

Diseño de una antena fractal siguiendo el modelo de Mandelbrot

HERNÁN PAZ PENAGOS

Magister en telecomunicaciones de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ingeniero electricista de la Universidad Nacional de Colombia, ingeniero electrónico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y filósofo de la Universidad Santo Tomás de Aquino. Docente del área de comunicaciones, Programa de Ingeniería Electrónica de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. hpaz@escuelaing.edu.co.

XIMENA ACERO BRICEÑO

Ingeniera electrónica de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. ximena.acero@gmail.com.

ROBERTO FERRO ESCOBAR

Ingeniero electrónico de la Universidad Distrital. Magister en telecomunicaciones, profesor de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. rferro@segobdis.gov.co.

Artículo recibido: 01/02/2006

Evaluación par externo: 19/02/2007

Evaluación par externo: 07/07/2007

Aprobado: 28/08/2007

Resumen

Obedeciendo a la necesidad de construir antenas con amplios anchos de banda y dimensiones más pequeñas que las antenas típicas, se ha implementado la geometría fractal como recurso para cumplir estos requerimientos. El trabajo de investigación presentado aquí está principalmente enfocado a analizar los rasgos geométricos de una antena fractal construida con el modelo de Mandelbrot, con el fin de verificar las características y el desempeño de la misma. Se construyeron varias antenas con este modelo, cada una con un número de iteración diferente; se observaron sus características en cuanto a resistencia de pérdidas, inductancia, capacitancia, eficiencia, resistencia de radiación, factor de calidad y ancho de banda, con el propósito de averiguar la influencia de la geometría fractal en el comportamiento de la antena.

Palabras claves: diseño, antena, modelo fractal, experimentación.

Abstract

Obeing the necessity to make antennas with wide bandwidth and dimensions smaller than the typical antennas, fractal geometry has been implemented like resource to fulfill these requirements. Investigation displayed here is focused to analyze the geometric characteristics of an antenna fractal built under Mandelbrot's model, with the purpose of verifying the characteristics and performance of the same one. Several antennas under this model, each one with a number of different iteration were built, were observed their characteristics as far as resistance of losses, inductance, capacitance, efficiency, radiation resistance, factor of quality and bandwidth, in order to investigate the influence of geometry fractal in the behavior of the antenna.

Keywords: Design, antenna, fractal model, experimentation.

INTRODUCCIÓN

Uno de los inconvenientes planteados en las comunicaciones modernas es la necesidad de construir antenas que resuenen a diferentes frecuencias y cuyo tamaño no aumente con dicha variación. En la actualidad, ha surgido una nueva forma de construir antenas que cumplan con los anteriores requerimientos, cuyo diseño está dado por la implementación de modelos matemáticos que siguen la geometría fractal. Esta geometría nació con el fin de representar las formas de la naturaleza¹ imposibles de ser caracterizadas con la exactitud de las figuras descritas en la geometría euclidiana [1]. La palabra fractal fue acuñada por Benoit B. Mandelbrot, profesor de la Universidad de Yale, a finales de los setenta, cuando descubrió su primer modelo matemático al experimentar con las teorías propuestas y publicadas en 1918 por los matemáticos Gaston Julia y Pierre Fatou sobre la iteración de funciones racionales en el plano complejo [2].

Un modelo fractal se describe por algoritmos recursivos (iteraciones) y se desarrolla a partir de las propiedades de autosimilaridad y dimensión fraccionaria. La autosimilaridad o autosemejanza hace referencia a que una pequeña porción del fractal puede verse como todo el fractal reducido a una escala menor; la autosimilaridad no es necesariamente geométrica, también puede ser estadística. En cuanto a la dimensión, se puede decir que un punto tiene dimensión 0, una línea tiene dimensión 1, una superficie tiene dimensión 2, etc., pero los fractales tienen dimensión fraccionaria; es decir, si hay n copias de la geometría original disminuidas por una fracción f , la dimensión D queda definida como:

$$D = \frac{\log n}{\log \left(\frac{1}{f} \right)} \quad [1]$$

Los fractales se han convertido en uno de los principios de la ciencia [3]-[8], formas geométricas que se están aplicando en teoría del caos [9], lógica difusa, ter-

1. Los fractales son la geometría adecuada para las formas irregulares de la naturaleza: hojas de helecho, árboles, cabeza de una coliflor, alas de algunas mariposas, líneas costeras, relámpagos, terrenos rugosos, montañas, nubes, etc.

modinámica de los procesos irreversibles, algoritmos genéticos [10], [11], redes neuronales, simulación por computador de paisajes naturales, descripción de fenómenos físicos, modelación del ruido en sistemas electrónicos, codificación y compresión de imagen y sonido digitalizados [12]-[14], y diseño de antenas [15]-[23].

Las antenas fractales las diseñaron en primera instancia Nathan Cohen y un equipo de ingenieros de la Universidad Politécnica de Cataluña, construyendo modelos de las curvas de Koch y de los triángulos de Sierpinski con el fin de evaluar el comportamiento de este tipo de antenas. Hoy en día se han venido implementando otros modelos, como las curvas de Minkowski, árboles fractales en dos y tres dimensiones, carpetas de Sierpinski, curvas de Hilbert y modelos combinados como el doble fractal de Hilbert y Koch.

En diseños e implementación de antenas multibanda, para comunicaciones de radio, se están implementado algunos modelos fractales, puesto que se alcanza el mismo comportamiento electromagnético en tantas bandas de frecuencia como iteraciones contenga la antena fractal, sin aumentar el tamaño de la misma.

CONJUNTO FRACTAL DE MANDELBROT

El conjunto de Mandelbrot "M" consiste en una serie de números complejos "C" cuyas órbitas de 0 bajo $z^2 + C$ correspondientes no escapan al infinito; cada número está compuesto por una parte real y otra imaginaria, representada por $i (\sqrt{-1})$; se toma un número complejo cualquiera Z "la semilla" y se eleva al cuadrado, al número obtenido se le suma C y se vuelve a elevar al cuadrado y continua, así una y otra vez con el mismo proceso; la función no lineal que lo describe es:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad [2]$$

Si la sucesión queda acotada se dice que el primer parámetro C con el cual se comenzó a iterar pertenece al conjunto de Mandelbrot, de lo contrario este número quedará excluido del mismo. Por ejemplo, si se escoge $C=2$, siguiendo la sucesión se tendrían las siguientes iteraciones: 2, 6, 38, 1.446, ..., como la órbita tiende al infinito, la sucesión diverge, es decir, $C=2$ no está dentro del conjunto de Mandelbrot; mientras que con $C=-2$, cuyas iteraciones serán $-2, 2$, queda acotado al conjunto entre $[-2,2]$; la sucesión no tiende al infinito, por tanto $C=-2$ pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Criterio del escape: Para saber qué número C no pertenece al conjunto de Mandelbrot, basta con encontrar un solo término en la sucesión con el cual comprobar que $|Z_n| > 2$, pues los puntos cuya distancia al origen es superior a 2, es decir $x^2 + y^2 > 4$, no pertenecen al conjunto de Mandelbrot.

Para que un punto pertenezca al fractal de Mandelbrot, éste debe estar entre $[-2,2]$, pues de lo contrario la figura tiende al infinito; por consiguiente, el área siempre queda delimitada por un círculo de radio 2. El matemático Shishikura probó que el área de un fractal de Mandelbrot tiende a estar entre $1,66$ y $1,71^2$.

Algunos ejemplos del conjunto de Mandelbrot generados mediante el software "Ultrafractal 4.0" son:

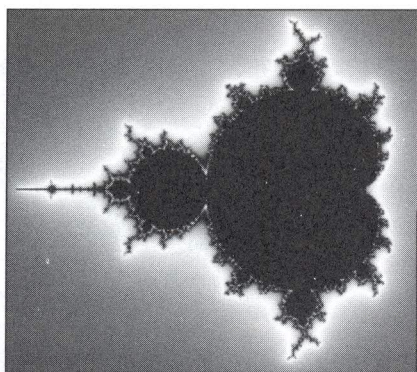


Figura 1. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con cien iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

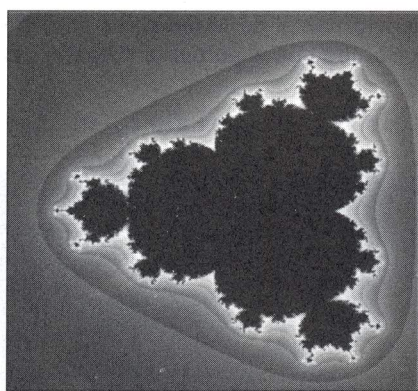


Figura 2. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^4 + C$ con cien iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

- Según Hubbard y De Douday, el área de un fractal de Mandelbrot se calcula así: $A = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n^2 \right)$ donde b_n son los coeficientes de la serie infinita de Laurent del borde exterior del disco unitario que está en el exterior de la figura de Mandelbrot.

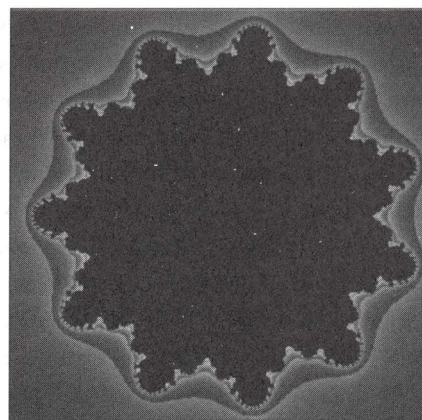


Figura 3. Modelo fractal de Mandelbrot con cinco iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

DISEÑO DE LA ANTENA CON EL MODELO DE MANDELBROT

Para el diseño de la antena se resume a continuación el trabajo desarrollado por el equipo de proyecto dirigido, área de comunicaciones del Programa de Ingeniería Electrónica de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Se seleccionaron las iteraciones 7, 10, 13 y 16 del modelo de Mandelbrot " $Z^2 + C$ ", con un factor de escala de 3, porque en ellas se obtuvieron los mejores resultados en multibandas, después de diseñar y experimentar por tanteo con otras ecuaciones y número de iteraciones, por ejemplo: " $Z^1 + C$ ".

En el diseño de la antena fractal se siguieron los mismos pasos que se dan para la construcción de una antena *loop* pequeña³: área de la *loop* $\ll \lambda^2$; se eligió esta configuración por la similitud con la forma fractal y por la sencillez en su implementación (figura 4).

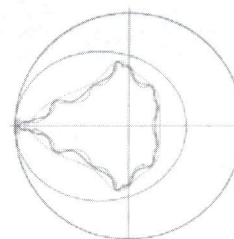


Figura 4. El sistema de Mandelbrot es la imagen de un círculo y se puede construir de un disco por ciertos arcos que se van disminuyendo hacia el interior.

- La antena *loop* pequeña tiene una longitud aproximada de $\lambda/8$ o menos; se puede considerar como un dipolo corto con carga.

Las antenas en bucle con longitud de perímetro λ necesitan una cantidad importante de espacio; por esta razón se trabajó sobre un bucle pequeño (radio = 20,24 cm) que, mediante el modelo fractal de Mandelbrot, puede salvar este inconveniente incrementando el perímetro hasta el infinito. Las cuatro iteraciones diseñadas se imprimieron sobre cuatro placas de material dieléctrico⁴, con las siguientes características: sustrato de Polytetrafluoroethylene (PTFE) Woen Glass, $\epsilon_r = 2,2$, espesor del dieléctrico = 0,8 mm, espesor del recubrimiento de cobre = 0,04 mm, factor de disipación = 0,0009. La antena fue polarizada linealmente (horizontal) y montada ortogonal a un plano de tierra de 115 cm * 76,4 cm; la estructura presenta simetría respecto a un punto en el cual se alimenta a través de una línea de transmisión balanceada, con impedancia característica de 50 Ω . Atendiendo a la geometría particular de este fractal, se espera observar la corriente fluyendo desde el centro de la alimentación hacia las puntas, donde se radia la potencia; lo interesante es que esas puntas no son los extremos de la antena, sino todas aquellas salientes que presenta el modelo fractal según el número de iteraciones.

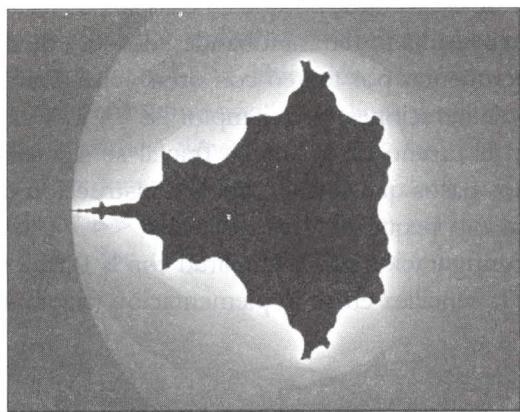


Figura 5. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con siete iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

4. Taconic: Advanced Dielectrics Division facilitó al proyecto dirigido siete muestras gratis de láminas PTFE de fibra de vidrio recubiertas de cobre; estas bases se caracterizan por sus bajas pérdidas, constante dieléctrica uniforme y consistente en un buen rango de frecuencia y estable a lo largo y ancho de su dimensión.

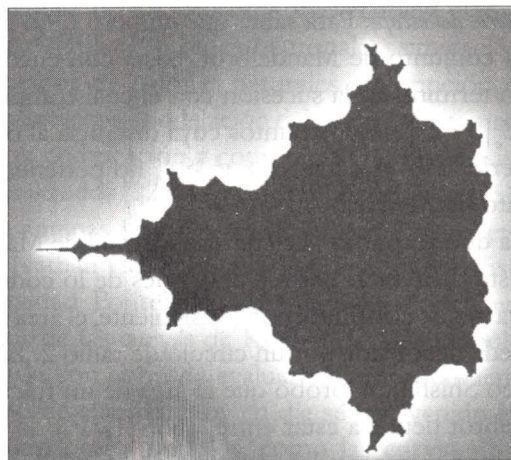


Figura 6. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con diez iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

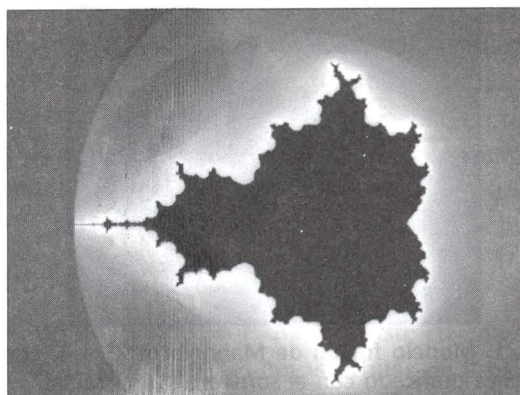


Figura 7. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con trece iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

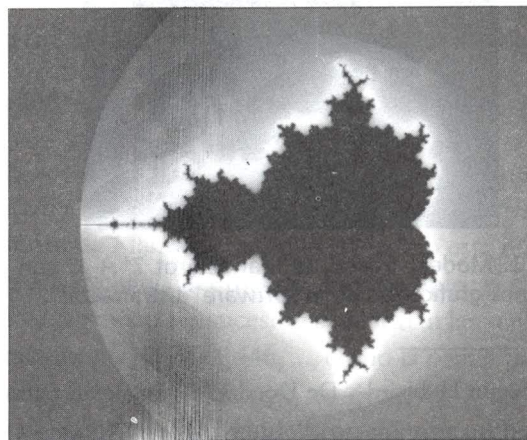


Figura 8. Modelo fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con 16 iteraciones graficado con el software "Ultrafractal".

Se observa en las figuras 5 a 8 un aspecto aproximado en todas las escalas (autosimilaridad no perfecta); se espera que una antena autosemejante opere de manera similar en varias longitudes de onda; es decir, que mantenga sus parámetros de radiación similares en diversas bandas de frecuencia. Así mismo, se observa que en los modelos fractales de Mandelbrot el círculo de radio "r" que enmarca el fractal permanece constante a lo largo del proceso iterativo.

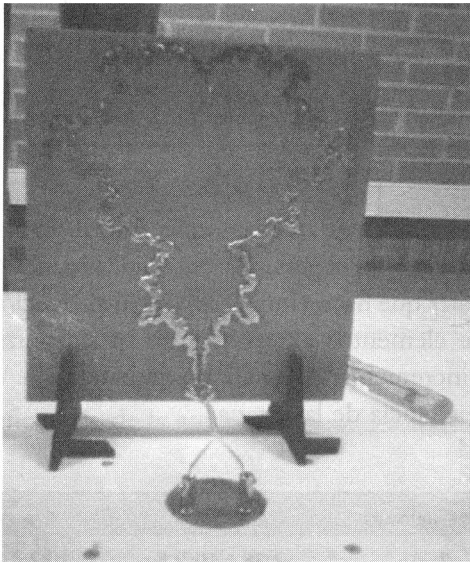


Figura 9. Antena fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$ con 16 iteraciones conectada a ASD512 Antenna Systems Demonstrator - Feedback.

El área encerrada por la iteración N° 16, del modelo fractal de Mandelbrot " $Z^2 + C$ " (figura 9), queda delimitada en un radio de 16,79 a 17,30 cm.

$$A_{\text{BUCLECIRCULAR}} \approx \pi \cdot r^2 \approx 3,1415 \cdot (20,24 \text{ cm})^2 \\ \approx 1286,946 \text{ cm}^2$$

Al relacionar las dos áreas, obtendremos:

$$A_{\text{CURVAMANDELBROT}} \div A_{\text{BUCLECIRCULAR}} \approx 0,709$$

Al comparar las áreas de las antenas fractal con el modelo de Mandelbrot y la antena *loop* circular pequeña en el rango de frecuencia de 83,63 y 501,61 MHz, encontramos que ésta presenta un valor promedio de 913,479 cm²; mientras que el área de la *loop* pequeña es de 1.286,945 cm².

Como se observa, los fractales de Mandelbrot tienen un área limitada, es decir, finita; mientras que su perímetro es infinito, puesto que a medida que se itera las formas tienden a ser más pequeñas dentro de una misma área, haciendo entonces tender el perímetro al infinito. Cuanto más se aproxima el perímetro del bucle de una antena fractal a una longitud de onda, más tiende a resonar la estructura y más dependen sus características de la forma de la antena. La antena con el modelo fractal de Mandelbrot conserva la buena propiedad que poseen algunos fractales para rellenar el espacio, y por esto es posible disponer antenas multibandas más pequeñas.

IDENTIFICACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LA ANTENA SEGÚN EL MODELO DE MANDELBROT

Los parámetros de entrada (pérdidas de retorno, resistencias de pérdidas y de radiación, reactancias inductiva y capacitiva) y parámetros de salida (ancho de banda, factor de calidad, eficiencia de la antena, ganancia y patrón de radiación) frente a la frecuencia de operación se muestran a continuación.

El grado de desacoplamiento presentado entre la fuente⁵ y la carga (antena fractal de Mandelbrot) fue el siguiente:

$$G_D = \frac{\text{Potencia}_{\text{reverse}}}{\text{Potencia}_{\text{forward}}} \quad [3]$$

N° de iteraciones	P _{reverse}	P _{forward}	G _D
7	1 W	4 W	0,25
10	0,5 W	4 W	0,125
13	0,5 W	4 W	0,125
16	1 W	4 W	0,25

Para efectos de la resistencia de pérdidas de la antena, se obtuvo con la fórmula:

$$R_p = \frac{a}{b\sqrt{\pi f \delta}} \quad [4]$$

5. Generador de RF ASD152 de Feedback.

Donde δ = profundidad de penetración del campo eléctrico⁶, a = radio de la espira, b = radio del alambre, f = frecuencia de operación

N° de iteraciones	R_p teórica	R_p medida
7	0,613 Ω	0,17 Ω
10	0,741 Ω	0,17 Ω
13	0,819 Ω	0,19 Ω
16	0,916 Ω	0,21 Ω

Así mismo, la resistencia de radiación:

$$R_r = 31.200 \left(\frac{A}{\lambda^2} \right)^2 \quad [5]$$

donde A = área del fractal según el modelo de Mandelbrot, λ = longitud de onda.

Al comparar las antenas fractal con el modelo de Mandelbrot y la *loop* circular pequeña en cuanto a su resistencia de radiación, para el rango de frecuencia de 83,63 y 501,61 MHz, encontramos que ésta se mueve entre los valores de 1,48 y 2.157 Ω , mientras que para una antena *loop* pequeña es nominalmente de unas fracciones de ohmios. Aun cuando la resistencia de radiación es de sólo unos pocos ohmios para el valor más bajo de frecuencia en la antena fractal, éste alcanza el valor de 2.157 Ω en el extremo de las frecuencias altas; sendos valores desmejoran notablemente el acople con la línea de transmisión.

Las antenas de bucle pequeñas tienen dificultades en el acoplamiento entre la línea de transmisión y la antena por su baja impedancia de entrada⁷; sin embargo, el bucle fractal según el modelo de Mandelbrot tiene la ventaja de aumentar la resistencia de entrada, manteniendo constante el volumen ocupado, por el incremento de la longitud del perímetro hasta cierto número de iteraciones.

6. Como criterio de diseño se tomó el 1% de dicha profundidad. Para las frecuencias de experimentación es de 0,5 a 1 mm, aproximadamente.
7. La antena *loop* pequeña presenta una resistencia de radiación muy baja (del orden de fracciones de ohmio: 0,3 Ω), y reducida eficiencia.

La inductancia de la antena está dada por:

$$L = \mu a \left(\ln \left(\frac{8a}{b} \right) - 2 \right) \quad [6]$$

Donde $\mu = \mu_r \mu_0 = 1,26 \mu\text{H/m}$ para el cobre, a = radio de la espira, b = radio del alambre.

N° de iteraciones	L teórica	L medida
7	0,339 μH	0,5 μH
10	0,35 μH	0,5 μH
13	0,38 μH	0,6 μH
16	0,387 μH	0,6 μH

La forma dentada de la antena fractal según el modelo de Mandelbrot genera capacitancias e inductancias adicionales que hacen innecesaria la introducción al sistema de elementos externos para su sintonización o para el incremento de su ancho de banda.

Capacitancia de la antena:

N° de iteraciones	C teórico	C medido
7	2,38 * 10 ⁻¹² F	1,82 * 10 ⁻¹² F
10	2,39 * 10 ⁻¹² F	1,82 * 10 ⁻¹² F
13	2,68 * 10 ⁻¹² F	1,51 * 10 ⁻¹² F
16	3,16 * 10 ⁻¹² F	1,51 * 10 ⁻¹² F

El factor de calidad de la antena se obtuvo de la siguiente fórmula:

$$Q = \frac{X_L}{R_p} = \frac{2\pi f L}{R_p} \quad [7]$$

Donde X_L reactancia inductiva; R_p resistencia de pérdidas

N° de iteraciones	Q teórico	Q medido
7	291	904
10	496	2.090
13	975	4.635
16	1.332	6.004

Para conseguir un factor de calidad Q alto en la antena fractal según el modelo de Mandelbrot, se construyó sobre una baquela que tuviera un dieléctrico con un gran espesor para evitar las corrientes de fuga y ondas superficiales, y con una permitividad ϵ_r baja para que las líneas de campo se confinaran entre la antena y el plano de tierra.

Mientras que el ancho de banda se calculó así:

$$BW = \frac{F_R}{Q} \tag{8}$$

Donde F_R frecuencia central, Q factor de calidad.

Nº de iteraciones	BW medido a -3 dB	BW teórico
7	106°	377 KHz
10	91,2°	343 KHz
13	52,4°	227 KHz
16	53,2°	236 KHz

La eficiencia de la antena:

$$\eta = \frac{R_r}{R_r + R_p} \tag{9}$$

Nº de iteraciones	Rp medida	η medida
7	0,17 Ω	26,6%
10	0,17 Ω	27,1%
13	0,19 Ω	28,6%
16	0,21 Ω	30,9%

La antena fractal de Mandelbrot tiene una ganancia de 1,69 a 11.13 dBi para las iteraciones siete y dieciséis, respectivamente, mayor que en una antena *loop* pequeña (1,5 dBi). Esta última presenta menos ganancia debido a su baja eficiencia (22%).

MEDICIONES Y RESULTADOS

En las figuras 10 a 13 se muestra el corrimiento⁸ de la frecuencia de resonancia de la antena fractal según el

modelo de Mandelbrot “ $Z^2 + C$ ” a medida que aumenta el número de iteraciones. Se comprobó la independencia de la frecuencia de resonancia con el tamaño de la antena.

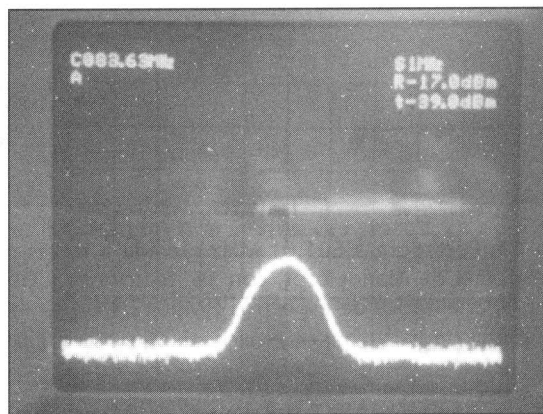


Figura 10. Portadora a 83,63 MHz radiada a través de la antena fractal de Mandelbrot, con siete iteraciones y visualizada en el analizador de espectros HM5012/14.

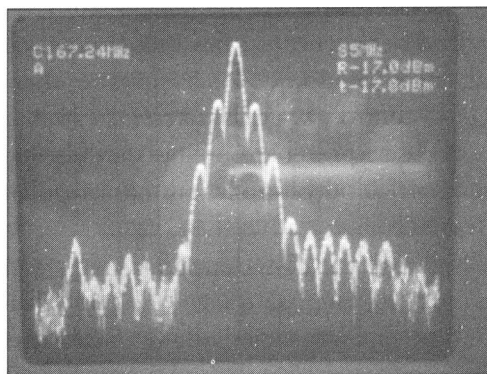


Figura 11. Portadora a 167,24 MHz radiada a través de la antena fractal de Mandelbrot, con diez iteraciones y visualizada en el analizador de espectros HM5012/14.

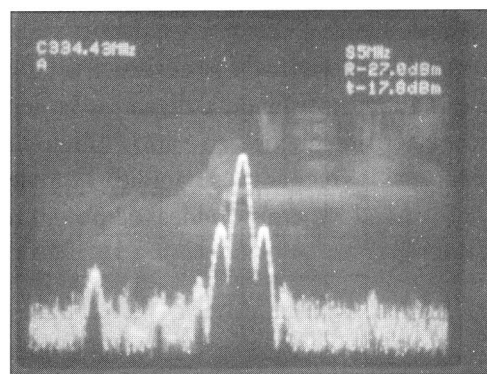


Figura 12. Portadora a 334,43 MHz radiada a través de la antena fractal de Mandelbrot, con trece iteraciones y visualizada en el analizador de espectros HM5012/14.

8. Las cuatro bandas de frecuencias están equiespaciadas y tienen un factor de espaciamiento de 2.

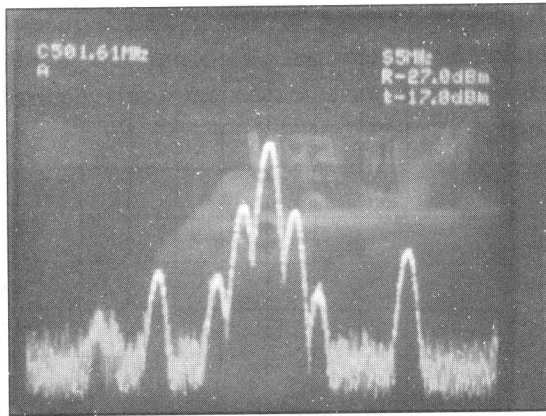


Figura 13. Portadora a 501,61 MHz radiada a través de la antena fractal de Mandelbrot, con 16 iteraciones y visualizada en el analizador de espectros HM5012/14.

Para la iteración N° 7 del fractal de Mandelbrot se descubrió una distribución de corriente a lo largo de la antena similar a la antena *loop* pequeña: corriente casi uniforme (se puede considerar en fase a lo largo del fractal); mientras que para las iteraciones 10, 13 y 16, la distribución de corriente no fue uniforme a lo largo del fractal, ocasionando que los campos resultantes se sumaran en el centro y se anularan en los extremos. En todos los casos se presentaron altas pérdidas por corrientes tangenciales debido a las formas irregulares del modelo fractal.

En las figuras 14 a 17 se muestran los patrones de radiación para las antenas fractales, según el modelo de Mandelbrot; en las mencionadas figuras las frecuencias de resonancia más altas varían las características de radiación de la antena fractal. Así mismo, debido a la simetría del fractal de Mandelbrot y a que los campos eléctricos y magnéticos se cancelan en 0° y 180°, se presentan sendos nulos.

El patrón de radiación de la antena fractal con el modelo de Mandelbrot tiende a dispersar la densidad de potencia electromagnética en varios lóbulos laterales indeseados; si la frecuencia se duplica aparecen dos lóbulos, deformando la emisión ideal de potencia en el espacio libre.

- Las figuras de distribución de campo en el plano polar, para las cuatro iteraciones, se obtuvieron por simulación con el software "Eznec-M".

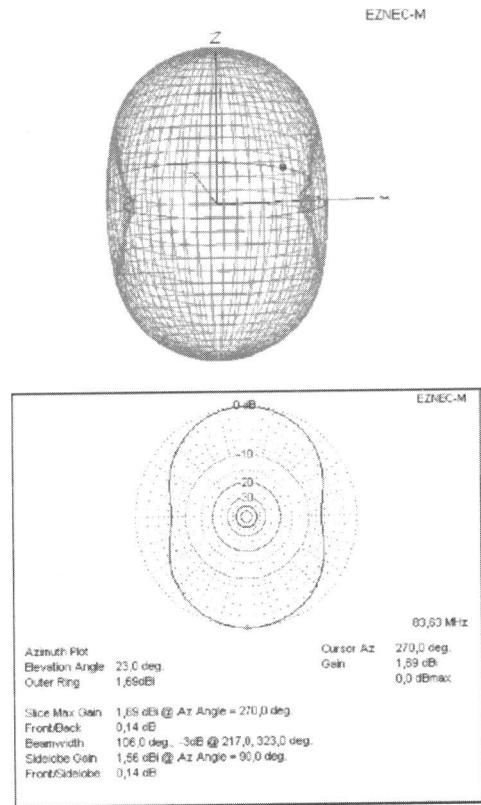


Figura 14. Patrón de radiación polar de la antena fractal en la séptima iteración, graficado con el software "Eznec-M".

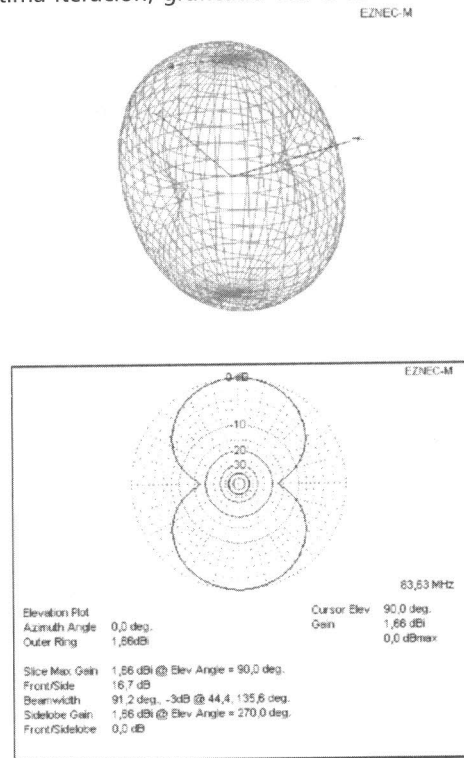


Figura 15. Patrón de radiación polar de la antena fractal en la décima iteración, graficado con el software "Eznec-M".

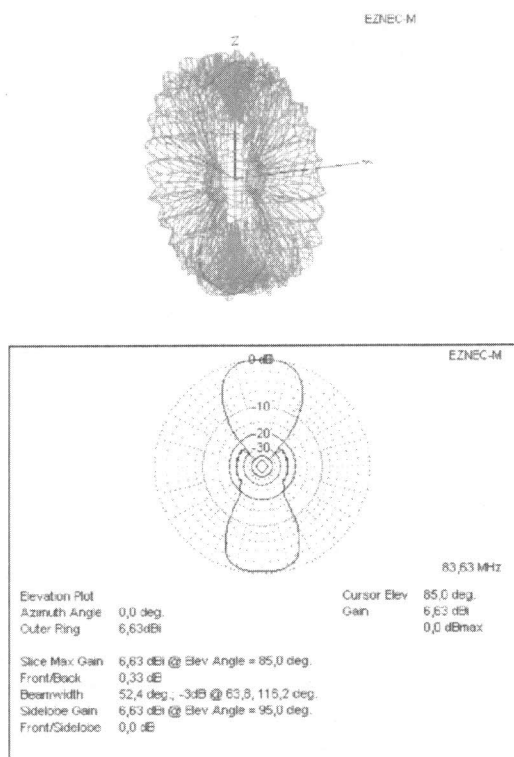


Figura 16. Patrón de radiación polar de la antena fractal en la decimotercera iteración, graficado con el software "Ez nec-M".

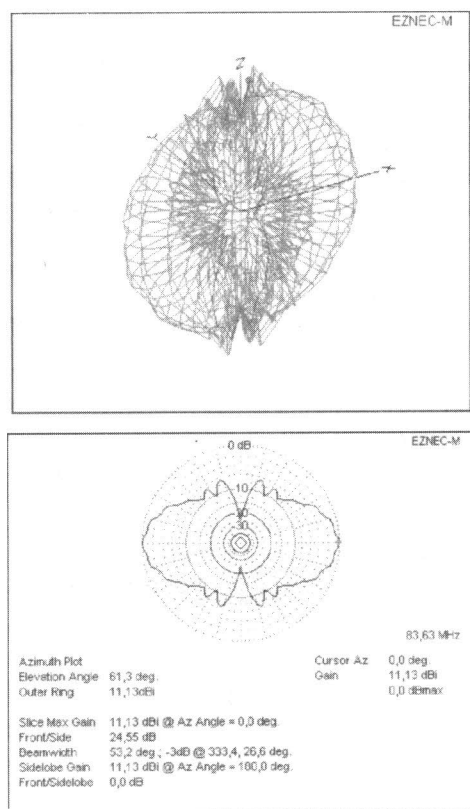


Figura 17. Patrón de radiación polar de la antena fractal en la decimosexta iteración, graficado con el software "Ez nec-M".

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Se descubrieron las características multibanda de la antena fractal en diferentes iteraciones realizadas sobre el modelo de Mandelbrot; para cada una de ellas se comprobó una frecuencia de resonancia distinta, sin cambiar previamente el tamaño de la antena. Así mismo, es posible encontrar mayor directividad en los patrones de radiación.

A medida que aumenta el número de iteraciones del modelo, se obtiene una resistencia de pérdidas mayor debido al mayor número de puntos de inflexión que se presentan en la forma del fractal, ocasionando pérdidas por corrientes de fuga y afectando así el factor de calidad de la antena. Igualmente, la resistencia de radiación crece en forma logarítmica en función de la frecuencia.

Un punto a favor está dado por el valor de la capacitancia, la cual disminuye con el aumento en el grado de iteraciones; de igual manera, se puede obtener un grado de desacoplamiento menor, ya que la propiedad de autosemejanza hace que la antena radie a otras frecuencias y produzca una potencia de retorno menor, sin desconocer que estas pérdidas también son ocasionadas por la constante dieléctrica del material.

Al igual que en una *loop* circular, se obtiene menor eficiencia que con otras antenas; esto se presenta porque los electrones fluyen en la antena de un modo circular.

La antena fractal de Mandelbrot en su séptima iteración presenta la distribución de corriente y características de radiación similares a una antena *loop* circular monobanda clásica (el diseño del fractal en todas sus iteraciones se realizó siguiendo el mismo procedimiento de una *loop* pequeña); sin embargo, la reactancia de entrada es notablemente distinta en estos dos tipos de antenas. Se podrían comparar las impedancias de entrada de las antenas de Mandelbrot con antenas *loop* similares, pero éste no fue el propósito de nuestra experiencia investigativa.

Se comprobó la propiedad de autosimilaridad del fractal en todas sus iteraciones, ya que las distribuciones de corriente son las mismas en cada réplica.

CONCLUSIONES

Una antena fractal de Mandelbrot puede usarse como antena multibanda, puesto que incrementa la frecuencia de resonancia con un espaciado de 2, a medida que

aumenta el número de iteraciones sin modificar el tamaño de la antena.

El patrón de radiación cambia cuando el número de iteraciones se incrementa, ya que se producen pequeñas réplicas de la misma antena, presentando así diferentes lóbulos de radiación para distintas frecuencias.

La antena con 16 iteraciones reúne propiedades espectrales y de radiación de las antenas con menor número de iteraciones (7, 10, 13). De igual manera, no se observa interferencia entre las frecuencias de resonancia de dicha antena.

Las altas pérdidas y bajas eficiencias en las antenas fractales de Mandelbrot limitan sus aplicaciones a pequeña señal (puede ser útil en recepción), y se traduce en una desventaja frente a otros modelos de antenas fractales.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*, Nueva York: W.H. Freeman.
- [2] Falconer, K.J. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Nueva York: Wiley.
- [3] Peitgen, H.O.; Henriques, J.M. & Penedo, L.F. (eds.). (1991). *Fractals in the Fundamental and Applied Sciences*. Amsterdam: North Holland.
- [4] Cherepanov, G.P.; Balankin, A.S. & Ivanova, V.S. (1995). Fractal fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, pp. 997-1033.
- [5] Jeng, J.H.; Varadan, V.V. & Varadan, V.K. (1987). Fractal finite element mesh generation for vibration problems, *J. Acous. Soc. Amer.*, vol. 82, pp. 1829-1833.
- [6] Lakhtakia, A.; Holter, N.S.; Varadan, V.K. & Varadan, V.V. Self-similarity in diffraction by a self-similar fractal screen. *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 35, pp. 236-239.
- [7] Jaggard, D.L. (1995). Fractal electrodynamics: Wave interactions with discretely self-similar structures en *Electromagnetic Symmetry*. Taylor, pp. 231-280.
- [8] Jaggard, D.L. (1990). On fractal electrodynamics en *Recent Advances in Electromagnetic Theory*. Springer Verlag, pp. 183-224.
- [9] Peitgen, H.O.; Jurgens, H. & Saupe, D. (1992). *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Nueva York: Springer-Verlag.
- [10] Werner, D.H.; Werner, P.L. & Church, K.H. (2001). Genetically engineered multiband fractal antennas. *Electron. Lett.*, vol. 37, pp. 1150-1151.
- [11] Werner, D.H.; Werner, P.L.; Church, K.H.; Culver, J.W. & Eason, S.D. (2001). Genetically engineered dual-band fractal antennas. *IEEE AP-S Inter. Symp. 2001*, vol. 3, pp. 628-631.
- [12] Jacquin, A.E. (1993). Fractal image coding: A review. *Proc. IEEE*, vol. 81, pp. 1451-1465.
- [13] Wohlberg, B. & DeJager, G. (1999). Review of the fractal image coding literature. *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, pp. 1716-1729.
- [14] Barnsley, M.F. & Hurd, L.P. (1993). *Fractal Image Compression*. Wellesley, MA: A.K. Peters.
- [15] Collin, R.E. & Zucker, F.J. (1969). *Antenna Theory Pt. 1*. Nueva York: McGraw-Hill.
- [16] Wheeler, H.A. (1975). Small Antennas. *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. AP-23, pp. 462-469.
- [17] Jaggard, D.L. (1997). Fractal electrodynamics: From super antennas to superlattices. *Fractals in Engineering*, Springer, pp. 204-221.
- [18] Werner, D.H.; Haupt, R.L. & Werner, P.L. (1999). Fractal antenna engineering: The theory and design of fractal antenna arrays. *IEEE Ant. Propagat. Mag.*, vol. 41, N° 5, pp. 37-59.
- [19] Walker, G.J. & James, J.R. (1998). Fractal volume antennas. *Electron. Lett.*, vol. 34, pp. 1536-1537.
- [20] Werner, D.H.; Werner, P.L.; Jaggard, D.L.; Jaggard, A.D.; Puente, C. & Haupt, R.L. (1999). The theory and design of fractal antenna arrays. *Frontiers in Electromagnetics*, D.H. Werner and R. Mittra (eds.), pp. 94-203.
- [21] Baliarda, C.P.; Romeu, J. & Cardama, A. (2000). The Koch monopole: A small fractal antenna. *IEEE Trans. Ant. Propagat.*, vol. 48 pp. 1773-1781.
- [22] Werner, D.H.; Rubio Bretones, A. & Long, B.R. (1999). Radiation characteristics of thin-wire ternary fractal trees. *Electron. Lett.*, vol. 35, pp. 609-610.
- [23] Puente, C.; Romeu, J.; Bartoleme, R. & Pous, R. (1996). Perturbation of the Sierpinski antenna to allocate operating bands. *Electron. Lett.*, vol. 32, pp. 2186-2187.
- [24] Kraus, John D. (1988). *Antennas*, 2nd ed. McGraw Hill.
- [25] Balanis, C.A. (1982). *Antenna Theory, Analysis and Design*, Harper & Row, Publishers.
- [26] Vinoy, K.J. (2002). *Fractal Shaped Antenna Elements for Wide-and Multi- band Wireless Applications*. The Pennsylvania State University The Graduate School College of Engineering, August.
- [27] González, J.M. & Romeu, J. (2002). *Task 1.1 Final Report, Fractalcoms Project (IST 2001-33055)*. Deliverable D1, Dec. 17th.
- [28] Jasik, H. (ed.). (1961). *Antenna Engineering Handbook*, Nueva York: McGraw-Hill.
- [29] Harrington, R.F. (1968). *Field Computations by Moment Methods*, Nueva York: Macmillan.

Páginas web

www.Fractales.org
<http://Omega.ilce.edu.mx:3000/sities/ciencia/volumen3/150/htm/sec4.htm>
www.xtec.es/jdomen28/article6.htm
www.sunleitz.com/spanish/quees.html
www.Geocities.com/ingenieria_antnas/texto6.htm
www.ultrafractal.com

Empresas:

Taconica: Advanced Dielectrics Division
 Fractal Antenna Systems, e-mail: aerlich@fractenna.com
 Fractus
 T&M Antenas