ECUACIÓN DE SMOLUCHOWSKI CON FACTORES EXTERNOS

Ivonne Natalia Rincón Pulido

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Maestría en Ciencias Actuariales
Bogotá D.C., Colombia
18 de enero de 2023

ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

ECUACIÓN DE SMOLUCHOWSKI CON FACTORES EXTERNOS

Ivonne Natalia Rincón Pulido

Trabajo de grado para optar al título de:
Magíster en Ciencias Actuariales

Director:
Julián Andrés Agredo Echeverry.
Co-director:
Yesid Esteban Clavijo Penagos.

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Maestría en Ciencias Actuariales
Bogotá D.C., Colombia
18 de enero de 2023

Nota de aceptación:
La tesis de maestría titulada "ECUACIÓN DE SMOLUCHOWSKI CON FACTORES EXTERNOS", presentada por Ivonne Natalia Rincón Pulido, cumple los requisitos establecidos para optar al título de Magíster en Ciencias Actuariales.

____

Director del trabajo de grado

____

Codirector del trabajo de grado

____

Jurado 1: Lorena Parra

____

Jurado 2: Angélica Maria Vega

Bogotá, D.C., 18 de enero de 2023

A mis padres Efraín y Esperanza, por haber forjado la persona que soy.

Agradecimientos

Inicialmente este agradecimiento es para Dios, por permitirme continuar con mis estudios y darme fortaleza para terminar este trabajo.

A mis tutores de tesis Julián Agredo y Yesid Clavijo, por su orientación, por compartir su conocimiento para la realización de este trabajo, por su apoyo y motivación durante el mismo.

Agradezco a la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito por darme la oportunidad de formarme tanto profesional como personalmente.

Finalmente, agradezco a mi esposo Omar Parra por su apoyo y motivación a lo largo del desarrollo de la tesis, a mis padres y hermano que son mi motor y la razón para seguir adelante.

Resumen

La ecuación de coagulación de Smoluchowski, formulada por Marian Smoluchowski para un problema físico en 1916, es de gran utilidad en diferentes áreas como física y química, pues permite modelar la tasa de cambio del número promedio de células de masa i con respecto al tiempo t y describe el proceso de coagulación entre células, que al estar muy cercanas pueden coagularse y formar una sola célula.

En la literatura que rodea dicha ecuación no se encuentran las soluciones asociadas a esta por métodos tradicionales sino que, al ser una ecuación de evolución no lineal de dimensión infinita, no se ha podido resolver usando dichos métodos y debido a su complejidad se usan algunos conceptos de probabilidad y métodos de ecuaciones diferenciales parciales.

En este trabajo se pretende estudiar la ecuación de Smoluchowski con factores externos, la cual resulta de agregar y remover células a la ecuación clásica, a tasas $s(i)$ y $r(i)$ respectivamente. Así el trabajo está enfocado en mostrar las soluciones de la ecuación de Smoluchowski con factores externos para el caso discreto, teniendo en cuenta los núcleos constante, aditivo y multiplicativo.

Contenido

Lista de Figuras

1 Introducción

En esta sección se enuncia el problema que se pretende abordar, con una descripción de los elementos básicos que rodean dicho problema y el contexto con respecto a lo que aparece en la literatura. Por lo anterior, a continuación se establece el contexto y los objetivos de la tesis, enfatizando particularmente en los aportes novedosos del trabajo.

1.1. Contexto del problema:

La ecuación de Smoluchowski, llamada así en honor a Marian Smoluchowski, quien la formuló por primera vez para un problema físico en 1916, se describe formalmente de la siguiente forma: para $i \in \mathbb{N}$ se considera una célula P_i de masa i la cual, a medida que el tiempo transcurre, interactúa con otra célula P_j de masa j formando una célula P_{i+j} de masa $i + j$, esto se conoce como coagulación y se escribe formalmente como $P_i + P_j \to P_{i+j}$. Usando la ley de acción de masas, se puede ver que dicha coagulación entre una célula de masa i y una de masa j se realiza en cada tiempo t, con una tasa denotada por $K(i, j)n(i, t)n(j, t)$, donde $n(i, t)$ denota el número de células de masa i por unidad de volumen que hay en el tiempo t, y $K(i, j)$ es una constante de proporcionalidad denominada núcleo de coagulación, la cual cumple las siguientes propiedades:

(i) $K(i, j) \geq 0$.

(ii) $K(i, j)$ es simétrica, es decir $K(i, j) = K(j, i)$.

Además, del proceso de coagulación mencionado anteriormente, células de masa i son inyectadas al sistema en el tiempo t a una tasa $s(i)$ y células de masa i son removidas del sistema en el tiempo t a una tasa $r(i)n(i, t)$. Esto permite hacer un análisis de equilibrio de masa y permite establecer la ecuación de Smoluchowski (1-1) con factores externos $s(i) \geq 0$ y $r(i) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} K(j,i-j)n(j,t)n(i-j,t) - n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j,i)n(j,t) + s(i) - r(i)n(i,t) \\
&\quad n(i,0) = \delta_1(i), i \geq 1.
\end{aligned} \tag{1-1}$$

Esta ecuación modela la tasa de cambio del número de células de masa i con respecto al tiempo t, con condición inicial $n(i,0) = \delta_1(i)$, en donde: $\delta_1(i) = 1$, si $i = 1$ y $\delta_1(i) = 0$, si $i \neq 1$.

En adelante a la ecuación (1-1) la llamaremos la ecuación de Smoluchowski con factores externos.

La ecuación discreta de Smoluchowski clásica (sin factores externos, es decir, cuando $s(i) = r(i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$) modela una gran cantidad de fenómenos en áreas como: Química, Física, Astrofísica, Genética, Teoría de grafos aleatorios, entre otras ([13] y [14]). En particular, se ha usado como modelo predictivo en finanzas ([3]). De esta ecuación clásica se tienen resultados de existencia y unicidad de las soluciones a nivel abstracto ([7] y [8]), como también soluciones explícitas ([5] y [1]). Para encontrar dichas soluciones explícitas se usan ecuaciones diferenciales parciales y conceptos de probabilidad, pues no es posible obtener su solución por métodos tradicionales, debido a su complejidad.

En este trabajo se estudia la existencia de soluciones explícitas para (1-1) cuando $s(i) = 0$ y $r(i) = r$ para todo $i \in \mathbb{N}$, de modo que la ecuación (1-1) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(i,t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} K(j,i-j)n(j,t)n(i-j,t) - n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} K(j,i)n(j,t) - rn(i,t) \\ n(i,0) &= \delta_1(i), i \geq 1. \end{aligned} \tag{1-2}$$

Para buscar tales soluciones, y teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior, se usan técnicas similares a las del caso clásico. Hasta donde se sabe, aún no se han calculado soluciones explícitas para (1-2), solamente se ha probado existencia y unicidad ([9]). En este trabajo se encontrarán soluciones explícitas para la ecuación (1-2), con los núcleos de coagulación constante: $K(i,j) = 1$, multiplicativo: $K(i,j) = ij$ y aditivo: $K(i,j) = i + j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

1.2. Objetivos:

1.2.1. Objetivo general

Probar existencia de soluciones explícitas para la ecuación (1-2), con $K(i,j) = i + j$, $K(i,j) = ij$ y $K(i,j) = 1$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Finalmente, se revisa la posible unicidad de dichas soluciones.

1.2.2. Objetivos específicos

(i) Mostrar soluciones explícitas para la ecuación (1-2).

(ii) Relacionar y comparar las soluciones de (1-2) con las soluciones halladas en la literatura de la ecuación de Smoluchowski clásica.

(iii) Explorar posibles aplicaciones en el ámbito actuarial.

2 Preliminares

En esta sección se enuncian definiciones, teoremas y algunos resultados relevantes para la realización del trabajo. La mayoría de estos se enuncian sin demostración debido a que éstas son de fácil acceso; pero en la medida de lo posible se darán referencias para dichas demostraciones.

Definición 1. *El producto de Cauchy de dos series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *se define como la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$*, donde* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Tal como se afirma a continuación, bajo ciertas suposiciones de convergencia el producto de Cauchy de dos series converge al producto de las series.

Teorema 1. *Si las series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *son absolutamente convergentes entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$*, dada por el producto de Cauchy de dichas series, es absolutamente convergente y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Para una demostración ver [2], sección 8.24, página 248.

Para garantizar ciertas manipulaciones con series que van a aparecer en determinados cálculos, se requiere manejar sucesiones de funciones y que dichas sucesiones converjan en un sentido mucho más fuerte que la convergencia puntual: en este caso, se requiere de la convergencia uniforme.

Definición 2. *Dada una sucesión de funciones* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y una función* $f : E \to \mathbb{R}$ *con* $E \subset \mathbb{R}$*, se dice que la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f *en* E*, si dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *(que depende únicamente de* ϵ*), tal que si* $n \geq N$ *entonces* $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ *para todo* $x \in E$.

El siguiente teorema es útil para demostrar que, bajo ciertas hipótesis y condiciones, la derivada del límite de una sucesión de funciones es igual al límite de la sucesión de derivadas de dichas funciones.

Teorema 2. *Si se supone que cada término de la sucesión de funciones* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una función real derivable en cada punto de un intervalo abierto* (a,b)*, tal que* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente en* (a,b) *y para* $x_0 \in (a,b)$ *la sucesión* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente. Entonces la sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente en* (a,b)*. Además*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

Para una demostración ver [2], sección 9.10*, página* 278*.*

La condición uniforme de Cauchy establece que si una sucesión de funciones es tal que sus términos se aproximan entre sí, entonces dicha sucesión converge hacia un límite L. Esta condición es útil para establecer la convergencia de una sucesión cuando se desconoce el valor hacia el que converge.

Teorema 3 (Condición uniforme de Cauchy)**.** *Una sucesión de funciones* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *donde* $f_n : E \to \mathbb{R}$*, converge uniformemente en* $E \subset \mathbb{R}$ *si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *(que depende únicamente de* ϵ*) tal que para todo* $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n, m \geq N$ *implica que para todo* $x \in E$ *se tiene* $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$*.*

Para una demostración ver [2], sección 9.5, página 270.

Por otra parte, el criterio M de Weierstrass es un conocido resultado que permite comprobar la convergencia uniforme de una serie de funciones de valor real.

Teorema 4 (Criterio M de Weierstrass)**.** *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones de valor real definidas en un conjunto* E*. Se supone que para cada término de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe una constante positiva* M_n*, tal que* $|f_n(x)| \leq M_n$*, para todo* $x \in E$*, y que* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge. Entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* E*.*

Para una demostración ver [2], sección 9.6, página 271.

Se necesitará también del siguiente resultado:

Teorema 5 (Criterio de Dini)**.** *Sea* $E \subset \mathbb{R}$ *compacto y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones monótonas continuas definidas en* E*, que converge puntualmente a una función continua* f *definida en* E*. Entonces la convergencia es uniforme.*

Para una demostración ver [4] sección 8.2 página 252.

La ecuación (1-2) define un sistema infinito dimensional de ecuaciones diferenciales no lineales debido a que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se debe encontrar una solución $n(i,t)$ que satisfaga dicha ecuación y a su vez cada solución $n(j,t)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ interviene en (1-2). Adicionalmente, se puede observar en (1-1) que aparecen sumas y series en los términos de dicha ecuación. Estas características hacen de la ecuación de Smoluchowski con factores externos un problema que no se puede abordar directamente con las técnicas clásicas de las ecuaciones diferenciales. Para resolver dicho sistema, es necesario transformarlo en una sola ecuación diferencial cuya solución es la función generadora de probabilidades de alguna distribución, la cual está asociada a una variable aleatoria discreta X_t. A continuación se presenta la definición de la función generadora de probabilidades y las funciones generadoras asociadas a las distribuciones que se usan en este trabajo.

Definición 3 (Función generadora de probabilidades)**.** *Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en los enteros no negativos. Entonces se define la función generadora de probabilidades como:*

$$G_X(s) = E(s^x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| \leq 1$, donde $P(X = k)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X sea igual a k.

La serie de potencias que define a $G_X(s)$ converge absolutamente para $|s| \leq 1$ (Para más detalles ver [10]).

Nota 1. *La función generadora de probabilidades caracteriza la distribución de la variable aleatoria, es decir: las variables aleatorias X e Y tienen la misma distribución, si solo si $G_X(s) = G_Y(s)$ (lo anterior es una consecuencia de la unicidad de los coeficientes de la serie de Taylor).*

Definición 4 (Distribución geométrica)**.** *Sea X una variable aleatoria discreta. Se dice que X sigue una distribución geométrica con parámetro $p \in [0, 1]$ si:*

$$P(X = k) = \begin{cases} pq^{k-1} & \text{si } k = 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Si X es una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, se puede calcular facilmente la función generadora de probabilidades. De hecho, se puede afirmar lo siguiente:

Proposición 1. *X es una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p si y sólo si*

$$G_X(s) = \frac{ps}{1 - qs} \quad \text{para } |s| < \frac{1}{q}$$

Otra distribución que se usa en este trabajo es la distribución de Borel, establecida por el matemático Émile Borel, la cual es una distribución de probabilidad discreta y se puede aplicar en procesos de ramificación de tipo Galton-Watson y teoría de colas.

Definición 5 (Distribución de Borel)**.** *Sea X una variable aleatoria discreta, se dice que X sigue una distribución de Borel con parámetro $\lambda \in [0,1]$ si la función de masa de probabilidad de X esta dada por:*

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda k}(\lambda k)^{k-1}}{k!} & si\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

A diferencia de la distribución geométrica, la función generadora de probabilidades de la distribución de Borel no tiene una forma explícita conocida. Así que, para identificar dicha distribución mediante la función generadora de probabilidades es necesaria la siguiente proposición:

Proposición 2. *Sea X una variable aleatoria con distribución Borel de parámetro $\lambda \in [0,1]$ y $G_X(s)$ su función generadora de probabilidades, entonces $G_X(s)$ es la única solución de la ecuación funcional:*

$$G_X(s) = se^{\lambda(G_X(s)-1)}, \quad donde\ s \in \mathbb{R}\ tal\ que\ |s| < 1$$

Para una demostración del resultado anterior ver [15].

La ecuación diferencial que se obtiene en términos de la función generadora de probabilidades se resuelve usando el método de las características, el cual se describe a continuación.

Nota 2 (Método de las características)**.** *Dicho método fue desarrollado por Hamilton en el siglo XIX. Permite resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y su idea se basa principalmente en encontrar la solución de una ecuación diferencial con un sistema de curvas llamadas ecuaciones características, las cuales se pueden resolver por métodos conocidos como variables separables. Para ello se pretende solucionar la ecuación diferencial de la siguiente forma:*

$$a(t,s,G)G_t + b(t,s,G)G_s = c(t,s,G)G$$

. Así para encontrar su solución se debe tener en cuenta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt}(t) = a(t,s,G)$$
$$\frac{dy}{dt}(t) = b(t,s,G)$$
$$\frac{dG}{dt}(t) = c(t,s,G)G$$

Este sistema permite encontrar $\frac{dy}{dx}$ con el fin de obtener una ecuación diferencial de y en *términos de x, la cual se resuelve por métodos conocidos y es la solución a la ecuación:*

$$a(t,s,G)G_t + b(t,s,G)G_s = c(t,s,G)G$$

.

Finalmente, para probar existencia y unicidad es necesario calcular el siguiente determinante, conocido como determinante Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} a(t,s,G) & b(t,s,G) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix}$$

Si este es diferente de cero se puede afirmar que la solución es única.

Para una descripción más detallada de este método, ver por ejemplo [12].

El lema de Gronwall es de gran importancia antes de comenzar a dar la solución de la ecuación con factores externos, pues permite establecer una cota superior para funciones no negativas a través de una función lineal de su integral.

Lema 1 (Lema de Gronwall)**.** *Sean I un intervalo, $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$ tal que:*

$$0 \leq f(x) \leq A + B\int_{x_o}^{x} f(s)\,ds \qquad \forall x \in I, \textit{con constantes } A, B > 0.$$

Entonces $0 \leq f(x) \leq A\,e^{B(x-x_0)}$.

Para una demostración ver[11], página 44.

Finalmente, la metodología para resolver la ecuación de Smoluchowski con factores externos se describe, en sus ideas básicas, por medio de los siguientes pasos:

(i) Se comienza con el sistema infinito dimensional de ecuaciones diferenciales establecido por la ecuación (1-1), cuya solución es la sucesión de funciones $n(i,t)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(ii) Se convierte el anterior sistema de ecuaciones en una sola ecuación, en donde la solución es una función generadora de probabilidades $G_{X_t}(s)$ asociada a alguna variable aleatoria discreta X_t con distribución $p(i,t)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(iii) En virtud de la nota 1 se identifica la distribución $p(i,t)$ de tal forma que, una vez identificada, se puede encontrar $n(i,t)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para poder implementar el paso (iii) se debe identificar de antemano a qué distribución corresponde la función generadora de probabilidad obtenida en el paso (ii), así se usarán las notas y definiciones mencionadas anteriormente. En el siguiente capítulo se encuentran las soluciones de la ecuación con factores externos para los núcleos, constante $K(i,j) = 1$, aditivo $K(i,j) = i+j$ y multiplicativo $K(i,j) = ij$, estas soluciones se basan en la resolución de una ecuación diferencial usando las distribuciones de probabilidad y el método de las características enunciados anteriormente.

3 Soluciones a la ecuación con factores externos

Este capítulo se divide en dos partes, en la primera se encuentra un análisis en relación con la conservación de masa total en el sistema en un tiempo t, la cual está representada por $\sum\limits_{i=1}^{\infty} in(i,t)$, pues como se mencionó antes, $n(i,t)$ denota el número de células de masa i por unidad de volumen que hay en el tiempo t. Y en la segunda se encuentran las soluciones de la ecuación (1-2) para los núcleos constante $K(i,j) = 1$, aditivo $K(i,j) = i + j$ y multiplicativo $K(i,j) = ij$.

3.1. Conservación de masa

El concepto de conservación de masa se refiere a que la masa total es la misma en cada instante de tiempo t y en caso contrario, es decir, cuando la masa cambia en cada instante de tiempo t se dice que no hay conservación de masa, aquí la idea es mostrar que para el caso en que se agregan los factores externos la conservación de masa no se satisface.

De acuerdo con [1] se sabe que la ecuación clásica de Smoluchowski tiene soluciones que conservan la masa; al agregar los factores externos se obtiene la ecuación (1-2), para la cual no es posible ver a simple vista si cumple la conservación de masa o si cambia para cada instante t, por esta razón es importante realizar un análisis de esto antes de presentar la solución de dicha ecuación.

Definición 6. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Se define $\varphi_i(l) = i\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l)$, donde:*

$$\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l) = \begin{cases} 1 & si\ l \leq N \\ 0 & si\ l > N \end{cases}$$

La ecuación (1-2) se multiplica por $\varphi_i(l)$ y se suma desde $i = 1$ hasta ∞, obteniendo lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\frac{d}{dt}n(i,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}K(j,i-j)n(j,t)n(i-j,t)\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}K(j,i)n(j,t)$$
$$-\,r\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)$$

Lo anterior es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\frac{d}{dt}n(i,t)=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\varphi_i(l)K(j,i-j)n(j,t)n(i-j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)$$
$$-\,r\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t) \tag{3-1}$$

La figura 3-1 muestra la región que comprende las primeras dos sumas del lado derecho de la igualdad de la ecuación (3-1).

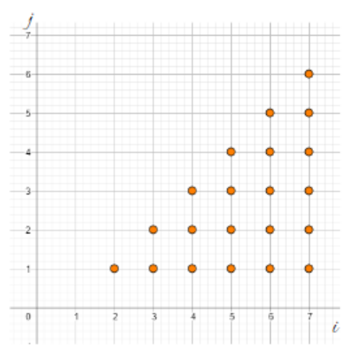

Figura 3-1: Región series

Con este gráfico se puede hacer el siguiente cambio de orden en dichas sumas: $1 \leq j \leq \infty$ y $j+1 \leq i < \infty$, lo cual permite obtener el siguiente resultado:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\frac{d}{dt}n(i,t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty}\varphi_i(l)K(j,i-j)n(j,t)n(i-j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)$$
$$-\,r\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)$$

En lo que sigue, se puede realizar un doble cambio de variable con el fin de que todas las series comiencen en 1 y queden en los mismos términos, estos consisten en hacer $u = i - j$ y luego u se cambia por i, esto se aplica a la segunda serie del primer término del lado derecho de la igualdad anterior y así reescribirlo como:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{i+j}(l)K(j,i)n(j,t)n(i,t) - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)\\ - r\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)\end{aligned} \tag{3-2}$$

Con el fin de agrupar los dos primeros términos del lado derecho de la igualdad anterior es pertinente enunciar la siguiente nota:

Nota 3. *El término enunciado a continuación se puede separar en dos sumas como sigue:*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t) =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)\end{aligned}$$

Reemplazando la nota 3 en la ecuación (3-2), se encuentra lo que sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)\frac{d}{dt}n(i,t) =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{i+j}(l)K(j,i)n(j,t)n(i,t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t)\\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(l)n(i,t)K(j,i)n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(l)n(i,t)\end{aligned}$$

Aplicando la definición 6 la anterior igualdad se convierte en lo que sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l)\frac{d}{dt}n(i,t) =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(i+j)\mathbb{I}_{\{i+j\leq N\}}(l)K(j,i)n(j,t)n(i,t)\\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l)K(j,i)n(j,t)n(i,t)\\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{I}_{\{j\leq N\}}(l)K(j,i)n(j,t)n(i,t) - r\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l)n(i,t)\end{aligned} \tag{3-3}$$

Nota 4. *Usando la definición 6, para $l \leq N$ se tienen dos resultados, los cuales se muestran a continuación:*

- *Si $i + j \leq N$, entonces $i \leq N$ y $j \leq N$. Así se tiene lo siguiente:* $(i + j)\mathbb{I}_{\{i+j\leq N\}}(l) = i + j$, $i\mathbb{I}_{\{i\leq N\}}(l) = i$ *y* $j\mathbb{I}_{\{j\leq N\}}(l) = j$.
- *Si $i + j > N$, entonces se obtiene que* $(i + j)\mathbb{I}_{\{i+j\leq N\}}(l) = 0$

Al evaluar la ecuación (3-3) para $l \leq N$, la nota 4 permite concluir que:

$$\sum_{i=1}^{N} i\frac{d}{dt}n(i,t) \leq -r\sum_{i=1}^{N} in(i,t)$$

Proposición 3. *Para $s > 0$, si $\sum_{i=1}^{N} i\frac{d}{dt}n(i,t) < -r\sum_{i=1}^{N} in(i,t)$, entonces se cumple*

$$\sum_{i=1}^{N} in(i,s) \leq \sum_{i=1}^{N} in(i,0) - r\int_0^s \sum_{i=1}^{N} in(i,t)dt$$

.

Prueba: Se comienza integrando a ambos lados de la desigualdad $\sum_{i=1}^{N} i\frac{d}{dt}n(i,t) < -r\sum_{i=1}^{N} in(i,t)$ respecto a t como sigue:

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} in(i,t)dt \leq -r\int_0^s \sum_{i=1}^{N} in(i,t)dt$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral del lado derecho se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{N} in(i,s) - \sum_{i=1}^{N} in(i,0) \leq -r\int_0^s \sum_{i=1}^{N} in(i,t)dt$$

$$\sum_{i=1}^{N} in(i,s) \leq \sum_{i=1}^{N} in(i,0) - r\int_0^s \sum_{i=1}^{N} in(i,t)dt$$

□

El lema de Gronwall permite reescribir lo anterior de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{N} in(i,s) \leq e^{-rs}\sum_{i=1}^{N} in(i,0)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{N} in(i,0) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$, entonces $\forall N \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{N} in(i,t) \leq e^{-rt}$$

En el caso clásico, se puede probar que la masa total del sistema en el tiempo t satisface la desigualdad $\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t) \leq 1$ y en [1] se elige buscar soluciones a la ecuación clásica tal que $\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t) = 1$, esto se conoce como conservación de masa. Dado que, para el caso con factores externos se tiene la desigualdad $\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t) \leq e^{-rt}$, es pertinente mencionar la siguiente nota:

Nota 5. *En adelante se elige encontrar soluciones que cumplan la igualdad* $\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t) = e^{-rt}$*, es decir, que no se satisface la conservación de masa, sino que cambia en cada instante de tiempo* t*.*

A continuación, se muestran las soluciones para la ecuación de Smoluchowski con factores externos para los tres núcleos mencionados antes.

3.2. Núcleo $K(i,j)=1$ para todo $i,j \in \mathbb{N}$

Reemplazando este núcleo en la ecuación (1-2) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} n(j,t)n(i-j,t) - n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - rn(i,t) \\ &\quad n(i,0) = \delta_1(i), i \geq 1 \end{aligned} \tag{3-4}$$

Para encontrar la solución de la ecuación para este núcleo se realiza una demostración para intercambiar una serie y una derivada, esto con el fin de obtener una ecuación diferencial separable y así encontrar su solución. Finalmente, se utilizan las definiciones de las funciones generadoras de probabilidades, en particular la de una distribución geométrica para lograr obtener la solución de la ecuación (3-4).

Se comienza sumando de $i=1$ hasta ∞ en ambos lados de la ecuación (3-4) para obtener lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} n(j,t)n(i-j,t) - \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)$$

Usando el teorema de Cauchy para el producto de series con $a_j = n(j,t)$ y $a_{i-j} =$

$n(i-j,t)$, el primer término de la derecha se puede cambiar por:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)-\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)-r\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t) \tag{3-5}$$

A continuación se encuentra la demostración de la validez de intercambiar la serie con la derivada del lado izquierdo. El orden que se sigue para demostrar esto es el que se describe a continuación:

(i) Se muestra que $S_m(t)=\sum_{i=1}^{m} in(i,t)$ converge uniformemente, lo cual, con ayuda del teorema de Dini permite afirmar que, $f_m(t)=\sum_{i=1}^{m} n(i,t)$ converge uniformemente.

(ii) Tomando $f_m(t)=\sum_{i=1}^{m} n(i,t)$ y $f(t)=\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)$, de la ecuación (3-5) se prueba que $f'_m(t)$ es continua.

(iii) Finalmente, se muestra que $f'_m(t)$ converge uniformemente y con esto llegar a concluir que:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t).$$

A continuación se enuncian algunas proposiciones y lemas que permiten demostrar los pasos anteriores.

Lema 2. *Sea $S_m(t)$ una sucesión para todo $t\in[0,T]$ definida por $S_m(t)=\sum_{i=1}^{m} in(i,t)$. Entonces $S_m(t)$ converge uniformemente.*

Prueba: Se sabe que $in(i,t)\geq 0$ por lo que S_m es una sucesión monótona creciente, la cual converge puntualmente en un conjunto compacto $[0,T]$. Entonces usando el teorema de Dini se puede afirmar que $S_m(t)=\sum_{i=1}^{m} in(i,t)$ converge uniformemente en $[0,T]$. □

Lema 3. *Sea $f_m(t)$ una sucesión para todo $t\in[0,T]$ definida por $f_m(t)=\sum_{i=1}^{m} n(i,t)$. Entonces $|f_{r+m}(t)-f_r(t)|<|S_{r+m}(t)-S_r(t)|$ y $f_m(t)$ converge uniformemente.*

Prueba: Primero se prueba que $|f_{r+m}(t)-f_r(t)|<|S_{r+m}(t)-S_r(t)|$ de la siguiente manera:

$$|f_{r+m}(t)-f_r(t)|=\sum_{i=r+1}^{r+m}n(i,t)\leq\sum_{i=r+1}^{r+m}in(i,t)=|S_{r+m}(t)-S_r(t)|$$

Ahora como se demostró en el lema 2, $S_m(t)$ converge uniformemente para $m\in\mathbb{N}$, entonces, por el teorema 3 se puede afirmar que $S_m(t)$ es uniformemente de Cauchy, es decir, que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r, m \in \mathbb{N}$ con $r \geq m > N$, $|S_{r+m}(t) - S_r(t)| < \epsilon$. Entonces $|f_{r+m}(t) - f_r(t)| < \epsilon$ y por lo tanto, $f_m(t)$ es uniformemente de Cauchy y así $f_m(t)$ converge uniformemente y $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} n(i,t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t) = f(t)$. $\square$

Tomando $f_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} n(i,t)$ y $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ de la ecuación (3-5) se obtiene el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
f'_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} n(i,t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} n(j,t) \sum_{i=1}^{m} n(i,t) - \sum_{i=1}^{m} n(i,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r \sum_{i=1}^{m} n(i,t) \\
f'_m(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{m} n(i,t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} n(i,t) \right)^2 - \sum_{i=1}^{m} n(i,t) \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r \sum_{i=1}^{m} n(i,t) \\
f'_m(t) &= \frac{1}{2} \left(f_m(t)\right)^2 - f_m(t) f(t) - r f_m(t)
\end{aligned}
$$

Para probar que $f'_m(t)$ converge uniformemente se deben tener en cuenta las siguientes proposiciones:

Proposición 4. *Si* $f_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} n(i,t)$ *para todo* $t \in [0,T]$ *entonces* $\left(f_m(t)\right)^2$ *converge uniformemente.*

Prueba: Como $f_m(t)$ y $f(t)$ son funciones continuas, entonces se puede afirmar que $f'_m(t)$ es una función continua y existe una constante $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq \frac{M}{2}$ para todo $t \in [0,T]$. Además teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r, m \in \mathbb{N}$ con $r \geq m > N$ se tiene $|f_r(t) - f_m(t)| < \frac{\epsilon}{M}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\left|(f_r(t))^2 - (f_m(t))^2\right| &= |f_r(t) - f_m(t)| \, |f_r(t) + f_m(t)| \\
&\leq |f_r(t) - f_m(t)| \left(|f_r(t)| + |f_m(t)|\right) \\
&\leq |f_r(t) - f_m(t)| \left(|f(t)| + |f(t)|\right) \\
&= |f_r(t) - f_m(t)| \left(2\,|f(t)|\right) \\
&\leq \left(\frac{\epsilon}{M}\right) \left(2 * \frac{M}{2}\right) = \epsilon
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que $\left(f_m(t)\right)^2$ es uniformemente de Cauchy y por esto $\left(f_m(t)\right)^2$ converge uniformemente. $\square$

Proposición 5. *Si* $f_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} n(i,t)$ *y* $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ *para todo* $t \in [0,T]$*, entonces* $f_m(t) f(t)$ *converge uniformemente.*

Prueba: Como $f(t)$ es una función continua entonces existe una constante $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [0, T]$, además teniendo en cuenta que, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r, m \in \mathbb{N}$ con $r \geq m > N$,se tiene $|f_r(t) - f_m(t)| < \frac{\epsilon}{M}$ entonces:

$$|f_r(t)f(t) - f_m(t)f(t)| = |f(t)|\,|f_r(t) - f_m(t)| \leq M * \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Lo anterior implica que $f_m(t)f(t)$ es uniformemente de Cauchy y por esto $f_m(t)f(t)$ converge uniformemente. $\square$

Teniendo en cuenta las anteriores proposiciones se puede concluir que $f'_m(t)$ converge uniformemente y por el teorema 2, la sucesión $f_m(t)$ converge uniformemente y $\left(\lim\limits_{m\to\infty} f_m\right)' = \lim\limits_{m\to\infty} f'_m$. Por todo esto es posible concluir que:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t) \tag{3-6}$$

Al reemplazar (3-6) en (3-5) se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) - \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)$$

Para simplificar esto y operar los primeros dos términos del lado derecho, cambiando j por i se encuentra que ambos términos son iguales, al operarlos se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)\right)^2 - r\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) \tag{3-7}$$

Proposición 6. *Si* $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ *para* $t \in [0, T]$ *con* $y(0) = 1$*, entonces* $y(t) = \frac{2r}{(2r+1)e^{rt} - 1}$.

Prueba: Como $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$, entonces se puede reemplazar en la ecuación (3-7), para obtener la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= -\frac{1}{2}\left(y(t)\right)^2 - ry(t) \\ y' &= -\frac{1}{2}y^2 - ry \\ y' &= -\frac{1}{2}\left(y^2 + 2ry\right) \end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver mediante variables separables y para resolverla se usa el método de fracciones parciales de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{y(y+2r)}dy = dt\\
&-\int \frac{2}{y(y+2r)}dy = \int dt\\
&-\frac{1}{r}\int \frac{1}{y}-\frac{1}{y+2r}dy = t+A\\
&-\frac{1}{r}\left(\ln|y|-\ln|y+2r|\right) = t+A\\
&\ln\left(\frac{y}{y+2r}\right) = -r(t+A)\\
&\frac{y}{y+2r} = e^{-r(t+A)}\\
&y-ye^{-r(t+A)} = 2re^{-r(t+A)}\\
&y = \frac{2re^{-r(t+A)}}{1-e^{-r(t+A)}}\\
&y(t) = \frac{2r}{e^{r(t+A)}-1}\\
&y(t) = \frac{2r}{Ae^{rt}-1} = \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la condición inicial $y(0)=1$ se encuentra que $A=2r+1$, entonces $y(t)=\frac{2r}{(2r+1)e^{rt}-1}$. □

De la proposición anterior se sabe que $y(t)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)=\frac{2r}{(2r+1)e^{rt}-1}$, lo cual sugiere definir la función $p(i,t)$ como:

$$p(i,t)=\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{2r}n(i,t)$$

Obteniendo así una distribución de probabilidad y su función generadora de probabilidades es:

$$G(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty} p(i,t)s^i \quad \text{con} \quad |s|\le 1 \tag{3-8}$$

A continuación se va a reescribir la ecuación (3-4) en términos de $G(t,s)$ y $\frac{dG(t,s)}{dt}$ con el fin de obtener una ecuación diferencial, la cual tendrá la forma de la función generadora de probabilidades de la disribución geométrica, con esta información se asocia la solución $n(i,t)$ a dicha distribución con parámetros adecuados.

Primero se multiplica por s^i en (3-4) y se suman todos los términos de $i = 1$ hasta ∞ para obtener lo que sigue:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t)s^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} n(j,t)n(i-j,t)s^i - \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r \sum_{i=1}^{\infty} s^i n(i,t)$$

Ahora se aplica el teorema del producto de Cauchy al primer término del lado derecho con $a_j = n(j,t)$ y $a_{i-j} = n(i-j,t)$, adicionalmente, en el lado izquierdo se usa (3-6), así lo anterior se puede simplificar como:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i \right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i \sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r \sum_{i=1}^{\infty} s^i n(i,t) \tag{3-9}$$

Proposición 7. *Si $G(t,s)$ es definida por (3-8) con $G(t,1) = 1$ y $G(0,s) = s$, entonces $G(t,s)$ es una función generadora de probabilidades de una distribución geométrica con parámetros $p_t = \frac{2re^{rt}}{(2r+1)e^{rt}-1}$ y $q_t = \frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1}$.*

Prueba: Usando la definición de $G(t,s)$ dada en (3-8), la distribución $p(i,t)$, y la proposición 6, resulta lo siguiente: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i = \frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1}$, lo cual se reemplaza en la ecuación (3-9) para dejarla en términos de $G(t,s)$, luego se simplifica hasta obtener una ecuación diferencial separable que se pueda resolver para $G(t,s)$. Esto se logra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right)^2 - \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \left(\frac{2r}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \\ - r \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \end{aligned}$$

Derivando el término del lado izquierdo respecto a t se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\left(2r\frac{dG(t,s)}{dt}\right)\left((2r+1)e^{rt}-1\right) - 2rG(t,s)\left((2r+1)e^{rt}r\right)}{((2r+1)e^{rt}-1)^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right)^2 \\ &- \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \left(\frac{2r}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) - r \left(\frac{2rG(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4r^2G^2(t,s)}{((2r+1)e^{rt}-1)^2} - \frac{4r^2G(t,s)}{((2r+1)e^{rt}-1)^2} - \left(\frac{2r^2G(t,s)}{(2r+1)e^{rt}-1} \right) \end{aligned}$$

Se simplifica para obtener lo que sigue a continuación:

$$\left(2r\frac{dG(t,s)}{dt}\right)\big((2r+1)e^{rt}-1\big) - 2rG(t,s)\big((2r+1)e^{rt}r\big) = 2r^2G^2(t,s) - 4r^2G(t,s) - 2r^2G(t,s)\big((2r+1)e^{rt}-1\big)$$

$$\left(2r\frac{dG(t,s)}{dt}\right)\big((2r+1)e^{rt}-1\big) = 2r^2G^2(t,s) - 4r^2G(t,s) + 2r^2G(t,s)$$

$$\begin{aligned}
\left(2r\frac{dG(t,s)}{dt}\right)\big((2r+1)e^{rt}-1\big) &= 2r^2G^2(t,s) - 2r^2G(t,s) \\
\frac{dG(t,s)}{dt}\big((2r+1)e^{rt}-1\big) &= rG^2(t,s) - rG(t,s) \\
\frac{dG(t,s)}{dt}\frac{\big((2r+1)e^{rt}-1\big)}{r} &= G^2(t,s) - G(t,s)
\end{aligned}$$

Esta ecuación diferencial es separable, así que integrando a ambos lados para resolver por fracciones parciales al lado izquierdo y haciendo uso de la sustitución $u = e^{rt}$ al lado derecho, se tiene:

$$\int \frac{1}{G(G-1)}dG = \int \frac{r}{(2r+1)e^{rt}-1}dt$$

$$\begin{aligned}
ln|G-1| - ln|G| &= -ln|e^{rt}| + ln|(2r+1)e^{rt}-1| + C \\
ln\left|\frac{G-1}{G}\right| &= ln\left|\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{e^{rt}}\right| + C \\
\frac{G-1}{G} &= C\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{e^{rt}} \\
G-1 &= CG\left(\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{e^{rt}}\right) \\
G(t,s) &= \frac{1}{1-C\left(\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{e^{rt}}\right)} \\
G(t,s) &= \frac{e^{rt}}{e^{rt} - C\left((2r+1)e^{rt}-1\right)}
\end{aligned}$$

Al tener en cuenta las condiciones iniciales $G(t,1) = 1$ y $G(0,s) = s$ se obtiene el valor de la constante C de la siguiente manera:

$$s = \frac{1}{1 - C\left((2r+1) - 1\right)}$$
$$s = \frac{1}{1 - 2rC}$$
$$C = \frac{s-1}{2rs}$$

Ya teniendo el valor de C, $G(t,s)$ se puede escribir como:

$$G(t,s) = \frac{e^{rt}}{e^{rt} - \frac{s-1}{2rs}\left((2r+1)e^{rt} - 1\right)}$$

$$G(t,s) = \frac{2rse^{rt}}{2rse^{rt} - (s-1)\left((2r+1)e^{rt} - 1\right)}$$
$$G(t,s) = \frac{2rse^{rt}}{-se^{rt} + (2r+1)e^{rt} + s - 1}$$
$$G(t,s) = \frac{\frac{2re^{rt}}{(2r+1)e^{rt}-1}s}{1 - \frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1}s}$$

Así la función $G(t,s)$ tiene la forma de una función generadora de probabilidades de una distribución geométrica con parámetros $p_t = \frac{2re^{rt}}{(2r+1)e^{rt}-1}$ y $q_t = 1 - p_t = 1 - \frac{2re^{rt}}{(2r+1)e^{rt}-1} = \frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1}$. □

Proposición 8. *Para $i \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$ la solución única de la ecuación (3-4) está dada por:*

$$n(i,t) = \left(\frac{(2r+1)e^{rt} - 1}{2r}\right)^{-2} \left(\frac{e^{rt} - 1}{(2r+1)e^{rt} - 1}\right)^{i-1} e^{rt}$$

Prueba: Teniendo en cuenta la proposición anterior se puede decir que $n(i,t)$ es la función de probabilidad de una distribución geométrica dada por:

$$n(i,t) = \frac{2r}{(2r+1)e^{rt} - 1}\left(\frac{2re^{rt}}{(2r+1)e^{rt} - 1}\right)\left(\frac{e^{rt} - 1}{(2r+1)e^{rt} - 1}\right)^{i-1}$$
$$n(i,t) = \left(\frac{(2r+1)e^{rt} - 1}{2r}\right)^{-2} \left(\frac{e^{rt} - 1}{(2r+1)e^{rt} - 1}\right)^{i-1} e^{rt} \quad \text{con} \quad 0 \le t \le 1, i \ge 1.$$

Así que, dada la unicidad de $G(t,s)$, es posible concluir que $n(i,t)$ es única, que es la solución para el núcleo $K(i,j) = 1$. □

Por último, es posible ver que cuando $r \to 0$ las soluciones del problema clásico se recuperan de la siguiente manera:

$$\lim_{r\to 0} n(i,t) = \lim_{r\to 0} \left(\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{2r}\right)^{-2} \left(\frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1}\right)^{i-1} e^{rt}$$

Aplicando la regla de L'Hospital en $\frac{(2r+1)e^{rt}-1}{2r}$ y $\frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1}$ se tiene lo siguiente:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(2r+1)e^{rt}-1}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{2e^{rt}+(2r+1)te^{rt}}{2} = \frac{2+t}{2}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{rt}-1}{(2r+1)e^{rt}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{te^{rt}}{2e^{rt}+(2r+1)te^{rt}} = \frac{t}{2+t}$$

Entonces, si $r \to 0$ se puede decir que, $n(i,t) = \left(\frac{2+t}{2}\right)^{-2} \left(\frac{t}{2+t}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{t+2}\right)^{2} \left(\frac{t}{t+2}\right)^{i-1}$, la cual es la solución del núcleo $K(i,j)=1$ en la ecuación clásica.

3.3. Núcleo $K(i,j) = ij$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$

Reemplazando este núcleo en la ecuación (1-2), esta queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(i,t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} j(i-j)n(j,t)n(i-j,t) - n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} jin(j,t) - rn(i,t) \\ n(i,0) &= \delta_1(i), i \geq 1 \end{aligned} \tag{3-10}$$

Al igual que el caso anterior, para encontrar la solución de esta ecuación se tiene en cuenta la sección de preliminares y el siguiente procedimiento:

(i) Se prueba que es posible intercambiar la serie con la derivada.

(ii) Se define la función de probabilidad $p(i,t)$ y su función generadora de probabilidades.

(iii) Se multiplica (3-10) por is^ie^{rt} y se suma de $i = 1$ hasta ∞ para obtener una expresión en términos de $G(t,s)$, la función generadora de probabilidades de $p(i,t)$.

(iv) Se encuentra la solución de (3-10) por el método de las características.

Se comienza sumando de $i = 1$ hasta ∞ a ambos lados de la ecuación (3-10) para obtener lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1} j(i-j)n(j,t)n(i-j,t) - \sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} jin(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t) \tag{3-11}$$

Utilizando el teorema de Cauchy para el producto de series con $a_j = jn(j,t)$ y $b_{i-j} = (i-j)n(i-j,t)$, 3-11 se puede simplificar como:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t) - \sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t) \tag{3-12}$$

A continuación se presenta la demostración que permite intercambiar la serie con la derivada del lado izquierdo de la ecuación (3-12). Para esto se tienen en cuenta algunos teoremas, lemas y proposiciones enunciados antes.

Se empieza utilizando los lemas 2 y 3, los cuales afirman que, $S_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} in(i,t)$ y $f_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} n(i,t)$ convergen uniformemente y reemplazando esto en la ecuación (3-12) se obtiene la expresión:

$$f'_m(t) = \frac{1}{2}\left(S_m(t)\right)^2 - S_m(t)S(t) - rf_m(t)$$

La sucesión $f'_m(t)$ mostrada anteriormente converge uniformemente pues, cambiando $f_m(t)$ por $S_m(t)$ en la proposición 4 se puede afirmar que $(S_m(t))^2$ converge uniformemente, y cambiando $f_m(t)f(t)$ por $S_m(t)S(t)$ en la proposición 5 se puede decir que $S_m(t)S(t)$ converge uniformemente. Por esto resulta lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t)$$

Definición 7. *Para todo $t \in [0,T]$, se define $p(i,t) = ie^{rt}n(i,t)$ y la función generadora de probabilidad asociada a $p(i,t)$ es $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} p(i,t)s^i = \sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i$ para $|s| \leq 1$.*

Proposición 9. *Si $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i$ para $t \in [0,T]$, entonces se cumple:*

$$\frac{s\partial G}{\partial s} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{rt} n(i,t)s^i$$

$$\frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 n(i,t)s^i\right)$$

.

Prueba: Inicialmente se calculan las derivadas parciales con respecto a s de $G(t,s)$ y $G^2(t,s)$, con el fin de obtener:

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{rt} n(i,t)s^{i-1}$$

$$\frac{\partial G^2}{\partial s} = 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{rt} n(i,t)s^{i-1}\right)$$

Luego, es procedente multiplicar $\frac{\partial G}{\partial s}$ por s y $\frac{\partial G^2}{\partial s}$ por $\frac{se^{-rt}}{2}$, para obtener:

$$\frac{s\partial G}{\partial s} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{rt} n(i,t)s^i$$

$$\frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} i^2 n(i,t)s^i\right)$$

□

Proposición 10. *Si $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i$ para $t \in [0,T]$, entonces la ecuación (3-11) se puede reescribir en términos de $G(t,s)$ y sus derivadas parciales respecto a s como:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t) i s^i e^{rt} = \frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s} - e^{-rt} s \frac{\partial G}{\partial s} - rG \tag{3-13}$$

Prueba: La ecuación (3-11) se multiplica por is^ie^{rt} y se tiene lo que sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)is^ie^{rt} =&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}j(i-j)n(j,t)n(i-j,t)is^ie^{rt}\\ &-\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^ie^{rt}\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)is^ie^{rt}\end{aligned}$$

Para simplificar esto, se deben realizar algunas operaciones, primero se comienza sumando y restando j en la ecuación anterior en el primer término del lado derecho de la igualdad para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)is^ie^{rt} =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j+j)j(i-j)n(j,t)n(i-j,t)s^ie^{rt}\\ &-\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^ie^{rt}\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)is^ie^{rt}\end{aligned}$$

Ahora, como $s^i = s^{i-j}s^j$, se llega a:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)is^ie^{rt} =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j+j)j(i-j)n(j,t)n(i-j,t)s^{i-j}s^je^{rt}\\ &-\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^ie^{rt}\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)is^ie^{rt}\end{aligned}$$

Posteriormente, se rompen los paréntesis del primer término del lado derecho y se agrupa convenientemente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)is^ie^{rt} =&\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[(i-j)^2n(i-j,t)s^{i-j}\right]\left[jn(j,t)s^j\right]\\ &+\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[(i-j)n(i-j,t)s^{i-j}\right]\left[j^2n(j,t)s^j\right]\\ &-\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^ie^{rt}\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)-\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)is^ie^{rt}\end{aligned} \tag{3-14}$$

Finalmente, se usa el teorema de Cauchy para el producto de series con $a_{i-j} = (i-j)^2n(i-j,t)s^{i-j}$, $b_j = jn(j,t)s^j$, $c_{i-j} = (i-j)n(i-j,t)s^{i-j}$ y $d_j = j^2n(j,t)s^j$, en los primeros dos términos del lado derecho, los cuales se reescriben respectivamente como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[(i-j)^2n(i-j,t)s^{i-j}\right]\left[jn(j,t)s^j\right]=\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^i\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i$$
$$\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[(i-j)n(i-j,t)s^{i-j}\right]\left[j^2n(j,t)s^j\right]=\frac{1}{2}e^{rt}\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i\sum_{i=1}^{\infty}i^2n(i,t)s^i$$

Teniendo en cuenta la definición 7 y la proposición 9, la ecuación (3-14) puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)is^ie^{rt}=\frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s}-e^{-rt}s\frac{\partial G}{\partial s}-rG$$

□

Proposición 11. *Si* $G(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}ie^{rt}n(i,t)s^i$ *para* $t\in[0,T]$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\tfrac{dn(i,t)}{dt}=\tfrac{\partial G}{\partial t}-rG \qquad y \qquad \tfrac{\partial G}{\partial t}=se^{-rt}\tfrac{\partial G}{\partial s}\left(G-1\right)$$

Prueba: Se comienza derivando parcialmente a $G(t,s)$ respecto a t para obtener lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}n(i,t)s^i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}ire^{rt}n(i,t)s^i+\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\frac{dn(i,t)}{dt}$$
$$\frac{\partial G}{\partial t}=r\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}n(i,t)s^i+\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\frac{dn(i,t)}{dt}$$

Utilizando la definición de $G(t,s)$, lo anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=rG+\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\frac{dn(i,t)}{dt}$$

Despejando $\sum\limits_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\frac{dn(i,t)}{dt}$ del anterior resultado se obtiene la primera ecuación que se quería demostrar.

$$\sum_{i=1}^{\infty}ie^{rt}s^i\frac{dn(i,t)}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}-rG$$

Para encontrar la segunda ecuación es procedente hacer el cambio de la serie y la derivada de $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)$, y con la proposición 11, la ecuación (3-13) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial t} - rG &= \frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s} - e^{-rt}s\frac{\partial G}{\partial s} - rG \\
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{se^{-rt}}{2}\frac{\partial G^2}{\partial s} - e^{-rt}s\frac{\partial G}{\partial s} \\
\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{se^{-rt}}{2}\frac{2G\partial G}{\partial s} - e^{-rt}s\frac{\partial G}{\partial s} \\
\frac{\partial G}{\partial t} &= se^{-rt}\frac{\partial G}{\partial s}\left(G-1\right)
\end{aligned}
$$

Lo anterior completa la demostración de la proposición. □

Proposición 12. *Si* $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} ie^{rt}n(i,t)s^i$ *para* $t \in [0,T]$*, entonces la solución a la ecuación diferencial* $\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-rt}\frac{\partial G}{\partial s}\left(G-1\right)$ *con condición inicial* $G(t,0) = 1$ *y* $G(0,s) = s$*, se escribe implícitamente como:* $G = se^{\frac{1}{r}(G-1)(1-e^{-rt})}$*, la cual es única.*

Prueba: Para determinar la solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial G}{\partial t} = se^{-rt}\frac{\partial G}{\partial s}\left(G-1\right)$, usando el método de las características [12], se empieza reescribiendo esta ecuación de la siguiente manera:

$$
\frac{\partial G}{\partial t} + \left(1-G\right)se^{-rt}\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \tag{3-15}
$$

Para usar el método de las características es necesario definir las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
a(t,s,G) &= 1 & \qquad b(t,s,G) &= (1-G)se^{-rt} & \qquad c(t,s,G) &= 0 \\
x_t(t) &= 1 & y_t(t) &= (1-G)se^{-rt} & u_t(t,s) &= 0 \\
x(0,s) &= 0 & y(0,s) &= s & u(0,s) &= s
\end{aligned}
$$

Con estas funciones es posible calcular $\frac{dy}{dx}$, para obtener una ecuación diferencial de y en términos de x que se resuelve por variables separables de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = \frac{(1-G)ye^{-rx}}{1} = (1-G)ye^{-rx} \\
&\frac{1}{y}dy = (1-G)e^{-rx}dx \\
&ln(y) = \frac{(1-G)e^{-rx}}{-r} + c \\
&y = e^{\frac{(1-G)e^{-rx}}{-r}+c} \\
&y = Ae^{\frac{(1-G)e^{-rx}}{-r}} = Ae^{\frac{(G-1)e^{-rx}}{r}}
\end{aligned}
$$

Como $y(0,s) = s$, entonces $A = se^{-\frac{1}{r}(G-1)}$, por lo tanto, $y = se^{-\frac{1}{r}(G-1)}e^{\frac{(G-1)e^{-rt}}{r}} = se^{\frac{1}{r}(G-1)(e^{-rt}-1)}$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales de $G(t,s)$, la solución de la ecuación diferencial (3-15) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
s &= Ge^{\frac{1}{r}(G-1)(e^{-rt}-1)} \\
G &= se^{-\frac{1}{r}(G-1)(e^{-rt}-1)} \\
G &= se^{\frac{1}{r}(G-1)(1-e^{-rt})}
\end{aligned}
$$

Finalmente, el siguiente jacobiano permite determinar que la solución es única, ya que, este resulta ser diferente de cero.

$$
J = \begin{vmatrix} a(t,s,G) & b(t,s,G) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1-G)se^{-rt} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0
$$

Por todo lo anterior, la solución de la ecuación (3-15) es única y definida implícitamente como:

$$
G(t,s) = se^{\frac{1}{r}(G-1)(1-e^{-rt})} \tag{3-16}
$$

$\square$

Proposición 13. *Para $i \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$ la solución de la ecuación (3-10) está dada por:*

$$
n(i,t) = \frac{1}{i}e^{-rt}\frac{(\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i)^{i-1}e^{-\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i}}{i!}
$$

Prueba: Teniendo en cuenta la definición 5 y la ecuación (3-16), se puede afirmar que $G(t,s)$ tiene la forma de una función generadora de probabilidades de una distribución de Borel con parámetro $\lambda = \frac{1}{r}(1-e^{-rt})$, con $0 \leq t, \lambda \leq 1$ y r cualquier valor, así la función de masa de probabilidad se escribe como:

$$
\begin{aligned}
p(i,t) &= \frac{(\lambda i)^{i-1}e^{-\lambda i}}{i!} \\
p(i,t) &= \frac{(\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i)^{i-1}e^{-\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i}}{i!}
\end{aligned}
$$

Finalmente, con la definición 7 se llega a que, $n(i,t) = \frac{1}{i}e^{-rt}p(i,t)$ y reemplazando $p(i,t)$ se encuentra la solución $n(i,t)$ para el núcleo $K(i,j) = ij$ escrita como sigue:

$$
n(i,t) = \frac{1}{i}e^{-rt}\frac{(\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i)^{i-1}e^{-\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i}}{i!} \quad \text{Para } i \in \mathbb{N} \text{ y } t \in [0,1]
$$

$\square$

La proposición anterior implícitamente indica que la solución $n(i,t)$ existe y es única.

Por último, es posible ver que cuando $r \to 0$ las soluciones del problema clásico se recuperan de la siguiente manera:

$$\lim_{r\to 0} n(i,t) = \lim_{r\to 0} e^{-rt}\frac{(\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i)^{i-1}e^{-\frac{1}{r}(1-e^{-rt})i}}{i\cdot i!}$$

Aplicando la regla de L'Hospital en $\frac{1}{r}(1-e^{-rt})$ se llega a lo siguiente:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(1-e^{-rt}) = \lim_{r\to 0}\frac{te^{-rt}}{1} = t$$

Por lo tanto, si $r \to 0$ entonces, $n(i,t) = \frac{(ti)^{i-1}e^{-ti}}{i\cdot i!}$, la cual es la solución del núcleo $K(i,j) = ij$ en la ecuación clásica.

3.4. Núcleo $K(i,j) = i + j$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$

Reemplazando este núcleo en la ecuación (1-2), esta queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}n(i,t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}(j+i-j)n(j,t)n(i-j,t) - n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}(j+i)n(j,t) - rn(i,t)\\&n(i,0) = \delta_1(i), i \geq 1\end{aligned} \tag{3-17}$$

Al igual que los núcleos anteriores, para encontrar la solución de esta ecuación se tiene en cuenta la sección de preliminares y el siguiente proceso:

(i) Se prueba que es posible intercambiar la serie con la derivada.

(ii) Se define una función de probabilidad $p(i,t)$ y su función generadora de probabilidades.

(iii) La ecuación (3-17) se multiplica por $s^i e^{rt+\frac{1}{r}(1-e^{-rt})}$ y se suma de $i = 1$ hasta ∞, esto con el fin de obtener una expresión de $G(t,s)$, la función generadora de probabilidad de $p(i,t)$.

(iv) Se encuentra $n(i,t)$, la solución de la ecuación (3-17).

Se comienza sumando de $i = 1$ hasta ∞ ambos lados de la ecuación (3-17) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}jn(j,t)n(i-j,t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)n(j,t)n(i-j,t)\\&-\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t) - \sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\end{aligned} \tag{3-18}$$

Utilizando el teorema del producto de Cauchy para el primer y segundo término del lado derecho con $a_{i-j} = n(i-j,t)$, $b_j = jn(j,t)$, $c_{i-j} = (i-j)n(i-j,t)$ y $d_j = n(j,t)$, la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)\\&-\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t) - \sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)\end{aligned} \tag{3-19}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}n(i,t) &= \sum_{i=1}^{m} in(i,t)\sum_{j=1}^{m} n(j,t) - \sum_{i=1}^{m} n(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} jn(j,t)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} in(i,t)\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r\sum_{i=1}^{m} n(i,t)\end{aligned} \tag{3-20}$$

Haciendo uso de la nora 5 la ecuación (3-20) se puede escribir en términos de $S_m(t) = \sum_{i=1}^{m} in(i,t)$, $f_m(t) = \sum_{i=1}^{m} n(i,t)$, $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ de la siguiente manera:

$$f_m'(t) = S_m(t)\left(f_m(t) - f(t)\right) - f_m(t)e^{-rt} - rf_m(t) \tag{3-21}$$

Proposición 14. *Si $f_m(t) = \sum_{i=1}^{m} n(i,t)$ y $S_m(t) = \sum_{i=1}^{m} in(i,t)$, entonces $S_m(t)f_m(t)$ converge uniformemente.*

Prueba: Como $f_m(t)$, $S_m(t)$, $S(t)$ y $f(t)$ son funciones derivables, se puede afirmar que $f_m'(t)$ y $S_m'(t)$ son funciones continuas y que existe una constante $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq \frac{M}{2}$ y $|S(t)| \leq \frac{M}{2}$ para todo $t \in [0,T]$. Además teniendo en cuenta que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r, m \in \mathbb{N}$ con $r \geq m > N$ se tiene que $|f_r(t) - f_m(t)| < \frac{\epsilon}{M}$ y $|S_r(t) - S_m(t)| < \frac{\epsilon}{M}$, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}|S_r(t)f_r(t) - S_m(t)f_m(t)| &= |S_r(t)f_r(t) - S_r(t)f_m(t) - S_m(t)f_m(t) + S_r(t)f_m(t)|\\ |S_r(t)f_r(t) - S_m(t)f_m(t)| &= |S_r(t)\left(f_r(t) - f_m(t)\right) + f_m(t)\left(S_r(t) - S_m(t)\right)|\\ &\leq |S_r(t)|\,|f_r(t) - f_m(t)| + |f_m(t)|\,|S_r(t) - S_m(t)|\\ &\leq |S(t)|\,|f_r(t) - f_m(t)| + |f(t)|\,|S_r(t) - S_m(t)|\\ &\leq \frac{M}{2} * \frac{\epsilon}{M} + \frac{M}{2} * \frac{\epsilon}{M}\\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $S_m(t)f_m(t)$ es uniformemente de Cauchy y por esto $S_m(t)f_m(t)$ converge uniformemente. □

Usando la proposición 14 y los lemas 2 y 3 se puede decir que, la ecuación (3-21) converge uniformemente y por el teorema 2, la sucesión $f_m(t)$ converge uniformemente y $\left(\lim_{m\to\infty} f_m\right)' = \lim_{m\to\infty} f_m'$.

Con todo esto es posible concluir que se puede intercambiar la serie con la derivada de

(3-20) así:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t) \tag{3-22}$$

A continuación, se reescribe la ecuación (3-18) de tal forma que se pueda obtener una ecuación diferencial con su respectiva solución, la cual permite definir $p(i,t)$.

Se comienza reemplazando la nota 5 en la ecuación (3-19) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dt} n(i,t) = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) \\ & - e^{-rt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) - e^{-rt}\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)\end{aligned}$$

Utlizando (3-22) se encuentra lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) &= e^{-rt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) - e^{-rt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) - e^{-rt}\sum_{j=1}^{\infty} n(j,t) - r\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) \\ \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) &= \left(-r - e^{-rt}\right)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) = \left(-r - e^{-rt}\right)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t) \tag{3-23}$$

Proposición 15. *Si* $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ *para* $t \in [0,T]$ *con* $y(0) = 1$, *entonces* $y(t) = e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}$.

Prueba: Como $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} n(i,t)$ y reemplazando esto en (3-23), se tiene la siguiente ecuación $y'(t) = \left(-r - e^{-rt}\right) y(t)$, la cual se puede resolver por variables separables como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &= \left(-r - e^{-rt}\right) y(t) \\
dy &= \left(-r - e^{-rt}\right) ydt \\
\frac{dy}{y} &= \left(-r - e^{-rt}\right) dt \\
ln(y) &= \left(-rt + \frac{1}{r}e^{-rt}\right) + M \\
y &= Me^{-rt+\frac{1}{r}e^{-rt}}
\end{aligned}$$

Por la condición inicial se encuentra que $M = e^{-\frac{1}{r}}$. Así $y(t) = e^{-\frac{1}{r}}e^{-rt+\frac{1}{r}e^{-rt}} = e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}$. □

Definición 8. *Para todo $t \in [0,T]$ se define $p(i,t) = e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}n(i,t)$, y la función generadora de probabilidad asociada a $p(i,t)$ es $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} p(i,t)s^i = \sum_{i=1}^{\infty} e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}n(i,t)s^i$ para $|s| \leq 1$.*

Nota 6. *Si $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}n(i,t)s^i = A(t)\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i$, con $A(t) = e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}$ una expresión que depende de t con $t \in [0,T]$, entonces derivando la función generadora de probabilidades respecto a t y s, se encuentra lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G}{\partial t} = \left(r + e^{-rt}\right) A(t) \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i + A(t)\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i \\
&\longrightarrow A(t)\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i = \frac{\partial G}{\partial t} - \left(r + e^{-rt}\right) A(t) \sum_{i=1}^{\infty} n(i,t)s^i \\
&\frac{\partial G}{\partial s} = A(t)\sum_{i=1}^{\infty} in(i,t)s^{i-1}
\end{aligned}$$

Proposición 16. *Si $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}n(i,t)s^i$ para $t \in [0,T]$, entonces la ecuación (3-17) se puede reescribir en términos de $G(t,s)$ y sus derivadas parciales respecto a s como:*

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (1 - G)\, e^{-rt+\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)} s\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \tag{3-24}$$

Prueba: Se comienza multiplicando la ecuación (3-17) por $s^i e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)}$, sumando de $i = 1$ hasta ∞ y con $A(t)$ definida como en la nota 6 se tiene:

$$A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)s^i=\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}in(j,t)n(i-j,t)s^i-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)$$
$$-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)s^i$$

Sumando y restando j en el primer término del lado derecho, para simplificar de la siguiente manera:

$$A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)s^i=\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j+j)n(j,t)n(i-j,t)s^{i-j}s^j-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)$$
$$-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)s^i$$

A continuación se agrupa de manera conveniente y se usa el producto de Cauchy en el primer y segundo término con $a_{i-j}=(i-j)n(i-j,t)s^{i-j}$, $b_j=n(j,t)s^j$, $d_{i-j}=n(i-j,t)s^{i-j}$ y $c_j=jn(j,t)s^j$.

$$A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)s^i=\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[(i-j)n(i-j,t)s^{i-j}\right]\left[s^jn(j,t)\right]$$
$$+\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\left[jn(j,t)s^j\right]\left[s^{i-j}n(i-j,t)\right]-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}jn(j,t)$$
$$-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)s^i$$

$$A(t)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}n(i,t)s^i=\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}is^in(i,t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)s^i+\frac{1}{2}A(t)\sum_{i=1}^{\infty}is^in(i,t)\sum_{i=1}^{\infty}n(i,t)s^i$$
$$-A(t)e^{-rt}\sum_{i=1}^{\infty}s^in(i,t)-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}in(i,t)s^i\sum_{j=1}^{\infty}n(j,t)-A(t)\sum_{i=1}^{\infty}rn(i,t)s^i \tag{3-25}$$

Al reemplazar $G(t,s)$ de la definición 8 y las derivadas de la nota 6 en la ecuación (3-25) se encuentra lo siguiente:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \left(r + e^{-rt}\right) G = \frac{s}{A(t)}\frac{\partial G}{\partial s} G - e^{-rt} G - \frac{s}{A(t)}\frac{\partial G}{\partial s} - rG$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - rG - e^{-rt} G = \frac{s}{A(t)} s\frac{\partial G}{\partial s} G - e^{-rt} G - \frac{s}{A(t)}\frac{\partial G}{\partial s} - rG$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{s}{A}\frac{\partial G}{\partial s}(G-1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (1-G)\, e^{-rt+\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)} s\frac{\partial G}{\partial s} = 0 \qquad \text{Para} \quad G(t,0)=1, G(0,s)=s$$

□

Proposición 17. *Si* $G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{rt+\frac{1}{r}\left(1-e^{-rt}\right)} n(i,t) s^i$ *para* $t \in [0,T]$*, entonces la solución a la ecuación diferencial* $\frac{\partial G}{\partial t} + (1-G)\, e^{-rt+\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)} s\frac{\partial G}{\partial s} = 0$ *con condición inicial* $G(t,0) = 1$ *y* $G(0,s) = s$ *se escribe implícitamente como:* $G = se^{(G-1)\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]}$*, la cual es única.*

Prueba: Para determinar la solución de la ecuación diferencial anterior se usa el método de las características [12], se empieza definiendo las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rrr} a(t,s,G) = 1 & b(t,s,G) = (1-G)\, se^{-rt+\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)} & c(x,y,G) = 0 \\ x_t = 1 & y_t = (1-G)\, ye^{-rx+\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}(1-G)ye^{-rx} & u_t(t,s) = 0 \\ x(0,s) = 0 & y(0,s) = s & u(0,s) = s \end{array}$$

Con estas funciones es posible calcular $\frac{dy}{dx}$ para obtener una ecuación diferencial de y en términos de x, la cual se resuelve por variables separables de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-G)\, ye^{-rx+\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}}{1} = (1-G)\, ye^{-rx+\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}$$

$$\frac{1}{y} dy = (1-G)\, e^{-rx+\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)} dx$$

Para resolver la integral del lado derecho se hace el cambio de variable, $u = e^{-rx} - 1$ y reemplazando esto se obtiene:

$$\int (1-G)e^{-rx+\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}dx$$
$$(1-G)\int e^{-rx}e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}dx$$
$$(1-G)\int e^{-rx}e^{\frac{1}{r}u}\frac{du}{-re^{-rx}} = -(1-G)\int \frac{1}{r}e^{\frac{1}{r}u}du$$
$$-(1-G)\,e^{\frac{1}{r}u} + i = -(1-G)\,e^{\frac{1}{r}u} + C$$
$$-(1-G)e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)} + C$$

Por lo anterior, se encuentra lo que sigue:

$$\ln y = -(1-G)\,e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)} + C$$
$$y = Ae^{-(1-G)e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}}$$

Como $y(0) = s$, entonces, $A = se^{(1-G)}$ por lo tanto, $y = se^{(1-G)}e^{-(1-G)e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rx}-1\right)}}$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $G(t,0) = 1$ y $G(0,s) = s$, la solución de la ecuación diferencial (3-17) es la siguiente:

$$s = Ge^{(1-G)\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]}$$
$$G = se^{(G-1)\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]}$$

Finalmente, el determinante jacobiano mostrado a continuación permite determinar que la solución es única, ya que este resulta ser diferente de cero.

$$J = \begin{vmatrix} a(x,y,G) & b(x,y,G) \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1-G)se^{-rt+\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por todo lo anterior, la solución de la ecuación (3-17) es única y definida implícitamente como:

$$G(t,s) = se^{(G-1)\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]} \tag{3-26}$$

$\square$

Proposición 18. *Para $i \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$ la solución de la ecuación (3-17) está dada por:*

$$n(i,t) = e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}\frac{\left(\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i\right)^{i-1}e^{-\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i}}{i!}$$

Prueba: Teniendo en cuenta la definición 5 y la ecuación (3-26), se puede afirmar que, $G(t,s)$ tiene la forma de una función generadora de probabilidad de una distribución de Borel con parámetro $\lambda = 1 - e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}$, con $0 \leq t, \lambda \leq 1$ y r cualquier valor, así la función de masa de probabilidad se escribe como:

$$p(i,t) = \frac{(\lambda i)^{i-1}e^{-\lambda i}}{i!} = \frac{\left(\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i\right)^{i-1}e^{-\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i}}{i!}$$

Finalmente, con la definición 8 se sabe que, $n(i,t) = p(i,t)e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}$ y reemplazando $p(i,t)$ se encuentra la solución $n(i,t)$ para el núcleo $K(i,j) = ij$ escrita como sigue:

$$n(i,t) = e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}\frac{\left(\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i\right)^{i-1}e^{-\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i}}{i!} \text{ Para } i \in \mathbb{N} \text{ y } t \in [0,1]$$

□

La proposición anterior implícitamente indica que la solución $n(i,t)$ existe y es única.

Por último, igual que el núcleo anterior es posible ver que cuando $r \to 0$ las soluciones del problema clásico se recuperan de la siguiente manera:

$$\lim_{r\to 0} n(i,t) = \lim_{r\to 0} e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)-rt}\frac{\left(\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i\right)^{i-1}e^{-\left[1-e^{\frac{1}{r}\left(e^{-rt}-1\right)}\right]i}}{i!}$$

Aplicando la regla de L'Hospital en $\frac{1}{r}(e^{-rt}-1)$ se llega a lo siguiente:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(e^{-rt}-1) = \lim_{r\to 0}\frac{-te^{-rt}}{1} = -t$$

Por lo anterior, si $r \to 0$ entonces, $n(i,t) = e^{-t}\frac{\left((1-e^{-t})i\right)^{i-1}e^{-\left[1-e^{-t}\right]i}}{i!}$, la cual es la solución del núcleo $K(i,j) = ij$ en la ecuación clásica.

4 Posible aplicación de la ecuación de Smoluchowski en el ámbito actuarial

La ecuación de Smoluchowski se puede usar para hacer una descripción de la evolución temporal de los glóbulos blancos en el cuerpo de una persona. Esta evolución hace referencia al conteo de glóbulos blancos en la sangre en un tiempo t.

Los glóbulos blancos forman parte del sistema inmunitario, los cuales ayudan al cuerpo a combatir infecciones y algunas enfermedades asociadas con un conteo alto o bajo de dichos glóbulos. Cuando hay enfermades como: leucemia, infecciones bacterianas o virales, entre otras, el cuerpo se encarga de producir más glóbulos blancos para atacar las bacterias, los virus u otras sustancias extrañas que hayan causado la afección.

Por otro lado, cuando se tiene alguna enfermedad como: VIH, sida, linfoma y otras, el cuerpo produce menos glóbulos blancos de los que necesita. Otra de las causas para tener un conteo bajo de glóbulos blancos es debido a la reacción de ciertos medicamentos, entre ellos la quimioterapia, los antibióticos y otros.

De esta manera haciendo un conteo de glóbulos blancos mediante la ecuación de Smoluchowski se puede, por ejemplo, predecir en que tiempo t un individuo puede pasar por las fases inicial, intermedia y final de una enfermedad, lo que conlleva a calcular por ejemplo el valor de una prima de seguros que dicho individuo debería pagar a lo largo del tiempo mientras evoluciona su enfermedad para cubrir gastos médicos, entre otros. Es decir, la ecuación de Smoluchowski nos permitiría calcular de una manera más precisa este tipo de primas u otras asociadas a sector salud.

Un trabajo similar al anteriormente descrito se ha hecho con la ecuación que describe el modelo epidemiológico SIR (ver [6]); pero, nunca con la ecuación de Smoluchowski. Esta aplicación permitiría el desarrollo de otro trabajo de maestría en donde o bien se espera usar bases de datos reales que permitan estimar los parámetros convenientes de la ecuación de Smoluchowski para la problemática planteada o bien bajo supuestos fenomenológicos usar alguna de las distribuciones asociadas a las funciones generatrices usadas en alguno de los núcleos estudiados en este trabajo.

5 Conclusiones

El primer objetivo específico que se planteó en el trabajo es mostrar las soluciones explícitas para la ecuación (1-2). Este objetivo se logra para los tres núcleos, constante $K(i,j) = 1$, aditivo $K(i,j) = i + j$ y multiplicativo $K(i,j) = ij$, adicionalmente, estas soluciones se basan en la resolución de una ecuación diferencial con las distribuciones de probabilidad y el método de las características.

El segundo objetivo específico planteado es la relación y comparación de las soluciones explícitas de la ecuación (1-2) con la ecuación clásica de Smoluchowski, el cumplimiento de esto se logra pues cuando $r \to 0$ en las soluciones explícitas de cada núcleo se recuperan las soluciones del problema clásico.

El último objetivo específico hacía referencia a explorar las posibles aplicaciones en el ámbio actuarial. En el capítulo 4 se desbribe una posible aplicación en cuanto al conteo de glóbulos blancos en la sangre de una persona en un tiempo t, este conteo permite conocer o predecir por medio de la ecuación de Smoluchowski si la persona con la afección o enfermedad se encuentra en una etapa inicial o terminal y con esto realizar de forma más acertada el cálculo de la prima de un seguro para gastos médicos.

Finalmente, el objetivo general se cumple, pues en cada uno de los núcleos se prueba existencia y unicidad de las soluciones explícitas. Para el núcleo $K(j,i) = 1$, la solución se asocia con una distribución geométrica y dada la unicidad de la función generadora de probabilidad $G(t,s)$, entonces la solución es única y existe. Por último, para los núcleos $K(i,j) = ij$ y $K(i,j) = i + j$, se comprueba la unicidad para $G(t,s)$ por medio de un jacobiano y la existencia se da debido a que $G(t,s)$ sigue una distribución de Borel, lo cual implica que la solución $n(i,t)$ para estos núcleos es única y existe.

Bibliografía

[1] Aldous, D.J: Deterministic and Stochastic Models for Coalescence (Aggregation and Coagulation): A Review of the Mean-Field Theory for Probabilists. En: *Bernoulli* 5 (1999), p. 3–48

[2] Apostol, T: *Análisis Matemático.* 2nd ed.

[3] Banakar, Z. ; Tavana, M. ; Huff, B. ; Caprio, D. D.: A bank merger predictive model using the smoluchowski stochastic coagulation equation and reverse engineering. En: *International Journal of Bank Marketing* , p. 634–662.

[4] Bartle, R. G. ; Sherbert, D. R.: *Introduction to Real Analysis.* 4th ed. 2005. – 25–38 p.

[5] Deaconu, M. ; Tanré, E.: Smoluchowski's coagulation equation: probabilistic interpretation of solutions for constant, additive and multiplicative kernels. En: *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, XXIX.* (2000), p. 549–579

[6] Feng, R. ; Garrido, J.: Actuarial Applications of Epidemiological Models. En: *North American Actuarial Journal* (2011)

[7] Jourdain, B.: Nonlinear processes associated with the discrete Smoluchowski coagulationfragmentation equations with strong fragmentation. En: *J. Math. Anal. Appl 192* (1995), p. 892–914

[8] Jourdain, B.: Uniquenesss via probabilistic interpretation for the discrete coagulation fragmentation equation. En: *Comm. Math. Sci 1* (2004), p. 75–83

[9] Kuehn, S: Smoluchowski's discrete coagulation equation with forcing. Nonlinear Differ. Equ. Appl., 2019, p. 17–26

[10] Martin, J.: Lecture notes for Part A Probability. En: *Oxford, Michaelmas* (2017)

[11] Miranda, D. ; Ortiz, D.: *Análisis de ecuaciones ordinarias.* Universidad Del BÍO-BÍO, Tesis de Grado

[12] Pinchover, Y. ; Rubinstein, J.: *An Introduction to Partial Differential Equations.* 2005. – 25–38 p.

[13] Smoluchowski, M. V.: *Drei Vortrage uber Diffusion, Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. Zeitschrift fur Physik.* Vol. 17. 1916. – 557–585 p.

[14] Smoluchowski, M. V.: *Versuch einer mathematischen theorie der koagulationskinetik kolloider losungen. Zeitschrift fuer physikalische Chemie*. Vol. 92. 2010. – 129–168 p.

[15] Tanner, J. C.: A derivation of the Borel distribution. En: *Biometrika* 48 (1961), p. 222–224