La función zeta de Riemann y su relación con otras funciones aritméticas

Trabajo de Grado

Autor:

Andrés Diego
CASTAÑEDA GARCÍA

Dirigido por:

PhD. Julián Andrés
AGREDO ECHEVERRY

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Programa de Matemáticas
UNIVERSIDAD ESCUELA COLOMBIANA DE
INGENIERÍA JULIO GARAVITO

MAYO DE 2023

Resumen

En este texto se estudiará la relación que tiene la función zeta de Riemann con funciones aritméticas, para esto se usarán herramientas de la teoría de cuerpos, análisis complejos y teoría de números. La primera parte del documento se centra en explicar la estructura de un espacio de probabibilidad algebraico, sus propiedades, ejemplos y como relacionar dos de estos espacios. Con lo anterior será posible encontrar un $\star$-homomorfismo entre el espacio de las funciones aritméticas y el espacio de las series de Dirichlet, como la función zeta de Riemann está definida inicialmente como una serie de Dirichlet en el semiplano $\Re(s) > 1$ esto nos permitirá asociar a la función zeta con la función aritmética u. En la última parte del documento se presentan ,en primera instancia, resultados conocidos; pero su deducción será realizada desde el enfoque de los espacios de probabibilidad algebraicos. Luego de esto se trabajará con funciones aritméticas no convencionales lo cual permite encontrar nuevas expresiones e igualdades que involucran a la función zeta.

Palabras clave: Función zeta de Riemann, espacio de probabilidad algebraico, función aritmética, serie de Dirichlet.

Abstract

In this text we will study the relation of the Riemann zeta function with arithmetic functions, for this we will use tools of the theory of bodies, complex analyses and number theory. The first part of the paper focuses on explaining the structure of an algebraic probability space, its properties, examples and how to relate two of these spaces. With the above it will be possible to find a $\star$-homomorphism between the space of the arithmetic functions and the space of the Dirichlet series, as the Riemann zeta function is initially defined as a Dirichlet series in the semiplane $\Re(s) > 1$ this will allow us to associate the zeta function with the arithmetic function u. In the last part of the document are shown ,in the first instance, known results; but their deduction will be made from the approach of algebraic probabilities spaces. This is followed by working with unconventional arithmetic functions, which allows new expressions and equalities involving the zeta function to be found.

Key words: Riemann zeta function, algebraic probability space, arithmetic function, Dirichlet series.

Introducción

La hipótesis de Riemann, formulada por primera vez por Bernhard Riemann en su tesis de doctorado: "Sobre los números primos menores que una magnitud dada" en 1859, es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, en la que se plantea que todos los ceros no-triviales de la función ζ están en la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Esta se presentó al desarrollar una fórmula explícita para calcular la cantidad de primos menores que x. A pesar de esto, Riemann no intentó dar una demostración ya que no era esencial para el propósito central de su artículo, pero sabía que los ceros no triviales de la función zeta están distribuidos en torno a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$ y que todos los ceros no triviales debían estar en el rango $0 \leq \Re(s) \leq 1$. También en su tesis presenta una fórmula para expresar el comportamiento de la cantidad de ceros en una región acotada de la banda crítica, la cual no sería demostrada hasta 1905 por von Mangoldt. En 1900, Hilbert incluyó la hipótesis de Riemann en su famosa lista de los 23 problemas no resueltos y es el único problema de los que propuso Hilbert que está en el premio del milenio del Instituto Clay de Matemáticas. En 1914, Hardy demostró que existe un número infinito de ceros sobre la recta crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$; sin embargo, todavía era posible que un número infinito de los ceros no-triviales se encontraran en algún otro lugar de la banda $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Los ceros de la función zeta y los números primos satisfacen ciertas propiedades de dualidad que muestran, usando análisis de Fourier, que los ceros de la función zeta de Riemann pueden interpretarse como frecuencias armónicas en la distribución de los números primos. Por esta relación, la hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática actual.

Índice

1. Preliminares

A continuación se presentan los resultados más relevantes y que serán usados en la parte principal del texto. Entre estos tenemos resultados relacionados con funciones de valor complejo, integrales de Lebesgue, series de Fourier y transformada de Mellin. Se dejan las referencias a los libros, que se encuentran en la bibliografía, donde se pueden encontrar las demostraciones.

1.1. Funciones complejas

Teorema 1.1. *Sea $h(t,z)$ una función a valor complejo continua, definida para $t \in [a,b]$ y $z \in D \subset \mathbb{C}$, donde D es un dominio. Si para cada t fijo, $h(t,z)$ es analítica en D, entonces*

$$H(z) = \int_a^b h(t,z)dt, \qquad z \in D$$

es analítica en D.

Demostración. Ver [4], p. 121 □

Definición 1.1. *Una sucesión $\{f_i\}$ de funciones sobre un dominio D converge uniformemente a f en E si, para todo i, existe ϵ_i tal que*

$$|f_i(z) - f(z)| \leq \epsilon_i \qquad \forall z \in D$$

donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Teorema 1.2. *Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un dominio D que converge uniformemente a f en D, entonces f es analítica en D*

Demostración. Ver [4], p. 136 □

Teorema 1.3. *Sea γ una curva suave a trozos en el plano complejo. Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones continuas de valor complejo sobre γ y $\{f_j\}$ converge uniformemente a f sobre γ, entonces $\int_\gamma f_j(z)dz$ converge a $\int_\gamma f(z)dz$*

Demostración. Ver [4], p. 153 □

Teorema 1.4. ***(Principio de unicidad)***. *Si f y g son funciones analíticas en un dominio D y $f(z) = g(z)$ para $z \in A \subset D$, donde A es un conjunto con un punto de acumulación, entonces*

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in D$$

Demostración. Ver [4], p. 156 □

Teorema 1.5. *Suponga que $g_k(z) = 1 + h_k(z)$, con $k \geq 1$ son funciones en un conjunto E y existen constantes $M_k > 0$ tales que $\sum M_k$ converge y $|h_k(z)| \leq M_k$ para todo $z \in E$. Entonces $\prod_{k=1}^m g_k(z)$ converge uniformemente en E cuando $m \to \infty$*

Demostración. Ver [4], p.354 □

Definición 1.2. *Una sucesión $\{f_k(z)\}$ de funciones analíticas en un dominio D converge normalmente a la función analítica $f(z)$ en D si converge uniformemente a $f(z)$ en cualquier disco cerrado contenido en D.*

Teorema 1.6. *Sea $g_k(z)$ con $k \geq 1$, una función analítica en un dominio D, tal que $\prod_{k=1}^{m} g_k(z)$ converge normalmente en D a $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g_k(z)$. Entonces*

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}$$

con $z \in D$, donde la suma converge normalmente en D.

Demostración. Ver [4], p.355 □

2. Definición de la función Zeta y sus continuaciones analíticas

Sea $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ un número complejo . Consideremos la serie de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... \tag{1}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} = \begin{cases} \ln x|_1^{\infty} \text{ si } \sigma = 1 \\ \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \text{ si } \sigma \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty \text{ si } \sigma \leq 1 \\ \frac{1}{\sigma-1} \text{ si } \sigma > 1 \end{cases}$$

Entonces $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma}$ converge si y solo si $\sigma > 1$. Y como $f(x) = \frac{1}{x^\sigma}$ es una función real monótona decreciente, por el criterio de la integral tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right|$$

converge para $\sigma > 1$. Así que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para $\sigma > 1$.
Más aún , (1) converge uniformemente para $\sigma \geq R > 1$ ya que si $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^R} \\ &=\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R} - \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n^R} \\ &= \epsilon_k \end{aligned}$$

Donde $\epsilon_k \to 0$ cuando $k \to \infty$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ converge. Además como $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^R}$ son funciones analíticas para $\Re(s) > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^R}$ define una función analítica en este dominio. Los resultados anteriores se pueden condensar en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *La función*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

Es una función analítica en el dominio $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, que converge absolutamente para $\Re(s) > 1$ y uniformemente para $\Re(s) \geq R$, con $R > 1$. Esta función se conoce como la ***función zeta de Riemann****.*

Teorema 2.2. ***(Producto de Euler)*** *Si $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$ entonces*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

donde el producto se hace sobre todos los primos.

Demostración. Ver [1], p. 5 □

Lema 2.1. *Para $\sigma > 1$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}-1}$ es convergente.*

Demostración. Usaremos el criterio de condensación de Cauchy, por lo cual basta demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\sigma}-1}$ es convergente. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1})^{\sigma}-1}}{\frac{2^n}{(2^n)^{\sigma}-1}} &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{\sigma})^n - 1}{(2^{\sigma})^{n+1} - 1} \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{\sigma}} - \frac{1}{(2^{\sigma})^{n+1}}}{1 - \frac{1}{(2^{\sigma})^{n+1}}} \\
&= \frac{2}{2^{\sigma}}
\end{aligned}$$

y $2^{1-\sigma} < 1$ si y solo si $1 < \sigma$, usando el criterio del cociente se sigue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\sigma}-1}$ es convergente si $1 < \sigma$, por lo tanto lo mismo aplica para $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}-1}$. □

Teorema 2.3. *Si $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$ entonces la sucesión $\left\{\prod_{k=1}^{m} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ donde p_k denota el $k-$ésimo número primo.*

Demostración. Si escribimos $g_k(s) = \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ entonces $g_k(s) = 1 + h_k(s)$ donde $h_k(s) = \dfrac{1}{p_k^s - 1}$, además

$$|h_k(s)| = \left|\frac{1}{p_k^s - 1}\right| \le |\frac{1}{|p_k^s| - 1} = \frac{1}{p_k^{\sigma} - 1}$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\sigma} - 1} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma} - 1}$$

donde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}-1}$ es una serie convergente si $\sigma > 1$, obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^2-1}$ también es convergente, se sigue por el teorema 1.5 que $\left\{\prod_{k=1}^{m} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ para $s = \sigma + it$, con $\{\sigma, t\} \subset \mathbb{R}$ y $\sigma > 1$. □

Corolario 2.1. *Para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$ se tiene que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1}$$

y que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

donde $\Lambda(n)$ es la función de von Mangoldt la cual está definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Las funciones $g_k(s) = \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ son analíticas en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ y en el teorema anterior se mostró que $\left\{\prod_{k=1}^m \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^\infty \dfrac{p_k^s}{p_k^s - 1}$ en este dominio, por lo tanto también converge normalmente en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, del teorema 1.6 se sigue que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$. De lo anterior también se tiene que

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s - 1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s(1 - \frac{1}{p_k^s})} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^s}\left(\frac{1}{p_k^s}\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^{sn}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log p_k}{p_k^{sn}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado. □

Corolario 2.2. *$\zeta(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$*

Demostración. Sea p un primo. Como $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0$ para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ entonces

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \neq 0$$

para todo $s \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ □

Es posible extender la función zeta de Riemann a dominios más amplios, para ver como se pueden obtener estas extensiones ver las referencias [1] y [2], se dejará mencionada la funcional de la función ζ.

Teorema 2.4. *Para $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^+$, la función ζ satisface la ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{3}$$

Demostración. Ver [1], p. 18 □

2.1. Ceros de la función ζ

Por el Corolario 2.2 , para $\Re(s) > 1$, $\zeta(s) \neq 0$. Por otro lado, si $\Re(s) < 0$, por la ecuación funcional tenemos que $2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{s\pi}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s) = 0$ si y solo si $\sin(\frac{s\pi}{2}) = 0$ .Esto se debe a que $\Gamma(z) \neq 0$ para $z \in \mathbb{C}$ y $\zeta(1-s) \neq 0$ cuando $\Re(1-s) > 1$. Luego en esta región, $\zeta(s) = 0$ si $s = -2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. A partir de esto podemos clasificar los ceros de la función ζ en dos:

Definición 2.1. *Los ceros de ζ determinados por la función $\sin(\frac{s\pi}{2})$ son conocidos como los* ***ceros triviales***

Definición 2.2. *Los ceros* ***no-triviales*** *de la función ζ pertenecen a la región $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(s) \leq 1\}$. Esta región se conoce como la* ***región crítica*** *o la* ***banda crítica*** *de la función ζ.*

Teorema 2.5. *Los ceros no-triviales de ζ son simétricos respecto a $\Re(s) = \frac{1}{2}$*

Demostración. Ver [1], p. 21 □

Teorema 2.6. *No hay ceros no-triviales de ζ en la recta $\Re(s) = 1$ ni en la recta $\Re(s) = 0$*

Demostración. Ver [1], p. 23 □

Recapitulando, tenemos que la región libre de ceros no-triviales, señalada en verde en la figura 3, se divide en dos:

1. $\Re(s) \geq 1$, donde no existen ceros de la función ζ
2. $\Re(s) \leq 0$, donde solo existen ceros triviales y estos son de la forma $-2k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$

Más aún, los ceros no triviales poseen una simetría alrededor de la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Resumimos estos hechos en la figura 1.

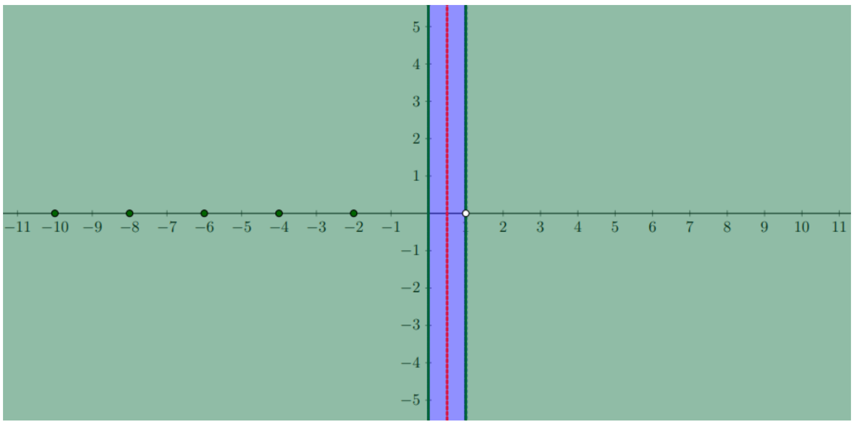

Figura 1:

Conjetura 2.1. ***Hipótesis de Riemann*** *Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ están en la línea crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

3. Funciones aritméticas y series de Dirichlet

Definición 3.1. *Un álgebra $\mathcal{B}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, en el cual una operación binaria ($(a,b) \mapsto ab \in \mathcal{B}$ para todo $a,b \in \mathcal{B}$) llamada multiplicación está definida. La multiplicación satisface la bilinealidad:*

$$(a+b)c = ab + bc \quad , \quad a(b+c) = ab + bc \quad , \quad (\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda ab$$

además se satisface la propiedad asociativa:

$$a(bc) = (ab)c$$

para todo $a,b,c \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Para los fines de este trabajo se asumirá que existe un elemento $1_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ tal que para todo $a \in \mathcal{B}$:

$$a1_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}a = a$$

Este elemento es único y es llamado la identidad. La definición anterior es ligeramente distinta a la convencional ya que en general un álgebra se puede definir sobre un campo arbitrario y puede que $\mathcal{B}$ no posea una unidad.
Un álgebra $\mathcal{B}$ es conmutativa si su multiplicación es conmutativa, es decir, $ab = ba$ para todo $a,b \in \mathcal{B}$. En otro caso el álgebra es llamada no conmutativa.

Definición 3.2. *Un $*$-álgebra es un álgebra $\mathcal{B}$ equipado con una involución definida en $\mathcal{B}$. Una involución es una función $a \mapsto a^*$ definida en $\mathcal{B}$ la cual satisface que*

$$(a+b)^* = a^* + b^* \quad , \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^* \quad , \quad (ab)^* = b^* a^* \quad , \quad (a^*)^* = a$$

para todo $a, \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 3.3. *Un funcional lineal φ definido en un $*-$álgebra $\mathcal{B}$ con valores en $\mathbb{C}$ es llamado:*

I. *positivo si $\varphi(a^*a) \geqslant 0$ para todo $a \in \mathcal{B}$*

II. *normalizado si $\varphi(1_{\mathcal{B}}) = 1$*

III. *un estado si φ es positivo y normalizado.*

Definición 3.4. *Un espacio de probabilidad algebraico es una pareja $(\mathcal{B}, \varphi)$ de un $*$-álgebra $\mathcal{B}$ y un estado φ en él.*

Definición 3.5. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ dos $*$-álgebras una función $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es llamada un $*$-homomorfismo si las siguientes tres condiciones se satisfacen: (i) T es un álgebra homomorfismo, es decir, para todo $a,b \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$,*

$$T(a+b) = T(a) + T(b) \ , \ T(\lambda a) = \lambda T(a) \ , \ T(ab) = T(a)T(b)$$

(ii) T es una $*$-función, es decir, para todo $a \in \mathcal{B}$

$$T(a^*) = T(a)^*$$

y (iii) T preserva la identidad, es decir,

$$T(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{C}}$$

Si $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un $*$-homomorfismo entonces la imagen $T(\mathcal{B})$ es un $*$-subálgebra de $\mathcal{C}$. Sea $(\mathcal{C}, \varphi)$ un espacio de probabilidad algebraico, $\mathcal{B}$ un $*$-álgebra y $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un $*$-homomorfismo, entonces $(\mathcal{B}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad algebraico.

Definición 3.6. *Una función compleja f se dice que es una función aritmética cuando el dominio de esta es el conjunto de los números naturales positivos, es decir $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{C}$.*

A continuación presentaremos algunas de las funciones aritméticas con las que trabajaremos.

Definición 3.7. *Se define la función $\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ de Euler o función indicatriz de Euler a la función que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia el número de naturales menores o iguales que n que son coprimos con n, es decir,*

$$\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : gcd(k, n) = 1, k \leqslant n\}$$

Definición 3.8. *Se define la función $\mu : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ de Möbius como sigue*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^k & si\ n = p_1 p_2 ... p_k \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Definición 3.9. *Se define la función $\Lambda : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ de Mangoldt como sigue*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si\ n = p^k\ para\ algún\ primo\ p\ y\ k \geqslant 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Definición 3.10. *Se define la función $\lambda : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ de Liouville como sigue*

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^{r_1 + ... + r_k} & si\ n = p_1^{r_1} ... p_k^{r_k} \end{cases}$$

Definición 3.11. *Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ se define la función divisor $\sigma_\alpha : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{C}$ como sigue*

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$$

es decir, la suma de la $\alpha-$ésima potencia de los divisores de n. Algunos casos particulares se obtienen cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$. En el primer caso $\sigma_0(n)$ indica el número de divisores de n y en el segundo caso, $\sigma_1(n)$ indica la suma de los divisores de n.

Definición 3.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se definen las siguientes funciones*

$$0(n) = 0\ ,\quad u(n) = 1\ ,\quad id(n) = n\ ,\quad I(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

De ahora en adelante denotaremos por $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las funciones aritméticas.

Definición 3.13. *Se define la convolución de Dirichlet o producto de Dirichlet de dos funciones aritméticas f y g como la función aritmética*

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Usaremos el símbolo $\star$ para denotar esta operación. Por tanto $h = f \star g$

Proposición 3.1. *El producto de Dirichlet es conmutativo y asociativo. Es decir, dadas f, g, h funciones aritméticas, se verifica que $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ y que $f \star g = g \star f$.*

Demostración. Ver [7], p. 79 □

Proposición 3.2. *La función $I(n) \in \mathcal{A}$ es la función identidad para la convolución de Dirichlet.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}$, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}^+$

$$(f \star I)(n) = \sum_{d|n} f(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) I\left(\frac{n}{n}\right) = f(n)$$

esto es $f \star I = f$, como $\star$ es conmutativa se sigue que $I(n)$ es la función identidad. $\square$

Proposición 3.3. *Sea f una función aritmética con $f(1) \neq 0$. Entonces existe una única función f^{-1}, a la que llamaremos inversa de Dirichlet de f, tal que*

$$f \star f^{-1} = f^{-1} \star f = I$$

Demostración. Procederemos a construir f^{-1} de forma recursiva. Para $n = 1$ debemos resolver $(f \star f^{-1})(1) = I(1) = 1$, es decir $f(1)f^{-1}(1) = 1$ por lo tanto $f^{-1}(1) = 1/f(1)$. Por este motivo debemos exigir que $f(1) \neq 0$. Supongamos ahora que hemos hallado $f^{-1}(k)$ para todo $1 \leq k < n$. Para hallar $f^{-1}(n)$ debemos resolver $(f \star f^{-1})(n) = I(n) = 0$. Esto es

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d) = 0$$

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} f\big(\frac{n}{d}\big) f^{-1}(d)$$

Con lo cual tenemos una fórmula explícita para calcular f^{-1} a partir de los valores de f. $\square$

Teorema 3.1. *El conjunto $\mathcal{A}$ no tiene divisores de 0, es decir si $f, g \in \mathcal{A}$ y $f \star g = 0$ entonces $f = 0$ o $g = 0$.*

Demostración. Procederemos por contradicción, supongamos que $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Veamos que $f \star g \neq 0$, en efecto, sean $M = \{n \in \mathbb{N}^+ : f(n) \neq 0\}$ y $N = \{n \in \mathbb{N}^+ : g(n) \neq 0\}$, sabemos que estos dos conjuntos son no vacíos por lo tanto sean n_0 y m_0 los elementos mínimos de N Y M respectivamente, consideremos

$$\begin{aligned}(f \star g)(m_0 n_0) &= \sum_{ab = m_0 n_0} f(a)g(b) \\ &= f(m_0)g(n_0) + \sum_{\substack{ab = m_0 n_0 \\ a < m_0, b < n_0}} f(a)g(b) \\ &= f(m_0)g(n_0) \\ &\neq 0\end{aligned}$$

luego $f \star g \neq 0$, con lo cual queda demostrado. $\square$

Proposición 3.4. *El conjunto de las funciones aritméticas que no se anulan en 1 dotado de la operación convolución previamente mencionada forman un grupo.*

Demostración. Se sigue de los resultados de las proposiciones (3,1), (3,2) y (3,3). $\square$

Teorema 3.2. ***(Fórmula de inversión de Möbius).*** *Para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{A}$ y todo $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

o en términos de la convolución de Dirichlet

$$f = g \star u \Leftrightarrow g = f \star \mu$$

Demostración. El resultado es consecuencia de que $u^{-1} = \mu$. □

Definición 3.14. *Una función aritmética f se dice que es multiplicativa si no es idénticamente nula y verifica que*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}^+$ con $mcd(m, n) = 1$. Si además f verifica la propiedad anterior para todo $m, n \in \mathbb{N}^+$, se dirá que es completamente multiplicativa.

Proposición 3.5. *Si f es una función multiplicativa entonces $f(1) = 1$.*

Demostración. Sea f una función multiplicativa. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ se tiene que $mcd(n, 1) = 1$, por lo cual $f(n) = f(n)f(1)$. Como f no es idénticamente nula, existe $N \in \mathbb{N}^+$ tal que $f(N) \neq 0$. Por tanto, de la expresión $f(N) = f(N)f(1)$ al simplificar se obtiene que $f(1) = 1$. □

Teorema 3.3. *Sea f, g dos funciones multiplicativas, entonces $f \star g$ también es multiplicativa.*

Demostración. Sean f, g dos funciones multipliclativas y sea $h = f \star g$ y $m, n \in \mathbb{N}^+$ tales que $mcd(m, n) = 1$. Tenemos que

$$h(mn) = \sum_{c|mn} f(c)g\left(\frac{mn}{c}\right)$$

Como m y n son primos relativos entre sí, podemos escribir cada divisor c de mn como $c = ab$ donde $a|m$ y $b|n$. Además, nesesariamente $mcd(a, b) = 1$ y $mcd(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = 1$ por lo que podemos escribir $h(mn)$ como

$$h(mn) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab)g\left(\frac{mn}{ab}\right) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a)f(b)g\left(\frac{m}{a}\right)g\left(\frac{n}{b}\right)$$

. Finalmente , podemos reordenar la última suma para llegar a

$$\sum_{a|m} f(a)g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b)g\left(\frac{n}{b}\right) = h(m)h(n)$$

como se quería demostrar. □

Teorema 3.4. *Sean f, g funciones aritméticas tales que g y $f \star g$ son multiplicativas, entonces f también lo es.*

Demostración. Procederemos por contradicción, supongamos que f no es multiplicativa, es decir existen $n, m \in \mathbb{N}^+$ con $mcd(n, m) = 1$ tales que $f(nm) \neq f(n)f(m)$. Tomaremos al par n, m de tal forma que su producto nm sea el mínimo posible.
Si $nm = 1$, como $f(1) \neq 1$ tendríamos que

$$(f \star g)(1) = g(1)f(1) = f(1) \neq 1$$

lo cual contradice el hecho de $f \star g$ es multiplicativa.
Si $nm \neq 1$ entonces para todas las parejas a, b de primos relativos tales que $ab < nm$ se tiene que $f(ab) = f(a)f(b)$, por lo tanto teniendo en cuenta como se define la convolución podemos ver que

$$\begin{aligned}(f \star g)(nm) &= \sum_{\substack{a|n, b|m \\ ab<nm}} f(ab)g\left(\frac{nm}{ab}\right) + f(nm)g(1) \\ &= \sum_{a|n} f(a)g\left(\frac{n}{a}\right) \sum_{b|m} f(b)g\left(\frac{m}{b}\right) - f(n)f(m) + f(nm)g(1) \\ &= (f \star g)(n)(f \star g)(m) - f(n)f(m) + f(nm) \\ &\neq (f \star g)(n)(f \star g)(m)\end{aligned}$$

lo cual contradice el hecho de $f \star g$ es multiplicativa. Por lo tanto f debe ser multiplicativa. □

Corolario 3.1. *Si f es una función multiplicativa, entonces f^{-1} también lo es.*

Demostración. Se sigue de la relación $f \star f^{-1} = I$ y el teorema anterior. □

Proposición 3.6. *El conjunto de las funciones multiplicativas dotado de la operación convolución forman un subgrupo del grupo de las funciones aritméticas.*

Demostración. Se sigue de los teoremas (3,2) y (3,3). □

Proposición 3.7. *El conjunto $\mathcal{A}$ dotado con la suma puntual de funciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Proposición 3.8. *El conjunto $\mathcal{A}$ dotado con la suma puntual de funciones y la convolución $\star$ es un álgebra.*

Proposición 3.9. *Si definimos la función $*_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ que envia $f \mapsto *_{\mathcal{A}}(f)$ donde $*_{\mathcal{A}}(f)$ está definida por $(*_{\mathcal{A}}(f))(n) = \overline{f(n)}$ entonces $*_{\mathcal{A}}$ es una involución. Así que $\mathcal{A}$ equipado con $*_{\mathcal{A}}$ es un $*$-álgebra.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}^+$ entonces se tiene que

$$(*_{\mathcal{A}}(f+g))(n) = \overline{(f+g)(n)} = \overline{f(n)} + \overline{g(n)} = (*_{\mathcal{A}}(f))(n) + (*_{\mathcal{A}}(g))(n)$$

esto es $*_{\mathcal{A}}(f+g) = *_{\mathcal{A}}(f) + *_{\mathcal{A}}(g)$

$$(*_{\mathcal{A}}(\lambda f))(n) = \overline{\lambda f(n)} = \overline{\lambda}(*_{\mathcal{A}}(f))(n)$$

esto es $*_{\mathcal{A}}(\lambda f) = \overline{\lambda}(*_{\mathcal{A}}(f))$

$$(*_{\mathcal{A}}(f \star g))(n) = \overline{(f \star g)(n)} = \overline{\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)} = \sum_{d|n} \overline{f(d)}\,\overline{g\left(\frac{n}{d}\right)} = (*_{\mathcal{A}}(f) \star *_{\mathcal{A}}(g))(n)$$

esto es $*_{\mathcal{A}}(f \star g) = *_{\mathcal{A}}(f) \star *_{\mathcal{A}}(g)$. De lo anterior tenemos que $*_{\mathcal{A}}$ es una involución, por lo tanto $\mathcal{A}$ equipado con $*_{\mathcal{A}}$ es un $*$-álgebra. □

Proposición 3.10. *El funcional lineal $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ definido por $\varphi(f) = f(1)$ para toda $f \in \mathcal{A}$ es un estado.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\varphi\big(f \star (\star_{\mathcal{A}} f)\big) = \big(f \star (\star_{\mathcal{A}} f)\big)(1) = f(1)\big((\star_{\mathcal{A}} f)(1)\big) = f(1)\overline{f(1)} = |f(1)|^2 \geqslant 0$$

por lo cual φ es positivo, además

$$\varphi(I) = I(n) = 1$$

asi que φ es normalizado, de lo anterior se sigue que φ es un estado. □

Definición 3.15. *Las series de la forma*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y f es una función aritmética, son conocidas como series de Dirichlet. Denotaremos por $\mathcal{D}$ al conjunto de todas las series de Dirichlet.

La función zeta de Riemann es, en el semiplano en el que la serie es convergente, la serie de Dirichlet en la cual $f = u$ (u de la definición 3.11). Una característica de las series de Dirichlet es su región de convergencia absoluta. Esta región es siempre un semiplano del tipo $\Re(s) > \sigma_a$. Esto es obtiene al notar que $|\frac{f(n)}{n^s}| = \frac{|f(n)|}{n^{\Re(s)}}$ y que si la serie converge absolutamente en algún $s_0 \in \mathbb{C}$ entonces converge absolutamente en el semiplano $\Re(s) > s_o$. El siguiente Teorema nos muestra la relación entre las funciones aritméticas y las series de Dirichlet. Como usualmente hemos hecho, denotamos $\sigma = \Re(s)$.

Teorema 3.5. *Sean $F(s), G(s)$ las funciones definidas por*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \ , \ G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Supongamos además que las series que definen a F y G convergen absolutamente en los semiplanos $\sigma > a$ y $\sigma > b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ respectivamente. Entonces, en el semiplano $\sigma > \text{máx}(a, b)$, es decir, el semiplano donde ambas series convergen absolutamente, se tiene que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f \star g)(n)}{n^s}$$

Demostración. En el semiplano en el que ambas series convergen absolutamente tenemos que

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}$$

Como la serie converge absolutamente, es posible reordenar la serie sin cambiar su valor. Para cada $k \in \mathbb{N}^+$tomamos los términos tales que $mn = k$, obteniendo así

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{nm=k} f(n)g(m)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f \star g)(k)}{k^s}$$

□

Con lo cual queda demostrado. Este teorema será de gran utilidad para evidenciar la relación que hay entre el espacio $\mathcal{D}$ de las series de Dirichlet y el espacio $\mathcal{A}$ de las funciones aritméticas.

Proposición 3.11. *El conjunto $\mathcal{D}$ dotado con la suma puntual de funciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Proposición 3.12. *El conjunto $\mathcal{D}$ dotado con la suma puntual de funciones y la multiplicación puntual (Teorema 3.4) es un álgebra.*

Proposición 3.13. *Si definimos la función $*_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ que envia $F \mapsto *_{\mathcal{D}}(F)$ donde $*_{\mathcal{D}}(F)$ está definida por $(*_{\mathcal{D}}(F))(s) = \overline{F(\overline{s})}$ entonces $*_{\mathcal{D}}$ es una involución. Así que $\mathcal{D}$ equipado con $*_{\mathcal{D}}$ es un $*$-álgebra.*

Demostración. Sean $F, G \in \mathcal{D}$, $\lambda, s \in \mathbb{C}$ entonces se tiene que

$$(*_{\mathcal{D}}(F+G))(s) = \overline{(F+G)(\overline{s})} = \overline{F(\overline{s})} + \overline{G(\overline{s})} = (*_{\mathcal{D}}(F))(s) + (*_{\mathcal{D}}(G))(s)$$

esto es $*_{\mathcal{D}}(F+G) = *_{\mathcal{D}}(F) + *_{\mathcal{D}}(G)$

$$(*_{\mathcal{D}}(\lambda F))(s) = \overline{\lambda F(\overline{s})} = \overline{\lambda}(*_{\mathcal{D}}(F))(s)$$

esto es $*_{\mathcal{D}}(\lambda F) = \overline{\lambda}(*_{\mathcal{D}}(F))$

$$(*_{\mathcal{D}}(FG))(s) = \overline{FG(\overline{s})} = \overline{F(\overline{s})G(\overline{s})} = (*_{\mathcal{D}}(F))(s)(*_{\mathcal{D}}(G))(s)$$

esto es $*_{\mathcal{D}}(FG) = *_{\mathcal{D}}(F) *_{\mathcal{D}}(G)$. De lo anterior tenemos que $*_{\mathcal{D}}$ es una involución, por lo tanto $\mathcal{D}$ equipado con $*_{\mathcal{D}}$ es un $*$-álgebra. $\square$

Teorema 3.6. *El funcional lineal $T : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ que envía cada función aritmética f en la serie de Dirichlet que define, es decir,*

$$T(f) = F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

es un $*$-homomorfismo.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que
(i)

$$T(f+g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f+g)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = T(f) + T(g)$$

(ii)

$$T\big(*_{\mathcal{A}} (f)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(*_{\mathcal{A}} (f)\big)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{f(n)}}{n^s} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{\overline{s}}}} = \overline{F(\overline{s})} = *_{\mathcal{D}}\big(T(f)\big)$$

(iii)

$$T(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} = 1$$

donde la función de variable compleja idénticamente 1 es el elemento neutro para la multiplicación en $\mathcal{D}$. De lo anterior se sigue que T es un $*$-homomorfismo. $\square$

Gracias a este teorema podemos establecer ciertas relaciones entre la función Zeta y las funciones aritméticas previamente vistas, para poder justificar esta relaciones presentaremos la noción de polinomio en $\mathcal{A}$.

3.1. Polinomios en $\mathcal{A}$

Definición 3.16. *Sea $f \in \mathcal{A}$. Denotamos la convolución repetida $\underbrace{f \star f \star \cdots \star f}_{n \quad veces}$ por $f^{\star n}$. Por convención $f^{\star 0} = I$*

Definición 3.17. *(i) Un polinomio en $\mathcal{A}$ es una expresión de la forma*

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \star X^{\star i} = A_0 + A_1 \star X + A_2 \star X^{\star 2} + \cdots + A_n \star X^{\star n}$$

donde $A_0, A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ tal que $A_n \neq 0$ y X es una indeterminada.
(ii) El número natural n es llamado el grado del polinomio
(iii) Los elementos $A_0, A_1, \cdots, A_n$ son llamados coeficientes o funciones coeficientes del polinomio, donde A_n es llamado específicamente el coeficiente líder.
(iv) Si $\boldsymbol{F}$ es un polinomio en $\mathcal{A}$ y $\boldsymbol{F}(g) = 0$ para algún $g \in \mathcal{A}$, llamaremos a g una raíz de $\boldsymbol{F}$.
Denotamos al conjunto de los polinomios en $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}[X]$.
Como ya conocemos las operaciones con las que se puede trabajar en $\mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{A}[X]$ hereda dichas operaciones, es decir que para $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in \mathcal{A}[X]$ tenemos que $(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G})(X) = \boldsymbol{F}(X) + \boldsymbol{G}(X)$ y $(\boldsymbol{F} \star \boldsymbol{G})(X) = \boldsymbol{F}(X) \star \boldsymbol{G}(X)$.

Teorema 3.7. *Sean $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$ tal que A_1 es invertible. Entonces el polinomio $\boldsymbol{F}(X) = A_0 + A_1 \star X$ tiene una única raíz.*

Demostración. Como A_1 es invertible, existe una única función aritmética A_1^{-1} tal que $A_1 \star A_1^{-1} = I$. Sea $g = -A_0 \star A_1^{-1}$. Tenemos entonces que $\boldsymbol{F}(g) = 0$. Además esta raíz es única ya que cualquier otra raíz g de $\boldsymbol{F}$ debe satisfacer $-A_0 \star A_1^{-1} = g$, y la inversa de A_1 es única por la proposición 3.3. □

Nos centraremos ahora en encontrar las raíces de distintos polinomios que involucren a la función u (la cual define a la serie de Dirichlet asociada a la función zeta de Riemann).

Proposición 3.14. *La raíz del polinomio $I - \mu \star X$ es la función u dada en la definición 3.8.*

Demostración. Basta mostrar que $\mu \star u = I$, para $n = 1$ se tiene que $\mu(1)u(1) = 1 = I(1)$. Supongamos que $n > 1$ y que $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ por lo cual

$$(\mu \star u)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

Los únicos términos que contribuyen en la última suma son los $\mu(d)$ con d libre de cuadrados, ya que si d no es libre de cuadrados entonces $\mu(d) = 0$. Ahora bien, los números libres de cuadrados que dividen a n son todos los posibles productos que se pueden formar con $p_1, \cdots, p_r$. De estos, es claro que hay $\binom{r}{1}$, formados por un único primo, $\binom{r}{2}$, formados por dos primos y así sucesivamente. Como $\mu(d)$ valdrá 1 si d esta formado por un número par de primos y -1 si d esta formado por un número impar de primos, se deduce que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \binom{r}{1}(-1) + \binom{r}{2}(1) + \cdots + \binom{r}{r}(-1)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j}(-1)^j = (1-1)^r = 0$$

□

Corolario 3.2. *En el semiplano $\sigma > 1$ se tiene que*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $\mu \star u = 1$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 1$ ya que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 1$, al reescribirla obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \zeta(s) &= 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} &= \frac{1}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

□

Proposición 3.15. *La raíz del polinomio $\varphi - \mu \star X$ es la función $id(n)$.*

Demostración. Debemos encontrar la solución de $\varphi - \mu \star X = 0$, teniendo en cuenta que $\mu^{-1} = u$ podemos ver

$$\begin{aligned} \varphi - \mu \star X &= 0 \\ \varphi &= \mu \star X \\ u \star \varphi &= X \end{aligned}$$

por lo cual basta verificar que $u \star \varphi = id(n)$, para esto usaremos el hecho de que φ y u son funciones multiplicativas. Sea p un primo y $k > 1$ entonces

$$(u \star \varphi)(p^k) = \sum_{d|p^k} \varphi(d) = \sum_{j=0}^{k} \varphi(p^i) = 1 + \sum_{j=1}^{k} (p^j - p^{j-1}) = 1 + p^k - 1 = p^k$$

Para $n = 1$ es fácil ver que $(u \star \varphi)(1) = u(1)\varphi(1) = 1 = id(1)$. Si $n > 1$ y $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ tenemos que

$$(u \star \varphi)(n) = (u \star \varphi)\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} \right) = \prod_{i=1}^{r} (u \star \varphi)(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} = n = id(n)$$

Esto es $u \star \varphi = id(n)$. □

Corolario 3.3. *En el semiplano $\sigma > 2$ se tiene que*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $\varphi \star u = id(n)$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{id(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 2$ ya que $\varphi(n) \leq n$, por lo cual

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-1}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 2$, al reescribirla obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{id(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

□

Proposición 3.16. *La raíz del polinomio* $\Lambda - \mu \star X$ *es la función* $\log(n)$.

Demostración. Debemos encontrar la solución de $\Lambda - \mu \star X = 0$, teniendo en cuenta que $\mu^{-1} = u$ podemos ver

$$\begin{aligned} \Lambda - \mu \star X &= 0 \\ \Lambda &= \mu \star X \\ u \star \Lambda &= X \end{aligned}$$

por lo cual basta verificar que $u \star \Lambda = \log(n)$. Para $n = 1$ se tiene que $(u \star \Lambda)(1) = u(1)\Lambda(1) = 0 = \log(1)$. Para $n > 1$, escribimos $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$, al tomar logaritmos a ambos lados de esa igualdad se obtiene

$$\log(n) = \sum_{i=1}^{r} e_i \log(p_i)$$

En la suma $\sum_{d|n} \Lambda(d)$, los únicos sumandos no nulos se dan para los divisores d de la forma p_i^m, $i = 1, 2, \cdots, r$ y $m = 1, 2, \cdots, e_r$. Teniendo en cuenta esto se puede escribir

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{m}^{e_r} \Lambda(p_i^m) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{m}^{e_r} \log(p_i) = \sum_{i=1}^{r} e_r \log(p_i) = \log(n)$$

con lo cual queda demostrado que $u \star \Lambda = \log(n)$ □

Corolario 3.4. *En el semiplano* $\sigma > 1$ *se tiene que*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

y

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $\Lambda \star u = \log(n)$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 1$ ya que $\Lambda(n) \leq \log n$, por lo cual

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma}$$

Donde la última serie converge absolutamente si $\sigma > 1$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 1$, al reescribirla obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s} \end{aligned}$$

Al derivar término a término la expresión $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ se obtiene

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \zeta(s) &= -\zeta'(s) \\ -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

al tener convergencia normal podemos integrar término a término la anterior expresión obtenemos

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} \frac{1}{n^s}$$

□

Proposición 3.17. *La raíz del polinomio $\lambda - \mu \star X$ es la función $\lambda \star u$, la cual está definida como.*

$$(\lambda \star u)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Debemos encontrar la solución de $\lambda - \mu \star X = 0$, teniendo en cuenta que $\mu^{-1} = u$ podemos ver

$$\begin{aligned} \lambda - \mu \star X &= 0 \\ \lambda &= \mu \star X \\ u \star \lambda &= X \end{aligned}$$

Para mostrar la igualdad usaremos el hecho de que λ y u son funciones multiplicativas. Sea p un primo y $k > 1$ entonces

$$(u \star \lambda)(p^k) = \sum_{d|p^k} \lambda(d) = \sum_{j=0}^{k} \lambda(p^i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Para $n = 1$ es fácil ver que $(u \star \lambda)(1) = u(1)\lambda(1) = 1$. Si $n > 1$ y $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ tenemos que

$$(u \star \lambda)(n) = (u \star \lambda)\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}\right) = \prod_{i=1}^{r}(u \star \lambda)(p_i^{e_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si todos los } e_i \text{ son pares} \\ 0 & \text{si alguno de los } e_i \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto es $u \star \lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ □

Corolario 3.5. *En el semiplano $\sigma > 1$ se tiene que*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $\lambda \star u = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m^2 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \star u)(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 1$ ya que $|\lambda(n)| \leq |1$, por lo cual

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 1$, al reescribirla obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \star u)(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}\zeta(s) &= \sum_{n=m^2} \frac{1}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}\zeta(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} &= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

□

Proposición 3.18. *La raíz del polinomio $n^\alpha - \mu \star X$ es la función σ_α*

Demostración. Debemos encontrar la solución de $n^\alpha - \mu \star X = 0$, teniendo en cuenta que $\mu^{-1} = u$ podemos ver

$$\begin{aligned} n^\alpha - \mu \star X &= 0 \\ n^\alpha &= \mu \star X \\ u \star n^\alpha &= X \end{aligned}$$

por lo cual basta verificar que $u \star n^\alpha = \sigma_\alpha$, esto se sigue de las definiciones de convolución y σ_α ya que

$$(u \star n^\alpha)(n) = \sum_{d|n} d^\alpha u\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} d^\alpha = \sigma_\alpha(n)$$

□

Corolario 3.6. *En el semiplano $\sigma > \text{máx}\{1, 1 + \Re(\alpha)\}$ se tiene que*

$$\zeta(s)\zeta(s-\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $u \star n^\alpha = \sigma_\alpha$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 1 + \Re(\alpha)$ ya que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^\alpha|}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma - \Re(\alpha)}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > \text{máx}\{1, 1 + \Re(\alpha)\}$, al reescribirla obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \\ \zeta(s-\alpha)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_\alpha(n)}{n^s} \end{aligned}$$

□

Nota 3.1. *A partir de lo encontrado se pueden reescribir las igualdades para mostrar otros polinomios y evidenciar que raíces tienen, un ejemplo de esto notar que μ es la única raíz del polinomio $I - u \star X$. Al realizar este ejercicio con la proposición 3.16. tenemos que u es una raíz del polinomio $\log(n) - \Lambda \star X$ pero en este caso el teorema 3.6. no es aplicable ya que Λ no es invertible, sin embargo se puede probar que u es la única raíz de este polinomio usando el hecho de que $\mathcal{A}$ no tiene divisores de 0.*

Nota 3.2. *En las anteriores proposiciones nos hemos encargado de encontrar raíces de polinomios de la forma $f - \mu \star X$ en donde f es una función aritmética tradicional, es decir f es una función con la cual se trabaja en un primer curso de teoría de números. El teorema 3.6. nos garantiza que la única raíz de esta clase de polinomios está dada por $u \star f$ ya que μ es invertible.*

Continuaremos solucionando polinomios de la forma $f - \mu \star X$ ya que son estos los que nos han permitido recuperar identidades conocidas relacionadas con la función $\zeta(s)$, pero en lugar de usar una función f tradicional nos centraremos en trabaja con la familia de funciones f_α que son presentadas en [9], al ser estas funciones no tan conocidas nos permitirá encontrar nuevas identidades relacionadas a la función $\zeta(s)$.
A continuación presentamos la familia de funciones f_α.

Definición 3.18. *Para $n > 1$ denotaremos la descomposición prima de n como $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$*
Para $\alpha \in \mathbb{N}^+$ definimos la función f_α dada por $f_\alpha(1) = 1$ y para $n > 1$

$$f_\alpha(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\gcd(e_i,\alpha)}$$

Es fácil ver que f_α es una función multiplicativa. Además f_α es invertible ya que $f_\alpha(1) \neq 0$. La familia de funciones que se acaba de definir es una generalización de la función radical ya que

$$f_1(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i = rad(n)$$

Proposición 3.19. *La raíz del polinomio $f_\alpha - \mu \star X$ es la función d_α, la cual es multiplicativa y satisface que $d_\alpha(1) = 1$ y que para todo primo p y $k > 1$*

$$d_\alpha(p^k) = \sum_{i=0}^{k} f_\alpha(p^i)$$

Demostración. Debemos encontrar la solución de $f_\alpha - \mu \star X = 0$, teniendo en cuenta que $u^{-1} = \mu$ podemos ver

$$\begin{aligned} f_\alpha - \mu \star X &= 0 \\ f_\alpha &= \mu \star X \\ u \star f_\alpha &= X \end{aligned}$$

por lo cual basta verificar que $u \star f_\alpha = d_\alpha$. Como u y f_α son multiplicativas entonces $u \star f_\alpha$ también lo es. Además $(u \star f_\alpha)(1) = u(1)f_\alpha(1) = 1$. Sea p un primo y $k > 1$ entonces

$$(u \star f_\alpha)(p^k) = \sum_{d|p^k} f_\alpha(d) u\left(\frac{p^k}{d}\right) = \sum_{i=0}^{k} f_\alpha(p^i)$$

Esto es $u \star f_\alpha = d_\alpha$. □

Corolario 3.7. *En el semiplano $\sigma > 2$ se tiene que*

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_\alpha(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $u \star f_\alpha = d_\alpha$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_\alpha(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 2$ ya que $f_\alpha(n) \leq n$, por lo cual

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_\alpha(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-1}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 2$. $\square$

Lema 3.1. *Para $\alpha = 1$ se tiene que $d_1(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$d_1(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + e_i p_i)$$

Demostración. Como $d_1 = u \star f_1$ y las funciones u y f_1 son multiplicativas tenemos que d_1 también lo es. Verificamos que $d_1(1) = u(1) f_1(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta d_1 con las potencias de p, observamos que

$$d_1(p) = \sum_{n=0}^{1} f_1(p^i) = f_1(1) + f_1(p) = 1 + p$$

$$d_1(p^2) = \sum_{n=0}^{2} f_1(p^i) = f_1(1) + f_1(p) + f_1(p^2) = 1 + 2p$$

Sea $k > 1$ entonces teniendo en cuenta $f_1(p^k) = p$ obtenemos

$$d_1(p^k) = \sum_{n=0}^{k} f_1(p^i) = f_1(1) + \sum_{n=1}^{k} f_1(p^i) = 1 + kp$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que d_1 es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. $\square$

Lema 3.2. *Para $\alpha = 2$ se tiene que $d_2(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$d_2(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor (p_i^2 + p_i) + mod_2(k) p_i\right)$$

Demostración. Como $d_2 = u \star f_2$ y las funciones u y f_2 son multiplicativas tenemos que d_2 también lo es. Verificamos que $d_2(1) = u(1) f_2(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta d_2 con las potencias de p, observamos que

$$d_2(p) = \sum_{n=0}^{1} f_2(p^i) = f_2(1) + f_2(p) = 1 + p$$

$$d_2(p^2) = \sum_{n=0}^{2} f_2(p^i) = f_2(1) + f_2(p) + f_2(p^2) = 1 + p + p^2$$

$$d_2(p^3) = \sum_{n=0}^{3} f_2(p^i) = 1 + 2p + p^2$$

$$d_2(p^4) = \sum_{n=0}^{4} f_2(p^i) = 1 + 2p + 2p^2$$

Sea $k > 4$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = 2l + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq j < 2$. Consideramos entonces dos casos, si k es de la forma $k = 2l$ entonces

$$d_2(p^{2l}) = \sum_{i=0}^{2l} f_2(p^i) = f_2(1) + \sum_{i=1}^{l} f_2(p^{2i-1}) + \sum_{i=1}^{l} f_2(p^{2i}) = 1 + lp + lp^2$$

si k es de la forma $k = 2l + 1$ entonces

$$d_2(p^{2l+1}) = \sum_{i=0}^{2l+1} f_2(p^i) = f_2(1) + \sum_{i=1}^{l+1} f_2(p^{2i-1}) + \sum_{i=1}^{l} f_2(p^{2i}) = 1 + (l+1)p + lp^2$$

de lo anterior se obtiene que para $2l + j = k > 1$

$$d_2(p^{2l+j}) = 1 + l(p + p^2) + jp$$

como $l = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ y $j = mod_2(k)$, se sigue que

$$d_2(p^{2l+j}) = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor (p + p^2) + mod_2(k)p$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que d_2 es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. $\square$

Lema 3.3. *Para $\alpha = 3$ se tiene que $d_3(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$d_3(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \left(2\lfloor \frac{e_i}{3} \rfloor + mod_3(e_i)\right)p_i + \lfloor \frac{e_i}{3} \rfloor p_i^3\right)$$

Demostración. Como $d_3 = u \star f_3$ y las funciones u y f_3 son multiplicativas tenemos que d_3 también lo es. Verificamos que $d_3(1) = u(1)f_3(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta d_3 con las potencias de p, observamos que

$$d_3(p) = \sum_{n=0}^{1} f_3(p^i) = f_3(1) + f_3(p) = 1 + p$$

$$d_3(p^2) = \sum_{n=0}^{2} f_3(p^i) = f_3(1) + f_3(p) + f_3(p^2) = 1 + 2p$$

$$d_2(p^3) = \sum_{n=0}^{3} f_2(p^i) = f_3(1) + f_3(p) + f_3(p^2) + f_3(p^3) = 1 + 2p + p^3$$

$$d_3(p^4) = \sum_{n=0}^{4} f_2(p^i) = 1 + 3p + p^3$$

Sea $k > 4$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = 3l + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq j < 3$. Consideramos entonces tres casos, si k es de la forma $k = 3l$ entonces

$$d_3(p^{3l}) = \sum_{i=0}^{3l} f_3(p^i) = f_3(1) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i-2}) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i-1}) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i}) = 1 + 2lp + lp^3$$

si k es de la forma $k = 3l + 1$ entonces

$$d_3(p^{3l+1}) = \sum_{i=0}^{3l+1} f_3(p^i) = f_3(1) + \sum_{i=1}^{l+1} f_3(p^{3i-2}) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i-1}) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i}) = 1 + (2l+1)p + lp^3$$

si k es de la forma $k = 3l + 2$ entonces

$$d_3(p^{3l+2}) = \sum_{i=0}^{3l+2} f_3(p^i) = f_3(1) + \sum_{i=1}^{l+1} f_3(p^{3i-2}) + \sum_{i=1}^{l+1} f_3(p^{3i-1}) + \sum_{i=1}^{l} f_3(p^{3i}) = 1 + (2l+2)p + lp^3$$

de lo anterior se obtiene que para $3l + j = k > 1$

$$d_3(p^{3l+j}) = 1 + (2l + j)p + lp^3$$

como $l = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ y $j = mod_3(k)$ se sigue que

$$d_3(p^{3l+j}) = 1 + \big(2\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + mod_3(k)\big)p + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor p^3$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que d_3 es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. $\square$

Lema 3.4. *Para $\alpha = q$ primo se tiene que $d_q(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$d_q(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \big((q-1)\lfloor \frac{e_i}{q} \rfloor + mod_q(e_i)\big)p_i + \lfloor \frac{e_i}{q} \rfloor p_i^q\right)$$

Demostración. Podemos suponer que $q > 4$ ya que para $q = 2$ y $q = 3$ ya se probó el resultado Como $d_q = u \star f_q$ y las funciones u y f_q son multiplicativas tenemos que d_q también lo es.
Verificamos que $d_q(1) = u(1)f_q(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta d_q con las potencias de p

Sea $k > 1$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = ql + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \le j < q$, entonces

$$d_3(p^{ql+j}) = \sum_{i=0}^{ql+j} f_q(p^i) = f_q(1) + \sum_{i \in A} f_q(p^i) + \sum_{i \in B} f_q(p^i)$$

donde $A = \{n \in \mathbb{N}^+ : \gcd(n, q) = q, 1 < n \le k\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N}^+ : \gcd(n, q) = 1, 1 < n \le k\}$ con lo cual $\#A = l$ y $\#B = (q-1)l + j$, por lo tanto

$$d_3(p^{ql+j}) = f_q(1) + \sum_{i \in A} f_q(p^i) + \sum_{i \in B} f_q(p^i) = 1 + \big((q-1)l + j\big)p + lp^q$$

como $l = \lfloor \frac{k}{q} \rfloor$ y $j = mod_q(k)$ se sigue que

$$d_q(p^{ql+j}) = 1 + \big((q-1)\lfloor \frac{k}{q} \rfloor + mod_q(k)\big)p + \lfloor \frac{k}{q} \rfloor p^q$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que d_q es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. $\square$

Hasta el momento nos hemos preocupado por solucionar únicamente polinomios de la forma $f - \mu \star X$ con el objetivo de encontrar resultados que involucren a la función $\zeta(s)$. A continuación cambiaremos la función que acompaña a la indeterminada y nos centraremos en los polinomios $u - f_1 \star X$ y $f_\alpha - u \star X$, los cuales siguen involucrando a la función zeta de Riemann.

Lema 3.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ la función f_1^{-1} está dada por*

$$f_1^{-1}(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^r f_1(n) \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i)^{e_i - 1} & si\ n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} \end{cases}$$

Demostración. Como f_1 es multiplicativa tenemos que f_1^{-1} también lo es. De la proposición 3.3 tenemos que $f_1^{-1}(1) = 1/f_1(n) = 1$ y que para $n > 1$

$$f_1^{-1}(n) = -\sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} f_1\left(\frac{n}{d}\right) f_1^{-1}(d)$$

Sea p un número primo, tenemos que

$$f_1^{-1}(p) = -f_1(p)f_1^{-1}(1) = -p = -p(1-p)^0$$

$$f_1^{-1}(p^2) = -f_1(p^2)f_1^{-1}(1) - f_1(p)f_1^{-1}(p) = -p^2 + p = -p(1-p)^1$$

afirmamos que para todo $k \geq 1$ se tiene que $f_1^{-1}(p^k) = -p(1-p)^{k-1}$. En efecto, para esto procederemos por inducción, el caso base ya fue mostrado. Supongamos que la igualdad es válida para $k = e > 1$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(p^{e+1}) &= -\sum_{i=0}^{e} p f_1^{-1}(p^i) \\ &= -p f_1^{-1}(p^e) - \sum_{i=0}^{e-1} p f_1^{-1}(p^i) \\ &= -p f_1^{-1}(p^e) + f_1^{-1}(p^e) \\ &= f_1^{-1}(p^e)(1-p) \\ &= -p(1-p)^e \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la propiedad, ahora, usando el hecho de que f_1^{-1} es multiplicativa obtenemos para $n > 1$ que

$$f_1^{-1}(n) = \prod_{i=1}^{r} f_1^{-1}(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} -p_i(1-p_i)^{e_i-1} = (-1)^r f_1(n) \prod_{i=1}^{r} p_i(1-p_i)^{e_i-1}$$

con lo cual queda demostrado el teorema. $\square$

Proposición 3.20. *La raíz del polinomio $u - f_1 \star X$ es la función $u \star f_1^{-1}$, la cual satisface $(u \star f_1^{-1})(1) = 1$ y para $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$*

$$(u \star f_1^{-1})(n) = \prod_{i=1}^{r} (1-p_i)^{e_i}$$

Demostración. Es claro que $u \star f_1^{-1}$ es la raíz del polinomio $u - f_1 \star X$ por lo cual basta verificar que $u \star f_1^{-1}$ satisface las condiciones del teorema. Como u y f_1^{-1} son multiplicativas entonces $u \star f_1^{-1}$ también lo es. Además $(u \star f_1^{-1})(1) = u(1)f_1^{-1}(1) = 1$. Sea p un primo y $k > 1$, entonces

$$(u \star f_1^{-1})(p^k) = \sum_{d|p^k} f_1^{-1}(d) = \sum_{j=0}^{k} f_1^{-1}(p^e)$$

teniendo en cuenta el lema 3.5

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} f_1^{-1}(p^e) &= 1 + \sum_{j=1}^{k} -p(1-p)^{j-1} \\ &= 1 - p\sum_{j=0}^{k} (1-p)^j \\ &= 1 - p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^k \end{aligned}$$

por lo tanto si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$

$$(u \star f_1^{-1})(n) = \prod_{i=1}^{r} (u \star f_1^{-1})(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i)^{e_i}$$

$\square$

Corolario 3.8. *En el semiplano $\sigma > 3$ se tiene que*

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1^{-1}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \star f_1^{-1})(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición y usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1^{-1}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u \star f_1^{-1})(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1^{-1}(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 3$ ya que

$$|f_1^{-1}(n)| = \prod_{i=1}^{r} p_i |(1 - p_i)|^{e_i} = \prod_{i=1}^{r} p_i (p_i - 1)^{e_i - 1} \leq \prod_{i=1}^{r} p_i \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_1} \leq n^2$$

por lo cual

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1^{-1}(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_1^{-1}(n)|}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma - 2}}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s}$ es la serie asociada a la función $\zeta(s)$ la cual converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por lo tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 3$. $\square$

Proposición 3.21. *La raíz del polinomio $f_\alpha - u \star X$ es la función g_α, la cual es multiplicativa y satisface que $g_\alpha(1) = 1$ y que para todo primo p y $k > 1$*

$$g_\alpha(p) = p - 1 \ , \ \ g_\alpha(p^k) = p^{\gcd(k,\alpha)} - p^{\gcd(k-1,\alpha)}$$

Demostración. Debemos encontrar la solución de $f_\alpha - u \star X = 0$, teniendo en cuenta que $u^{-1} = \mu$ podemos ver

$$\begin{aligned} f_\alpha - u \star X &= 0 \\ f_\alpha &= u \star X \\ \mu \star f_\alpha &= X \end{aligned}$$

por lo cual basta verificar que $\mu \star f_\alpha = g_\alpha$. Como μ y f_α son multiplicativas entonces $\mu \star f_\alpha$ también lo es. Además $(\mu \star f_\alpha)(1) = \mu(1) f_\alpha(1) = 1$. Sea p un primo y $k > 1$ entonces

$$(\mu \star f_\alpha)(p) = \sum_{d|p} \mu(d) f_\alpha\left(\frac{p}{d}\right) = \mu(1) f_\alpha(p) + \mu(p) f_\alpha(1) = p - 1$$

teniendo en cuenta que $\mu(p^r) = 0$ si $r > 1$ observamos que

$$(\mu \star f_\alpha)(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) f_\alpha\left(\frac{p^k}{d}\right) = \mu(1) f_\alpha(p^k) + \mu(p) f_\alpha(p^{k-1}) = p^{\gcd(k,\alpha)} - p^{\gcd(k-1,\alpha)}$$

Esto es $\mu \star f_\alpha = g_\alpha$. En particular si $\alpha = 1$ se tiene que

$$g_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \prod_{i=1}^{r}(p_i - 1) & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

□

Corolario 3.9. *En el semiplano $\sigma > 2$ se tiene que*

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s}$$

Demostración. De la anterior proposición obtuvimos que $\mu \star f_\alpha = g_\alpha$ por lo tanto, usando el teorema 3.5, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s}$$

donde la igualdad es válida en la intersección de los semiplanos de convergencia absoluta de las dos series del lado izquierdo. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 2$,la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ converge absolutamente en $\sigma > 1$. Por la tanto la igualdad que encontramos es válida en $\sigma > 2$, si multiplicamos a ambos lados por $\zeta(s)$ teniendo en cuenta que $u = \mu^{-1}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\alpha(n)}{n^s} &= \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_\alpha(n)}{n^s} \end{aligned}$$

□

Definición 3.19. *Definimos $I_{\{0,1\}}$ la función indicadora del conjunto $\{0,1\}$ como*

$$I_{\{0,1\}}(n) = \begin{cases} 1 & si\ n \in \{0,1\} \\ 0 & si\ n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Lema 3.6. *Para $\alpha = 2$ se tiene que $g_2(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$g_2(n) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{I(e_i) + mod_2(e_i)} p_i^{1 - I(e_i)} (p_i - 1)$$

Demostración. Como $g_2 = \mu \star f_2$ y las funciones μ y f_2 son multiplicativas tenemos que g_2 también lo es. Verificamos que $g_2(1) = \mu(1) f_2(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta g_2 con las potencias de p, observamos que

$$g_2(p) = \sum_{i=0}^{1} \mu(p^i) g_2(p^{1-i}) = \mu(1) g_2(p) + \mu(p) g_2(1) = p - 1$$

$$g_2(p^2) = \sum_{i=0}^{2} \mu(p^i) g_2(p^{2-i}) = \mu(1)g_2(p^2) + \mu(p)g_2(p) = p^2 - p = p(p-1)$$

$$g_2(p^3) = \sum_{i=0}^{3} \mu(p^i) g_2(p^{3-i}) = \mu(1)g_2(p^3) + \mu(p)g_2(p^2) = p - p^2 = -p(p-1)$$

Sea $k > 1$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = 2l + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq j < 2$. Consideramos entonces dos casos, si k es de la forma $k = 2l$ entonces

$$g_2(p^{2l}) = \sum_{i=0}^{2l} \mu(p^i) g_2(p^{2l-i}) = \mu(1)g_2(p^{2l}) + \mu(p)g_2(p^{2l-1}) = p^2 - p = p(p-1)$$

si k es de la forma $k = 2l + 1$ entonces

$$g_2(p^{2l+1}) = \sum_{i=0}^{2l+1} \mu(p^i) g_2(p^{2l+1-i}) = \mu(1)g_2(p^{2l+1}) + \mu(p)g_2(p^{2l}) = p - p^2 = -p(p-1)$$

de lo anterior se obtiene que para $2l + j = k > 1$

$$g_2(p^{2l+j}) = (-1)^j p(p-1)$$

como $j = mod_2(k)$, solo falta tener en cuenta el caso en el que $k = 1$ para incorporar este caso hacemos uso de la función I, por lo tanto para todo primo p y todo $k > 1$ se tiene que

$$g_2(p^k) = (-1)^{I(k)+mod_2(k)} p^{1-I(k)}(p-1)$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que g_2 es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. □

Lema 3.7. *Para $\alpha = 3$ se tiene que $g_3(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$g_3(n) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{I(e_i)+mod_3(e_i)} (p_i^2 + p_i)^{1-I(e_i)} (p_i - 1) I_{\{0,1\}}(mod_3(e_i))$$

Demostración. Como $g_3 = \mu \star f_3$ y las funciones μ y f_3 son multiplicativas tenemos que g_3 también lo es. Verificamos que $g_3(1) = \mu(1)f_3(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta g_3 con las potencias de p, observamos que

$$g_3(p) = \sum_{i=0}^{1} \mu(p^i) g_3(p^{1-i}) = \mu(1)g_3(p) + \mu(p)g_3(1) = p - 1$$

$$g_3(p^2) = \sum_{i=0}^{2} \mu(p^i) g_3(p^{2-i}) = \mu(1)g_3(p^2) + \mu(p)g_3(p) = p - p = 0$$

$$g_3(p^3) = \sum_{i=0}^{3} \mu(p^i) g_3(p^{3-i}) = \mu(1)g_3(p^3) + \mu(p)g_3(p^2) = p^3 - p = (p^2 + p)(p-1)$$

$$g_3(p^4) = \sum_{i=0}^{4} \mu(p^i) g_3(p^{4-i}) = \mu(1)g_3(p^4) + \mu(p)g_3(p^3) = p - p^3 = -(p^2 + p)(p-1)$$

Sea $k > 1$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = 3l + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq j < 3$. Consideramos entonces tres casos, si k es de la forma $k = 3l$ entonces

$$g_3(p^{3l}) = \sum_{i=0}^{3l} \mu(p^i) g_3(p^{3l-i}) = \mu(1)g_3(p^{3l}) + \mu(p)g_3(p^{3l-1}) = p^3 - p = (p^2 + p)(p-1)$$

si k es de la forma $k = 3l + 1$ entonces

$$g_3(p^{3l+1}) = \sum_{i=0}^{3l+1} \mu(p^i) g_3(p^{3l+1-i}) = \mu(1)g_3(p^{3l+1}) + \mu(p)g_3(p^{3l}) = p - p^3 = -(p^2+p)(p-1)$$

si k es de la forma $k = 3l + 2$ entonces

$$g_3(p^{3l+2}) = \sum_{i=0}^{3l+2} \mu(p^i) g_3(p^{3l+2-i}) = \mu(1)g_3(p^{3l+2}) + \mu(p)g_3(p^{3l+1}) = p - p = 0$$

de lo anterior se obtiene que para $3l + j = k > 1$

$$g_3(p^{3l+j}) = (-1)^j (p^2+p)(p-1) I_{\{0,1\}}(j)$$

como $j = mod_3(k)$, solo falta tener en cuenta el caso en el que $k = 1$ para incorporar este caso hacemos uso de la función I, por lo tanto para todo primo p y todo $k > 1$ se tiene que

$$g_3(p^k) = (-1)^{I(k)+mod_3(k)} (p^2+p)^{1-I(k)} (p-1) I_{\{0,1\}}(mod_3(k))$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que g_3 es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. □

Lema 3.8. *Para $\alpha = q$ primo se tiene que $g_\alpha(1) = 1$ y para $n > 1$*

$$g_\alpha(n) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{I(e_i)+mod_\alpha(e_i)} \Big(\sum_{j=1}^{\alpha-1} p_i^j\Big)^{1-I(e_i)} (p_i - 1) I_{\{0,1\}}(mod_\alpha(e_i))$$

Demostración. Podemos suponer que $q > 4$ ya que para $q = 2$ y $q = 3$ ya se probó el resultado.
Como $g_q = \mu \star f_q$ y las funciones μ y f_q son multiplicativas tenemos que g_q también lo es.
Verificamos que $g_q(1) = \mu(1)f_q(1) = 1$. Sea p un número primo, veamos como se comporta g_q con las potencias de p, observamos que

$$g_q(p) = \sum_{i=0}^{1} \mu(p^i) g_q(p^{1-i}) = \mu(1)g_q(p) + \mu(p)g_q(1) = p - 1$$

Sea $k > 1$ entonces por el algoritmo de la división tenemos que $k = ql + j$ para algún $l \in \mathbb{N}^+$ y $0 \le j < q$.
Consideramos entonces tres casos, si k es de la forma $k = ql$ entonces

$$g_q(p^{ql}) = \sum_{i=0}^{ql} \mu(p^i) g_q(p^{ql-i}) = \mu(1)g_q(p^{ql}) + \mu(p)g_q(p^{ql-1}) = p^q - p = (p-1)\sum_{i=1}^{q-1} p^i$$

si k es de la forma $k = ql + 1$ entonces

$$g_q(p^{ql+1}) = \sum_{i=0}^{ql+1} \mu(p^i) g_q(p^{ql+1-i}) = \mu(1)g_q(p^{ql+1}) + \mu(p)g_q(p^{ql}) = p - p^q = -(p-1)\sum_{i=1}^{q-1} p^i$$

si k es de la forma $k = ql + j$ con $1 < j < q$ entonces

$$g_p(p^{ql+j}) = \sum_{i=0}^{ql+j} \mu(p^i) g_q(p^{ql+j-i}) = \mu(1)g_q(p^{ql+j}) + \mu(p)g_q(p^{ql+j-1}) = p - p = 0$$

de lo anterior se obtiene que para $3q + j = k > 1$

$$g_q(p^{ql+j}) = (-1)^j \left(\sum_{i=1}^{q-1} p^i\right)(p-1) I_{\{0,1\}}(j)$$

como $j = mod_q(k)$, solo falta tener en cuenta el caso en el que $k = 1$ para incorporar este caso hacemos uso de la función I, por lo tanto para todo primo p y todo $k > 1$ se tiene que

$$g_q(p^k) = (-1)^{I(k)+mod_q(k)} \left(\sum_{i=1}^{q-1} p^i \right)^{1-I(k)} (p-1) I_{\{0,1\}}(mod_q(k))$$

El resultado para $n \in \mathbb{N}^+$ se sigue del hecho de que g_q es multiplicativa y ya sabemos como se comporta con las potencias de primos. $\square$

Conclusiones

Con este trabajo se pudo evidenciar la estructura que sustenta varias de las relaciones e igualdades relacionadas con la función zeta de Riemann que involucran funciones aritméticas y al lograr comprender esta estructura se logró extender de forma natural para funciones no convencionales que usualmente no se trabajan en un curso de teoría de números. Como trabajo futuro se propone investigar sobre las soluciones de otros polinomios de primer y segundo grado que involucren a la función zeta.

Bibliografía

[1] L. Pedraza . Sobre la función Zeta de Riemann. Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Programa de Matemáticas, 2018

[2] A. Castañeda . Resultados relacionados con la función zeta de Riemann. Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, Programa de Matemáticas, 2022

[3] P. Borwein y col. The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike. CMS Books in Mathematics. Springer, 2008

[4] T. Gamelin. Complex Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2001.

[5] R. Bartle. The Elements of Integration. John Wiley & Sons, New York 1966.

[6] H. Davenport. Multiplicative Number Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.

[7] J. Sanchéz. Las funciones Gamma de Euler-Gauss y Zeta de Riemann. Universidad de Sevilla, Facultad de Matemáticas, Departamento de Análisis Matemático, 2020.

[8] M. Schachner. Algebraic and analytic properties of arithmetic functions.

[9] Mittou, B. (2022). New properties of an arithmetic function. Mathematica Montisnigri, 53, 5-11. https://doi.org/10.20948/mathmontis-2022-53-1