ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE SMOLUCHOWSKI EN EL CASO DISCRETO Y EN EL CASO CONTINUO

Juan Manuel Gacharná González

Dirigido por: PhD. Julián Andrés Agredo Echeverry

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Programa de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2020

Índice

1. Soluciones de la ecuación de Smoluchowski caso discreto

1.1. Resumen

En este trabajo se presentan soluciones de la ecuación de Smoluchowski versión discreta, usando algunos conceptos de probabilidad y métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Esta ecuación es de gran importancia ya que modela la tasa de cambio del número promedio de polímeros de masa k con respecto al tiempo t y además no se ha podido resolver usando los métodos tradicionales debido a su complejidad, es por esto que es de gran importancia para los matemáticos pues abre nuevos caminos para la solución de distintos tipos de ecuaciones. $\left[1\right]$

1.2. Preliminares

A continuación se presentan algunos teoremas de análisis matemático y probabilidad los cuales son de gran importancia para demostrar muchos de los resultados que se muestran en este trabajo, las referencias de estos resultados premilinares se encuentran en la bibliografía. **Teorema:(Producto de Cauchy)** Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos, entonces $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ para $n \in \mathbb{N}$. Para una demostración ver $\left[3\right]$.

Teorema 1 Sean $a < b$ y $\left\{f_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ una sucesión de funciones derivables en $\left(a, b\right)$ tal que la sucesión $\left\{f_n' : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge uniformemente en $\left(a, b\right)$ y existe un punto $x_0 \in \left(a, b\right)$ tal que la sucesión $\left\{f_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge. Entonces la sucesión $\left\{f_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ converge uniformemente en $\left(a, b\right)$ y $\left(\lim_{x\to\infty} f_n\right)' = \lim_{x\to\infty} f_n'$. Para una demostración ver $\left[2\right]$.

Teorema 2 Sea $\left(f_n\right)$ una sucesión de funciones de variable real o compleja definidas en un conjunto A, y supongamos que para cada $\left(f_n\right)$

existe una constante positiva M_n tal que $\left|f_n(x)\right| \leq M_n$ para todo $n \geq 1$ y todo x en A. Supongamos también que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A.Para una demostración ver $\left[2\right]$.

Teorema 3 Sea K un conjunto compacto y $\left(f_n\right)$ una sucesión de funciones reales continuas definidas sobre K que convergen puntualmente en K a la función continua f. Si $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbb{N}$ entonces f_n converge uniformemente a f.Para una demostración ver $\left[2\right]$.

Teorema 4:(Condición uniforme de Cauchy) La sucesión de funciones (f_n) definidas en K con valores en $\mathbb{R}$ converge uniformemente en K si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq m > N$, $t \in K$ entonces $\left|f_n(t) - f_m(t)\right| < \epsilon$.Para una demostración ver $\left[2\right]$.

Función Generadora de Probabilidad:(Geométrica) Si $p_k = pq^{k-1}, k \in \mathbb{N}; q = 1 - p$ entonces $G_X(s) = \frac{ps}{1-qs}$, si $\left|s\right| < q^{-1}$.Para una demostración ver $\left[4\right]$ y $\left[5\right]$

Distribución de Borel La distribución de Borel es una distribución de probabilidad discreta para la cual si X es una variable aleatoria se dice que tiene distribución de Borel con parámetro $\lambda \in [0, 1]$ si la función de masa de probabilidad de X viene dada por:

$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda k}(\lambda k)^{k-1}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$Para una demostración ver $\left[4\right]$y $\left[5\right]$.

1.3. Introducción

En este documento se encuentran soluciones a la ecuación de Smoluchowski la cual describe el proceso de coagulación entre partículas en este caso se hablará de polímeros. Para hallar las soluciones se usan métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales y algunos conceptos de probabilidad debido a que esta ecuación no se puede solucionar con los métodos tradicionales.

Para $k \in \mathbb{N}^*$, denotaremos P_k a un polímero de masa k, que es un conjunto de k partículas identicas. A medida que transcurre el tiempo estos polímeros pueden estar tan cercanos que existe la posibilidad de que se fusionen en un solo polímero cuya masa sería la suma de los dos polímeros que se fucionaron en caso de que la reacción sea binaria. A este proceso se le conoce como ***coagulación***.

Por ejemplo si ocurre el proceso de ***coagulación*** entre dos polímeros, uno de masa k y otro de masa j se denota formalmente como $P_k + P_j \longrightarrow P_{k+j}$.

Sean $n(k,t)$ el número promedio de polímeros de masa k por unidad de volumen en el tiempo t, la expresión $kn(k,t)$ la parte de la masa que consta de polímeros de masa k por unidad de volumen, en el tiempo t. Es decir que la masa total estará dada por $\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)$.

La velocidad con la cual ocurre el fenómeno de coagulación entre un polímero de masa k y otro de masa j es directamente proporcional a $n(k,t)n(j,t)$, la constante de proporcional llamada ***núcleo de coagulación*** se denota como $\mathcal{K}(k,j)$. Este núcleo satisface las siguientes propiedades.

$k1)$ $\mathcal{K}$ es no negativo, $\mathcal{K} : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

$k2)$ $\mathcal{K}$ es simétrico, $\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(j,i)$.

Para el desarrollo de este trabajo se considera la siguiente definición.

Definición: Sea $T \in (0,\infty]$ y $(n_0(k))_{k\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos. Llamamos una ***solución fuerte*** de (SD) sobre $[0,T)$, a una sucesión de funciones positivas tal que, para todo $t \in (0,T)$ y $k \geq 1$ la derivada de $n(k,t)$ con respecto a t existe, $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}(j,k)n(j,t) < \infty$ y (SD) se verifica.

Una ***solución global*** es una solución con $T = \infty$. La solución se llama ***local*** en otro caso.

La ecuación de Smoluchowski modela la tasa de cambio del número promedio de polímeros de masa k con respecto al tiempo t este término esta dado por:

$$(SD) = \begin{cases} \frac{d}{dt}n(k,t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{K}(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}(j,k)n(j,t) \\ n(k,0) &= n_0(k), k \geq 1 \end{cases}$$

Donde el término $\sum_{j=1}^{k-1}\mathcal{K}(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t)$ representa la obtención de polímeros de masa k y se multiplica por $\frac{1}{2}$ ya que por la simetría de $\mathcal{K}$ estaríamos sumando dos veces los mismos términos;y la expresión $n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{K}(j,k)n(j,t)$ representa la eliminación de polímeros de masa k.

Desde un punto de vista físico decir que se tiene conservación de masa durante este proceso, es equivalente a la expresión matemática:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t) = \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,0)$$

Por eso es importante tener en cuenta el tiempo en el cual esto se cumple, para ello se considera la siguiente definición.

Definición: El primer tiempo a partir del cual no hay conservación de masa se llama tiempo de $\boldsymbol{gelificación}$ y se define como:

$$T_{gel} = inf\Big\{t \geq 0 : \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t) < \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,0)\Big\}$$

1.4. Solución de la ecuación de Smoluchowski

Durante muchos años se ha estudiado y se ha resuelto la ecuación de Smoluchowski para distintos tipos de núcleo de coagulación. En este trabajo se presenta la solución para un núcleo constante. multiplicativo y aditivo, como se verá a continuación.

$\mathcal{K}(i,j) = 1$

$\mathcal{K}(i,j) = ij$

$\mathcal{K}(i,j) = i + j$

1.4.1. $\mathcal{K}(i,j) = 1$

Para el caso en el que el kernel es igual a 1 se tiene la siguiente ecuación:

$$(SD)^1 = \begin{cases} \frac{d}{dt}n(k,t) & = & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) \\ n(k,0) & = & \delta_1(k), k \geq 1 \end{cases}$$

Consideremos la sucesión $S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)$ para todo $t \in K = \big[0,b\big]$ donde $0 < b < T_{gel}$ como $kn(k,t) \geq 0$, entonces $S_m \leq S_{m+1}$ y $S_m(t)$ converge cuando $m \longrightarrow \infty$ para todo $t \in K$ ya que estamos considerando un intervalo en el cual se tiene conservación de masa, es decir que $S_m(t)$ es acotada y por lo tanto, por el teorema 3 S_m converge uniformemente en K, luego $\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)$ también converge uniformemente.

Como S_m converge uniformemente, por el teorema 4,dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq m > N$ se tiene que $\big|S_n(t) - S_m(t)\big| < \epsilon$; en particular $|S_{m+1}(t) - S_m(t)\big| < \epsilon$.

y como $f_m = \sum_{k=1}^{m} n(k,t) < \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)$, entonces:

$|f_{m+1}(t) - f_m(t)\big| \leq \sum_{k=m+1}^{m+1} n(k,t) < \sum_{k=m+1}^{m+1} kn(k,t) < \epsilon.$

Es decir que (f_m) es uniformemente de Cauchy por lo tanto f_m converge uniformemente, luego $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} n(k,t) = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = f(t)$, donde

$f(t)$ es una función continua.

Sea $f_m : \big(0, b\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 < b < T_{gel}$, definida como antes $(f_m(t) = \sum_{k=1}^{m} n(k,t))$, por $(SD)^1$ tenemos que esta función es derivable en $\big(0, b\big)$ y $f'_m(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} n(k,t)$; así:

$\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$

$\equiv$

$\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{m} n(k,t)\Big)^2 - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$

$\equiv$

$f'_m(t) = \frac{1}{2}(f_m(t))^2 - f_m(t)\cdot f(t)$

Veamos que $(f_m(t))^2$ y $f_m(t)\cdot f(t)$ convergen uniformemente:

1) $(f_m(t))^2$ converge uniformemente:

Como f es continua en un compacto, entonces $\big|f(t)\big| \leq \frac{M}{2}$, para todo $t \in \big[0, b\big]$; y teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$ $\big|f_n(t) - f_m(t)\big| < \frac{\epsilon}{M}$ siempre que $m, n > N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces:

Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n \geq m > N$ se tiene que

$\big|(f_n(t))^2 - (f_m(t))^2\big|$

$=$

$\big|f_n(t) - f_m(t)\big|\big|f_n(t) + f_m(t)\big|$

$\leq$

$\big|f_n(t) - f_m(t)\big|\big(\big|f_n(t)\big| + \big|f_m(t)\big|\big)$

$\leq$

$\left|f_n(t)-f_m(t)\right|\left|f(t)+f(t)\right|$

$=$

$\left|f_n(t)-f_m(t)\right|\left|2f(t)\right|$

$\leq$

ϵ

Es decir que $(f_m(t))^2$ converge uniformemente de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente.

2) $f_m(t) \cdot f(t)$ converge uniformemente:

Como f es continua en un compacto, entonces $\left|f(t)\right| \leq M$, para todo $t \in \left[0, b\right]$; y teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$ $\left|f_n(t)-f_m(t)\right|<\frac{\epsilon}{M}$ siempre que $m, n>N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces:

Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n \geq m > N$ se tiene que

$\left|f_n(t) \cdot f(t)-f_m(t) \cdot f(t)\right|$

$=$

$\left|f(t)\right|\left|f_n(t)-f_m(t)\right|$

$\leq$

ϵ

Por 1) y 2) se tiene que $f'_m(t)$ converge uniformemente y por el teorema 1 la sucesión $\left\{f_m : m \in \mathbb{N}\right\}$ converge uniformemente en $\left(a, b\right)$ y $\left(\lim_{x\to\infty} f_m\right)' = \lim_{x\to\infty} f'_m$. Es decir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$.

Sumando a ambos lados SD desde $k=1$ hasta infinito tenemos:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} n(j,t) n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$

$\sum_{k=1}^{\infty} n(k,0) = \sum_{k=1}^{\infty} n_0(k), k \geq 1$

por el producto de Cauchy y el teorema 1 esto es equivalente a:

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) - \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} n^2(k,t) - \sum_{k=1}^{\infty} n^2(k,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} n^2(k,t)$

Si hacemos $y = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$ obtenemos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} y^2$, con la condición inicial $y(0) = 1$,la cual se puede resolver por el método de variables separables, entonces:

$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} y^2$

$\Rightarrow$

$\frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2} dt$

$\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2} \int dt$

$\Rightarrow$

$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} t + c$

$\Rightarrow$

$y = \frac{2}{t+c}$

Como $y(0)=1$ se tiene que $c=2$ y así $y=\frac{2}{t+2}$, es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)=\frac{2}{t+2}$$

Esto nos lleva a considerar $p(k,t)=(1+\frac{t}{2})n(k,t)$ tal que $(p(k,t))_{k\geq 1}$ forma una distribución de probabilidad. La función generadora de probabilidad para esta distribución es $G(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty} p(k,t)s^k$ para $\left|s\right|<1$.

Si multiplicamos la ecuación de Smoluchowski $(SD)^1$ por s^k y luego sumamos desde $k=1$ hasta infinito, entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}n(k,t)s^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t)s^k-\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$$

$\equiv$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}n(k,t)s^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)s^j n(k-j,t)s^{k-j}-\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$$

$\equiv$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}n(k,t)s^k=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k\Big)^2-\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)$$

$\equiv$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}n(k,t)s^k=\frac{1}{2}\frac{G^2(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}-\frac{G(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}$$

Si derivamos G con respecto a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k+(1+\frac{t}{2})\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$$

$\equiv$

$$(2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)=\frac{2+t}{2}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k+\frac{(2+t)^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$$

$\equiv$

$$(2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)=G(t,s)+\frac{(2+t)^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\frac{G^2(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}-\frac{G(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}\Big)$$

$\equiv$

$$(2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s)=G(t,s)+(\frac{2+t}{2})^2\frac{G^2(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}-\frac{(2+t)^2}{2}\frac{G(t,s)}{(1+\frac{t}{2})^2}\Big)$$

$\equiv$

$(2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = G(t,s) + G^2(t,s) - 2G(t,s)$

$\equiv$

$(2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = G(t,s)\big(G(t,s)-1\big)$

De esta manera obtenemos la ecuación:

$$[SD]^1 = \begin{cases} (2+t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) & = & G(t,s)\big(G(t,s)-1\big) \\ G(t,1) & = & 1 \\ G(0,s) & = & s \end{cases}$$

Haciendo $y = G(t,s)$,entonces la ecuación anterior es equivalente a solucionar

$(2+t)\frac{d}{dt}y = y^2 - y$

$\Rightarrow$

$\frac{dy}{y^2-y} = \frac{dt}{2+t}$

$\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y^2-y} = \int \frac{dt}{2+t}$

Realizando fracciones parciales para resolver la integral de el lado izquierdo se obtiene para $y \neq 0$ y $y \neq 1$:

$ln\big|y-1\big| - ln\big|y\big| = ln\big|2+t\big| + c(s)$

$\Rightarrow$

$\left|\frac{y-1}{y}\right| = (t+2)e^{c(s)}$

Nótese que $1-y \geq 0$, en efecto $y(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k,t)s^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(k,t) = 1$

para $\left|s\right| \leq 1$, entonces:

$1 - y = (t+2)e^{c(s)} \Rightarrow y(t,s) = \frac{1}{1+(t+2)e^{c(s)}} = G(t,s)$

Si analizamos las condiciones iniciales dadas para esta ecuación entonces:

$G(0,s) = \frac{1}{1+(t+2)e^{c(s)}} = s$

$\equiv$

$1 = s + 2se^{c(s)}$

$\Rightarrow$

$e^{c(s)} = \frac{1-s}{2s}$

Reemplazando este valor en la expresión para $G(t,s)$:

$(*)\ G(t,s) = \frac{2s}{2s+(t+2)(1-s)} = \frac{2s}{t+2-st}$

Esta solución es válida para $t \in [0, T_{gel})$ con $T_{gel} = \infty$; en efecto, si en $(*)$ dividimos por $t+2$ se tiene que $G(t,s) = \frac{\frac{2}{t+2}s}{1-\frac{t}{t+2}s}$, si llamamos $p = \frac{2}{t+2}$ y $q = \frac{t}{t+2}$ entonces $G(t,s) = \frac{ps}{1-qs}$, es decir, obtenemos una distribución de probabilidad Geométrica para $\left|s\right| < q^{-1}$, y sabemos que para esta distribución $p_k = pq^{k-1}$ donde $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $p(k,t) = (\frac{2}{2+t})(\frac{t}{t+2})^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, luego $n(k,t) = (\frac{2}{2+t})^2(\frac{t}{t+2})^{k-1}$ y como $\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t) = (\frac{2}{2+t})^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{t}{t+2})^{k-1}$, si hacemos $r = \frac{2}{2+t}$ obtenemos una serie geométrica que converge a $\frac{1}{(1-r)^2}$ para $\left|r\right| \leq 1$ es decir que $\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t) = 1$, para todo $t \in [0,\infty)$, lo cual justifica la afirmación hecha.

1.4.2. $\mathcal{K}(i,j) = ij$

Para el kernel igual a ij para todo $\{i,j\} \subseteq \mathbb{N}$ se obtiene la ecuación:

$$(SD)^* = \begin{cases} \frac{d}{dt}n(k,t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} j(k-j)n(j,t)n(k-j,t) - kn(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t) \\ n(k,0) &= \delta_1(k), k \geq 1 \end{cases}$$

Consideramos de nuevo $S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)$ para todo $t \in K = \big[0,b\big]$ donde $0 < b < T_{gel}$ y como en el caso anterior $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)$ también converge uniformemente y $f_m(t) = \sum_{k=1}^{m} n(k,t)$ tambien converge uniformemente a $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$.

Ahora sea $f_m : \big(0,b\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 < b < T_{gel}$, definida como antes $(f_m(t) = \sum_{k=1}^{m} n(k,t))$, por (SD) tenemos que esta función es derivable en $\big(0,b\big)$ y $f_m'(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} n(k,t)$; así:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} \mathcal{K}(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}(k,j)n(j,t)$$

$\equiv$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1} j(k-j)n(j,t)n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)$$

$\equiv$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} n(k,t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{m} kn(k,t)\Big)^2 - \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)$$

$\equiv$

$$f_m'(t) = \frac{1}{2}(S_m(t))^2 - S_m(t)\cdot S(t)$$

Veamos que $(S_m(t))^2$ y $S_m(t)\cdot S(t)$ convergen uniformemente:

1) $(S_m(t))^2$ converge uniformemente:

Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n \geq m > N$ se tiene que

$$\left|(S_n(t))^2 - (S_m(t))^2\right|$$
$$=$$
$$\left|S_n(t) - S_m(t)\right|\left|S_n(t) + S_m(t)\right|$$
$$\leq$$
$$\left|S_n(t) - S_m(t)\right|\left(\left|S_n(t)\right| + \left|S_m(t)\right|\right)$$
$$\leq$$
$$\left|S_n(t) - S_m(t)\right|\left|S(t) + S(t)\right|$$
$$=$$
$$\left|S_n(t) - S_m(t)\right|\left|2S(t)\right|$$
$$\leq$$
$$\epsilon$$

Es decir que $(S_m(t))^2$ converge uniformemente de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente.

2) $S_m(t) \cdot S(t)$ converge uniformemente:

Como S es continua en un compacto, entonces $\left|S(t)\right| \leq \frac{M}{2}$, para todo $t \in \left[0, b\right]$; y teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$ $\left|S_n(t) - S_m(t)\right| < \frac{\epsilon}{M}$ siempre que $m, n > N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces:

Como S es continua en un compacto, entonces $\left|S(t)\right| \leq M$, para todo $t \in \left[0,b\right]$; y teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$ $\left|S_n(t) - S_m(t)\right| < \frac{\epsilon}{M}$ siempre que $m, n > N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ entonces:

Sea $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ si $n \geq m > N$ se tiene que

$\left|S_n(t) \cdot S(t) - S_m(t) \cdot S(t)\right|$

$=$

$\left|S(t)\right|\left|S_n(t) - S_m(t)\right|$

$\leq$

ϵ

Por 1) y 2) se tiene que f'_m converge uniformemente y por el teorema 1 la sucesión $\left\{f_m : m \in \mathbb{N}\right\}$ converge uniformemente en $\left(a,b\right)$ y $\left(\lim_{x\to\infty} f_m\right)' = \lim_{x\to\infty} f'_m$. Es decir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$.

Sumando a ambos lados $(SD)^*$ desde $k = 1$ hasta infinito tenemos:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} j(k-j) n(j,t) n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)$.

Como antes, consideremos $p(k,t) = \frac{kn(k,t)}{\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)}$ y así $(p(k,t))_{k\geq 1}$ forma una distribución de probabilidad. La función generadora de probabilidad para esta distribución es $G(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k,t) s^k$ para $\left|s\right| < 1$.

Si multiplicamos la ecuación de Smoluchowski por s^k y k, sumando desde $k = 1$ hasta infinito, entonces:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} kn(k,t)s^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j=1}^{k-1} j(k-j)n(j,t)n(k-j,t)s^k - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n(k,t)s^k \sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)$

Esta expresión es equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j=1}^{k-1} jn(j,t)s^j(k-j)n(k-j,t)s^{k-j} \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n(k,t)s^k \sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)\end{aligned}$$

Usando el producto de Cauchy tenemos que:

$G^2(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} jn(j,t)s^j(k-j)n(k-j,t)s^{k-j}$

Luego:

$\frac{\partial}{\partial s}G^2(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} kj(k-j)n(j,t)n(k-j,t)s^{k-1}$

Reemplazando:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{s}{2}\frac{\partial}{\partial s}G^2(t,s) - s\frac{\partial}{\partial s}G(t,s)$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$[SD]^* = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}G(t,s) &= \frac{s}{2}\frac{\partial}{\partial s}G^2(t,s) - s\frac{\partial}{\partial s}G(t,s) \\ G(t,1) &= 1 \\ G(0,s) &= s \end{cases}$$

Esta ecuación se puede escribir de forma equivalente como:

$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = \frac{s}{2}\frac{\partial}{\partial s}G^2(t,s) - s\frac{\partial}{\partial s}G(t,s)$

$\equiv$

$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) = -s(1-G(t,s))\frac{\partial}{\partial s}G(t,s)$

$\equiv$

$\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + s(1 - G(t,s))\frac{\partial}{\partial s}G(t,s) = 0$

entonces por el método de las características $\left[6\right]$ se tiene que $\frac{dt}{1} = \frac{ds}{s(1-G(t,s))} = \frac{dG}{0}$, de lo cual $dG = 0$, es decir que $G(t,s) = c$ donde $c \in \mathbb{R}$. Digamos que $G(t,s) = \boldsymbol{\psi}(t,s,G)$

Ahora, $\frac{dt}{1} = \frac{ds}{s(1-G(t,s))} = \frac{ds}{s(1-c)}$ usando el método de variables separables se tiene que:

$(1-c)dt = \frac{ds}{s}$

$\Rightarrow$

$(1-c)\int dt = \int \frac{ds}{s}$

$\Rightarrow$

$(1-c)t = ln(s) + c_1$

$\Rightarrow$

$(1-c)t - ln(s) = c_1$

$\Rightarrow$

$(c-1)t + ln(s) = c_1 = \phi(t,s,G)$

$\Rightarrow$

$(G-1)t + ln(s) = c_1 = \phi(t,s,G)$

Podemos suponer que existe una función f tal que:

$f(\phi(t,s,G), \boldsymbol{\psi}(t,s,G)) = 0$

$\equiv$

$f((G-1)t + ln(s), G) = 0$

De lo cual, de acuerdo con el método de las características podemos suponer que existe una función inyectiva g tal que

$(*)$ $G(t,s) = g((G-1)t + ln(s))$, usando las condición $s = G(0,s)$.

$s = G(0,s) = g(ln(s))$

$\Rightarrow$

$(**)$ $s = g(ln(s))$

Esto para todo s, en particular para $s = G(t,s)$ es decir
$G(t,s) = g(ln(G(t,s)))$; así, igualando $(*)$ y $(**)$ como g es inyectiva se tiene que:

$(G(t,s)-1)t + ln(s) = ln(G(t,s))$

$\equiv$

$(G(t,s)-1)t = ln(\frac{G(t,s)}{s})$

$\equiv$

$se^{t(G(t,s)-1)} = G(t,s)$

$G(t,s)$ es una función generadora de probabilidad de una distribución Borel con parámetro $\lambda = t$, por lo tanto $p(k,t) = \frac{e^{-tk}(tk)^{k-1}}{(k)!}$. Por otro lado $p(k,t) = kn(k,t)$ luego:

$n(k,t) = \frac{1}{k^2}\frac{(tk)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-tk}$. La cual es solución de $(SD)^*$ para $T_{gel} = 1$.(ver $\left[LT81\right]$ en $\left[1\right]$).

1.4.3. $\mathcal{K}(i,j) = i + j$

Si reemplazamos el kernel por $i+j$ en la ecuación original obtenemos para todo $\{i,j\} \subseteq \mathbb{N}$:

$\frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(j+k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty}(k+j)n(j,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t) - \sum_{j=1}^{\infty} kn(k,t)n(j,t) - \sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)n(k,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t) - kn(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{k}{2}\sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)n(k-j,t) - kn(k,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - n(k,t)$

Así tenemos la siguiente expresión para (SD) cuando $\mathcal{K}(i,j) = i+j$:

$$(SD)^+ = \begin{cases} \frac{d}{dt}n(k,t) &=& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(j+k-j)n(j,t)n(k-j,t) - n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty}(k+j)n(j,t) \\ n(k,0) &=& \delta_1(k), k \geq 1 \end{cases}$$

Consideramos $S_m(t) = \sum_{k=1}^{m} kn(k,t)$ para todo $t \in K = \big[0,b\big]$ donde $0 < b < T_{gel}$ y $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)$ la cual converge uniformemente y $f_m(t) = \sum_{k=1}^{m} n(k,t)$ que converge uniformemente a $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$.

Ahora sea $f_m : \big(0,b\big) \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 < b < T_{gel}$, definida como antes $(f_m(t) = \sum_{k=1}^{m} n(k,t))$, por SD tenemos que esta función es derivable en $\big(0,b\big)$ y $f'_m(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} n(k,t)$; así:

$\sum_{k=1}^{m}\frac{d}{dt}n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\mathcal{K}(j,k-j)n(j,t)n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{K}(k,j)n(j,t)$

$\equiv$

$\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt} n(k,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{k-1} n(j,t) n(k-j,t) - \sum_{k=1}^{m} kn(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} kn(k,t) \sum_{k=1}^{m} n(k,t) - \sum_{k=1}^{m} kn(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - \sum_{k=1}^{m} n(k,t)$

$\equiv$

$f_m'(t) = \frac{1}{2} S_m(t) \cdot f_m(t) - f(t) - f_m(t)$

Como $(S_m(t))_m$ es uniformemente de Cauchy entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ si $m > N$ se tiene que $\left| S_{m+k}(t) - S_m(t) \right| \leq \epsilon$.

Ahora,
$\left| f_{m+k}(t) - f_m(t) \right| = \sum_{k=m+1}^{m+k} n(k,t) \leq \sum_{k=m+1}^{m+k} kn(k,t) = \left| S_{m+k}(t) - S_m(t) \right| \leq \epsilon$.

Por lo tanto $(f_m(t))_m$ es uniformemente de Cauchy y como $f(t)$ es continua en un intervalo compacto, existe $M > 0$ tal que $\left| f(t) \right| \leq M$ para todo $t \in K = \left[0, b\right]$ donde $0 < b < T_{gel}$, luego $\frac{1}{2} S_m(t) \cdot f_m(t) - f(t) - f_m(t)$ converge uniformemente y en consecuencia también $f_m'(t)$.

Sumando a ambos lados $(SD)^+$ desde $k = 1$ hasta infinito tenemos:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k \sum_{j=1}^{k-1} n(j,t) n(k-j,t) - \sum_{j=1}^{\infty} kn(k,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - \sum_{j=1}^{\infty} n(k,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1}(j+k-j)n(j,t)n(k-j,t) - 2\sum_{j=1}^{\infty} n(k,t)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} jn(j,t)n(k-j,t) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)n(j,t)n(k-j,t)\Big) - 2\sum_{j=1}^{\infty} n(k,t)$

Por el producto de Cauchy tenemos que:

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1} jn(j,t)n(k-j,t) = \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$

y

$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)n(j,t)n(k-j,t) = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$

Reemplazando estas expresiones en la igualdad anterior:

$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$

Haciendo $y = \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)$ obtnemos la ecuación diferencial:

$\frac{dy}{dt} = -y$ con $y(0) = 1$

La cual se soluciona por el método de variables separables

$\frac{dy}{y} = -dt$

$\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y} = -\int dt$

$\Rightarrow$

$ln\big|y\big| = -t + c$

$\Rightarrow$

$y(t) = e^{-t}e^{c}$

y como $y(0) = 1$ entonces $y(t) = e^{-t}$. Es decir $\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = e^{-t}$.

Así, podemos considerar $p(k,t) = e^{t} n(k,t)$ tal que $(p(k,t))_{k\geq 1}$ forma una distribución de probabilidad. Donde la función generadora para esta distribución esta dada por $G(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k,t)s^k$ para $\left|s\right| \leq 1$.

Nótese que si multiplicamos $(SD)^{+}$ por s^k y luego sumamos desde $k = 1$ hasta infinito, entonces:

$(\circ)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(k,t)s^k = \frac{s}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} kn(j,t)n(k-j,t)s^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^k \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$

Ahora si derivamos a $G(t,s)$ con respecto a t:

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k = e^t \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k + e^t \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$

Si reemplazamos $(\circ)$ en la anterior igualdad y usando el hecho de que $\sum_{k=1}^{\infty} n(k,t) = e^{-t}$ obtenemos:

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k = \frac{e^t}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} (j+k-j)n(j,t)n(k-j,t)s^k - e^t s \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^{k-1}e^{-t} - e^t \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$

$\equiv$

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k = \frac{e^t}{2} \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} js^j n(j,t)n(k-j,t)s^{k-j} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} n(j,t)s^j (k-j)s^{k-j} n(k-j,t) \Big] - e^t s \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^{k-1}e^{-t} - e^t \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k$

$\equiv$

$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k = \frac{e^t}{2} \Big[\sum_{k=1}^{\infty} ks^k n(k,t) \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k + \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^k \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k \Big] - e^t s \sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^{k-1}e^{-t} - \sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty} e^t n(k,t)s^k = e^t\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^k \sum_{k=1}^{\infty} n(k,t)s^k - e^t s\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^{k-1}e^{-t}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} = G(t,s)\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^k - e^{-t}s\frac{\partial G}{\partial s}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} = sG(t,s)\sum_{k=1}^{\infty} kn(k,t)s^{k-1} - e^{-t}s\frac{\partial G}{\partial s}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-t}G(t,s)\sum_{k=1}^{\infty} e^t kn(k,t)s^{k-1} - e^{-t}s\frac{\partial G}{\partial s}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-t}G(t,s)\frac{\partial G}{\partial s} - e^{-t}s\frac{\partial G}{\partial s}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-t}\Big(G(t,s)-1\Big)\frac{\partial G}{\partial s}$

Obteniendo la ecuación:

$$[SD]^+ = \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} &= se^{-t}\Big(G(t,s)-1\Big)\frac{\partial G}{\partial s} \\ G(t,1) &= 1 \\ G(0,s) &= s \end{cases}$$

Para solucionar esta ecuación usamos el método de las características $\big[6\big]$ y escribimos la ecuación como:

$\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-t}\Big(G(t,s)-1\Big)\frac{\partial G}{\partial s}$

$\equiv$

$\frac{\partial G}{\partial t} + se^{-t}\Big(1-G(t,s)\Big)\frac{\partial G}{\partial s} = 0$

entonces $\frac{dt}{1} = \frac{ds}{se^{-t}\Big(1-G(t,s)\Big)} = \frac{dG}{0}$, de lo cual $dG = 0$, es decir que $G(t,s) = c$ donde $c \in \mathbb{R}$. Digamos que $G(t,s) = \boldsymbol{\psi}(t,s,G)$

Ahora, $\frac{dt}{1} = \frac{ds}{se^{-t}\left(1-G(t,s)\right)}$ usando el método de variables separables se tiene que:

$(1-c)e^{-t}dt = \frac{ds}{s}$

$\Rightarrow$

$(1-c)\int e^{-t}dt = \int \frac{ds}{s}$

$\Rightarrow$

$-(1-c)e^{-t} = ln(s) + c_1$

$\Rightarrow$

$-(1-c)e^{-t} - ln(s) = c_1$

$\Rightarrow$

$(1-c)e^{-t} + ln(s) = c_1 = \phi(t,s,G)$

Supongamos que existe una función f tal que:

$f(\phi(t,s,G), \boldsymbol{\psi}(t,s,G)) = 0$

$\equiv$

$f((1-G)e^{-t} + ln(s), G) = 0$

De acuerdo con el método de las características se puede suponer que existe una función inyectiva g tal que

$(*)$ $G(t,s) = g((1-G)e^{-t} + ln(s))$, usando las condición $s = G(0,s)$.

$s = G(0,s) = g(1-s+ln(s))$

$\Rightarrow$

$s = g(ln(e^{1-s}) + ln(s))$

$\Rightarrow$

$(**)\ s = g(ln(se^{1-s}))$

Esto para todo s, en particular para $s = G(t,s)$; así, igualando $(*)$ y $(**)$ como g es inyectiva se tiene que:

$(1 - G(t,s))e^{-t} + ln(s) = ln(G(t,s)e^{1-G(t,s)})$

$\equiv$

$(1 - G(t,s))e^{-t} = ln\Big(\frac{G(t,s)e^{1-G(t,s)}}{s}\Big)$

$\equiv$

$se^{(1-G(t,s))e^{-t}} = G(t,s)e^{1-G(t,s)}$

$\equiv$

$se^{(1-G(t,s))e^{-t}-(1-G(t,s))} = G(t,s)$

$\equiv$

$G(t,s) = se^{(G(t,s)-1)(1-e^{-t})}$

Por lo tanto $G(t,s)$ es una función generadora de probabilidad de una distribución Borel con parámetro $\lambda = 1 - e^{-t}$; luego $p(k,t) = e^{-(1-e^{-t})k}((1-e^{-t})k)^{k-1}\frac{1}{k!}$, por otro lado $p(k,t) = e^{t}n(k,t)$ de lo cual se obtiene que:

$$n(k,t) = \frac{1}{k}\frac{(k(1-e^{-t})k)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-t}e^{-k(1-e^{-t})}$$

La cual es solución de $(SD)^{+}$ para todo $T \in [0,\infty)$.(ver $\big[Kok88\big]$ en $\big[1\big]$).

1.5. Conclusión

En este trabajo se puede evidenciar otra forma de solucionar ecuaciones diferenciales de gran complejidad como lo es la ecuación de Smoluchowski. En él se muestra la importancia y la eficacia que tiene la probabilidad ya que esta fue fundamental para probar tanto la existencia como la unicidad de las soluciones. Estos conceptos nos permitieron simplificar el problema reduciendo la ecuación original a una en derivadas parciales, de la cual si se conocen muchos métodos para solucionarla.

2. Soluciones de la Ecuación de Smoluchowski caso continuo

2.1. Resumen

En este trabajo se presentan soluciones de la ecuación de Smoluchowski versión continua usando algunos conceptos de probabilidad y de teoría de la medida; específicamente se muestra el procedimiento para llegar a la solución de la Ecuación de Smoluchowski caso continuo con núcleo constante, y algunos resultados de gran importancia en los cuales se pone en evidencia la relación que se presenta entre la ecuación con núcleo multiplicativo y núcleo aditivo.

Esta ecuación es de gran importancia ya que modela la tasa de cambio

del número promedio de polímeros de masa k con respecto al tiempo t y además no se ha podido resolver usando los métodos tradicionales debido a su complejidad.[1]

2.2. Preliminares

Teorema de la convergencia dominada Si $f, g, f_1, f_2, ...,$ son funciones medibles, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con g μ-integrable y $f_n(x) \to f(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces f es μ-integrable y

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int f_n(x) d\mu = \int f(x) d\mu$$

Para una demostración ver [7].

Lema de Fatou: Sean $f_1, f_2, ..., f$funciones medibles

a) Si $f_n \geq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\int f \, d\mu > -\infty$,

$$\text{lím inf}_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

b) Si $f_n \; lef$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\int f \, d\mu < +\infty$,

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Para una demostración ver [7].

Teorema de la convergencia dominada generalizada: Sean f, g_n, f_n medibles para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f_n| \leq g_n$ con $g_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además

1) $f_n(x) \to f(x)$ salvo en un conjunto de medida cero.

2) $g_n(x) \to g(x)$ donde g es integrable salvo en un conjunto de medida cero.

Entonces

$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int f(x)dx$ y f es integrable.

Demostración. Como $f_n(x) \to f(x)$ y $g_n(x) \to g(x)$ salvo en un conjunto de medida cero, y $|f_n| \leq g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $g_n + f_n \geq 0$ y $g_n - f_n \geq 0$, por lo tanto aplicando el lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\int g\,d\mu + \int f\,d\mu &= \int (g+f)\,d\mu \\
&= \int \lim_{n\to\infty} (g_n + f_n)\,d\mu \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} (g_n + f_n)\,d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n + f_n)\,d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \\
&= \int g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \tag{1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int g\,d\mu - \int f\,d\mu &= \int (g-f)\,d\mu \\
&= \int \lim_{n\to\infty} (g_n - f_n)\,d\mu \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} (g_n - f_n)\,d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n)\,d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int -f_n\,d\mu \\
&= \int g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu
\end{aligned}$$

así,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \tag{2}$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

y como $\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

y así

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

□

Teorema (Propiedad del valor esperado condicional): Si Y es una variable aleatoria con $E(Y) < \infty$ y X es otra variable aleatoria entonces $E(Y) = E(E(Y|X))$.

Teorema del Valor Medio: Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto c en (a, b) tal que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$. Para un demostración ver [11].

Teorema de Stone-Weierstrass (espacios localmente compactos): Supongamos que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y A es un subálgebra de $C_0(X, \mathbb{R})$. Entonces A es denso en $C_0(X, \mathbb{R})$ (con la topología de convergencia uniforme) si y solo si A separa puntos y se anula casi en ninguna parte.(Se dice que un subálgebra A de $C_0(X, \mathbb{R})$ se desvanece en ninguna parte si no todos los elementos de A se desvanecen simultáneamente en un punto, es decir si para cada $x \in X$, existe f en A tal que $f(x) \neq 0$). Para una demostración ver [9].

Definición: Sean X, X_n, $n = 1, 2, ...$ variables aleatorias con valores en $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución hacia X, se denota por $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ si $P_{X_n} \Rightarrow P_X$, se escribe también $X_n \Rightarrow P$ si $P = P_X$.. Ver [7]

Teorema: Sean X, X_n, $n = 1, 2, 3, ...$, variables aleatorias con valores en $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ entonces $X_n \xrightarrow{d} X$ si y solo si $E(f \circ X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(f \circ X)$, para toda $f \in C^b(\mathbb{R}^k)$. Para una demostración ver [7]

Proceso de Bessel: Un proceso de Bessel debe su nombre a Friedrich Bessel y es un tipo de proceso estocástico.

0- y 2-dimensional procesos de Bessel están relacionados con el movimiento browniano a través de los teoremas Ray-Knight.

Definición: Sea $x, \delta \geq 0$, la única solución fuerte de

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}d\beta_s + \delta t$$

se llama el cuadrado del proceso de Bessel de dimensión iniciado en x. El índice del proceso es $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$. La notación es $Z \sim BESQ^\delta(x)$ o $Z \sim BESQ^{(\nu)}(x)$. La ley de probabilidad de este proceso en el conjunto de funciones continuas se denotará Q_x^δ o $Q_x^{(\nu)}$.

La distribución de ρ_t^2, si $\rho^2 \sim BESQ^\delta(x)$, entonces

$$E(e^{-\lambda\rho_t^2}) = Q_x^\delta(e^{-\lambda X_t}) = \phi(x, \delta)$$

Donde $X_t \sim BESQ^\delta(x)$.

En general:

$$\phi(x,\delta) = \frac{1}{(1+2\lambda t)^{\frac{\delta}{2}}} e^{\frac{-\lambda x}{(1+2\lambda t)}}$$

La función de distribución de probabilidad de ρ_t^2 se puede encontrar sumando las densidades de la función Gamma $(n+\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2t})$ que aparecen al invertir esta expresión término por término:

$$f_t^\delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n y^{\frac{\delta}{2}+n-1}}{n!\Gamma(n+\frac{\delta}{2})(2t)^{\frac{\delta}{2}+2n}}$$

Para más detalles ver [8].

2.3. Ecuación de Smoluchowski (Caso continuo)

La ecuación de Smoluchowski continua modela la tasa de cambio del número promedio de polímeros de masa x con respecto al tiempo t, este término esta dado por:

$$(SC) = \left\{ \frac{d}{dt} n(k,t) \;=\; \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^x \mathcal{K}(x-y,y) n(y,t) n(x-y,t) dy - n(x,t) \int_0^\infty \mathcal{K}(x,y) n(y,t) dy \right. \qquad (3)$$

Para esta ecuación consideramos los siguientes núcleos, los cuales llamaremos ***núcleos admisibles***:

$\mathcal{K}(x,y) = 1$

$\mathcal{K}(x,y) = xy$

$\mathcal{K}(x,y) = x+y$

Nótese que todos estos núcleos son simétricos y positivos.

Definición: Sea $T \in (0, \infty]$ y $(n(x, 0))_{x \geq 1}$ una sucesión de números reales positivos. Llamamos una ***solución fuerte*** de (SC) sobre $[0, T)$, a una sucesión de funciones continuas positivas tal que, para todo $t \in (0, T)$ y $x \geq 0$ la derivada de $n(k, t)$ con respecto a t existe,

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(x, y) n(y, t) dy < \infty \tag{4}$$

y (SC) se verifica.

Teorema 2.1: Sea K un núcleo admisible, y $n(x, t)$ es solución fuerte de (SC). Denotamos, para $i \in \mathbb{N}$

$$\phi_i(t) = \int_0^\infty x^i n(x, t) dx \tag{5}$$

Cuando esta expresión está definida, ϕ_0 es decreciente, ϕ_1 es constante y ϕ_2 es creciente.

Además,

$$\phi_0'(t) = -\tfrac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}(x, y) n(y, t) n(x, t) dy dx$$

Demostración. Como $\frac{d}{dt}\phi_i(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi_i(t+h) - \phi_i(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\int_0^\infty x^i n(x, t + h) dx - \int_0^\infty x^i n(x, t) dx)$.
Sea $f_k(x) = x^i \left(\frac{n(x, t+h_k) - n(x,t)}{h_k} \right)$ y $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde es una sucesión tal que $h_k \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\frac{d}{dt} n(x, t)$ existe entonces por el teorema del valor medio existe $\xi(x, h_k) \in (t, t + h_k)$ tal que

$$\tfrac{d}{dt} n(x, \xi(x, h_k)) = \tfrac{n(x, t+h_k) - n(x,t)}{h_k}$$

Así, $\left|f_k(x)\right| = \left|x^i\left(\frac{n(x,t+h_k)-n(x,t)}{h_k}\right)\right| = \left|\frac{x^i}{h_k}\frac{d}{dt}n(x,\xi(x,h_k))(t+h_k-t)\right| = \left|x^i\frac{d}{dt}n(x,\xi(x,h_k))\right| \leq \left|x^i\frac{d}{dt}n(x,T_o)\right|$, para algún $T_o \in [0,\infty)$.

Ahora, sea $g(x) = x^i\frac{d}{dt}n(x,T_o)$, con $T_o \in [0,\infty)$ veamos que $g \in L^1(0,\infty)$.
Para ello basta probar que $\int_0^\infty \frac{d}{dt}x^i n(x,t)dx < \infty$.
Es decir, debemos ver que

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}x^i n(x,t)dx = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2}\int_0^x x^i\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dy - n(x,t)\int_0^\infty x^i\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dy\Big) \tag{6}$$

es finita.

Nótese que por definición de solución fuerte se tiene (4) para todo $\mathcal{K}$ y

$$\int_0^x \mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dy < \infty \tag{7}$$

para todo $x \in (0,\infty)$ y todo núcleo admisible. Además por hipótesis, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\phi_i(t) = \int_0^\infty x^i n(x,t)dx < \infty$; por lo tanto para los núcleos admisibles (6) es finita.

Entonces como $|f_k(x)| \leq g(x)$ con $g \in L^1(0,\infty)$y como
$f_k(x) \longrightarrow x^i\frac{d}{dt}n(x,t) = f(x)$, cuando $k \longrightarrow \infty$, entonces por el teorema de la convergencia dominada f es integrable y
$\int_0^\infty x^i\frac{d}{dt}n(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^\infty x^i n(x,t)dx$.

Para $i = 0$ veamos que $\phi_0'(t) < 0$ para todo $t \geq 0$:

$\int_0^\infty \frac{d}{dt}n(x,t)dx = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2}\int_0^x \mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dy - n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dy\Big)dx$
la cual es finita, entonces consideramos
$\int_0^m \frac{d}{dt}n(x,t)dx = \int_0^m \frac{1}{2}\int_0^x \mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx - \int_0^m n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx.$

Haciendo $u = x - y$ y $v = y$ en la primera integral de la derecha:

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv - \int_0^m n(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu - \int_0^m n(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

Si reemplazamos $u = x$ y $v = y$ entonces:

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-x}\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx - \int_0^m\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx$

Si $m \to \infty$, entonces:

$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx - \int_0^\infty\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx$

$=$

$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx$

Como $\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)$ es positivo, la anterior integral es menor que cero y por lo tanto para $i = 0$, $\phi_0'(t) < 0$ para todo $t \geq 0$, se tiene que $\phi_0(t)$ es decreciente.

Para $i = 1$ veamos que $\phi_1'(t) = 0$ para todo $t \geq 0$:

$\int_0^\infty \frac{d}{dt}xn(x,t)dx =$

$\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\int_0^x x\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dy - xn(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dy\right)dx$

la cual es finita, por lo tanto consideramos

$\int_0^m \frac{d}{dt}xn(x,t)dx =$

$\int_0^m\frac{1}{2}\int_0^x x\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx - \int_0^m xn(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx.$

Haciendo $u = x - y$ y $v = y$ en la primera integral de la derecha:

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}(u+v)\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv - \int_0^m xn(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}u\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu + \frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-v}v\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv -$

$\int_0^m xn(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\int_0^m\int_0^{m-u} u\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu - \int_0^m xn(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx.$

Si reemplazamos $u=x$ y $v=y$ entonces:

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-x} x\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx - \int_0^m\int_0^\infty x\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx$

Si $m\to\infty$, entonces:

$\int_0^\infty\int_0^\infty x\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx - \int_0^\infty\int_0^\infty x\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx = 0$

Por lo tanto, como $\phi_1'(t) = 0$ para todo $t\geq 0$, se tiene que $\phi_1(t)$ es constante.

Para $i=2$ veamos que $\phi_2'(t) > 0$ para todo $t\geq 0$:

$\int_0^\infty \frac{d}{dt}x^2 n(x,t)dx =$

$\int_0^\infty \Big(\frac{1}{2}\int_0^x x^2\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dy - x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dy\Big)dx$

la cual es finita, entonces consideramos

$\int_0^m \frac{d}{dt}x^2 n(x,t)dx =$

$\int_0^m \frac{1}{2}\int_0^x x^2\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx - \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx.$

Haciendo $u = x-y$ y $v=y$ en la primera integral de la derecha:

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}(u+v)^2\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv - \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u}(u^2+2uv+v^2)\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv - \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u} u^2\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv + \frac{1}{2}\int_0^m\int_0^{m-u} 2uv\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu +$

$\frac{1}{2}\int_0^m \int_0^{m-v} v^2\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu - \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\int_0^m \int_0^{m-u} u^2\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dudv + \int_0^m \int_0^{m-u} uv\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu$

$- \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

Si reemplazamos u por x y a v por y entonces:

$\int_0^m \int_0^{m-x} x^2\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx + \int_0^m \int_0^{m-x} xy\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx$

$- \int_0^m x^2 n(x,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

Si $m \to \infty$, entonces la anterior integral es igual a:

$\int_0^\infty \int_0^\infty xy\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx$

Como $xy\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)$ es no negativo, la integral anterior es mayor que cero y por lo tanto para $i = 2$, $\phi_2'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. $\square$

Como $\phi_1(t)$ es constante para todo $t \geq 0$, podemos hacer $\phi_1(0) = \phi_1(t) = 1$ y considerar $p(x,t) = xn(x,t)$, $x \geq 0$, $t > 0$. Asï, $(p(x,t))_x$ es la densidad de probabilidad de una variable aleatoria positiva.

Teorema 2.2: Sea X_t una variable aleatoria positiva de densidad $p(x,t) = xn(x,t)$ y $\tilde{X}_t$ una variable aleatoria independiente de X_t y con la misma distribución. Entonces $n(x,t)$ es solución de (SC), si y solo si

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t)) = E\Big(\frac{f(X_t+\tilde{X}_t)-f(X_t)}{X_t}\mathcal{K}(X_t,\tilde{X}_t)\Big)$$

Para todo función continua f.

Demostración. Se demostrará primero la proposición para f continua con soporte compacto.

$\frac{d}{dt}E(f(X_t))$

$=$

$\lim_{h\to 0}\frac{E[f(X_{t+h})]-E[f(X_t)]}{h}$

$=$

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[\int_0^\infty f(x)p(x,t+h)dx-\int_0^\infty f(x)p(x,t)dx\Big]$

$=$

$\lim_{h\to 0}\int_0^\infty f(x)\Big(\frac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}\Big)dx$

Sea $g_n(x)=f(x)\Big(\frac{p(x,t+h_n)-p(x,t)}{h_n}\Big)=xf(x)\Big(\frac{n(x,t+h_n)-n(x,t)}{h_n}\Big)$ donde $h_n\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Por el teorema del valor medio existe ξ_n entre t y $t+h_n$ tal que $g_n(x)=xf(x)\frac{d}{dt}n(x,\xi_n)\leq xf(x)\frac{d}{dt}n(x,T_o)$, para algún $T_o\in[0,c]$.

Como $g(x)=xf(x)\frac{d}{dt}n(x,T_o)$ es integrable para todo $x\in[a,b]$, y $|f(x)|\leq g(x)$, por el teorema de la convergencia dominada tenemos:

$\frac{d}{dt}E(f(X_t))$

$=$

$\int_0^\infty f(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx$

$=$

$\int_0^\infty f(x)\frac{d}{dt}xn(x,t)dx$

$=$

$\int_0^\infty f(x)\frac{x}{2}\int_0^x\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx-\int_0^\infty f(x)xn(x,t)\int_0^\infty\mathcal{K}(x,y)n(y,t)dydx$

$=$

$\int_0^\infty\int_0^x f(x)\frac{x}{2}\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx-\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)x\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx$

Haciendo $u=x-y$ y $v=y$ en la primera integral doble entonces:

$\int_0^\infty\int_0^x f(x)\frac{x}{2}\mathcal{K}(x-y,y)n(y,t)n(x-y,t)dydx$

$=$

$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(u+v)f(u+v)}{2}\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu$

$=$

$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{uf(u+v)}{2}\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu+\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{vf(u+v)}{2}\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu$

$=$

$\int_0^\infty \int_0^\infty uf(u+v)\mathcal{K}(u,v)n(v,t)n(u,t)dvdu$

Luego, si $x = u$ y $y = v$:

$\int_0^\infty \int_0^\infty xf(x+y)\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx-\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)x\mathcal{K}(x,y)n(x,t)n(y,t)dydx$

$=$

$\int_0^\infty \int_0^\infty x(f(x+y)-f(x))\mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx$

$=$

$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\right)\mathcal{K}(x,y)p(x,t)p(y,t)dydx$

Teniendo en cuenta que $p(x,t) = P(X_t = x)$ y $p(y,t) = P(\tilde{X}_t = y)$, por la independencia de las variables aleatorias se tiene que $P(X_t = x, \tilde{X}_t = y) = P(X_t = x)P(\tilde{X}_t = y) = p(x,t)p(y,t)$, es decir:

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t)) = E\Big(\frac{f(X_t+\tilde{X}_t)-f(X_t)}{X_t}\mathcal{K}(X_t,\tilde{X}_t)\Big)$$

Ahora se hará la prueba para el caso en el que f es una función continua.

Sea $C_c^0([0,\infty),\mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas en $[0,\infty)$ con soporte compacto. Sabemos que $C_c^0([0,\infty),\mathbb{R}) \subseteq L^1([0,\infty),\mathcal{B},P)$ es denso con la topología del espacio métrico generado por la norma de $L^1([0,\infty),\mathcal{B},P)$. Entonces para $g \in L^1([0,\infty),\mathcal{B},P)$, existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_c^0([0,\infty),\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - g||_{L^1} = 0$.

Además dado que $f_n \in C_c^0([0,\infty),\mathbb{R})$, existe $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty f_n(x)p(x,t)dx = \int_a^b f_n(x)p(x,t)dx < \infty,\text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

Entonces teniendo en cuenta lo anterior, sea $g(x) = f(x)I_{[0,m]}(x)$, es claro que g es una función integrable, entonces existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas con soporte compacto tal que $\lim_{n\to\infty} ||g_n - g||_{L^1} = 0$, en el espacio $L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \mu)$, donde μ es la medida definida por:

$$\mu(A) = \iint\limits_A \frac{\mathcal{K}(x,y)}{y} p(x,t)p(y,t)\, dy\, dx$$

y como $g_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^1} g$, existe una subsucesión $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $g_{n_k} \to g$ cuando $k \to \infty$ c.s. Entonces:

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{d}{dt}E(g_{n_k}(X_t)) - \tfrac{d}{dt}E(g(X_t))\right| \\
&= \\
&\left|\tfrac{d}{dt}E(g_{n_k}(X_t)) - g(X_t))\right| \\
&= \\
&\left|\lim_{h\to 0} E\left[\tfrac{g_{n_k}(X_{t+h}) - g_{n_k}(X_t) - g(X_{t+h}) + g(X_t)}{h}\right]\right| \\
&= \\
&\left|\lim_{h\to 0}\left[\textstyle\int_0^\infty g_{n_k}(x)\tfrac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx - \int_0^\infty g(x)\tfrac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx\right]\right| \\
&= \\
&\left|\textstyle\int_0^\infty g_{n_k}(x)\tfrac{d}{dt}p(x,t)dx - \lim_{h\to 0}\int_0^\infty g(x)\tfrac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx\right| \\
&= \\
&\left|\textstyle\int_0^\infty g_{n_k}(x)\tfrac{d}{dt}p(x,t)dx - \lim_{h\to 0}\int_0^\infty f(x)I_{[0,m]}(x)\tfrac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx\right| \\
&= \\
&\left|\textstyle\int_0^\infty g_{n_k}(x)\tfrac{d}{dt}p(x,t)dx - \lim_{h\to 0}\int_0^m f(x)\tfrac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx\right|
\end{aligned}$$

Veamos que $f(x)\frac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}$ es integrable. Definimos $\phi_k(x) = f(x)\frac{p(x,t+h_k)-p(x,t)}{h_k}$, entonces por el teorema del valor medio existe $\xi_k(x, h_k)$ tal que $\frac{d}{dt}n(x, \xi(x, h_k)) = \frac{n(x,t+h_k)-n(x,t)}{h_k}$, y como f es continua sobre un conjunto compacto existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, entonces:

$$\begin{aligned}
|\phi_k(x)| &= |f(x)\frac{p(x,t+h_k)-p(x,t)}{h_k}| \\
&\leq |M\frac{d}{dt}p(x,\xi_k(x,h_k))| \\
&= |Mx\frac{d}{dt}n(x,\xi_k(x,h_k))| \\
&\leq |Mx\frac{d}{dt}n(x,T_o)|
\end{aligned}$$

y $Mx\frac{d}{dt}n(x,T_o)$ es integrable para todo T_o, luego, por el teorema de la convergencia dominada se tiene que:

$\left| \int_0^\infty g_{n_k}(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx - \lim_{h\to 0}\int_0^m f(x)\frac{p(x,t+h)-p(x,t)}{h}dx \right|$

$=$

$\left| \int_0^\infty g_{n_k}(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx - \int_0^m f(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx \right|$

$=$

$\left| \int_0^\infty (g_{n_k}(x) - g(x))\frac{d}{dt}p(x,t)dx \right|$

Como $|g_{n_k}(x)| + |g(x)| \to 2g(x)$, por el teorema de la convergencia dominada generalizada

$$\frac{d}{dt}E(g_{n_k}(X_t)) \to \frac{d}{dt}E(g(X_t)) \text{ cuando } n \to \infty.$$

Ahora, como

$\frac{d}{dt}E(f(X_t)I_{[0,m]}(X_t)) \to \frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x)I_{[0,m]}(x)dx,$

$E\Big(\frac{(fI_{[0,m]})(X_t+\tilde{X}_t)-(fI_{[0,m]})(X_t)}{X_t}\mathcal{K}(X_t,\tilde{X}_t)\Big) \to$
$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x+y)I_{[0,m]}(x+y)-f(x)I_{[0,m]}(x)}{y}\mathcal{K}(x,y)p(x.t)p(y,t)dydx$

y $fI_{[0,m]} \to f$ de forma creciente, por el teorema de la convergencia monótona se tiene que:

$\frac{d}{dt}\int_0^{\infty} f(x)p(x,t)dx = \int_0^{\infty} f(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx = \frac{d}{dt}E(f(X_t))$, luego

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t)) = E\Big(\frac{f(X_t+\tilde{X}_t)-f(X_t)}{X_t}\mathcal{K}(X_t,\tilde{X}_t)\Big)$$

Como se queria. □

2.3.1. Solución de la ecuación de Smoluchowski caso continuo con núcleo constante

Para la ecuación de Smoluchowski caso continuo con núcleo constante consideramos
$\mathcal{K}(x,y) = 1$, por lo tanto la ecuación está dada por:

$$(SC)^1 = \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}n(k,t) & = & \frac{1}{2}\int_0^x n(y,t)n(x-y,t) - n(x,t)\int_0^{\infty} n(y,t)dy \\ n(x,0) & = & n_0(x) \end{array} \right.$$

Como $\phi_0(t) = \int_0^{\infty} n(x,t)dx$ y $\phi_0'(t) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} n(y,t)n(x,t)dydx$ para $\mathcal{K}(x,y) = 1$ entonces:

$$\frac{d\phi_0(t)}{dt} = -\frac{\phi_0^2(t)}{2}$$

la cual es una ecuación que se puede resolver por el método de variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_0(t)}{dt} = -\frac{\phi_0^2(t)}{2} &\Rightarrow \frac{d\phi_0(t)}{\phi_0^2(t)} = -\frac{dt}{2}\\ &\Rightarrow \int \frac{d\phi_0(t)}{\phi_0^2(t)} = -\frac{1}{2}\int dt\\ &\Rightarrow -\frac{1}{\phi_0(t)} = -\frac{t}{2} + C\\ &\Rightarrow \phi_0(t) = \frac{2}{t+\alpha}\end{aligned}$$

Donde $\alpha > 0$ está dada por $\alpha = \frac{2}{\phi_0(0)}$.

Denotamos por $p(x,t) = \frac{t+\alpha}{2} n(x,t)$ tal que $(p(x,t))_{x\geq 0}$ es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria positiva.

Teorema 2.1.1: Sea X_t denota una variable con densidad de probabilidad $p(x,t) = \frac{t+\alpha}{2} n(x,t)$ y $\tilde{X}_t$ un variable aleatoria independiente de X_t, con la misma distribución dada por $p(x,t)$. Entonces, $n(x,t)$ es solución de $(SC)^1$ si y solo si, para cualquier función continua f se tiene:

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t)) = \frac{1}{t+\alpha}\Big(E(f(X_t+\tilde{X}_t) - E(f(X_t))\Big) \tag{8}$$

Demostración. Veamos que (8) se tiene:

$\frac{d}{dt}E(f(X_t))$

$=$

$\int_0^\infty f(x)\frac{d}{dt}p(x,t)dx$

$=$

$\int_0^\infty f(x)\frac{d}{dt}(\frac{t+\alpha}{2}n(x,t))dx$

$=$

$\int_0^\infty f(x)(\frac{1}{2}n(x,t)+\frac{t+\alpha}{2}\frac{d}{dt}n(x,t))dx$

$=$

$\int_0^\infty \frac{f(x)}{2}n(x,t)dx+\int_0^\infty\int_0^x f(x)\frac{t+\alpha}{4}n(y,t)n(x-y,t)dydx-\frac{t+\alpha}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x)n(x,t)n(y,t)dydx$

Haciendo $u=x-y$ y $v=y$ en la primera integral doble entonces:

$\int_0^\infty \frac{f(x)}{2}n(x,t)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty f(u+v)\frac{t+\alpha}{4}n(v,t)n(u,t)dvdu-\int_0^\infty f(x)n(x,t)\int_0^\infty\frac{t+\alpha}{2}n(y,t)dydx$

$=$

$\int_0^\infty \frac{f(x)}{2}n(x,t)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty f(u+v)\frac{t+\alpha}{4}n(v,t)n(u,t)dvdu-\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty\frac{t+\alpha}{2}n(y,t)dydx$

Haciendo $u=x$, $v=y$ y teniendo en cuenta que $\int_0^\infty\frac{t+\alpha}{2}n(y,t)dy=1$ tenemos que $\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)n(x,t)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\frac{t+\alpha}{4}n(y,t)n(x,t)dydx-$

$\int_0^\infty f(x)n(x,t)dx$

$=$

$-\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)n(x,t)dx+\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\frac{t+\alpha}{4}n(y,t)n(x,t)dydx$

$=$

$\frac{(t+\alpha)^2}{(2)(2)(t+\alpha)}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)n(y,t)n(x,t)dydx-\frac{(t+\alpha)}{2(t+\alpha)}\int_0^\infty f(x)n(x,t)dx$

$=$

$\frac{1}{t+\alpha}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\frac{(t+\alpha)}{2}n(x,t)\frac{(t+\alpha)}{2}n(y,t)dydx-\frac{1}{t+\alpha}\int_0^\infty f(x)\frac{(t+\alpha)}{2}n(x,t)dx$

$=$

$\frac{1}{t+\alpha}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)p(x,t)p(y,t)dydx-\int_0^\infty f(x)p(x,t)dx\Big)$

Teniendo en cuenta que $p(x,t)=P(X_t=x)$ y $p(y,t)=P(\tilde{X}_t=y)$, por la independencia de las variables aleatorias se tiene que $P(X_t=x,\tilde{X}_t=y)=P(X_t=x)P(\tilde{X}_t=y)=p(x,t)p(y,t)$, luego

$$\frac{d}{dt}E(f(X_t))=\frac{1}{t+\alpha}\Big(E(f(X_t+\tilde{X}_t)-E(f(X_t))\Big)$$

$\square$

Teorema 2.1.2: Sea T_t una variable aleatoria con distribución geométrica y parámetro $\frac{t}{t+\alpha}$, es decir,para todo $k \geq 1$

$$P(T_t = k) = \tfrac{\alpha}{t+\alpha}(\tfrac{\alpha}{t+\alpha})^{k-1}$$

Sea $(Y_i)_{i\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con la misma distribución de X_o, que tiene densidad de probabilidad $p(x,0)$, y es independiente de T_t. Definimos

$$X_t = \textstyle\sum_{i=1}^{T_t} Y_i$$

y denotamos por $p(x,t)$ la distribución de la variable aleatoria X_t. Entonces

$$n(x,t) = \tfrac{2}{t+\alpha} p(x,t),$$

es la solución de la ecuación de coagulación de Smoluchowski con núcleo constante igual a 1.

Demostración. Sea $f_\lambda = e^{-\lambda x}$,definimos $\psi(\lambda,t) = E(e^{-\lambda X_t})$, la transformada de Laplace de X_t y $g(\lambda) = \psi(\lambda,0)$, la transformada de la condición inicial.

Usando la igualdad en (8) para $f_\lambda(X_t) = e^{-\lambda X_t}$ se tiene que

$\frac{d}{dt}E(e^{-\lambda X_t}) = \frac{1}{t+\alpha}\Big(E(e^{-\lambda(X_t+\tilde{X}_t)} - E(e^{-\lambda X_t})\Big)$

$\equiv$

$\frac{d}{dt}E(e^{-\lambda X_t}) = \frac{1}{t+\alpha}\Big(E(e^{-\lambda X_t}e^{-\lambda\tilde{X}_t}) - E(e^{-\lambda X_t})\Big)$

Teniendo en cuenta que X_t y $\tilde{X}_t$ son variables independientes e identicamente distribuidas:

$\frac{d}{dt}E(e^{-\lambda X_t}) = \frac{1}{t+\alpha}\Big(E(e^{-\lambda X_t})E(e^{-\lambda \tilde{X}_t}) - E(e^{-\lambda X_t})\Big)$

Por lo tanto ψ cumple la ecuación diferencial con valor inicial $\psi(\lambda, 0) = g(\lambda)$:

$$\frac{d}{dt}\psi(\lambda,t) = \frac{1}{t+\alpha}(\psi^2(\lambda,t) - \psi(\lambda,t)). \tag{9}$$

Ahora, como $\frac{\partial}{\partial t}[(t+\alpha)\psi(\lambda,t)] = \psi(\lambda,t) + (t+\alpha)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\lambda,t)$, se tiene que $\frac{\partial}{\partial t}\psi(\lambda,t) = \frac{1}{t+\alpha}(\frac{\partial}{\partial t}[(t+\alpha)\psi(\lambda,t)] - \psi(\lambda,t))$ entonces reemplazando en (9):

$$\tfrac{\partial}{\partial t}[(t+\alpha)\psi(\lambda,t)] = \psi^2(\lambda,t).$$

Haciendo $y(\lambda,t) = (t+\alpha)\psi(\lambda,t)$ se obtiene la ecuación diferencial $\frac{\partial}{\partial t}y(\lambda,t) = \frac{y^2(\lambda,t)}{(t+\alpha)^2}$, la cual se soluciona por el método de variables separables:

$$\begin{aligned}
\frac{dy(\lambda,t)}{y^2(\lambda,t)} = \frac{dt}{(t+\alpha)^2} &\Rightarrow \int \frac{dy(\lambda,t)}{y^2(\lambda,t)} = \int \frac{dt}{(t+\alpha)^2} \\
&\Rightarrow \frac{-1}{y(\lambda,t)} = \frac{-1}{(t+\alpha)} + c(\lambda) \\
&\Rightarrow \frac{1}{(t+\alpha)\psi(\lambda,t)} = \frac{1}{(t+\alpha)} + d(\lambda) \\
&\Rightarrow \psi(\lambda,t) = \frac{1}{(t+\alpha)d(\lambda)+1}
\end{aligned}$$

De lo cual $\psi(\lambda,0) = g(\lambda) = \frac{1}{\alpha d(\lambda)+1}$, y $d(\lambda) = \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{g(\lambda)} - 1)$.

Como $0 < g(\lambda) < 1$ ya que $0 < E(e^{-\lambda X_0}) < 1$ entonces $0 < d(\lambda)$ se puede reemplazar en la expresión anterior para $\psi(\lambda, t)$:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda,t) &= \frac{1}{\frac{(t+\alpha)}{\alpha}(\frac{1}{g(\lambda)}-1)+1} \\
&= \frac{\alpha g(\lambda)}{(t+\alpha)(1-g(\lambda)(1-\frac{\alpha}{t+\alpha}))} \\
&= \frac{\alpha g(\lambda)}{(t+\alpha)(1-g(\lambda)\frac{t}{t+\alpha})}
\end{aligned} \tag{10}$$

Entonces:

$$\psi(\lambda,t) = \frac{\alpha g(\lambda)}{t+\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{t+\alpha}g(\lambda))^n$$

$$= \frac{\alpha g(\lambda)}{t+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{t}{t+\alpha}g(\lambda))^{k-1} \tag{11}$$

$$= \frac{\alpha g(\lambda)}{t+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{t}{t+\alpha})^{k-1}(g(\lambda))^{k-1}$$

.

Por otro lado, $\psi(\lambda,t) = E(e^{-\lambda X_t})$; como $X_t = \sum_{i=1}^{T_t} Y_i$ entonces

$$\psi(\lambda,t) = E(e^{-\lambda X_t}) = E(e^{-\lambda\sum_{i=1}^{T_t} Y_i}) = E(e^{-\lambda(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{T_t})})$$

y por la propiedad del valor esperado condicional, y usando el hecho de que las Y_i son variables indenticamente independientes con la misma distribución de X_o para $i = 1, 2, ..., T_t$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
E(e^{-\lambda X_t}) &= E(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{T_t} Y_i}) \\
&= E(E(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{T_t} Y_i} | T_t)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{T_t} Y_i} | T_t = k) P(T_k = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\lambda \sum_{i=1}^{k} Y_i}) P(T_k = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\lambda Y_1} e^{-\lambda Y_2} \cdots e^{-\lambda Y_k}) P(T_k = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\lambda Y_1}) E(e^{-\lambda Y_2}) \cdots E(e^{-\lambda Y_k}) P(T_k = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E(e^{-\lambda X_o})^k P(T_k = k)
\end{aligned}$$

Como la transformada de Laplace es única, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} P(e^{-\lambda X_0})^k P(T_k = k) = \frac{\alpha g(\lambda)}{t+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{t}{t+\alpha})^{k-1} (g(\lambda))^{k-1}$, luego $g(\lambda) = E(e^{-\lambda X_0})$, $P(T_t = k) = \frac{\alpha}{t+\alpha} (\frac{t}{t+\alpha})^{k-1}$.

Ahora sea $A = \{h(x) : x \in \mathbb{R}\}$ donde $h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (e^{\lambda_i x})^i = \sum_{i=1}^{n} a_i (e^{\lambda_i x})$, como A es un álgebra contenida en $C_0(X, \mathbb{R})$ que separa puntos.

En efecto, si $\{x, y\} \subseteq \mathbb{R}$ con $x \neq y$ y $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (e^{-\lambda_i x}) \neq 0$, como la función exponencial es inyectiva se tiene que $e^{-\lambda_i x} \neq e^{-\lambda_i y}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces si $\sum_{i=1}^{n} a_i (e^{-\lambda_i x}) - \sum_{i=1}^{n} a_i (e^{-\lambda_i y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i (e^{-\lambda_i x} - e^{-\lambda_i y}) = 0$, se tendría que $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ es decir que $f(x) = 0$ lo cual es una contradicción, luego $f(x) \neq f(y)$ es decir que A separa puntos. Además, como $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) \neq 0$ para toda $f \in A$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

Por el teorema de Stone-Weirstrass para espacios localmente compactos, A es denso en $C_0(X, \mathbb{R})$ y como para toda función en A se cumple la ecuación (8), teniendo en cuenta que $C_c \subseteq C_0 \subseteq L^1$ donde C_c es el espacio de funciones continuas con soporte compacto y como $\bar{C}_c = L^1$ entonces $\bar{C}_0^{\|\|\|\|_\infty} = L^1$, por lo tanto (8) se tiene para toda función en L^1.

Así, por el teorema 2.1.1, $n(x,t) = \frac{2}{t+\alpha} p(x,t)$ es solución de SC^1 con $p(x,t) = n(x,t)(\frac{t+\alpha}{2})$. □

Teorema 2.1.3: Considerando las notaciones del teorema 2.1.2. Para cualquier variable aleatoria X_0 con densidad de probabilidad $p(x,0) = \frac{\alpha}{2} n(x,0)$, tenemos, independientemente de la condición inicial y para todo t fijo

$$aX_{\frac{t}{a}} \xrightarrow[a \longrightarrow 0]{(d)} R_{\frac{t}{4}}$$

Donde $R_{\frac{t}{4}}$ es el cuadrado de un proceso de Bessel de dimensión dos empezando en el origen.

Demostración. Probaremos la convergencia usando la transforma de Laplace.

Usando la expansión en serie de Maclaurin de primer orden para $g(\lambda)$.

$g(0) + g'(0)\lambda + o(\lambda)$

$=$

$1 - E(X_0)\lambda + o(\lambda)$

Por (10) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\psi(\lambda a, \frac{t}{a}) &= \frac{\alpha g(\lambda a)}{(\frac{t}{a}+\alpha)(1-g(\lambda a)\frac{\frac{t}{a}}{\frac{t}{a}+\alpha})} \\
&= \frac{\alpha g(\lambda a)}{(\frac{t}{a}+\alpha)(1-g(\lambda a)\frac{t}{t+\alpha a})} \\
&= \frac{\alpha g(\lambda a)}{(\frac{t}{a}+\alpha)-g(\lambda a)(\frac{t+\alpha}{a})(\frac{t}{t+\alpha a})} \\
&= \frac{\alpha g(\lambda a)}{\frac{t}{a}+\alpha-g(\lambda a)\frac{t}{a}} \\
&= \frac{\alpha(1-E(X_0)a\lambda+o(a\lambda))}{\frac{t}{a}+\alpha-(1-E(X_0)a\lambda+o(a\lambda))\frac{t}{a}} \\
&= \frac{\alpha(1-E(X_0)a\lambda+o(a\lambda))}{\alpha-(1-E(X_0)t\lambda+o(a\lambda)\frac{t}{a}}
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
E(X_0) &= \int_0^\infty xP(X_0=x)dx \\
&= \int_0^\infty x\frac{\alpha}{2}n(x,0)dx \\
&= \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty xn(x,0)dx \\
&= \frac{\alpha}{2}\phi_1(0) = \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Entonces $\lim_{a\to 0}\psi(\lambda a, \frac{t}{a}) = \frac{1}{1+\frac{t}{2}\lambda}$. $\square$

Veamos que $R_{\frac{t}{4}}$ soluciona la ecuación de Smoluchowski con núcleo constante.

En efecto, como $R_{\frac{t}{4}}$ corresponde a $\psi(\lambda,t)=\frac{1}{1+\frac{t}{2}\lambda}$ y además

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t+\alpha}\big(\psi^2(\lambda,t)-\psi(\lambda,t)\big) &= \frac{1}{t+\alpha}\Big(\frac{4}{(2+t\lambda)^2}-\frac{2}{2+t\lambda}\Big)\\
&= \frac{1}{t+\alpha}\frac{2t\lambda}{(2+t\lambda)^2}\\
&= \frac{-2\lambda}{(2+t\lambda)^2}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\psi(\lambda,t)
\end{aligned}$$

La igualdad se tiene cuando $\alpha=0$ y se tiene la condición

$$\psi(\lambda,0)=g(\lambda)=1$$

Por otro lado $n(x,0)=\delta_0$ y (9) se cumple para $\psi(\lambda,t)=\frac{1}{1+\frac{t}{2}\lambda}$, luego si X_t se distribuye con la distribución del cuadrado de un proceso de Bessel de dimensión dos empezando en el origen entonces satisface (8), y por lo tanto $n(x,t)$ con $p(x,t)=\frac{t+\alpha}{2}n(x,t)$ es solución de la ecuación de Smoluchowski con núcleo igual a uno.

Ahora, usando algunas propiedades del cuadrado de un proceso de Bessel de dimensión dos empezando en el origen $\big[3\big]$, se tiene que su función de probabilidad es

$$f^2_{\frac{t}{4}}(0,y)=\frac{e^{\frac{-y}{2t}}}{2t}=p(y,t)$$

Como $p(x,t)=\frac{t}{2}n(x,t)$ entonces

$$n(x,t)=\tfrac{4}{t^2}e^{\frac{-2x}{t}}$$

y así, obtenemos una solución explícita para la ecuación de Smoluchowski con núcleo igual a uno.

En cuanto a la unicidad de la solución, ese resultado puede obtenerse para los núcleos que satisface:

$$\mathcal{K}(x,y) \leq C(1+x+y)$$

Para alguna constante positiva C,como se puede ver con más detalle en [5].

2.4. Ecuación de Smoluchowski caso continuo con núcleo aditivo $(SC+)$ y núcleo multiplicativo $(SC*)$

En esta sección mostraremos algunos resultados importantes con relación a la existencia de la solución de la Ecuación de Smoluchowski en el caso continuo con núcleo aditivo $(SC+)$ y núcleo multiplicativo $(SC*)$. Probaremos que sus soluciones están conectadas.

Supondremos

$$\phi_1(0) = \textstyle\int_0^\infty xn(x,0)dx = 1$$

y denotaremos por $n^+(x,t)$ (respectivamente $n^*(x,t)$), una solución para la ecuación de coagulación de Smoluchowski con núcleo aditivo (respectivamente núcleo multiplicativo). Para el núcleo aditivo $\mathcal{K}(x,y) = x+y$

teniendo en cuenta los resultados del Teorema 2.1 se tiene que

$$
\begin{aligned}
\phi_0'(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}(x,y)n(y,t)n(x,t)dydx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y)n(y,t)n(x,t)dydx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty xn(y,t)n(x,t)dydx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty yn(y,t)n(x,t)dydx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty yn(y,t)n(x,t)dydx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty n(x,t)\Big[\int_0^\infty yn(y,t)dy\Big]dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty n(x,t)\phi_1(t)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\infty n(x,t)dx \\
&= -\phi_0(t)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi_0(t)}{dt} = -\phi_0(t) &\Rightarrow \frac{d\phi_0(t)}{\phi_0(t)} = -dt \\
&\Rightarrow \int \frac{d\phi_0(t)}{\phi_0(t)} = -\int dt \\
&\Rightarrow ln\,\phi_0(t) = -t + c \\
&\Rightarrow \phi_0(t) = \beta e^{-t}
\end{aligned}
$$

Donde $\beta = \phi_0(0) = \int_0^\infty n^+(x,0)dx$.

La ecuación de Smoluchowski para el caso continuo con núcleo aditivo

$(SC+)$ es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n^+}{\partial t}(x,t) &= \frac{x}{2}\int_0^x n^+(y,t)n^+(x-y,t)dy - xn^+(x,t)\int_0^\infty n^+(y,t)dy - n^+(x,t)\\ &= \frac{x}{2}\int_0^x n^+(y,t)n^+(x-y,t)dy - xn^+(x,t)\beta e^{-t} - n^+(x,t)\end{aligned}$$

con condición inicial $n^+(x,0) = n_0^+(x)$.

La ecuación de Smoluchowski para el caso continuo con núcleo multiplicativo $(SC*)$ es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) &= \frac{x}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,t)n^*(x-y,t)dy - xn^*(x,t)\int_0^\infty yn^*(y,t)dy\\ &= \frac{x}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,t)n^*(x-y,t)dy - xn^*(x,t)\end{aligned}$$

con condición inicial $n^*(x,0) = n_0^*(x)$.

Teorema 3.1: Sea $n^+(x,t)$ una solución de la ecuación de coagulación de Smoluchowski con núcleo aditivo $(SC+)$, y condición inicial $n_0^+(x)$. Entonces $n^*(x,t)$ es una solución para la ecuación con núcleo multiplicativo $(SC*)$, donde

$$n^*(x,t) = \frac{1}{T-t}\frac{1}{x}n^+\Big(x, -log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big), \forall t < T. \tag{12}$$

y $T = \int_0^\infty n_0^+(y)dy$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xn^*(x,0)dx &= \int_0^\infty x\Big[\frac{1}{T}\frac{1}{x}n^+(x,0)\Big]dx\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{T}n^+(x,0)dx\\ &= \frac{1}{T}\int_0^\infty n^+(x,0)dx\\ &= 1\end{aligned}$$

para todo $x \neq 0$.

Veamos que n^* satisface la ecuación de Smoluchowski $(SC*)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}n^*(x,t) &= \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big) + \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\\ &= \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\\ &+ \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}\Big[\frac{x}{2}\int_0^x n^+\Big(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)n^+\Big(x-y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)dy\\ &- xn^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\int_0^\infty n^+(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big))dy - n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}\int_0^x xn^+\Big(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)n^+\Big(x-y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)dy\\ &- \frac{1}{(T-t)^2}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\int_0^\infty n^+(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)dy\\ &- \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\end{aligned}$$

Ahora, como $\int_0^\infty n^+(y,t)dy = \phi_0(t) = \beta e^{-t} = \Big(\int_0^\infty n^+(y,0)dy\Big)e^{-t} = Te^{-t}$
y $n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big) = (T-t)xn^*(x,t)$.

Entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}n^*(x,t) &= \frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}\int_0^x xn^+\Big(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)n^+\Big(x-y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)dy\\
&-\frac{1}{(T-t)^2}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\int_0^\infty n^+(y,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)dy\\
&-\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}n^+\Big(x,-log\big(1-\frac{t}{T}\big)\Big)\\
&=\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}(T-t)xn^*(x,t)\\
&+\frac{1}{2}\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}\int_0^x x(T-t)yn^*(y,t)(T-t)(x-y)n^*(x-y,t)dy\\
&-\frac{1}{(T-t)^2}(T-t)xn^*(x,t)\int_0^\infty(T-t)yn^*(y,t)dy\\
&-\frac{1}{(T-t)^2}\frac{1}{x}(T-t)xn^*(x,t)\\
&=\frac{1}{T-t}n^*(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,t)n^*(x-y,t)dy-xn^*(x,t)\int_0^\infty yn^*(y,t)dy\\
&-\frac{1}{T-t}n^*(x,t)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,t)n^*(x-y,t)dy-xn^*(x,t)
\end{aligned}
$$

Lo cual prueba el teorema. $\square$

Nótese que en el Teorema 3.1 se debe tener un tiempo T finito.

Teorema 3.2: Si $n^*(x,t)$ es una solución de la ecuación de coagulación de Smoluchowski con núcleo multiplicativo $(SC*)$ y condición inicial $n_0^*(x)$, entonces $n^+(x,t)$ es una solución de la ecuación de Smoluchowski con núcleo aditivo $(SC+)$, donde

$$n^+(x,t) = xTe^{-t}n^*(x,T(1-e^{-t}))$$

y $T = \Big(\int_0^x x^2 n_0^*(x)dx\Big)^{-1}$.

Demostración. Tenemos que

$$\textstyle\int_0^\infty xn^+(x,0)dx = \int_0^\infty x^2 T n^*(x,0)dx = T\frac{1}{T} = 1$$

Veamos que n^+ satisface la ecuación de Smoluchowski $(SC+)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n^+(x,t) &= e^{-t}xT\Big[-n^*(x,T(1-e^{-t})) + Te^{-t}\frac{d}{dt}n^*(x,T(1-e^{-t}))\Big] \\
&= e^{-t}xT\Big[-n^*(x,T(1-e^{-t})) \\
&+ Te^{-t}\frac{x}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,T(1-e^{-t}))n^*(x-y,T(1-e^{-t}))dy \\
&- Te^{-t}xn^*(x,T(1-e^{-t}))\Big] \\
&= -e^{-t}xTn^*(x,T(1-e^{-t})) \\
&+ e^{-2t}T^2\frac{x^2}{2}\int_0^x y(x-y)n^*(y,T(1-e^{-t}))n^*(x-y,T(1-e^{-t}))dy \\
&- e^{-2t}x^2T^2n^*(x,T(1-e^{-t}))
\end{aligned}$$

Como $n^*(x,T(1-e^{-t})) = \frac{n^+(x,t)}{xTe^{-t}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n^+(x,t) &= -e^{-t}xT\frac{n^+(x,t)}{xTe^{-t}} + e^{-2t}T^2\frac{x^2}{2}\int_0^x y(x-y)\frac{n^+(y,t)}{xTe^{-t}}\frac{n^+(x-y,t)}{xTe^{-t}}dy \\
&- e^{-2t}x^2T^2\frac{n^+(x,t)}{xTe^{-t}} \\
&= -n^+(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^x y(x-y)n^+(y,t)n^+(x-y,t)dy \\
&- e^{-t}xTn^+(x,t)
\end{aligned}$$

Como $T = \beta$ se tiene el resultado, además si $x = 0$ entonces $n^+(0,t) = 0$ es solución. □

Después de ver esta relación entre las soluciones $n^+(x,t)$ y $n^*(x,t)$ se puede hacer un procedimiento similar al que se realizó con el núcleo constante, los detalles se encuentran en [1] donde también se muestra que la solucines para la ecuación de Smoluchowski con núcleo aditivo y núcleo multiplicativo respectivamente son:

$$n^{+}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t} exp\Big(- e^{-2t}\frac{x}{2}\Big)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \tag{13}$$

$$n^{*}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} exp\Big(- \frac{t^2 x}{2}\Big) \tag{14}$$

2.5. Conclusión

En este trabajo se muestra como conceptos de probabilidad y de teoría de la medida ayudan a solucionar ecuaciones diferenciales de gran complejidad, además de hallar la solución se demuestra la existencia y unicidad de estas soluciones.

3. Bibliografía

[1] Smoluchowski's coagulation equation: probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels, Madalina Deaconu, Etienne Tanré.

[2] Análisis Matemático, 2da edición, Tom Apostol.

[3] Divergent Series, Oxford University Press,Hardy, G. H. (1949).

[4] Lecture notes for Part A Probability, James Martin.

[5] On some compound distributions with Borel summands, H. Finner, P. Kern, and M. Scheer.

[6] Pinchover, Y. and J. Rubinstein, An Introduction to Partial Differential Equations, Cambridge Univ. Press (2005).

[7] Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad, Myriam Muñoz de Ozak,Liliana Blanco Castañeda.

[8] BESSEL PROCESSES AND A FUNCTIONAL OF BROWNIAN MOTION,Daniel Dufresne.

[9] Real and Functional Analysis, A. Mukherjea, K. Pothoven.

[10] D. J. ALDOUS, Deterministic and Stochastic Models for Coalescence (Aggregation, Coagulation): A Review of the Mean-Field Theory for Probabilists, Bernoulli 5 (1999).

[11] Principios de Análisis Matemático. TERCERA EDICIÓN. WALTER RUDIN.