangle \\
& \kappa r(1- | \beta_1 | + \kappa(1-r)(1- | \beta_2 |) \\
= & \quad \langle \text{ Simplificando y factorizando } \rangle \\
& \kappa(1 - (r | \beta_1 | + (1-r) | \beta_2 |))
\end{aligned}$$

como

$$| r\beta_1 + (1-r)\beta_2 | \leq r | \beta_1 | + (1-r) | \beta_2 |$$

entonces

$$1- | r\beta_1 + (1-r)\beta_2 | \geq 1 - (r | \beta_1 | + (1-r) | \beta_2 |)$$

teniendo en cuenta lo anterior se deduce que

$$| r\beta_1 + (1-r)\beta_2 - \zeta | < \kappa(1- | r\beta_1 + (1-r)\beta_2 |)$$

es decir $\Gamma(\zeta,\kappa)$ es convexo.

De la convexidad del conjunto y los comentarios anteriores tenemos una aproximación a la región de aproximación no tangencial dada por la siguiente figura:

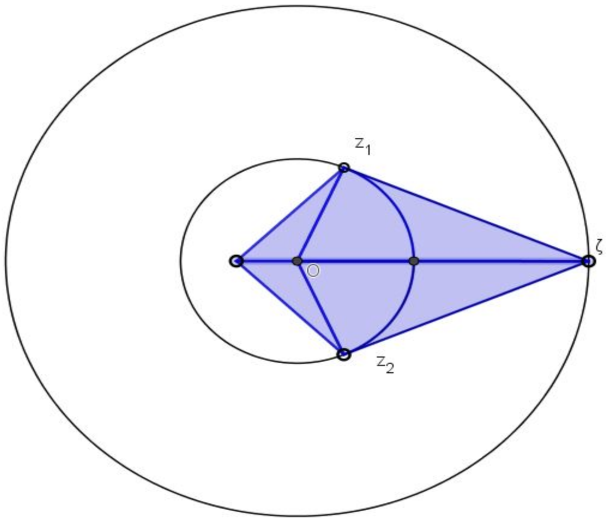

Figura 1.3: Subconjunto de la región de aproximación no tangencial obtenida de la discusión

A continuación damos una representación de como sería la forma completa de una región de aproximación no tangencial dada por una computadora.

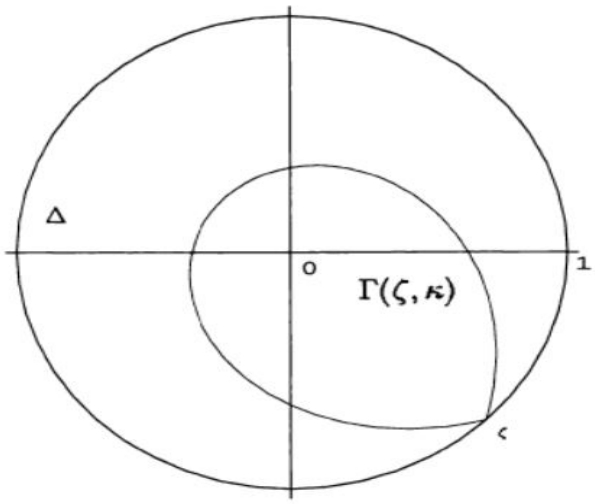

Figura 1.4: Región de aproximación no tangencial a un punto frontera (Tomada de [1] página 20)

Definición 1.3.4: Diremos que una función $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ tiene un límite no tangencial (o angular) L en el punto $\zeta \in \partial\Delta$ si $f(z) \to L$ cuando $z \to \zeta$, $z \in \Gamma(\zeta, \kappa)$ para cada $\kappa > 1$. Denotamos en este caso

$$L = \angle \lim_{z \to \zeta} f(z).$$

Corolario 1.3.1: Sea F un holomorfismo no constante en Δ, y sea $\zeta \in \partial\Delta$. Suponga que hay una sucesión z_n que converge a ζ, tal que

$$\liminf_{z_n \to \zeta} \frac{1- \mid F(z_n) \mid}{1- \mid z_n \mid} = \alpha < \infty. \tag{1.20}$$

Entonces:

(i) $\alpha > 0$;

(ii) El límite no tangencial

$$\eta := \angle \lim_{z \to \zeta} F(z),$$

el cual es un punto en $\partial\Delta$ existe;

(iii) Para cada $K > 0$ la siguiente inclusión se tiene

$$F(D(\zeta, K)) \subseteq D(\eta, \alpha K).$$

Demostración:

(i) Se tiene de la proposición 1.3.2.

(ii) Veamos que el límite η existe. Como el límite α en (1.20) existe entonces para cada sucesión $\{z_n\} \to \{\zeta\}$ existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que

$$\lim_{z_{n_k} \to \zeta} \frac{1- \mid F(z_n) \mid}{1- \mid z_n \mid} = \alpha$$

lo cual por propiedades de límites implica que $\lim\limits_{z_{n_k} \to \zeta} \mid F(z_{n_k}) \mid = 1$ y de la Observación 1.3.3 se tiene que existe una subsucesión $\{z_{n_k^\beta}\}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} F(z_{n_k^\beta}) = \eta$ donde η es una constante unimodular para la cual se satisface (1.17) y (1.18). Ahora, dado $\epsilon > 0$ sea K tal que $D(\eta, \alpha K)$ está contenido en el ϵ-disco centrado en η. A continuación, sea S un sector en Δ con vértice en ζ. Entonces existe δ tal que

$$S_1 = S \cap \{z \in \mathbb{C} :\mid z - \zeta \mid < \delta\} \subseteq D(\zeta, K)$$

Entonces por (1.18) tenemos

$$\mid F(z) - \eta \mid < \alpha K$$

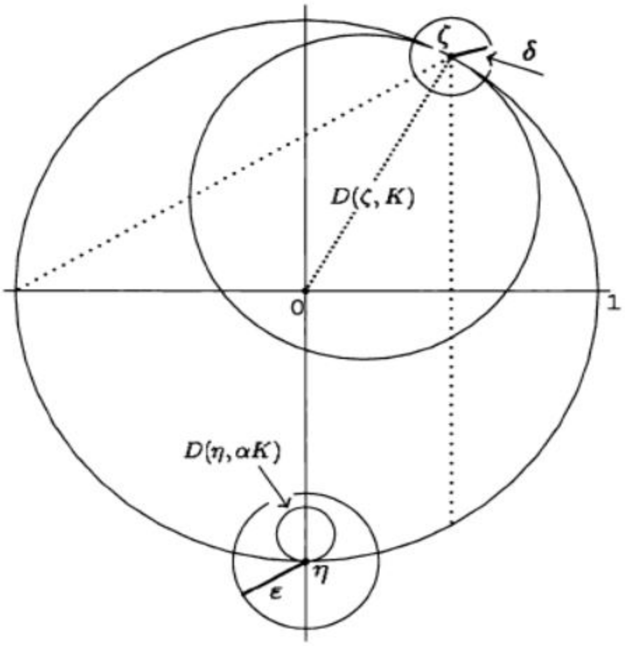

Figura 1.5: Comportamiento en la frontera de un holomorfismo de Δ (Tomada de [1] página 22)

y por lo tanto

$$| F(z) - \eta | < \epsilon$$

para $z \in S_1$(Véase figura 1.5)

(iii) Se tiene como consecuencia de (1.14) y (1.18)

Finalmente, se presenta una afirmación muchos más fuerte establecida por Carathéodory.

Proposición 1.3.3 (El teorema de Julia-Carathéodory): Sea $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ y sea $\zeta \in \partial\Delta$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $\liminf\limits_{z\to\zeta} \frac{1-|F(z)|}{1-|z|} = \alpha < \infty$., donde el límite es tomado cuando z se aproxima a ζ sin restricciones en Δ;

(ii) $\angle \lim\limits_{z\to\zeta} \frac{F(z)-\eta}{z-\zeta} := \angle F'(\zeta)$ existe para un punto $\eta \in \partial\Delta$;

(iii) $\angle \lim\limits_{z\to\zeta} F'(z)$ existe, y $\angle \lim\limits_{z\to\zeta} F(z) = \eta \in \partial\Delta$

Además:

(a) $\alpha > 0$ en (i);

(b) los puntos frontera η en (ii) y (iii) son los mismos;

(c) $\angle \lim\limits_{z \to \zeta} F'(z) = \angle F'(\zeta) = \alpha \overline{\zeta} \eta$.

Nota: El valor $\angle F'(\zeta)$ es llamo la derivada angular de F en ζ.

Hay varias demostraciones del teorema de Julia-Carathéodory, sin embargo en este trabajo la realizaremos teniendo en cuenta los dos siguientes resultados clásicos.

Proposición 1.3.4 (Principio de Lindelöf):

Sea $\zeta \in \partial\Delta$ y sea $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$ acotada en cada región de aproximación no tangencial a ζ. Si para alguna curva continua $\gamma \in \Delta$ terminando en ζ existe el límite

$$L = \lim_{z \to \zeta} f(z),\ z \in \gamma,$$

entonces el límite angular

$$\angle \lim_{z \to \zeta} f(z) = L$$

también existe. (Véase [1] página 23)

Proposición 1.3.5: Sea $\zeta \in \partial\Delta$ y sea $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C}$. Suponga que el límite

$$L = \angle \lim_{z \to \zeta} f(z) := f(\zeta)$$

existe (es finito). Entonces

$$\angle \lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

existe si y solo si

$$\angle \lim_{z \to \zeta} f'(z)$$

existe y ambos coinciden. (Véase [1] página 23)

Demostración de la proposición 1.3.3: Se realizara mediante una cadena de implicaciones.

((iii) $\Rightarrow$ (ii)) Por hipótesis $\angle \lim\limits_{z \to \zeta} F(z) = \eta \in \partial\Delta$ y $\angle \lim\limits_{z \to \zeta} F'(z)$ existe, entonces por la proposición 1.3.5 se cumple (ii).

((ii) $\Rightarrow$ (i)) Para $r \in (0, 1)$ se tiene que $1 - r > 0$, ahora

$$\begin{array}{ll} & \frac{1-|F(r\zeta)|}{1-r} \\ \leq & \langle\ |\ z\ |-|\ w\ |\leq|\ z-w\ |,\ |\ \zeta\ |= 1\ \rangle \\ & \frac{|\eta-F(r\zeta)|}{|\zeta-r\zeta|} \end{array}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
& \liminf_{z\to\zeta} \tfrac{1-|F(z)|}{1-|z|} \\
\leq \quad & \langle\ z \to \zeta \text{ mediante la sucesión } z = r\zeta\ \rangle \\
& \liminf_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1-|r\zeta|} \\
\leq \quad & \langle\ \text{Propiedades } \liminf\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1-|r\zeta|} \\
\leq \quad & \langle\ \text{Teniendo en cuenta la desigualdad anterior}\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta-F(r\zeta)|}{|\zeta-r\zeta|} \\
= \quad & \langle\ \text{Propiedades límites}\ \rangle \\
& |\lim_{r\to 1^-} \tfrac{\eta-F(r\zeta)}{\zeta-r\zeta}\ | \\
= \quad & \langle\ \text{Hipótesis } (ii)\text{, existe } \kappa > 0 \text{ talque } r\zeta \in \Gamma(\zeta,\kappa)\ \rangle \\
& |\angle\lim_{z\to\zeta} \tfrac{\eta-F(z)}{\zeta-z}\ |
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\liminf_{z\to\zeta} \frac{1-|F(z)|}{1-|z|}$ es finito, es decir que se cumple (i).
$((i) \Rightarrow (iii))$ Si se cumple (i), el corolario 1.3.1 implica que existe

$$\angle\lim_{z\to\zeta} F(z) := \eta \in \partial\Delta \tag{1.21}$$

Entonces debemos ver que (i) y (1.21) implican (ii) y por la proposición 1.3.5 se cumpliría (iii).
Para este fin observamos que para cada $\kappa > 1$ y $z \in \Gamma(\zeta,\kappa)$:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{|1-\overline{\eta}F(z)|^2}{1-|F(z)|^2} \\
\leq \quad & \langle\ \text{Por el lema de Julia tenemos }\ \rangle \\
& \alpha\tfrac{|1-\overline{\zeta}z|^2}{(1-|z|^2)} \\
= \quad & \langle\ |\ z\ |^2 = z.\overline{z}\ \rangle \\
& \alpha\tfrac{(1-z\overline{\zeta})(1-\overline{z}\zeta)}{(1-|z|^2)} \\
= \quad & \langle\ \text{Propiedad distributiva}\ \rangle \\
& \alpha\tfrac{(1-z\overline{\zeta}-\overline{z}\zeta)+|z|^2|\zeta|^2)}{(1-|z|^2)} \\
= \quad & \langle\ |\ \zeta\ | = 1\ \rangle
\end{aligned}
$$

$$\alpha\tfrac{(|\zeta|^2-z\overline{\zeta}-\overline{z}\zeta)+|z|^2)}{(1-|z|^2)}$$

$$= \quad \langle \text{ Propiedad distributiva } \rangle$$

$$\alpha\tfrac{(z-\zeta)(\overline{z}-\overline{\zeta})}{(1-|z|^2)}$$

$$= \quad \langle \mid z \mid^2 = z.\overline{z} \rangle$$

$$\alpha\tfrac{|z-\zeta|.|z-\zeta|}{(1-|z|^2)}$$

$$\leq \quad \langle z \in \Gamma(\zeta,\kappa) \rangle$$

$$\alpha \mid z-\zeta \mid \kappa\tfrac{1-|z|}{(1-|z|^2)}$$

$$= \quad \langle \text{ Diferencia de cuadrados } \rangle$$

$$\alpha \mid z-\zeta \mid \kappa\tfrac{1-|z|}{(1-|z|)(1+|z|)}$$

$$\leq \quad \langle \text{ Propiedad simplificativa, } 1+\mid z \mid \geq 1 \rangle$$

$$\alpha \mid z-\zeta \mid \kappa$$

Por otro lado :

$$\tfrac{|F(z)-\eta|}{1+|F(z)|}$$

$$= \quad \langle \mid F(z) < 1, \text{ entonces } 1- \mid F(z) \mid \neq 0 \rangle$$

$$\tfrac{|F(z)-\eta|(1-|F(z)|)}{(1+|F(z)|)(1-|F(z)|)}$$

$$= \quad \langle \text{ Diferencia de cuadrados, } \mid \overline{\eta} \mid = 1 \rangle$$

$$\tfrac{|F(z)\overline{\eta}-\eta\overline{\eta}|(1-|F(z)|)}{1-|F(z)|^2}$$

$$\leq \quad \langle \overline{\eta}\eta = \mid \overline{\eta} \mid^2 = 1, \mid z \mid - \mid w \mid \leq \mid z-w \mid, \mid F(z)\overline{\eta} \mid = \mid F(z) \mid \rangle$$

$$\tfrac{|F(z)\overline{\eta}-1||1-F(z)\overline{\eta}|}{1-|F(z)|^2}$$

$$= \quad \langle \mid F(z)\overline{\eta}-1 \mid = \mid 1-F(z)\overline{\eta} \mid \rangle$$

$$\tfrac{|1-F(z)\overline{\eta}|^2}{1-|F(z)|^2}$$

De lo cual tenemos

$$\tfrac{|F(z)-\eta|}{1+|F(z)|} \leq \tfrac{|1-F(z)\overline{\eta}|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha \mid z-\zeta \mid \kappa.$$

Esto último implica que

$$\tfrac{|F(z)-\eta|}{|z-\zeta|} \leq \alpha\kappa(1+ \mid F(z) \mid) \leq 2\alpha\kappa$$

para cualquier $z \in \Gamma(\zeta, \kappa)$. En otras palabras, la función $f(z) := \frac{F(z)-\eta}{z-\zeta}$ es acotada en cada región de aproximación no tangencial a ζ. Luego, para terminar la demostración es suficiente mostrar la igualdad

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\eta - F(r\zeta)}{\zeta - r\zeta} = \alpha\overline{\zeta}\eta$$

La cual por la proposición 1.2.3 considerando la curva $\gamma(r) = r\zeta$, $r \in [0, 1]$ implicaría la existencia de la derivada angular y aún mas la parte (c) de la proposición 1.3.2. Como $|\ \zeta\ |= 1$ entonces $\zeta^{-1} = \overline{\zeta}$, por lo tanto es suficiente con mostrar la siguiente igualdad

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{\eta - F(r\zeta)}{1 - r} = \alpha\eta \tag{1.22}$$

Por el Teorema de Riemann en singularidades removibles, como $f(z)$ es acotada en cada región de aproximación no tangencial a ζ, la singularidad aislada ζ de la función $f(z)$ es removible, luego

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{F(z) - \eta}{z - \zeta} \tag{1.23}$$

existe.

De hecho, mientras α es el límite inferior en (i) tenemos

$$\begin{aligned}
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta - F(r\zeta)|}{1-r} \\
\geq \quad & \langle\ |\ \eta - F(r\zeta)\ |\geq (1 - F(r\zeta))\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1-r} \\
\geq \quad & \langle \text{ Propiedad } \liminf\ \rangle \\
& \alpha
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Ahora, haciendo $z = r\zeta$ en (1.13) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{|1-F(r\zeta)\overline{\eta}|^2}{1-|F(r\zeta)|^2} \leq \alpha\ \tfrac{|1-(r\zeta)\overline{\zeta}|^2}{1-|r\zeta|^2} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Ordenando adecuadamente, } |\ \zeta\ |= 1,\ |\ \eta\ |= 1\ \rangle \\
& \tfrac{|\eta-F(r\zeta)|^2}{(1-r)^2} \leq \alpha\ \tfrac{1-|F(r\zeta)|^2}{1-r^2}
\end{aligned}$$

De lo cual:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta - F(r\zeta)|^2}{(1-r)^2} \\
\leq \quad & \langle \text{ Desigualdad anterior } \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|^2}{1-r^2} \\
= \quad & \langle\ 1+ \mid F(r\zeta) \mid > 0,\ 1-r>0,\ 1+r>0\ \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|^2}{1-r^2} \tfrac{1+|F(r\zeta)|}{1+|F(r\zeta)|} \tfrac{(1-r)(1+r)}{(1-r)(1+r)} \\
= \quad & \langle \text{ Diferencia de cuadrados, ordenando adecuadamente } \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1+|F(r\zeta)|} \tfrac{(1+|F(r\zeta)|)^2}{(1+r)^2} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \\
= \quad & \langle \text{ Propiedades del producto de límites } \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1+|F(r\zeta)|} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \lim_{r\to 1^-} \tfrac{(1+|F(r\zeta)|)^2}{(1+r)^2} \\
= \quad & \langle \lim_{r\to 1^-} \mid F(r\zeta) \mid = 1\ \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{1-|F(r\zeta)|}{1+|F(r\zeta)|} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \\
= \quad & \langle \text{ Multiplicando y dividiendo por } 1- \mid F(r\zeta) \mid\ \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{(1-|F(r\zeta)|)^2}{1-|F(r\zeta)|^2} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \\
\leq \quad & \langle\ 1- \mid F(r\zeta) \mid \leq \mid \eta - F(r\zeta) \mid\ \rangle \\
& \alpha \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta-F(r\zeta)|^2}{1-|F(r\zeta)|^2} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \\
\leq \quad & \langle \text{ Consecuencia de (1.13) con } z = r\zeta\ \rangle \\
& \alpha^2 \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|1-r\zeta\bar{\zeta}|^2}{1-r^2} \tfrac{1-r^2}{(1-r)^2} \\
= \quad & \langle \text{ Simplificando términos, } \zeta\bar{\zeta} = \mid \zeta \mid = 1\ \rangle \\
& \alpha^2 \lim_{r\to 1^-} \tfrac{(1-r)^2}{(1-r)^2} \\
= \quad & \langle \text{ Calculando el límite } \rangle \\
& \alpha^2
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta - F(r\zeta)|^2}{(1-r)^2} \leq \alpha^2 \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Propiedades de los límites, } f(x) = \sqrt{x} \text{ es continua } \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \tfrac{|\eta - F(r\zeta)|}{1-r} \leq \alpha
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

De (1.24) y (1.25) tenemos que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{|\ \eta - F(r\zeta)\ |}{1-r} = \lim_{r\to 1^-} \frac{1-|\ F(r\zeta)\ |}{1-r} = \alpha \qquad (1.26)$$

y

$$\begin{aligned}
& 1 \\
= & \quad \langle\ (1.26)\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{\frac{|\eta - F(r\zeta)|}{1-r}}{\frac{1-|F(r\zeta)|}{1-r}} \\
= & \quad \langle\ \text{Simplificando}\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|\eta - F(r\zeta)|}{1-|F(r\zeta)|} \\
= & \quad \langle\ |\ \overline{\eta}\ |= 1\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{1-|F(r\zeta)|} \\
\geq & \quad \langle\ \mathrm{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)) = 1 - \mathrm{Re}(\overline{\eta}F(r\zeta)),\ \mathrm{Re}(\overline{\eta}F(r\zeta)) \leq |\ \overline{\eta}F(r\zeta)\ |\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{\mathrm{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))} \\
\geq & \quad \langle\ |\ 1-\overline{\eta}F(r\zeta)\ | \geq \mathrm{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|} \\
= & \quad \langle\ \text{Calculando el límite}\ \rangle \\
& 1
\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{|\ \eta - F(r\zeta)\ |}{1-|\ F(r\zeta)\ |} = \lim_{r\to 1^-} \frac{|\ 1-\overline{\eta}F(r\zeta)\ |}{1-|\ F(r\zeta)\ |} = \lim_{r\to 1^-} \frac{|\ 1-\overline{\eta}F(r\zeta)\ |}{\mathrm{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))} = 1. \quad (1.27)$$

Retomando vemos que

$$\begin{aligned}
& \overline{\eta} \lim_{r\to 1^-} \frac{\eta - F(r\zeta)}{1-r} \\
= & \quad \langle\ \text{Propiedad distributiva, } \eta\overline{\eta} = |\ \eta\ |^2 = 1\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{1-\overline{\eta}F(r\zeta)}{1-r} \\
= & \quad \langle\ \text{Expresión en forma polar}\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{1-r} e^{i\ \arg(\frac{1-\overline{\eta}F(r\zeta)}{1-r})} \\
= & \quad \langle\ \text{La múltiplicación por un escalar no afecta el argumento}\ \rangle \\
& \lim_{r\to 1^-} \frac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{1-r} e^{i\ \arg(1-\overline{\eta}F(r\zeta))}
\end{aligned}$$

Nótese sin embargo que (1.27) implica que

$$\lim_{r\to 1^-} \operatorname{Arg}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)) = 0 \tag{1.28}$$

ya que si $\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)) \to \mid 1-\overline{\eta}F(r\zeta) \mid$ entonces:

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Propiedades del producto de límites } \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|^2}{(\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \langle \mid z \mid^2 = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \left(\tfrac{(\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2}{(\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2} + \tfrac{(\operatorname{Im}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2}{(\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Simplificando, propiedades de los límites } \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{(\operatorname{Im}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2}{(\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)))^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Continuidad de la función } f(x) = x^2 \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{\operatorname{Im}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))}{\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Continuidad de la función arcotangente } \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \arctan \left(\tfrac{\operatorname{Im}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))}{\operatorname{Re}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición } \operatorname{Arg}(z) \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \operatorname{Arg}(1-\overline{\eta}F(r\zeta)) = 0$$

Entonces

$$\overline{\eta} \lim_{r\to 1^-} \tfrac{\eta - F(r\zeta)}{1-r}$$

$$= \quad \langle \arg(z) = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{1-r} e^{i(\operatorname{Arg}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))+2k\pi)}$$

$$= \quad \langle \text{ Propiedades del producto de límites } \rangle$$

$$\lim_{r\to 1^-} \tfrac{|1-\overline{\eta}F(r\zeta)|}{1-r} \lim_{r\to 1^-} e^{i(\operatorname{Arg}(1-\overline{\eta}F(r\zeta))+2k\pi)}$$

$$= \quad \langle \text{ (1.26), } e^z \text{ es continua y (1.28) } \rangle$$

$$\alpha e^{i2k\pi}$$

$$= \quad \langle e^{i2k\pi} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \rangle$$

$$\alpha$$

Recordando, como $\mid \eta \mid = 1$ entonces $\overline{\eta} = \eta^{-1}$, así

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{\eta - F(r\zeta)}{1 - r} = \alpha\eta$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Por último, con respecto a los comentarios tenemos que:

(a) Como consecuencia de la proposición 1.3.2.

(b) Como

$$\begin{array}{cl} & \angle \lim_{z \to \zeta} F(z) - \eta \\ = & \langle \text{ Multiplicando y dividiendo por } z - \zeta \rangle \\ & \angle \lim_{z \to \zeta} \frac{F(z) - \eta}{z - \zeta}(z - \zeta) \\ = & \langle \text{ Propiedades producto de límites, } \angle F'(\zeta) \text{ existe } \rangle \\ & \angle F'(\zeta) \angle \lim_{z \to \zeta} z - \zeta \\ = & \langle \text{ Calculando el límite } \rangle \\ & 0 \end{array}$$

De lo que se concluye que $\angle \lim_{z \to \zeta} F(z) - \eta = 0$ y así los puntos frontera η en (ii) y (iii) son el mismo.

(c) Se tiene de (1.22) y la proposición 1.3.4.

1.4. Puntos fijos de mapeos holomorfos de Δ. El teorema de Wolf-Denjoy

Definición 1.4.1: Diremos que F es convergente en potencia si la sucesión $S = \{F^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en cada subconjunto contenido estrictamente en Δ. Si el límite de la sucesión es una constante $\zeta \in \overline{\Delta}$ entonces este es llamado un punto atractor de S.

Por la proposición 1.2.4, si $F \in \text{Hol}(\Delta)$, F no es la identidad y ζ es un punto interior a Δ entonces este es un único punto fijo de F.

En esta sección estudiaremos la dinámica de los auto mapeos holomorfos de Δ sin punto fijos en el interior. Un simple caso de esta situación se puede observar en los automorfismos de Δ sin puntos fijos en el interior donde estos tienen que ser hiperbólicos, donde sus dos puntos fijos deben estar en $\partial\Delta$ o parabólicos, donde un punto fijo se encuentra en $\partial\Delta$ y ninguno en Δ (véase [2], página 26). El contenido de un resultado a destacar el cual esencialmente fue obtenido simultáneamente por J. Wolf y A. Denjoy es que este hecho se mantiene para cualquier mapeo holomorfo de Δ sin puntos fijos en el interior. En otras palabras, cada $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ el cual no tiene puntos fijos en Δ es convergente en potencia a su punto fijo en la frontera en el siguiente sentido:

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(z) = \zeta \in \partial\Delta$$

y

$$\lim_{r\to 1^-} F(r\zeta) = \zeta.$$

Nosotros hemos mencionado que un auto mapeo holomorfo de Δ puede tener diferentes puntos fijos en la frontera $\partial\Delta$ de Δ. Entonces, una pregunta adicional es como reconocer cual de estos es el atractor. La clave para responder esto proviene del Lema de Julia y el Teorema de Julia-Carathéodory donde el valor de la derivada angular define tal punto (véase la Proposición 1.4.2 a continuación). Una consecuencia del Lema de Pick-Schwarz nos dice acerca de la condición de invarianza en vecindades de un punto fijo interior de Δ (Proposición 1.2.4). Para mapeos sin puntos fijos un resultado similar fue establecido por Wolf donde discos pseudo-hiperbólicos fueron reemplazados por horociclos en un cierto punto frontera de Δ:

Proposición 1.4.1 (Lema de Wolf): Sea $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ sin puntos fijos en Δ. Entonces hay un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$, tal que para cada $K > 0$ y $n = 0, 1, 2, ...$, el horociclo

$$D(\zeta, K) = \left\{ z \in \Delta : \phi_\zeta(z) := \frac{\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2}{1- \mid z \mid^2} < K \right\}$$

tangente internamente a $\partial\Delta$ en ζ, es $F^{(n)}$-invariante, es decir

$$F^{(n)}(D(\zeta, K)) \subseteq D(\zeta, K). \tag{1.29}$$

Demostración: De hecho, es suficiente con mostrar que hay una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a ζ, la cuál satisface las condiciones del Lema de Julia, es decir, el límite:

$$\alpha = \alpha(\zeta, F) := \liminf_{z\to\zeta} \frac{1- \mid F(z) \mid}{1- \mid z \mid}$$

existe. Más aún mostraremos que $0 \leq \alpha \leq 1$ y $\angle \lim_{z\to\zeta} F(z) = \zeta$.
Entonces nuestra afirmación resulta como una consecuencia de la Proposición 1.3.3.
Tome cualquier sucesión arbitraria $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} \in (0,1)$ incrementando a 1, y considere los mapeos $F_n = r_nF$. Como r_nF mapea Δ estrictamente en su interior, por el Corolario 1.2.1 F_n tiene un único punto fijo $\zeta_n \in \Delta$. En el paso a una subsucesión, podemos asumir que $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto $\zeta \in \overline{\Delta}$. Si $\zeta \in \Delta$, entonces por continuidad tenemos

$$\zeta = \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \lim_{n\to\infty} r_nF(\zeta_n) = F(\zeta)$$

contradiciendo la hipótesis de que F no tiene puntos fijos en Δ.
Consecuentemente $\mid \zeta \mid = 1$. En adición

$$\frac{1- \mid F(\zeta_n) \mid}{1- \mid \zeta_n \mid} = \frac{1 - \frac{1}{r_n} \mid \zeta_n \mid}{1- \mid \zeta_n \mid} \leq 1$$

para todo $n = 1, 2...$
Una vez más, pasando a una subsucesión por el Teorema de Bolzano - Weierstrass concluimos que el número de Julia

$$\alpha(\zeta, F) = \liminf_{z\to\zeta} \frac{1- \mid F(z) \mid}{1- \mid z \mid}$$

existe y es menor o igual que 1, esto junto con la Proposición 1.3.2 implica que $0 \leq \alpha \leq 1$. Además es claro que

$$F(\zeta_n) = \frac{1}{r_n}\zeta_n$$

converge a ζ y por el Lema de Julia obtenemos la desigualdad

$$\frac{\mid 1 - F(z)\overline{\zeta} \mid^2}{1- \mid F(z) \mid^2} \leq \alpha(\zeta, F)\frac{\mid 1 - z\overline{\zeta} \mid^2}{1- \mid z \mid^2} \tag{1.30}$$

la cual implica (1.29).
Proposición 1.4.2: El punto $\zeta \in \partial\Delta$ para el cual se satisface (1.29) es único.
Demostración: Supongamos que existen ζ_1 y ζ_2 puntos fijos deferentes tales que se satisface (1.29). Por propiedades geométricas de los horociclos, existen $D(\zeta_1, K_1)$ y $D(\zeta_2, K_2)$ cuyas fronteras se intersecan en un solo punto, digamos β; sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq (D(\zeta_1, K_1) \cup D(\zeta_2, K_2))$ tal que $z_n \to \beta$, por continuidad tenemos que para $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ se cumple $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(\beta)$, como por hipótesis ζ_1

y ζ_2 son tales que se satisface (1.29) entonces $F(\beta) \in (\overline{D(\zeta_1, K_1)} \cap \overline{D(\zeta_2, K_2)})$ y por construcción de los horociclos se tiene que $F(\beta) = \beta$ lo cual contradice el hecho de que F no tiene puntos fijos en Δ.

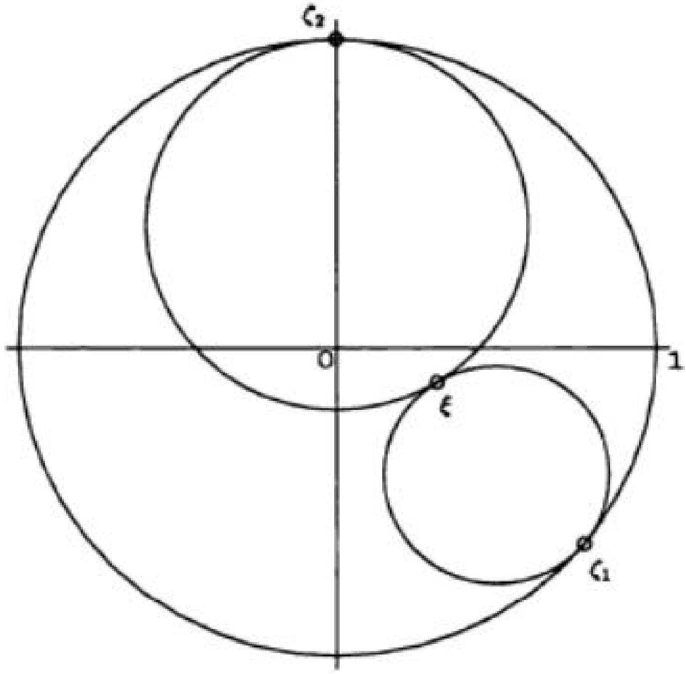

Figura 1.6: Ilustración de la propiedad geométrica de los horociclos (Tomada de [1] página 34)

Llamaremos al punto $\zeta \in \partial\Delta$ para el cual se satisface el Lema de Wolff un punto fuente de F en $\partial\Delta$.

Combinando la Proposición 1.4.1 con la Proposición 1.3.3 se obtiene una caracterización de los automapeos holomorfos de Δ sin punto fijos el cual es llamado algunas veces el Teorema de Julia-Wolff-Carathéodory.

Proposición 1.4.3: Sea $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) F no tiene puntos fijos en Δ;

(ii) existe un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$ tal que

$$\alpha := \angle \lim_{z \to \zeta} \frac{F(z) - \zeta}{z - \zeta}$$

existe con $0 < \alpha \leq 1$;

(iii) existe un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$ tal que

$$\angle \lim_{z \to \zeta} F(z) = \zeta$$

y

$$\angle \lim_{z\to\zeta} F'(z) = \alpha \leq 1;$$

(iv) existe un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$ tal que

$$\liminf_{z\to\zeta} \frac{1- \mid F(z) \mid}{1- \mid z \mid} = \alpha \leq 1$$

(v) existe un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$ tal que

$$\sup_{z\in\Delta} \frac{\varphi_\zeta(F(z))}{\varphi_\zeta(z)} = \alpha \leq 1$$

donde

$$\varphi_\zeta(z) = \frac{\mid 1 - z\zeta \mid^2}{1- \mid z \mid^2} = \frac{\mid z - \zeta \mid^2}{1- \mid z \mid^2},\ z \in \Delta$$

Más aún,

(a) los puntos frontera ζ y los números α en $(i) - (v)$ son los mismos;

(b) los límites no tangenciales en (ii) y (iii) pueden ser reemplazados por los límites radiales.

Demostración: Por cadena de implicaciones tenemos:

$((i) \Rightarrow (ii))$. Por la Proposición 1.4.1 $(i) \Rightarrow (iv)$ y por la Proposición 1.3.3 comentario (c) $(iv) \Rightarrow (ii)$ donde ahora $\eta = \zeta$, así, por transitividad de la implicación se tiene que $(i) \Rightarrow (ii)$.

$((ii) \Rightarrow (iii))$. Por la Proposición 1.3.3.

$((iii) \Rightarrow (iv))$. Por la Proposición 1.3.3.

$((iv) \Rightarrow (v))$. Por contradicción, si α no es el supremo de dicho cociente entonces se satisface por (1.30) que para cada $K > 0$

$$F(D(\zeta, K)) \subset D(\zeta, K)$$

luego por el Corolario 1.2.1 F tiene un único punto fijo $\zeta_K \in (D(\zeta, K)$ lo cual implica, por construcción que F tiene mas de un punto fijo en Δ, luego F es la identidad y esto contradice que el punto ζ en (iv) es único.

$((v) \Rightarrow (i))$. En el caso en que F tiene un punto fijo en Δ, el valor de α dado por (v) se tiene para todo punto $\zeta \in \partial\Delta$.

Con respecto a los comentarios:
(a) Se tienen de la deducción de las Proposiciones 1.3.3, 1.4.1 y 1.4.2.

(b) Para lograr este resultado es suficiente con ver que se tienen las equivalencias en las Proposiciones $(ii) - (iv)$ reemplazando los límites angulares por los radiales, entonces:
$((iv) \Rightarrow (iii))$ Se tiene directamente de la demostración de dicha implicación en la Proposición 1.3.3.

$((iii) \Rightarrow (ii))$ Se tiene por la definición de derivada y por la proposición 1.3.2.

$((ii) \Rightarrow (iv))$ Se tiene directamente de la demostración de dicha implicación en la Proposición 1.3.3.

Observación 1.4.1: La Proposición 1.4.2 (también como previamente el Lema de Julia, el Teorema de Julia-Carathéodory y el Lema de Wolff), pueden ser consideradas como una versión en la frontera del Lema de Pick-Schwarz; el punto ζ es aplicado hacia $\partial\Delta$ en una manera adecuada. El número de Julia $\alpha = \alpha(\zeta, F)$ definido por la condición (iv) es, de hecho, la derivada angular de F en el punto fijo en la frontera ζ, el cual es también una fuente de F por la condición (v). En adición, si $\alpha < 1$, entonces para cada $n = 0, 1, 2, ...$, y para todo $z \in \Delta$ tenemos por inducción gracias a (1.29)

$$\frac{\mid F^{(n)}(z) - \zeta \mid^2}{1 - \mid F^{(n)}(z) \mid^2} \leq \alpha^n \frac{\mid z - \zeta \mid^2}{1 - \mid z \mid^2} \tag{1.31}$$

Entonces $\zeta \in \partial\Delta$ es un punto fijo atractor en $\partial\Delta$ de F, es decir, $F^{(n)}$ el n-ésimo iterado de F converge a ζ uniformemente en cada subconjunto compacto de Δ con la tasa de convergencia en potencia dada por α en el sentido de la "distancia"no euclidiana $\varphi_\zeta(z)$.
La pregunta es si este punto es un atractor cuando $\alpha = 1$. La respuesta afirmativa a esta pregunta esta dada en la siguiente afirmación.

Proposición 1.4.4: Si $F \in \text{Hol}(\Delta)$ no tiene puntos fijos en Δ, entonces hay un único punto unimodular $\zeta \in \partial\Delta$ el cual es una fuente de F, y el iterado $F^{(n)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Δ a ζ.

Demostración: Primero supongamos los casos en que F es un automorfismo; como F no tiene puntos fijos en Δ entonces F no es un automorfismo elíptico. Como ya vimos en la sección 1.1 el caso en que F sea un automorfismo parabólico, sus iterados convergen a su único punto fijo en la frontera de Δ, por último en el caso en que F es un automorfismo hiperbólico sus iterados convergerán dependiendo del valor λ sin embargo con la Proposición 1.4.2 se tiene que el punto ζ estará dado por la derivada angular. Ahora supongamos que F no es un automorfismo, por el Teorema de Montel, como la familia $\{F^{(n)}\}$ está uniformemente acotada en Δ por 1 se tiene que cada sucesión $\{f^{(n)}\} \subseteq \{F^{(n)}\}$ contiene una subsucesión la cual converge localmente uniforme en Δ, entonces hay una subsucesión $\{F^{(n_j)}\}$ la cual converge a un mapeo holomorfo $G : \Delta \to \overline{\Delta}$. Primero veremos que G debe ser constante. Suponiendo lo contrario, por el principio del modulo máximo G no alcanza su máximo en Δ luego $G \in \text{Hol}(\Delta)$. Pasando a subsucesiones (si es necesario), podemos asumir que las sucesiones de enteros $p_j = n_{j+1} - n_j$ y $q_j = p_j - 1$ tienden a infinito, y que las sucesiones correspondientes $\{F^{(p_j)}\}$ y $\{F^{(q_j)}\}$ convergen a mapeos holomorfos, digamos h y g, respectivamente. Por la continuidad de la operación de composición se sigue que

$$h \circ G = \lim_{j\to\infty} (F^{(p_j)} \circ F^{(n_j)}) = \lim_{j\to\infty} F^{(n_{j+1})} = G$$

mientras G es no contante, h tampoco es constante y como para todo $z \in \Delta$, $h(G(z)) = G(z)$ entonces h tiene mas de un punto fijo en Δ; luego por el principio de unicidad h debe ser la función identidad. Al mismo tiempo

$$g \circ F = \lim_{j\to\infty} F^{(q_j)} \circ F = \lim_{j\to\infty} F^{(p_j)} = h = I$$

y

$$F \circ g = F \circ \lim_{j\to\infty} F^{(q_j)} = \lim_{j\to\infty} F^{(p_j)} = h = I$$

entonces $F = g^{-1}$ es un automorfismo, lo cual es una contradicción. Luego $G = \zeta \in \overline{\Delta}$ es constante.

Ahora por el Lema de Wolff (Proposición 1.4.1) ζ debe ser un punto fuente de F. Entonces cada subsucesión convergente $\{F^{(n_k)}\}$ tiene el mismo límite $\zeta \in \partial\Delta$.

Para concluir, se formula el siguiente teorema el cual es llamado a veces el Teorema de Denjoy-Wolff.

Proposición 1.4.5: Un mapeo $F \in \mathrm{Hol}(\Delta)$ es convergente en potencia en Δ si y solo si este no es un automorfismo elíptico de Δ. Más aún, el límite de la sucesión $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ es una constante $\zeta \in \overline{\Delta}$.

Demostración: Si F es un automorfismo elíptico entonces F no converge en ningún conjunto compacto estrictamente contenido en Δ.

Si F no es un automorfismo elíptico y si F no tiene puntos fijos en Δ por la Proposición 1.4.3 el límite de la sucesión $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ es una constante $\zeta \in \partial\Delta$.

Si F no es un automorfismo elíptico y si F tiene puntos fijos en Δ entonces:

- Si F tiene mas de un punto fijo en Δ entonces F es la identidad luego $F^{(n)}(z) \to z$ es una constante $z \in \overline{\Delta}$ para cada subconjunto contenido estrictamente en Δ.

- Si F solo tiene un punto fijo en Δ, se sigue de la Proposición 1.2.4 que para cada $z \in \Delta$, la secuencia $\{F^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ (la órbita) converge a ζ cuando n tienda a infinito.

Capítulo 2

Aplicación de la teoría a probabilidad

2.1. Supuesto general

Sea X una variable aleatoria con valores en $\mathbb{N}^+$ tal que $\mathbb{P}(X = k) = a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}^+$.

Definición 2.1.1: Para $\mid z \mid< 1$ se define la función generadora de probabilidad f por:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{2.1}$$

Nota 2.1.1: Como $\mid z \mid< 1$ entonces

$$\begin{array}{cl} & \mid f(z) \mid \\ = & \langle \text{ Definición de } f \ \rangle \\ & \mid \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \mid \\ \leq & \langle \text{ Propiedades de series } \rangle \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_k \mid\mid z^k \mid \\ \leq & \langle \ a_k \geq 0, \mid z \mid< 1 \ \rangle \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{array}$$

$$= \quad \langle \text{ Propiedades de la función de densidad } \rangle$$

$$1$$

Luego por comparación se tiene que f converge en Δ, además al ser una serie de potencias f es holomorfa en Δ y por el cálculo anterior $\mid f \mid< 1$ así concluimos que $f \in \mathrm{Hol}(\Delta)$, además

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 1 \tag{2.2}$$

es decir que f tiene un punto fijo en $\partial\Delta$.

Siguiendo las propiedades de las series de potencias tenemos que

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

así

$$f'(1) = \lim_{z\to 1} f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = \mathbb{E}(X)$$

Notación: $\mathbb{E}(X) := m$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que:

$$1 - \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = \mathbb{E}(X)$$

entonces $1 - \mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{E}(X)$.

Proposición: Sea $f \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbb{C})$, entonces f mapea Δ en su clausura $\overline{\Delta}$ si y solo si satisface la condición:

$$\mid f'(z) \mid \leq \frac{1- \mid f(z) \mid^2}{1- \mid z \mid^2}$$

(para ver una demostración véase [2] página 14).

De la proposición anterior deducimos que

$$\mid f'(1) \mid \leq \liminf_{z\to 1} \frac{1- \mid f(z) \mid^2}{1- \mid z \mid^2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Propiedades del límite inferior } \rangle$$

$$\mid f'(1) \mid \leq \liminf_{z\to 1} \frac{1- \mid f(z) \mid}{1- \mid z \mid} \liminf_{z\to 1} \frac{1+ \mid f(z) \mid}{1+ \mid z \mid}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Por (2.2) } \rangle$$

$$\mid f'(1) \mid \leq \liminf_{z\to 1} \frac{1- \mid f(z) \mid}{1- \mid z \mid} := \alpha$$

Si α es finito, de la Proposición 1.3.2 (Lema de Julia) se deduce que para $K > 0$

$$f(D(1,K)) \subseteq D(1,\alpha K)$$

Como $f \in \mathrm{Hol}(\Delta)$, $1 \in \partial\Delta$, de la Proposición 1.3.3 se tiene lo siguiente:

- Si $\alpha < \infty$ por la parte (c), $\mathbb{E}(X) = \alpha$.
- Si $\mathbb{E}(X) < \infty$, se cumple la parte (iii) de la Proposición y nuevamente por (c), $\mathbb{E}(X) = \alpha$.

de esto anterior concluimos que si $\alpha < \infty$ ó $\mathbb{E}(X) < \infty$ entonces

$$1 - \mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{E}(X) = \alpha$$

Si $\mathbb{E}(X) < \infty$, como

$$\mid f'(z) \mid = \mid \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \mid \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mid k a_k z^{k-1} \mid \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mid k a_k \mid = \mathbb{E}(X)$$

entonces f' es una función acotada en $\overline{\Delta}$ en particular en cualquier región de aproximación no tangencial a 1, además la curva $\gamma(r) = r$ donde $r \in (0,1)$ y $r \to 1$ cumple que

$$\lim_{r\to 1} f'(z) = \mathbb{E}(X)$$

entonces por la Proposición 1.3.4 (Principio de Lindelöf)

$$\angle \lim_{z\to 1} f'(z) = \mathbb{E}(X)$$

A continuación estudiaremos dos casos:

- $\mathbb{P}(X = 0) = 0$
- $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$

1. Si $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ entonces $f(0) = a_o = \mathbb{P}(X = 0) = 0$, es decir que 0 es un punto fijo de f; como 1 es punto fijo en a frontera del disco entonces f no es un automorfismo elíptico y como f tiene un punto fijo interior f no es un automorfismo parabólico ni hiperbólico, luego f si es un automorfismo entonces debe ser la identidad. Ahora de la Proposición 1.2.4, si f no es la identidad se tiene lo siguiente:

- Para cada $z \in \Delta$, $f^{(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- $f'(0) = a_1 = \mathbb{P}(X = 1) < 1$.
- 0 es el único punto fijo de f.

Ahora del Lema de Shwarz, como:

$$| f'(0) | = | \mathbb{P}(X = 1) | = \mathbb{P}(X = 1) = 1,$$

$\mathbb{P}(X = 1) = 1$ si y solo si f es un automorfismo, en este caso $f(z) = z$.
2. Si $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$ y f tiene un punto fijo $\zeta \in \Delta$ entonces f no es la identidad y teniendo en cuenta lo anterior se cumple que

- Para cada $z \in \Delta$, $f^{(n)} \to \zeta$ cuando $n \to \infty$.
- $f'(\zeta) < 1$.
- ζ es el único punto fijo de f.

Si $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$ y f no tiene puntos fijos en Δ; entonces por la Proposición 1.4.3 se tiene que 1 es la única constante unimodular para la que se satisface las siguientes afirmaciones:
(ii) $\alpha := \angle \lim_{z \to 1} \frac{f(z)-1}{z-1}$ existe con $0 \leq \alpha \leq 1$
(iii) $\angle \lim_{z \to 1} f(z) = 1$
(iv) $\alpha = \liminf_{z \to 1} \frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$
(v)

$$\sup_{z \in \Delta} \frac{\varphi_1(F(z))}{\varphi_1(z)} = \alpha \leq 1$$

donde

$$\varphi_1(z) = \frac{| 1 - z |^2}{1 - | z |^2} = \frac{| z - 1 |^2}{1 - | z |^2}, \; z \in \Delta$$

de (ii) tenemos que $\alpha = f'(1) = m$ y de (v) si $z = 0$ entonces

$$\frac{\varphi_1(F(0))}{\varphi_1(0)} \leq m$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Simplificando y reemplazando las definiciones de } \varphi_1 \rangle$$

$$\frac{1 - \mathbb{P}(X = 0)}{1 + \mathbb{P}(X = 0)} \leq m \leq 1$$

De la proposición 1.4.4, 1 es la única constante unimodular tal que $f^{(n)} \to 1$ en cada subconjunto compacto de Δ.

Adaptando la Observación 1.4.1 tenemos que

$$d(f^{(n)}(z), 1) \leq \mathbb{E}^n(X) d(z, 1)$$

donde $d(z, 1) = \varphi_1(z)$, entonces si $\mathbb{E}(x) < 1$, $1 \in \partial\Delta$ es un punto fijo atractor en $\partial\Delta$ de f, es decir, $f^{(n)}$ el n-ésimo iterado de f converge a 1 uniformemente en cada subconjunto compacto de Δ con la tasa de convergencia en potencia dada por $\mathbb{E}^n(X)$ en el sentido de la "distancia"no euclidiana $\varphi_1(z)$.

Por último si $m \geq 1$ entonces de la Proposición 1.4.3, f tiene puntos fijos en Δ.

Ejemplos: (1.) Si $x \sim \text{Bin}(n, p)$ entonces $a_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, luego

$$\begin{aligned}
& f_X(z) \\
= \quad & \langle \text{ Simplificando y reemplazando las definiciones de } \varphi_1 \text{ } \rangle \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k \\
= \quad & \langle \text{ Propiedades combinatoria y potencias } \rangle \\
& \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} \\
= \quad & \langle \text{ Binomio de Newton } \rangle \\
& (p(z-1)+1)^n
\end{aligned}$$

Como $p \neq 1$ entonces $f(0) \neq 0$, además $f'(z) = np(p(z-1)+1)^n$ y $f'(1) = np = m$ sin embargo no es fácil determinar si hay o no puntos fijos en Δ.

(2.) Si $x \sim \text{Geo}(p)$ entonces $a_k = p(1-p)^k$, luego

$$
\begin{aligned}
& f_X(z) \\
= \quad & \langle \text{ Simplificando y reemplazando las definiciones de } \varphi_1 \rangle \\
& \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^k z^k \\
= \quad & \langle \text{ Propiedades combinatoria y potencias } \rangle \\
& p\sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)z)^k \\
= \quad & \langle \text{ Serie geométrica } \rangle \\
& \tfrac{p}{1-(1-p)z}
\end{aligned}
$$

Nótese que la función no se indetermina en Δ ya que si $1-(1-p)z = 0$ entonces $z = \frac{1}{1-p} > 1$. Como $p \neq 0$ entonces $f(0) \neq 0$, además $f'(z) = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p)z)^2}$ y $f'(1) = \frac{1-p}{p} = m$ sin embargo es fácil determinar si hay o no puntos fijos en Δ.

$$
\begin{aligned}
& f_X(z) = z \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } f \rangle \\
& \tfrac{p}{1-(1-p)z} = z \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& z^2(1-p) - z + p = 0 \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Fórmula cuadrática } \rangle \\
& z = \tfrac{1 \pm \sqrt{1-4(1-p)p}}{2(1-p)} \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Propiedad distributiva } \rangle \\
& z = \tfrac{1 \pm \sqrt{4p^2-4p+1}}{2(1-p)} \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Factorizando } \rangle \\
& z = \tfrac{1 \pm \sqrt{4(p-\frac{1}{2})^2}}{2(1-p)} \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Posibles casos } \rangle \\
& z_1 = \tfrac{p}{1-p} \text{ ó } z_2 = 1
\end{aligned}
$$

De lo anterior podemos deducir dos casos:

1. Si $p < \frac{1}{2}$ entonces $z = \frac{p}{1-p}$ es un punto fijo de f en Δ y

- Para cada $z \in \Delta$, $f^{(n)} \to \frac{p}{1-p}$ cuando $n \to \infty$.

- $f'(\frac{p}{1-p}) = \frac{p}{1-p} < 1$.
- $\frac{p}{1-p}$ es el único punto fijo de f.

2. Si $p \geq \frac{1}{2}$ entonces $z = 1$ es el único punto fijo de f en Δ y de la proposición 1.4.4, 1 es la única constante unimodular tal que $f^{(n)} \to 1$ en cada subconjunto compacto de Δ. Además se tienen las afirmaciones dadas por la proposición 1.4.3.

Conclusiones

Se caracterizo la dinámica de funciones holomorfas para todos los puntos en el interior y el borde del disco mediante el uso de las bolas pseudo hiperbólicas, los límites angulares y la caracterización que tienen los automorfismos del disco según sus puntos fijos.
Por último con ayuda de los resultados obtenidos con la teoría de Shoikhet se estudia la función generadora de probabilidad mediante dos casos generales interpretando los resultados de la teoría en el caso particular además de evidenciar con algunas distribuciones clásicas como se verifican estos resultados.
Para próximos estudios se utilizara la teoría para estudiar algunos procesos en los que intervenga la función generadora de momentos como por ejemplo el proceso de Galton-Watson y ver que otros resultados se pueden obtener.

Bibliografía

[1] Shoikhet, David. Semigroups in geometrical funcion theory. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Osorio, Juan felipe. Algunas consecuancias del Lema de Schwarz, 2018.

[3] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis*. Board. 2000

[4] Rubí E. Rodríguez. Irwin Kra. Jane P. Gilman. *Complex Analysis*. Spring. 2012

[5] Ruel V. Churchill. James Ward Brown. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill. 1992

[6] Allen Hatcher. Algebraic Topology. Allen Hatcher. 2001

[7] Walter. Rudin . Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill. 1980