

Aplicación actuarial del modelo
epidemiológico SIR con nacimientos
y muertes.

Nicolás Castillo Soto

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGISTER EN CIENCIAS
ACTUARIALES

DIRIGIDO POR: MAGISTER. YESID ESTEBAN CLAVIJO PENAGOS
CO-DIRIGIDO POR: PHD. JULIÁN ANDRÉS AGREDO ECHEVERRY

UNIVERSIDAD ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

NOVIEMBRE 2023

Agradecimientos

A mi familia, a mis profesores y a mis amigos que me han ayudado en la vida y en el desarrollo de mi carrera.

Reconocimiento especial a mis tutores Julián Agredo y Yesid Clavijo por su ayuda y acompañamiento en el trascurso de todo el trabajo, también al profesor Ignacio Barradas del CIMAT por las sugerencias que permitieron el desarrollo de las simulaciones realizadas.

Resumen

En este trabajo abordaremos la modelación de primas y reservas de un producto asegurador de vida que ofrezca cobertura en caso de infección o muerte a causa de una enfermedad viral, la modelación de las primas y reservas estará dada bajo el contexto de una enfermedad descrita por medio de un modelo epidemiológico compartimentado, en particular el modelo epidemiológico *SIR* con nacimientos y muertes (*SIRBD*).

Para lograr dicho objetivo, se da una explicación teórica acerca del modelo seleccionado. Se describe cómo se entienden los pagos de primas y reclamos por medio de la notación en la literatura de contingencias de vida, así como las expresiones para las primas de diferentes planes que cubren la enfermedad; se darán aproximaciones a los valores de las primas mediante simulaciones numéricas.

Por último, se considerará un enfoque retrospectivo de la reserva para un producto asegurador que cubra una enfermedad viral modelada mediante dicho modelo, se explorarán sus características y analizarán simulaciones numéricas que las evidencien.

TABLA DE CONTENIDOS

Agradecimientos	II
Resumen	III
Lista de figuras	IV
1. Introducción	1
2. Modelos compartimentados	4
2.1. Introducción a los modelos compartimentados	4
2.1.1. Modelo <i>SIS</i> clásico	6
2.1.2. Modelo <i>SIS</i> con nacimientos y muertes	6
2.1.3. Modelo <i>SIR</i> clásico	7
2.1.4. Modelo <i>SIR</i> con nacimientos y muertes	8
3. Análisis Actuarial	10
3.1. Proporciones de los compartimentos	10
3.2. Pago de primas y reclamos con anualidades	12
3.3. Elaboración de las tarifas	25
3.3.1. Aproximación basada en tablas de infección	26
3.3.2. Soluciones con series de potencias	29
4. Ejemplos Numéricos	31
4.1. Simulación de Parámetros	32
4.2. Prima óptima con datos reales	36
Conclusiones	42

Índice de figuras

2.1. Dinámica SIS básico	5
2.2. Dinámica SIR básico	5
4.1. Porcentaje de susceptibles s con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$	34
4.2. Porcentaje de infectados i con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$	34
4.3. Valor de prima π para diferentes periodos t con $\varpi = 4,500,000$	35
4.4. Reserva mujeres de 35 años con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$	35
4.5. Reserva hombres de 35 años con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$	35
4.6. Valor de prima π para hombres y diferentes periodos t con $\varpi = 5,000,000$	37
4.7. Valor de prima π para mujeres y diferentes periodos t con $\varpi = 5,000,000$	38
4.8. Prima óptima para hombres por grupo de edad	39
4.9. Prima óptima para mujeres por grupo de edad	40
4.10. Prima óptima hombres y mujeres con pago de 10 M	40
4.11. Reserva de hombres y mujeres de 35 años con pago de 10 M	41

Capítulo 1

Introducción

Los modelos epidemiológicos son herramientas matemáticas utilizadas para estudiar la propagación de enfermedades infecciosas en poblaciones humanas y animales. Estos modelos se dividen en compartimentos o categorías que representan diferentes estados de la enfermedad, como la susceptibilidad, la infección, la recuperación y la muerte. La historia de los modelos epidemiológicos compartimentados se remonta a principios del siglo XX, cuando se utilizaron por primera vez para comprender la propagación de enfermedades como la viruela y la tuberculosis. Desde entonces, estos modelos se han utilizado para estudiar y predecir la propagación de numerosas enfermedades infecciosas, incluyendo el VIH, la gripe y el ébola.

Uno de los primeros modelos epidemiológicos compartimentados fue propuesto por Kermack y McKendrick en 1927 para estudiar la propagación de la viruela. Este modelo se basaba en tres compartimentos: susceptibles, infectados y recuperados. Los investigadores utilizaron ecuaciones diferenciales para describir cómo se propagaba la enfermedad en una población determinada y cómo se reducía el número de casos a medida que se desarrollaba la inmunidad colectiva. Este modelo se conoce como el modelo *SIR* y se ha utilizado ampliamente desde entonces.

En la década de 1950, los modelos epidemiológicos compartimentados se utilizaron para estudiar la propagación de la tuberculosis. El modelo propuesto por Daniels y Kass en 1953 incluía tres compartimentos: susceptibles, infectados y recuperados. Este modelo se utilizó para predecir la efectividad de los programas de vacunación y control de la tuberculosis. El modelo *SIR* se modificó para incluir la posibilidad de que los individuos infectados no se recuperen completamente y se conviertan en portadores crónicos de la enfermedad. Este modelo se conoce como el modelo *SIRS* y se ha utilizado para estudiar enfermedades como la fiebre tifoidea y la malaria.

En la década de 1960, los modelos epidemiológicos compartimentados se utilizaron para estudiar la propagación de enfermedades de transmisión sexual, como la gonorrea y la sífilis. Estos modelos incluían compartimentos para individuos susceptibles, infectados y tratados. Los investigadores utilizaron estos modelos para predecir la efectividad de los programas de prevención y control de enfermedades de transmisión sexual.

En la década de 1970, los modelos epidemiológicos compartimentados se utilizaron para estudiar la propagación del VIH. El modelo propuesto por Anderson y May en 1985 incluía cuatro compartimentos: susceptibles, infectados, portadores crónicos y fallecidos. Este modelo se utilizó para predecir la propagación del VIH en diferentes poblaciones y para evaluar la efectividad de diferentes estrategias de prevención y tratamiento.

En la década de 2000, los modelos epidemiológicos compartimentados se utilizaron para estudiar la propagación de la gripe. El modelo utilizado para estudiar la pandemia de gripe de 1918 incluía tres compartimentos: susceptibles, infectados y fallecidos. Este modelo se utilizó para predecir la propagación de la gripe y la efectividad de diferentes medidas de control, como la vacunación y el aislamiento de los individuos infectados.

En los últimos años, los modelos epidemiológicos compartimentados han sido fundamentales para comprender y abordar la propagación de enfermedades infecciosas emergentes, como el Ébola, el Zika y, más recientemente, el COVID-19. Durante la pandemia de COVID-19, los modelos epidemiológicos compartimentados han desempeñado un papel crucial en la predicción de la propagación del virus, la evaluación de intervenciones de control y la toma de decisiones por parte de los responsables de la salud pública.

El modelo epidemiológico compartimentado más utilizado durante la pandemia de COVID-19 es el modelo *SIR*, que divide a la población en tres compartimentos: susceptibles, infectados y recuperados. Este modelo se ha utilizado para estimar la tasa de transmisión del virus, la duración de la infección y otros parámetros epidemiológicos clave. A medida que se obtienen nuevos datos y se realizan investigaciones más detalladas, estos modelos se han ido refinando y adaptando para mejorar su precisión y capacidad de predicción.

Es importante tener en cuenta que los modelos epidemiológicos compartimentados son solo una parte del conjunto de herramientas utilizadas en epidemiología. Además de estos modelos, se utilizan técnicas de análisis estadístico, estudios de casos y controles, estudios de cohortes y otras metodologías para obtener una comprensión completa de la propagación de enfermedades y sus factores de riesgo.

En la literatura podemos encontrar que ya se han estudiado la modelación de primas y reservas utilizando el modelo *SIR* clásico [16] así como algunos otros modelos compartimentados manteniendo una población constante. Con el objetivo de dar un mayor entendimiento a este trabajo presentaremos una breve descripción de los modelos compartimentados para proceder a abordar la modelación de primas y reservas utilizando el modelo *SIRBD* el cual a comparación del clásico incluye tanto nacimientos como muertes, en particular el modelo abordado considera una población no constante, de igual manera se tratará la interpretación de los resultados y se revisará si se reincorporan los resultados obtenidos en el modelo *SIR* clásico.

En el trabajo se utiliza una metodología de demostración basada en lógica calculatoria, a continuación se establecen un ejemplo que ayudarán al lector a entender las demostraciones.

Proposición 1

⊗ ⟨ Argumento A ⟩

Proposición 2

⊗ ⟨ Argumento B ⟩

Proposición 3

La argumentación anterior se interpreta de la siguiente manera:

- El símbolo ⊗ se interpreta como una relación entre dos proposiciones, a lo largo del trabajo esta relación puede ser una igualdad, desigualdad, implicación u equivalencia.
- La proposición 1 se relaciona con la proposición 2 teniendo en cuenta el argumento A.
- La proposición 2 se relaciona con la proposición 3 teniendo en cuenta el argumento B.
- Teniendo en cuenta la transitividad de las relaciones mencionadas, la proposición 1 se relaciona con la proposición 3 teniendo en cuenta los argumentos A y B.

Capítulo 2

Modelos compartimentados

Antes de desarrollar la modelación de primas y reservas mediante el modelo *SIRBD*, se tratarán algunos conceptos básicos de los modelos compartimentados.

2.1. Introducción a los modelos compartimentados

Los modelos epidemiológicos compartimentados se basan en supuestos simplificados sobre la dinámica de la enfermedad y la interacción entre los individuos en una población. Estos modelos compartimentados ayudan a describir eventos donde se puedan identificar diferentes etapas de transición con ayuda de un sistema ordinario de ecuaciones diferenciales, en el caso de describir enfermedades virales se busca dividir la población en compartimentos individuales, para nuestro caso dividiremos la población en tres compartimentos:

- S := Compartimento correspondiente a los susceptibles de contraer la enfermedad.
- I := Compartimento correspondiente a los infectados por la enfermedad que se asume son capaces de transmitir la enfermedad a los susceptibles.
- R := Compartimento correspondiente a aquellos que se recuperaron de la enfermedad.
- N := Correspondiente al tamaño de la población total, la población puede o no variar con el tiempo t y estará descrita por los compartimentos S , I y R según el modelo a abordar.

Teniendo en cuenta que estos compartimentos están asociados a un modelo compartimentado, en realidad los compartimentos S , I e R son funciones del tiempo t las cuales describen el número de individuos en cada uno de estos compartimentos en cada instante $t \geq 0$.

A continuación se describirán algunos modelos compartimentados teniendo en cuenta la perspectiva de sus compartimentos:

- **SIS** describe un modelo compartimentado sin inmunidad a la reinfección, el siguiente gráfico ayuda a entender la dinámica entre los compartimentos:

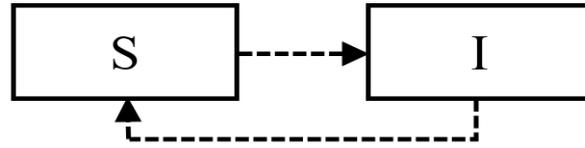


Figura 2.1: Dinámica SIS básico

Fuente: Elaboración propia

- **SIR** describe un modelo compartimentado con inmunidad a la reinfección, el siguiente gráfico ayuda a entender la dinámica entre los compartimentos:



Figura 2.2: Dinámica SIR básico

Fuente: Elaboración propia

Existen diferentes tipos de modelos compartimentados, sin embargo, para el objetivo de este trabajo consideramos apropiado abordar estos dos modelos. Teniendo en cuenta a [2], al formular modelos en términos de derivadas del tamaño de cada compartimento, también estamos asumiendo que el número de miembros en cada compartimento es una función diferenciable con respecto a t .

Para los modelos anteriores es necesario establecer suposiciones que nos permitan expresar las derivadas en términos de los compartimentos como funciones de los otros compartimentos, es así que se introducen las suposiciones relacionadas con los contagios y recuperación:

- El factor β corresponde al número promedio de contactos suficientes para transmitir el virus por unidad de tiempo, este factor aplica tanto al modelo *SIS* como *SIR*.
- Se considera que una fracción α de la clase de infectados deja la clase *I* por unidad de tiempo, en caso del modelo *SIS* hacia la clase *S* y en caso del modelo *SIR* hacia la clase *R*.

En las secciones siguientes se procederá a exponer algunos modelos compartimentados encontrados en la literatura, si bien los modelos compartimentados pueden ser descritos de diferentes manera mediante su dinámica, consideramos los siguientes como los mas característicos para los propósitos del trabajo.

2.1.1. Modelo *SIS* clásico

Teniendo en cuenta lo descrito por los trabajos de W.O. Kermack and A.G. McKendrick en 1927, 1932 y 1933 [9], siguiendo la ley de acción de masa se describe el modelo *SIS* clásico como:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t)/N + \alpha I(t) \quad , t \geq 0 \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - \alpha I(t) \quad , t \geq 0 \\ N(t) &= S(t) + I(t) \quad , t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Donde:

- Las funciones S , I y N dependen del tiempo t .
- S/N es la probabilidad de que un contacto aleatorio por un infectado sea con un individuo susceptible.
- El número de nuevos infectados en unidad de tiempo por infectado es $\beta(S/N)$, dando así una tasa de nuevas infecciones $\beta(S/N)I = \beta SI/N$.
- αI es la tasa de infectados que dejan de ser infectados por unidad de tiempo.
- Dado que $N'(t) = S'(t) + I'(t) = 0$, no hay entrada o salida de la población.

Es posible reducir el modelo (2.1) a una sola ecuación reemplazando S por $N - I$:

$$\begin{aligned} I' &= \beta I(N - I)/N - \alpha I = (\beta - \alpha)I - \beta I^2/N \quad , t \geq 0 \\ &= (\beta - \alpha)I \left(1 - \frac{I}{N - \frac{N\alpha}{\beta}} \right) \quad , t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ahora, (2.2) es una ecuación logística de la forma

$$I' = rI \left(1 - \frac{I}{K} \right)$$

con $r = \beta - \alpha$ y $K = N - \frac{N\alpha}{\beta}$. El análisis logístico de esta ecuación puede ser encontrado en [2].

2.1.2. Modelo *SIS* con nacimientos y muertes

Teniendo en cuenta el modelo anterior es posible ampliar el modelo a uno que contemple una tasa de nacimientos, una tasa de muerte natural y una tasa de muerte por enfermedad como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} S'(t) &= \Lambda(N(t)) - \beta S(t)I(t)/N - \mu S(t) + \alpha I(t) \quad , t \geq 0 \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - (\alpha + d)I(t) - \mu I(t) \quad , t \geq 0 \\ N'(t) &= \Lambda(N(t)) - \mu N(t) - dI(t) \quad , t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde:

- Las funciones S , I y N dependen del tiempo t .
- S/N es la probabilidad de que un contacto aleatorio por un infectado sea con un individuo susceptible.
- El número de nuevos infectados en unidad de tiempo por infectado es $\beta(S/N)$, dando así una tasa de nuevas infecciones $\beta(S/N)I = \beta SI/N$.
- αI es la tasa de infectados que dejan de ser infectados por unidad de tiempo.
- $N(t) = S(t) + I(t)$
- $\Lambda(N)$ es la tasa de nacimientos dependiente del tamaño total de la población.
- μ es la fuerza de mortalidad sin tener en cuenta la enfermedad.
- dI es la tasa de muerte por enfermedad.

2.1.3. Modelo SIR clásico

Aunque el modelo SIS nos permite modelar con facilidad la dinámica de un virus, una hipótesis usual es que una vez se contrae la enfermedad esta genere inmunidad en contra de la reinfección, de manera que el modelo SIR nos permite considerar el compartimento de los recuperados R y la evolución de sus compartimentos está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta S(t)I(t)/N & , t \geq 0 \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - \alpha I(t) & , t \geq 0 \\ R'(t) &= \alpha I(t) & , t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donde:

- Las funciones S , I y N dependen del tiempo t .
- S/N es la probabilidad de que un contacto aleatorio por un infectado sea con un individuo susceptible.
- El número de nuevos infectados en unidad de tiempo por infectado es $\beta(S/N)$, dando así una tasa de nuevas infecciones $\beta(S/N)I = \beta SI/N$.
- αI es la tasa de infectados que dejan de ser infectados por unidad de tiempo.
- Dado que $N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$, no hay entrada o salida de la población.

Como se mencionó en la introducción, la modelación de primas y reservas utilizando el modelo *SIR* clásico se puede encontrar en [16], a continuación procedemos a describir el modelo con el cual se abordará la modelación así como verificar si se reincorporan aquellos resultados del modelo *SIR* clásico.

2.1.4. Modelo *SIR* con nacimientos y muertes

Teniendo en cuenta el modelo anterior es posible ampliar el modelo a uno que contemple una tasa de nacimientos, una tasa de muerte natural y una tasa de muerte por enfermedad como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \Lambda(N(t)) - \beta S(t)I(t)/N - \mu S(t) & , t \geq 0 \\
 I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - \mu I(t) - dI(t) - \alpha I(t) & , t \geq 0 \\
 N'(t) &= \Lambda(N(t)) - \mu N(t) - dI(t) & , t \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Donde:

- Las funciones S , I y N dependen del tiempo t .
- S/N es la probabilidad de que un contacto aleatorio por un infectado sea con un individuo susceptible.
- El número de nuevos infectados en unidad de tiempo por infectado es $\beta(S/N)$, dando así una tasa de nuevas infecciones $\beta(S/N)I = \beta SI/N$.
- αI es la tasa de infectados que dejan de ser infectados por unidad de tiempo.
- $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$
- $\Lambda(N)$ es la tasa de nacimientos dependiente del tamaño total de la población.
- μ es la fuerza de mortalidad sin tener en cuenta la enfermedad.
- dI es la tasa de muerte por enfermedad.

Como $N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t)$, se deduce la siguiente expresión para $R'(t)$:

$$\begin{aligned}
 R'(t) &= N'(t) - S'(t) - I'(t) \\
 \Rightarrow & \langle \text{Definiciones de } N'(t), S'(t) \text{ y } I'(t) \rangle \\
 R'(t) &= \Lambda(N(t)) - \mu N(t) - dI(t) \\
 & \quad - \Lambda(N(t)) + \beta S(t)I(t)/N + \mu S(t) \\
 & \quad - \beta S(t)I(t)/N + \mu I(t) + dI(t) + \alpha I(t) \\
 \Rightarrow & \langle \text{Aritmética} \rangle \\
 R'(t) &= \alpha I(t) - \mu(N(t) - S(t) - I(t)) \\
 \Rightarrow & \langle R(t) = N(t) - S(t) - I(t) \rangle \\
 R'(t) &= \alpha I(t) - \mu R(t)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior, a continuación se establece el modelo *SIRBD*:

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \Lambda(N(t)) - \beta S(t)I(t)/N - \mu S(t) & , t \geq 0 \\
 I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - \mu I(t) - dI(t) - \alpha I(t) & , t \geq 0 \\
 R'(t) &= \alpha I(t) - \mu R(t) & , t \geq 0 \\
 N'(t) &= \Lambda(N(t)) - \mu N(t) - dI(t) & , t \geq 0
 \end{aligned}$$

A lo largo de este trabajo se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis:

- La población N será siempre mayor que 0.
- Cuando se definió la función $\Lambda(N(t))$ se dejó en claro su dependencia de la población $N(t)$, sin embargo con el objetivo de tener una mayor facilidad en los cálculos a realizar a lo largo de este trabajo se establece que la tasa de nacimientos será proporcional a la población para todo tiempo t , es decir que $\Lambda(N(t)) = \lambda N(t)$.

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores, a continuación se establece el modelo *SIRBD* con el cual se plantea este trabajo:

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \lambda N(t) - \beta S(t)I(t)/N - \mu S(t) & , t \geq 0 \\
 I'(t) &= \beta S(t)I(t)/N - \mu I(t) - dI(t) - \alpha I(t) & , t \geq 0 \\
 R'(t) &= \alpha I(t) - \mu R(t) & , t \geq 0 \\
 N'(t) &= \lambda N(t) - \mu N(t) - dI(t) & , t \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Capítulo 3

Análisis Actuarial

3.1. Proporciones de los compartimentos

Adelantándonos un poco al desarrollo del trabajo, buscamos modelar las primas de productos aseguradores por medio del valor presente actuarial de anualidades, para ello es necesario la interpretación en proporciones de cada compartimento en lugar de su interpretación por medio de la cantidad de individuos, es así que se introducen las funciones $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ y $n(t)$ como las fracciones de la población en cada clase S , I , R y N , es decir:

$$s(t) = S(t)/N(t) \quad , t \geq 0$$

$$i(t) = I(t)/N(t) \quad , t \geq 0$$

$$r(t) = R(t)/N(t) \quad , t \geq 0$$

En adelante se expresará la función $N(t)$ por N , por lo tanto

$$S'(t)/N = \lambda N/N - \beta(S(t)/N)(I(t)/N) - \mu S(t)/N \quad , t \geq 0$$

$$I'(t)/N = \beta(S(t)/N)(I(t)/N) - \mu I(t)/N - dI(t)/N - \alpha I(t)/N \quad , t \geq 0$$

$$R'(t)/N = \alpha I(t)/N - \mu R(t)/N \quad , t \geq 0$$

\Rightarrow \langle Definición de $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ y $\lambda(N(t))$ \rangle

$$S'(t)/N = \lambda - \beta s(t)i(t) - \mu s(t) \quad , t \geq 0$$

$$I'(t)/N = \beta s(t)i(t) - \mu i(t) - di(t) - \alpha i(t) \quad , t \geq 0$$

$$R'(t)/N = \alpha i(t) - \mu r(t) \quad , t \geq 0$$

De la condición inicial $N = S(t) + I(t) + R(t)$ podemos concluir que

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

\Rightarrow \langle Dividiendo por N \rangle

$$N/N = (S(t) + I(t) + R(t))/N$$

\Rightarrow \langle Definición de $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$ \rangle

$$1 = s(t) + i(t) + r(t)$$

\Rightarrow \langle Álgebra \rangle

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t)$$

donde $s(0) = s_0$ y $i(0) = i_0$, dado que $s_0 + i_0 = 1$.

Un resultado a utilizar para deducir el sistema de ecuaciones diferenciales a utilizar es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& N'(t)/N && , t \geq 0 \\
= & \langle \text{Definición de } N'(t) \rangle \\
& (\lambda N(t) - \mu N - dI(t))/N && , t \geq 0 \\
= & \langle \text{Definición de } \lambda(N(t)) \text{ y } i(t) \rangle \\
& \lambda - \mu - di(t) && , t \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, busquemos trabajar con las proporciones $s'(t)$, $i'(t)$ y $r'(t)$, es así que:

$$\begin{aligned}
s'(t) &= (S(t)/N)' && , t \geq 0 \\
i'(t) &= (I(t)/N)' && , t \geq 0 \\
r'(t) &= (R(t)/N)' && , t \geq 0 \\
\Rightarrow & \langle \text{Derivada de un cociente y álgebra} \rangle \\
s'(t) &= S'(t)/N - (S(t)/N)(N'(t)/N) && , t \geq 0 \\
i'(t) &= I'(t)/N - (I(t)/N)(N'(t)/N) && , t \geq 0 \\
r'(t) &= R'(t)/N - (R(t)/N)(N'(t)/N) && , t \geq 0 \\
\Rightarrow & \langle \text{Definición de } s(t), i(t), r(t) \text{ y resultados de } S'(t)/N, I'(t)/N, R'(t)/N \text{ y } N'(t)/N \rangle \\
s'(t) &= \lambda - \beta s(t)i(t) - \mu s(t) - s(t)(\lambda - \mu - di(t)) && , t \geq 0 \\
i'(t) &= \beta s(t)i(t) - \mu i(t) - di(t) - \alpha i(t) - i(t)(\lambda - \mu - di(t)) && , t \geq 0 \\
r'(t) &= \alpha i(t) - \mu r(t) - r(t)(\lambda - \mu - di(t)) && , t \geq 0 \\
\Rightarrow & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
s'(t) &= \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t) && , t \geq 0 \\
i'(t) &= \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t) && , t \geq 0 \\
r'(t) &= \alpha i(t) - \lambda r(t) + dr(t)i(t) && , t \geq 0
\end{aligned}$$

En resumen, se presenta el siguiente sistema ordinario de ecuaciones diferenciales denotado por *SIRBD* a abordar a lo largo de la modelación de primas y reservas:

$$\begin{aligned}
s'(t) &= \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t) && , t \geq 0 \\
i'(t) &= \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t) && , t \geq 0 \\
r'(t) &= \alpha i(t) - \lambda r(t) + dr(t)i(t) && , t \geq 0 \\
r(t) &= 1 - s(t) - i(t) && , t \geq 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Busquemos además definir un espacio de probabilidad que involucre el anterior sistema de ecuaciones, para ello consideramos:

- $\Omega = \{w : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1/2, 1\}\}$ tal que $t \rightarrow w(t) = w_t \in \{0, 1/2, 1\}$
- $\mathfrak{F} = \wp(\Omega)$

- X_t la variable aleatoria que describe el estado en el tiempo t de algún individuo elegido aleatoriamente definida de la siguiente manera: $X_t : \Omega \rightarrow \{0, 1/2, 1\}$ tal que $w \rightarrow X_t(w) = w_t = w(t)$
- $P(X_t = 1) = i(t)$
- $P(X_t = 0) = r(t)$
- $P(X_t = 1/2) = s(t)$

entonces la tripla $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es un espacio de probabilidad.

3.2. Pago de primas y reclamos con anualidades

Siguiendo las ideas expuestas en [16], suponemos que un plan de seguros contra enfermedades infecciosas cobra las primas en forma de anualidades continuas de los susceptibles. En otras palabras, los asegurados se comprometen a pagar las primas de forma continua mientras permanezcan sanos y susceptibles. Mientras tanto, los gastos médicos se reembolsan continuamente a cada asegurado infectado durante todo el periodo de tratamiento. Una vez que el individuo fallece a causa de la enfermedad o se recupera, el plan finaliza inmediatamente.

En general, como se puede ver en [2] la técnica para determinar el valor presente actuarial de una anualidad está dada por

$$VPA = \int_0^t v^x P[\text{Pago sea realizado en el tiempo } x] \\ [\text{Tasa de pagos en el tiempo } x] dx$$

recordando que $e^\delta = 1 + i \Rightarrow v^x = e^{-\delta x}$.

Siguiendo la notación actuarial internacional, denotamos el VPA de los pagos de primas de un asegurado para un periodo de t años por $\bar{a}_{\overline{t}|}^s$ con el superíndice indicando los pagos del compartimiento S y el VPA de los beneficios pagados por la aseguradora a los afectados a la tasa de una unidad monetaria por unidad de tiempo es denotado por $\bar{a}_{\overline{t}|}^i$ con el superíndice indicando los pagos al compartimiento I , vemos que dichos VPA se encuentran relacionados por el sistema $SIRBD$. Desde el punto de vista de la deuda de una aseguradora, el valor total descontado de una anualidad de t años de pagos a los beneficiarios está dada por:

$$\bar{a}_{\overline{t}|}^i \triangleq \int_0^t e^{-\delta x} i(x) dx, \quad (3.2)$$

donde $\delta > 0$ es la fuerza de descuento de los intereses y $i(x)$ es la probabilidad de ser un caso infectado. Además es necesario definir el valor total descontado de una anualidad de t años a una tasa cuadrática a los beneficiarios dada por:

$$\bar{a}_{\bar{t}}^{i^2} \triangleq \int_0^t e^{-\delta x} i^2(x) dx, \quad (3.3)$$

Desde el punto de vista de los ingresos, el valor total descontado de una anualidad de t años de pagos de primas por los susceptibles es:

$$\bar{a}_{\bar{t}}^s \triangleq \int_0^t e^{-\delta x} s(x) dx, \quad (3.4)$$

donde $s(x)$ es la probabilidad de ser un caso susceptible. El modelo *SIRBD* también puede ser implementado para estudiar la siguiente situación: Cuando a un asegurado se le diagnostica la enfermedad infecciosa y se le hospitaliza inmediatamente, los gastos médicos deben pagarse de inmediato en una suma global y el plan de seguro finaliza al cumplirse su obligación. Entonces, el *VPA* de los pagos de prestaciones, denotado por \bar{A}_{∞}^i , viene dado por

$$\bar{A}_{\infty}^i \triangleq \beta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) i(t) dt \quad (3.5)$$

donde la probabilidad de ser recién infectado al momento t es $\beta s(t) i(t)$. Si a todo lo anterior se aplica la noción fundamental del *Principio de Equivalencia* para la determinación de primas niveladas, es decir, si suponemos:

$$\mathbb{E}[\text{Valor presente de la prima simple neta}] = \mathbb{E}[\text{valor presente de los pagos}]$$

Donde $\mathbb{E}[X]$ se refiere al valor esperado de la variable X , entonces se puede concluir que la prima nivelada para un plan de pago de reclamaciones de anualidades unitarias está dada por:

$$\bar{P}(\bar{a}_{\bar{t}}^i) \triangleq \frac{\bar{a}_{\bar{t}}^i}{\bar{a}_{\bar{t}}^s} \quad (3.6)$$

y para el caso de una póliza a término infinito, tanto para sus pagos como para sus primas por las prestaciones, la prima nivelada está dada por:

$$\bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) \triangleq \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s}, \quad (3.7)$$

Como en los seguros de vida, donde la fuerza de mortalidad es definida como el inverso aditivo del cociente entre la derivada de la función de sobrevivencia y la función de sobrevivencia en si, definimos la fuerza de infección (dejar la clase S) como:

$$\mu_t^s \triangleq -\frac{s'(t)}{s(t)}, t \geq 0, \quad (3.8)$$

y la fuerza de remoción (dejar la clase I) como:

$$\mu_t^i \triangleq -\frac{i'(t)}{i(t)}, t \geq 0. \quad (3.9)$$

A continuación tenemos dos resultados acerca de μ_t^s y μ_t^i :

Fuerza de infección

$$\begin{aligned}
& \mu_t^s \\
= & \langle \text{Definición de } \mu_t^s \rangle \\
& - \frac{s'(t)}{s(t)} \\
= & \langle \text{Definición de } s'(t) \text{ dada por (3.1)} \rangle \\
& - \frac{\lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t)}{s(t)} \\
= & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& - \frac{\lambda(1-s(t))}{s(t)} + (\beta - d)i(t)
\end{aligned}$$

Fuerza de remoción

$$\begin{aligned}
& \mu_t^i \\
= & \langle \text{Definición de } \mu_t^i \rangle \\
& - \frac{i'(t)}{i(t)} \\
= & \langle \text{Definición de } i'(t) \text{ dada por (3.1)} \rangle \\
& - \frac{\beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t)}{i(t)} \\
= & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& -\beta s(t) + d + \alpha + \lambda - di(t)
\end{aligned}$$

En resumen, vemos que $\mu_t^s = -\frac{\lambda(1-s(t))}{s(t)} + (\beta - d)i(t)$ y $\mu_t^i = -\beta s(t) + d + \alpha + \lambda - di(t)$. A continuación presentamos un resultado necesario para el análisis de la fuerza de infección.

Proposición 3.1: La ecuación diferencial

$$s'(t) = \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t)$$

tiene como solución

$$\begin{aligned}
s(t) = & s_0 \exp\left(\int_0^t ((d - \beta) - \lambda) dx\right) + \\
& \exp\left(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^\zeta ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \lambda d\zeta
\end{aligned}$$

y la ecuación diferencial

$$i'(t) = \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t)$$

tiene como solución

$$i(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right)}{i_0^{-1} - d \int_0^t \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) d\zeta}$$

Demostración:

Para el caso de $s(t)$ tenemos que

$$s'(t) = \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t)$$

⇒ $\langle \text{Álgebra} \rangle$

$$s'(t) + (\lambda + (\beta - d)i(t))s(t) = \lambda$$

⇒ $\langle \text{Multiplicando ambos lados por } \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx) \rangle$

$$\begin{aligned} \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)s'(t) + \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)(\lambda + (\beta - d)i(t))s(t) \\ = \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)\lambda \end{aligned}$$

⇒ $\langle \text{Derivada de un producto} \rangle$

$$\frac{d}{dt} \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)s(t) = \exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)\lambda$$

⇒ $\langle \text{Integrando ambos lados en el intervalo } [0,t] \rangle$

$$\int_0^t \frac{d}{d\zeta} \exp(\int_0^\zeta (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)s(\zeta)dt = \int_0^t \exp(\int_0^\zeta (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)\lambda dt$$

⇒ $\langle \text{Teorema fundamental del cálculo} \rangle$

$$\exp(\int_0^t (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)s(t) - s_0 = \int_0^t \exp(\int_0^\zeta (\lambda + (\beta - d)i(x))dx)\lambda dt$$

⇒ $\langle \text{Álgebra} \rangle$

$$\begin{aligned} s(t) = s_0 \exp(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda)dx) + \\ \exp(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda)dx) \int_0^t \exp(-\int_0^\zeta ((d - \beta)i(x) - \lambda)dx)\lambda d\zeta \end{aligned}$$

Para el caso de $i(t)$ tenemos que

$$i'(t) = \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t)$$

⇒ $\langle \text{Álgebra} \rangle$

$$i'(t) + i(t)(d + \alpha + \lambda - \beta s(t)) = di^2(t)$$

⇒ $\langle \text{Dividiendo ambos lados por } -i^2(t) \rangle$

$$\frac{-i'(t)}{i^2(t)} + \frac{-d - \alpha - \lambda + \beta s(t)}{i(t)} = -d$$

⇒ $\langle \text{Sustitución } u = i^{1-2} = i^{-1} \rangle$

$$u'(t) + (-d - \alpha - \lambda + \beta s(t))u(t) = -d$$

⇒ $\langle \text{Multiplicando ambos lados por } \exp(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x))dx) \rangle$

$$\begin{aligned} \exp(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x))dx)u'(t) + \exp(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x))dx)(-d - \alpha - \lambda + \beta s(t))u(t) \\ = -d * \exp(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x))dx) \end{aligned}$$

⇒ $\langle \text{Derivada de un producto} \rangle$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) u(t) = -d * \exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) \\
\Rightarrow & \langle \text{Integrando ambos lados en el intervalo } [0, t] \rangle \\
& \int_0^t \frac{d}{d\zeta} \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) u(\zeta) dt = \int_0^t -d * \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) dt \\
\Rightarrow & \langle \text{Teorema fundamental del cálculo} \rangle \\
& \exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) u(t) - u_0 = \int_0^t -d * \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) dt \\
\Rightarrow & \langle \text{Reincorporando } i^{-1} = u \rangle \\
& \exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) i(t)^{-1} - i_0^{-1} = \int_0^t -d * \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) d\zeta \\
\Rightarrow & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& i(t) = \frac{\exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right)}{i_0^{-1} - d \int_0^t \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) d\zeta}
\end{aligned}$$

■

Retomando, tenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 \exp\left(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) + \\
& \quad \exp\left(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^\zeta ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \lambda d\zeta \quad , t \geq 0 \\
i(t) &= \frac{\exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right)}{i_0^{-1} - d \int_0^t \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) d\zeta} \quad , t \geq 0
\end{aligned}$$

Nota: Es de remarcar que si en las dos expresiones anteriores se considera $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$ se recuperan las expresiones obtenidas en el modelo *SIR* clásico [16]

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 \exp\left(-\int_0^t \mu_x^s dx\right) = s_0 \exp\left(-\int_0^t \beta i(t) dx\right) \quad , t \geq 0 \\
i(t) &= i_0 \exp\left(-\int_0^t \mu_x^i dx\right) = i_0 \exp\left(-\int_0^t -\beta s(t) dx + \alpha t\right) \quad , t \geq 0
\end{aligned}$$

A continuación se expone una propiedad del modelo *SIRBD* la cual será utilizada en la modelación de las primas.

Proposición 3.2: Un resultado a resaltar de la demostración anterior consiste en:

$$-\alpha \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i(r) dr dt = \frac{-\alpha}{\delta} \bar{a}_{\infty}^i$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & -\alpha \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i(r) dr dt \\ = & \langle \text{Álgebra y propiedades de la integral} \rangle \\ & -\alpha \int_0^{\infty} (\int_0^t i(r) dr) e^{-\delta t} dt \\ = & \langle \text{Considerando } u(t) = \int_0^t i(r) dr \text{ y } dv(t) = e^{-\delta t} \text{ e integrando por partes} \rangle \\ & -\alpha \left(\frac{-1}{\delta} (\int_0^t i(r) dr) e^{-\delta t} \Big|_0^{\infty} - \frac{-1}{\delta} \int_0^{\infty} i(t) e^{-\delta t} dt \right) \\ = & \langle \text{Evaluando las funciones en los límites de integración} \rangle \\ & -\alpha \left(\frac{-1}{\delta} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} (\int_0^t i(r) dr) + \frac{1}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} i(t) dt \right) \end{aligned}$$

Considerando el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & 0 \\ \leq & \langle \text{Propiedades de límites} \rangle \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} 0 \\ \leq & \langle 0 \leq e^{-\delta t} \text{ y } 0 \leq (\int_0^t i(r) dr) \text{ para todo } t \geq 0 \rangle \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} (\int_0^t i(r) dr) \\ \leq & \langle i(r) \leq 1 \text{ para todo } r \text{ en el intervalo } [0, t] \rangle \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} (\int_0^t dr) \\ \leq & \langle \text{Solucionando la integral} \rangle \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} t \\ = & \langle \text{Tomando el límite} \rangle \\ & 0 \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned} & -\alpha \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i(r) dr dt \\ = & \langle \text{Considerando los resultados anteriores} \rangle \\ & -\frac{\alpha}{\delta} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} i(t) dt \\ = & \langle \text{Definición de } \bar{a}_{\infty}^i \rangle \\ & -\frac{\alpha}{\delta} \bar{a}_{\infty}^i \end{aligned}$$

■

Por conveniencia matemática, primero analizaremos una póliza con término infinito. Cuando el plazo de la póliza es relativamente largo, la prima basada en un plazo infinito puede servir como estimación aproximada del coste del seguro.

Proposición 3.3: En el modelo *SIRBD* de (3.1)

$$\bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha}{\delta + \lambda}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{(\delta + \lambda)\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta + \lambda} \bar{a}_{\infty}^{i^2} = \frac{1}{\delta} \quad (3.10)$$

Demostración:

De (3.1) tenemos que:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t) & , t \geq 0 \\ i'(t) &= \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t) & , t \geq 0 \\ r'(t) &= \alpha i(t) - \lambda r(t) + dr(t)i(t) & , t \geq 0 \\ r(t) &= 1 - s(t) - i(t) & , t \geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle Sumando las ecuaciones de $s'(t)$ y $i'(t)$ \rangle

$$s'(t) + i'(t) = \lambda + ds(t)i(t) - \lambda s(t) - (d + \alpha + \lambda)i(t) + di^2(t)$$

\Rightarrow \langle Integrando ambos lados en el intervalo $[0, t]$ \rangle

$$\begin{aligned} \int_0^t s'(r)dr + \int_0^t i'(r)dr &= \int_0^t \lambda dr + d \int_0^t s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^t s(r)dr \\ &- (d + \alpha + \lambda) \int_0^t i(r)dr + d \int_0^t i^2(r)dr \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle Teorema fundamental del cálculo \rangle

$$\begin{aligned} s(t) - s(0) + i(t) - i(0) &= \int_0^t \lambda dr + d \int_0^t s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^t s(r)dr \\ &- (d + \alpha + \lambda) \int_0^t i(r)dr + d \int_0^t i^2(r)dr \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle $s(0) = s_0$, $i(0) = i_0$ y $s_0 + i_0 = 1$ \rangle

$$\begin{aligned} s(t) + i(t) - 1 &= \int_0^t \lambda dr + d \int_0^t s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^t s(r)dr \\ &- (d + \alpha + \lambda) \int_0^t i(r)dr + d \int_0^t i^2(r)dr \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle Multiplicando ambos lados por $e^{-\delta t}$ \rangle

$$\begin{aligned} e^{-\delta t}s(t) + e^{-\delta t}i(t) - e^{-\delta t} &= e^{-\delta t} \int_0^t \lambda dr + de^{-\delta t} \int_0^t s(r)i(r)dr - e^{-\delta t} \lambda \int_0^t s(r)dr \\ &- e^{-\delta t}(d + \alpha + \lambda) \int_0^t i(r)dr + de^{-\delta t} \int_0^t i^2(r)dr \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle Integrando ambos lados en el intervalo $[0, \infty]$ \rangle

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}s(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-\delta t}i(t)dt - \int_0^{\infty} e^{-\delta t}dt &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t \lambda drdt + d \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t s(r)i(r)drdt \\ &- \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \lambda \int_0^t s(r)drdt - (d + \alpha + \lambda) \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i(r)drdt + d \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i^2(r)drdt \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle $\int_0^{\infty} e^{-\delta t}dt = 1/\delta$ \rangle

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\delta t}s(t)dt + \int_0^{\infty} e^{-\delta t}i(t)dt - \frac{1}{\delta} &= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t \lambda drdt + d \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t s(r)i(r)drdt \\ &- \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \lambda \int_0^t s(r)drdt - (d + \alpha + \lambda) \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i(r)drdt + d \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_0^t i^2(r)drdt \end{aligned}$$

\Rightarrow \langle Proposición 3.2 \rangle

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-\delta t} s(t) dt + \int_0^\infty e^{-\delta t} i(t) dt - \frac{1}{\delta} = \frac{\lambda}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} dt + \frac{d}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} s(t) i(t) dt \\
& - \frac{\lambda}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} s(t) dt - \frac{(d + \alpha + \lambda)}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} i(t) dt + \frac{d}{\delta} \int_0^\infty e^{-\delta t} i^2(t) dt \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Definiciones de } \bar{a}_{\infty}^s, \bar{a}_{\infty}^i, \bar{A}_{\infty}^i \text{ y } \int_0^\infty e^{-\delta t} dt = 1/\delta \rangle \\
& \bar{a}_{\infty}^s + \bar{a}_{\infty}^i - \frac{1}{\delta} = \frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{d}{\delta\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{\lambda}{\delta} \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} \bar{a}_{\infty}^i + \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Dividiendo ambos lados por } \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \text{ y álgebra} \rangle \\
& \bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha}{\delta + \lambda}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{(\delta + \lambda)\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta + \lambda} \bar{a}_{\infty}^{i^2} = \frac{1}{\delta}
\end{aligned}$$

■

Si realizamos un poco de álgebra sobre la expresión anterior vemos que:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Dividiendo ambos lados por } \bar{a}_{\infty}^i \rangle \\
& \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \frac{\bar{a}_{\infty}^s}{\bar{a}_{\infty}^i} + \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} - \frac{d}{\delta\beta} \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} - \frac{d}{\delta} \frac{\bar{a}_{\infty}^{i^2}}{\bar{a}_{\infty}^i} = \frac{1}{\delta \bar{a}_{\infty}^i} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \frac{\bar{a}_{\infty}^s}{\bar{a}_{\infty}^i} = \frac{1}{\delta \bar{a}_{\infty}^i} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) - \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) + \frac{d}{\delta\beta} \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} + \frac{d}{\delta} \frac{\bar{a}_{\infty}^{i^2}}{\bar{a}_{\infty}^i} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \frac{\bar{a}_{\infty}^s}{\bar{a}_{\infty}^i} = \frac{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}}{\delta^2\beta\bar{a}_{\infty}^i} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \frac{\bar{a}_{\infty}^s}{\bar{a}_{\infty}^i} = \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}}
\end{aligned}$$

Obsérvese que la parte derecha de (3.10) representa el valor presente de una renta vitalicia unitaria. La interpretación de la parte izquierda de (3.10) es que, si cada asegurado de toda la población asegurada recibe una renta vitalicia unitaria, el *VPA* de los pagos a la clase *S* viene dado por \bar{a}_{∞}^s y el *VPA* de los pagos a la clase *I* viene dado \bar{a}_{∞}^i .

Recordemos que en cualquier momento una fracción $d + \alpha$ deja el compartimento de los infectados. En el caso del modelo *SIRBD* es necesario considerar un pago para

los infectados a una tasa de interés $\delta + \lambda$ en lugar de solo δ dado que se ha de ajustar el pago recibido por los infectados teniendo en cuenta el parámetro λ que, como se habló anteriormente además de representar la tasa de nacimientos, incluye parte del parámetro de muerte natural μ al considerar las proporciones de los compartimentos. Además vemos que es necesario restar el pago de los recién infectados a una tasa de interés $\delta + \lambda$ ajustado con un factor d/β que se podría interpretar como muerte por infección de los recién infectados, por último se resta aquellas salidas por muerte por la enfermedad de los infectados a una tasa $i^2(t)$ a una tasa de interés $\delta + \lambda$. A diferencia del modelo *SIR* clásico, no es tan inmediato el razonamiento con el cual se llega a que la suma de estas anualidades sumen el valor actual de una anualidad perpetua unitaria, $\frac{1}{\delta}$, pagada independientemente del compartimento en el que se encuentre el asegurado.

A partir de la relación (3.10), encontramos fácilmente la prima neta nivelada en (3.7) para una póliza de plazo infinito con pagos de primas y anualidades de siniestros dados por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
& \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) \\
= & \quad \langle \text{Definición dada en (1.8)} \rangle \\
& \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} = \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}}
\end{aligned}$$

Nota: Al considerar $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$ se recuperan las expresiones obtenidas en el modelo *SIR* clásico [16]

$$\bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) = \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} = \frac{\delta\bar{a}_{\infty}^i}{1 - (\alpha + \delta)\bar{a}_{\infty}^i}$$

Es posible considerar un producto que cubra en caso de ser recién infectado al despejar la expresión $\frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s}$ de (3.10), sin embargo a continuación se propone otro acercamiento para este resultado el cual nos permite un mejor análisis en relación a la interpretación de los pagos de cada compartimento.

Proposición 3.4: En el modelo *SIRBD* de (3.1)

$$\frac{1}{\delta}\bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right)\bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta}\bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta}s_0 + \frac{\lambda}{\delta^2}, \quad (3.11)$$

y

$$\frac{1}{\delta}i_0 + \frac{1}{\delta}\bar{A}_{\infty}^i = \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right)\bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta}\bar{a}_{\infty}^{i^2}, \quad (3.12)$$

Demostración:

De la definición de \bar{A}_{∞}^i tenemos:

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{\infty}^i \\ = & \langle \text{Definición de } \bar{A}_{\infty}^i \rangle \\ & \beta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) i(t) dt \\ = & \langle \text{Álgebra} \rangle \\ & \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (\beta s(t) i(t) - ds(t) i(t) - \lambda + \lambda s(t) + ds(t) i(t) + \lambda - \lambda s(t)) dt \\ = & \langle \text{Definición } s'(t) \text{ en (3.1) y álgebra} \rangle \\ & - \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s'(t) dt + \frac{d}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \beta s(t) i(t) dt + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) dt \\ = & \langle \text{Considerando } u(t) = e^{-\delta t}, dv(t) = s'(t) \text{ e integrando por partes} \rangle \\ & - e^{-\delta t} s(t) \Big|_0^{\infty} - \delta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) dt + \frac{d}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \beta s(t) i(t) dt + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) dt \\ = & \langle \text{Evaluando la función en los límites} \rangle \\ & s(0) - \delta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) dt + \frac{d}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \beta s(t) i(t) dt + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\delta t} s(t) dt \\ = & \langle \text{Definición de } \bar{a}_{\infty}^s, \bar{A}_{\infty}^i, \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = 1/\delta \text{ y } s_0 \rangle \\ & s_0 - \delta \bar{a}_{\infty}^s + \frac{d}{\beta} \bar{A}_{\infty}^i + \frac{\lambda}{\delta} - \lambda \bar{a}_{\infty}^s \end{aligned}$$

Si reincorporamos el primer y último termino de la expresión anterior vemos que:

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{\infty}^i = s_0 - \delta \bar{a}_{\infty}^s + \frac{d}{\beta} \bar{A}_{\infty}^i + \frac{\lambda}{\delta} - \lambda \bar{a}_{\infty}^s \\ \Rightarrow & \langle \text{Dividiendo ambos lados por } \delta > 0 \rangle \\ & \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta} s_0 + \frac{\lambda}{\delta^2} - \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s + \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i \\ \Rightarrow & \langle \text{Álgebra} \rangle \\ & \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta} s_0 + \frac{\lambda}{\delta^2} \end{aligned}$$

Obteniendo así la primera expresión a demostrar, ahora bien, a partir de esta última vemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta} s_0 + \frac{\lambda}{\delta^2} \\ \Rightarrow & \quad \langle s_0 = 1 - i_0 \rangle \\ & \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta} (1 - i_0) + \frac{\lambda}{\delta^2} \\ \Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\ & \frac{1}{\delta} i_0 + \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \frac{1}{\delta} + \frac{\lambda}{\delta^2} \\ \Rightarrow & \quad \left\langle \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} = \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \right\rangle \\ & \frac{1}{\delta} i_0 + \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i + \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s - \frac{d}{\beta\delta} \bar{A}_{\infty}^i \\ & = \left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^s + \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta\beta} \bar{A}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} \\ \Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\ & \frac{1}{\delta} i_0 + \frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i = \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2} \end{aligned}$$

Obteniendo así la segunda expresión a demostrar. ■

La ecuación (3.11) también permite conocer el desglose de los gastos en cada clase. Suponiendo que cada individuo susceptible que entra inicialmente en la póliza reclama una unidad de renta vitalicia, entonces el *VPA* del coste total es s_0/δ sumado a una renta de valor λ/δ^2 . Desde otro punto de vista, equivale a conceder a cada uno una unidad de renta vitalicia mientras el asegurado permanezca sano en el grupo y, a continuación, conceder a cada uno una unidad de perpetuidad inmediatamente al quedar infectado.

Si se piensa en la clase *I* como una etapa de tránsito, entonces podemos contar los costes de los pagos en las fuentes entrantes y salientes. Supongamos que cada uno de los que están actualmente o anteriormente en la clase *I* recibe una unidad de perpetuidad. De las fuentes entrantes, la parte izquierda de (3.12) da los gastos para los miembros iniciales i_0/δ y los gastos para los que acaban de entrar en la clase $\frac{1}{\delta} \bar{A}_{\infty}^i$. En el caso de las fuentes salientes, los costes de los individuos que continúan en la clase es dada por \bar{a}_{∞}^i y los retirados de la clase *I* son compensados con una perpetuidad que vale $\frac{1}{\delta}$ con valor $\frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} \bar{a}_{\infty}^i$, además de restar la porción de fallecidos por infección a una tasa i^2 . Por lo tanto, el lado derecho suma $\left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right) \bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\infty}^{i^2}$.

De esta manera, la prima neta nivelada $\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i)$ para el plan de un seguro de duración infinita con indemnización de suma fija en caso de ser recién infectado y pago de primas por anualidades viene dado por el principio de equivalencia:

$$\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i) \triangleq \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta la segunda expresión de la proposición 3.4 vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}i_0 + \frac{1}{\delta}\bar{A}_{\infty}^i &= \left(1 + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta}\right)\bar{a}_{\infty}^i - \frac{d}{\delta}\bar{a}_{\infty}^{i^2} \\ \Rightarrow \quad &\langle \text{Multiplicando por } \delta > 0 \text{ y simplificando} \rangle \\ i_0 + \bar{A}_{\infty}^i &= (\delta + d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} \\ \Rightarrow \quad &\langle \text{Dividiendo por } \bar{a}_{\infty}^i \text{ y simplificando} \rangle \\ \frac{i_0}{\bar{a}_{\infty}^i} + \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} &= (\delta + d + \alpha + \lambda) - d\frac{\bar{a}_{\infty}^{i^2}}{\bar{a}_{\infty}^i} \\ \Rightarrow \quad &\langle \text{Álgebra} \rangle \\ \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} &= \frac{(\delta + d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} - i_0}{\bar{a}_{\infty}^i} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la demostración anterior se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i) \\ = \quad &\langle \text{Definición de } \bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i) \rangle \\ &\frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \\ = \quad &\langle \text{Álgebra} \rangle \\ &\frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} \\ = \quad &\langle \text{Álgebra} \rangle \\ &\frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^i} \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \\ = \quad &\langle \text{Demostración anterior y definición de } \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) \rangle \\ &\frac{(\delta + d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} - i_0}{\bar{a}_{\infty}^i} \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}} \end{aligned}$$

Nota: Al considerar $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$ se recuperan las expresiones obtenidas en el modelo *SIR* clásico [16]

$$\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i) = \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} = \delta \frac{(\delta + \alpha)\bar{a}_{\infty}^i - i_0}{1 - (\alpha + \delta)\bar{a}_{\infty}^i}$$

Los planes de seguros de salud suelen tener prestaciones por fallecimiento que difieren en valor de las prestaciones de asistencia sanitaria. Suponemos una prestación por fallecimiento de una unidad monetaria pagada inmediatamente en el momento de la muerte. Así pues, el *VPA* de una prestación por fallecimiento de suma fija denominada \bar{A}_{∞}^d , viene dado por

$$\bar{A}_{\infty}^d \triangleq d \int_0^{\infty} e^{-\delta t} i(t) dt = d\bar{a}_{\infty}^i \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la prima neta nivelada para el plan de duración infinita con suma fija unitaria de fallecimiento y de asistencia sanitaria se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \triangleq \frac{\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} \quad (3.15)$$

Teniendo en cuenta los resultados previos vemos que:

$$\begin{aligned} & \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \\ = & \langle \text{Definición de } \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \rangle \\ & \frac{\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} \\ = & \langle \text{Álgebra y definición de } \bar{A}_{\infty}^d \rangle \\ & \frac{\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} + \frac{d\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \\ = & \langle \text{Álgebra y } \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) \rangle \\ & (1+d) \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i{}^2} \end{aligned}$$

Nota: Al considerar $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$ se recuperan las expresiones obtenidas en el modelo *SIR* clásico [16] siempre y cuando se considere a α como la tasa de muerte por la enfermedad en el cálculo de las primas

$$\bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) = \frac{\bar{a}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} = \frac{\delta(1 + \alpha)\bar{a}_{\infty}^i}{1 - (\alpha + \delta)\bar{a}_{\infty}^i}$$

Por último, la prima neta nivelada para un plan con una prestaciones gastos de hospitalización y una prestación de suma fija por fallecimiento viene dada por:

$$\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \triangleq \frac{\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} \quad (3.16)$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
& \bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \\
= & \langle \text{Definición de } \bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) \rangle \\
& \frac{\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} \\
= & \langle \text{Álgebra y definición de } \bar{A}_{\infty}^d \rangle \\
& \frac{\bar{A}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} + \frac{d\bar{a}_{\infty}^i}{\bar{a}_{\infty}^s} \\
= & \langle \text{Álgebra, } \bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i) \text{ y } \bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) \rangle \\
& \frac{(\delta + d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} - i_0}{\bar{a}_{\infty}^i} \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}} \\
& + d \frac{(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}} \\
= & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \frac{((\delta + d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} - i_0)(\delta + \lambda)\delta\beta + d(\delta + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}} \\
= & \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& (\delta + \lambda)\delta\beta \frac{(\delta + 2d + \alpha + \lambda)\bar{a}_{\infty}^i - d\bar{a}_{\infty}^{i^2} - i_0}{\delta\beta + \lambda\beta - (\delta + d + \alpha + \lambda)\delta\beta\bar{a}_{\infty}^i + d\delta\bar{A}_{\infty}^i + d\delta\beta\bar{a}_{\infty}^{i^2}}
\end{aligned}$$

Nota: Al considerar $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$ se recuperan las expresiones obtenidas en el modelo *SIR* clásico [16] siempre y cuando se considere a α como la tasa de muerte por la enfermedad en el cálculo de las primas

$$\bar{P}(\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d) = \frac{\bar{A}_{\infty}^i + \bar{A}_{\infty}^d}{\bar{a}_{\infty}^s} = \delta \frac{(\delta + 2\alpha)\bar{a}_{\infty}^i - i_0}{1 - (\alpha + \delta)\bar{a}_{\infty}^i}$$

3.3. Elaboración de las tarifas

Hasta ahora las primas netas sólo se han expresado en términos de \bar{a}_{∞}^i , que es una transformada de Laplace de $i(t)$. Una solución integral implícita para el modelo *SIRBD* tal como se expuso tras dar las expresiones para la fuerza de infección y de remoción es:

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 \exp\left(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) + \\
& \exp\left(\int_0^t ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^\zeta ((d - \beta)i(x) - \lambda) dx\right) \lambda d\zeta \quad , t \geq 0 \\
i(t) &= \frac{\exp\left(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right)}{i_0^{-1} - d \int_0^t \exp\left(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx\right) d\zeta} \quad , t \geq 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 \exp(-\lambda t + (d - \beta) \int_0^t \frac{\exp(\int_0^x (-d - \alpha - \lambda + \beta s(\zeta)) d\zeta)}{i_0^{-1} - d \int_0^x \exp(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(r)) dr) d\zeta} dx) + \\
&\quad \exp(-\lambda t + (d - \beta) \int_0^t \frac{\exp(\int_0^x (-d - \alpha - \lambda + \beta s(\zeta)) d\zeta)}{i_0^{-1} - d \int_0^x \exp(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(r)) dr) d\zeta} dx)^* \\
&\quad \int_0^t \exp(\lambda \zeta - (d - \beta) \int_0^\zeta \frac{\exp(\int_0^x (-d - \alpha - \lambda + \beta s(\zeta)) d\zeta)}{i_0^{-1} - d \int_0^x \exp(\int_0^\epsilon (-d - \alpha - \lambda + \beta s(r)) dr) d\epsilon} dx) \lambda d\epsilon \quad , t \geq 0 \\
i(t) &= \frac{\exp(\int_0^t (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx)}{i_0^{-1} - d \int_0^t \exp(\int_0^\zeta (-d - \alpha - \lambda + \beta s(x)) dx) d\zeta} \quad , t \geq 0
\end{aligned}$$

No se dispone de una solución explícita general para $s(t)$ e $i(t)$. Por lo tanto, proponemos métodos que pueden proporcionar soluciones satisfactorias para las aplicaciones de seguros. La estimación de $i(t)$ nos permite calcular \bar{a}_{∞}^i , que a su vez da \bar{a}_{∞}^s mediante la relación entre \bar{a}_{∞}^i y \bar{a}_{∞}^s .

Además, las técnicas propuestas se extienden a la política de plazo finito, más realista. Estos métodos numéricos se aplican en general a los cálculos tanto de la póliza a plazo infinito como de la póliza a plazo finito.

3.3.1. Aproximación basada en tablas de infección

En la práctica es difícil llevar un registro de los individuos susceptibles, en parte por su gran número en una población y en parte por la dificultad de distinguir a una persona susceptible a una determinada enfermedad de una inmune. Pero podemos llevar un registro de las personas infectadas a partir de datos públicos procedentes de organismos sanitarios y hospitales. De ahí que nos basemos en la función $i(t)$, en lugar de $s(t)$, para todos los cálculos de tarificación de primas.

Una analogía natural en este caso es la tabla de vida de las matemáticas de los seguros de vida, que describe una distribución de supervivencia empírica de la longevidad de una persona media. Del mismo modo, puede generarse una para registrar el número de casos de infección notificados durante cada periodo de muestreo (por ejemplo, cada día en el caso del *SARS*).

Ahora, a partir de la tabla de infecciones, tenemos una aproximación empírica constante a trozos de la función continua $i(t)$ dada por

$$\tilde{i}(t) = \begin{cases} i_k & , k - 1 < t \leq k \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde i_k es la tasa de infección en el periodo k -ésimo de la tabla de infección.

Utilizando esta función en lugar de $i(t)$ en (3.2) se obtiene una aproximación de $\bar{a}_{\bar{t}}^i$

$$\begin{aligned}
& \bar{a}_{\bar{t}}^i \\
&= \langle \text{Definición de } \bar{a}_{\infty}^i \rangle \\
& \int_0^t e^{-\delta x} i(x) dx \\
&\approx \langle \text{Aproximación empírica } \tilde{i}(t) \rangle \\
& \int_0^t e^{-\delta x} \tilde{i}(x) dx \\
&\approx \langle \text{Definición previa de } \tilde{i}(t) \rangle \\
& \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} i_k,
\end{aligned}$$

donde $n = [t]$ es la parte entera de t , y n es suficientemente grande. Siguiendo la misma lógica que en la proposición 3.3, la siguiente relación entre $\bar{a}_{\bar{t}}^s$ y $\bar{a}_{\bar{t}}^i$ se obtiene fácilmente:

$$\begin{aligned}
s'(t) &= \lambda - (\beta - d)s(t)i(t) - \lambda s(t) & , t \geq 0 \\
i'(t) &= \beta s(t)i(t) - i(t)(d + \alpha + \lambda) + di^2(t) & , t \geq 0 \\
r'(t) &= \alpha i(t) - \lambda r(t) + dr(t)i(t) & , t \geq 0 \\
r(t) &= 1 - s(t) - i(t) & , t \geq 0 \\
\Rightarrow & \langle \text{Sumando las ecuaciones de } s'(t) \text{ y } i'(t) \rangle \\
s'(t) + i'(t) &= \lambda + ds(t)i(t) - \lambda s(t) - (d + \alpha + \lambda)i(t) + di^2(t) \\
\Rightarrow & \langle \text{Integrando ambos lados en el intervalo } [0, x] \rangle \\
\int_0^x s'(r)dr + \int_0^x i'(r)dr &= \int_0^x \lambda dr + d \int_0^x s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^x s(r)dr \\
& - (d + \alpha + \lambda) \int_0^x i(r)dr + d \int_0^x i^2(r)dr \\
\Rightarrow & \langle \text{Teorema fundamental del cálculo} \rangle \\
s(t) - s(0) + i(t) - i(0) &= \int_0^x \lambda dr + d \int_0^x s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^x s(r)dr \\
& - (d + \alpha + \lambda) \int_0^x i(r)dr + d \int_0^x i^2(r)dr \\
\Rightarrow & \langle s(0) = s_0, i(0) = i_0 \text{ y } s_0 + i_0 = 1 \rangle \\
s(t) + i(t) - 1 &= \int_0^x \lambda dr + d \int_0^x s(r)i(r)dr - \lambda \int_0^x s(r)dr \\
& - (d + \alpha + \lambda) \int_0^x i(r)dr + d \int_0^x i^2(r)dr \\
\Rightarrow & \langle \text{Multiplicando ambos lados por } e^{-\delta x} \rangle \\
e^{-\delta x} s(x) + e^{-\delta x} i(x) - e^{-\delta x} &= e^{-\delta x} \int_0^x \lambda dr + de^{-\delta x} \int_0^x s(r)i(r)dr - e^{-\delta x} \lambda \int_0^x s(r)dr \\
& - e^{-\delta x} (d + \alpha + \lambda) \int_0^x i(r)dr + de^{-\delta x} \int_0^x i^2(r)dr \\
\Rightarrow & \langle \text{Integrando ambos lados en el intervalo } [0, t] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-\delta x} s(x) dt + \int_0^t e^{-\delta x} i(x) dt - \int_0^t e^{-\delta x} dt = \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x \lambda dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x s(r) i(r) dr dt \\
& - \int_0^t e^{-\delta x} \lambda \int_0^x s(r) dr dt - (d + \alpha + \lambda) \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i(r) dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i^2(r) dr dt \\
\Rightarrow & \quad \langle \int_0^t e^{-\delta x} dt = (1/\delta)(1 - e^{-\delta t}) \rangle \\
& \int_0^t e^{-\delta x} s(x) dt + \int_0^t e^{-\delta x} i(x) dt - (1/\delta)(1 - e^{-\delta t}) = \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x \lambda dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x s(r) i(r) dr dt \\
& - \int_0^t e^{-\delta x} \lambda \int_0^x s(r) dr dt - (d + \alpha + \lambda) \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i(r) dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i^2(r) dr dt
\end{aligned}$$

Observación 1: Si nos enfocamos en la parte derecha de la igualdad vemos que:

$$\begin{aligned}
& d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x s(r) i(r) dr dx \\
= & \quad \langle \text{Álgebra y propiedades de la integral} \rangle \\
& d \int_0^t (\int_0^x s(r) i(r) dr) e^{-\delta x} dx \\
= & \quad \langle \text{Considerando } u(t) = \int_0^x s(r) i(r) dr \text{ y } dv(t) = e^{-\delta x} \text{ e integrando por partes} \rangle \\
& d \left(\frac{-1}{\delta} (\int_0^x s(r) i(r) dr) e^{-\delta x} \Big|_0^t - \frac{-1}{\delta} \int_0^t s(r) i(r) e^{-\delta x} dx \right) \\
= & \quad \langle \text{Evaluando las funciones en los límites de integración} \rangle \\
& \frac{d}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t s(x) i(x) dx - \frac{d}{\delta} \int_0^t e^{-\delta x} s(x) i(x) dx
\end{aligned}$$

Nótese cómo esta observación puede ser aplicada a cada uno de los términos de la parte derecha de la igualdad.

Retomando:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-\delta x} s(x) dt + \int_0^t e^{-\delta x} i(x) dt - (1/\delta)(1 - e^{-\delta t}) = \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x \lambda dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x s(r) i(r) dr dt \\
& - \int_0^t e^{-\delta x} \lambda \int_0^x s(r) dr dt - (d + \alpha + \lambda) \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i(r) dr dt + d \int_0^t e^{-\delta x} \int_0^x i^2(r) dr dt \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Definiciones de } \bar{a}_{\infty}^s, \bar{a}_{\infty}^i, \bar{A}_{\infty}^i \text{ y observación 1} \rangle \\
& \bar{a}_{\bar{t}}^s + \bar{a}_{\bar{t}}^i - \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) = \frac{\lambda}{\delta} e^{-\delta t} t - \frac{\lambda}{\delta^2} e^{-\delta t} + \frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{d}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t s(x) i(x) dx - \frac{d}{\delta \beta} \bar{A}_{\bar{t}}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^{i^2} \\
& - \frac{\lambda}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t s(x) dx + \frac{\lambda}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^s - \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t i(x) dx + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^i + \frac{d}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t i^2(x) dx \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Álgebra} \rangle \\
& \bar{a}_{\bar{t}}^s = -\bar{a}_{\bar{t}}^i + \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) + \frac{\lambda}{\delta} e^{-\delta t} t - \frac{\lambda}{\delta^2} e^{-\delta t} + \frac{\lambda}{\delta^2} + \frac{d}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t s(x) i(x) dx - \frac{d}{\delta \beta} \bar{A}_{\bar{t}}^i - \frac{d}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^{i^2} \\
& - \frac{\lambda}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t s(x) dx + \frac{\lambda}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^s - \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t i(x) dx + \frac{d + \alpha + \lambda}{\delta} \bar{a}_{\bar{t}}^i + \frac{d}{\delta} e^{-\delta t} \int_0^t i^2(x) dx
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y (3.7), la prima para la póliza con siniestros y pagos de anualidades puede calcularse mediante

$$\pi_t = \frac{\bar{a}_{\bar{t}}^i}{\bar{a}_{\bar{t}}^s}$$

3.3.2. Soluciones con series de potencias

El método de las series de potencias es una de las técnicas más antiguas para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Este método puede adaptarse bien a nuestro modelo *SIRBD*. Dado que cada punto del sistema es un punto ordinario, en particular, $t = 0$, busquemos soluciones de la forma

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, t \geq 0, \quad (3.17)$$

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, t \geq 0. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, diferenciando término a término se obtiene

$$s'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, t \geq 0,$$

$$i'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} t^n, t \geq 0.$$

Multiplicando (3.18) por sí misma da como resultado

$$i^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, t \geq 0,$$

donde

$$c_n = b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \cdots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0$$

de manera similar, multiplicando (3.17) por (3.18) da como resultado

$$s(t)i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, t \geq 0,$$

donde

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

A partir de (3.1), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \lambda + (\beta - d) \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} t^n - \beta \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + (d + \alpha + \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - d \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

Para satisfacer estas ecuaciones para todo t , es necesario que el coeficiente de cada potencia de t sea cero. De ahí obtenemos la siguiente relación para $t = 0$:

$$a_1 + a_0 \lambda + (\beta - d) a_0 b_0 = \lambda,$$

$$b_1 - \beta a_0 b_0 + (d + \alpha + \lambda) b_0 = db_0^2,$$

y para $t > 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} [(d - \beta)(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) + \lambda(1 - a_n)],$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} [\beta(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) - (d + \alpha + \lambda) b_n + d(b_0 b_n + b_1 b_{n-1} + \dots + b_{n-1} b_1 + b_n b_0)],$$

Por lo tanto

$$\bar{a}_{\bar{t}}^i = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t b_n e^{-\delta x} x^n dx$$

$$\bar{a}_{\bar{t}}^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n e^{-\delta x} x^n dx$$

Al considerar la sustitución $u = \delta x$ vemos que:

$$\bar{a}_{\bar{t}}^i = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t b_n e^{-\delta x} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\delta^{n+1}} \int_0^{\delta t} u^n e^{-u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\delta^{n+1}} \gamma(n+1, \delta t)$$

$$\bar{a}_{\bar{t}}^s = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n e^{-\delta x} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\delta^{n+1}} \int_0^{\delta t} u^n e^{-u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\delta^{n+1}} \gamma(n+1, \delta t)$$

Donde $\gamma(n, t)$ es la función Gamma inferior incompleta

$$\gamma(n, t) = \int_0^t x^{n-1} e^{-x} dx, t > 0.$$

que se puede obtener numéricamente en la mayoría de los programas matemáticos o estadísticos.

Por lo tanto, la prima de la póliza con reclamaciones y pagos de anualidades puede calcularse mediante

$$\pi_t = \frac{\bar{a}_{\bar{t}}^i}{\bar{a}_{\bar{t}}^s} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\delta^{n+1}} \gamma(n+1, \delta t)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\delta^{n+1}} \gamma(n+1, \delta t)}$$

Un dato interesante, cuando $\delta = 1$ y $t \rightarrow \infty$ estas fórmulas se simplifican a

$$\bar{a}_{\infty}^i = \sum_{n=0}^{\infty} (n!) b_n \quad \text{y} \quad \bar{a}_{\infty}^s = \sum_{n=0}^{\infty} (n!) a_n$$

lo que implica que

$$\bar{P}(\bar{a}_{\infty}^i) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n!) b_n}{\sum_{n=0}^{\infty} (n!) a_n}$$

Capítulo 4

Ejemplos Numéricos

Utilizando un enfoque retrospectivo, consideramos $V(t)$, la reserva de prestaciones acumulada en el momento t , como la diferencia entre el valor acumulado de las primas $P(t)$ y el valor acumulado de los siniestros $B(t)$. A partir de este enfoque se plantean primas π que permitan mantener la reserva en un valor siempre positivo; al considerar un enfoque retrospectivo se busca que la reserva $V(t)$ sea lo más cercana a cero al final del ejercicio y se denomina prima óptima aquella que permite que en el último periodo evaluado el valor de la reserva sea 0.

Si consideramos ϖ como el monto pagado por indemnización a los infectados, la reserva $V(t)$ puede ser descrita como:

$$V(t) = P(t) - B(t), \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

Donde:

- $P(0) = s_0\pi$, $B(0) = i_0\varpi$ y π es una prima de ensayo.

Se utilizará el modelo compartimentado $SIRBD$ para simular el valor de la prima $P(\bar{a}_t^i)$ aplicando la aproximación basada en tablas de infección, así mismo se simulará el valor de la reserva $V(t)$ para luego obtener la prima óptima considerando diferentes montos de indemnización, lo anterior se desarrollará tomando como referencia los datos del virus COVID-19 para generar dos simulaciones:

- En un primer caso se darán valores de los parámetros λ , α , β , μ y d de manera que se simulen las poblaciones S , I , R , N , con estas poblaciones se procederá a modelar los valores de la prima y reserva con un monto de indemnización.
- Para el segundo caso se tomarán datos recolectados por el gobierno en relación al número de casos de COVID-19 desde marzo de 2020 hasta marzo de 2023, estos datos estarán segmentados por género y grupos etarios, esta información proporciona las poblaciones S , I , R , N para así modelar los valores de la prima y reserva con diferentes montos de indemnización.

4.1. Simulación de Parámetros

A continuación se describe los elementos que componen la simulación:

- Se considera un grupo inicial de 100,000 personas N .
- El grupo comparte la misma edad y género.
- Se consideran periodos mensuales desde marzo de 2020 hasta marzo de 2023.
- Para el parámetro α se utiliza el tiempo promedio de duración del contagio por COVID-19 el cual es de 14 días. Al considerar periodos mensuales se asume una tasa de recuperación del 100 % de los infectados.
- Para el parámetro μ se utilizan las tablas de mortalidad de rentistas dada por la resolución 1555 de 2010 de la Superintendencia Financiera y la tabla de mortalidad de inválidos dada por la Resolución 585 de 1994 de la Superintendencia Bancaria. Para la estimación de la mortalidad en cada uno de los periodos a partir de una fecha de nacimiento dada se utiliza la Distribución Uniforme de la Mortalidad DUM .
- Para el parámetro β se genera un vector aleatorio en el rango [1.25 %,2.50 %], este rango es basado en la información de "Datos Abiertos" [6].
- Para el parámetro d se asume el 1 % del parámetro β es decir se asume que el 1 % de los contagiados mueren a causa del COVID-19, esto a su vez basado en la información de "Datos Abiertos" [6].
- El parámetro λ con valor de 0,08 % teniendo en cuenta la información de tasas de natalidad de Bogotá [11] la cual se puede ver a continuación:

Año	N° nacimientos	Población	Tasa Natalidad Mensual
2,018	87,191	7,412,566	0,10 %
2,019	85,075	7,592,871	0,09 %
2,020	79,322	7,743,955	0,09 %
2,021	66,740	7,834,167	0,07 %
2,022	64,730	7,901,653	0,07 %
Promedio			0,08 %

Cuadro 4.1: Tasas de natalidad en Bogotá

Fuente: Con información de [11]

- Para el parámetro de tasa interés δ se asume un 0,2 % efectivo mensual.

- El número de infectados nuevos I está modelado como βN . Para $t > 0$ el número de infectados corresponde a la suma entre los infectados nuevos y entre los infectados previos quitando las muertes por enfermedad, las muertes naturales y los recuperados, tomando como piso del número de infectados previos 0 infectados.
- Para $t = 0$ se asumen 0 recuperados R . Para $t > 0$ el número de recuperados corresponde a la suma entre los nuevos recuperados $\alpha I(t - 1)$, es decir la tasa α multiplicada por el número de infectados totales del periodo anterior, a esto último sumándole el número acumulado de recuperados teniendo en cuenta las muertes naturales de los recuperados.
- Para cada periodo se establece el número de susceptibles S como $S = N - I - R$, esto teniendo en cuenta la característica de la población dada por el modelo compartimentado $SIRBD$.
- La población N se ve ajustada en cada t teniendo en cuenta los nacimientos de los susceptibles, así como las muertes de los susceptibles, infectados o recuperados.
- La prima que pagan los susceptibles se denota por π mientras que ϖ corresponde al monto a pagar a los afectados.
- Las fracciones s, i para cada t y la reserva $V(t)$ como:
 - $s(t) = S(t)/N(t)$.
 - $i(t) = I(t)/N(t)$.
 - $P(t) = \begin{cases} s_0\pi & t = 0 \\ s(t)\pi + P(t - 1)e^\delta & t > 0 \end{cases}$
 - $B(t) = \begin{cases} i_0\varpi & t = 0 \\ i(t)\varpi + B(t - 1)e^\delta & t > 0 \end{cases}$
 - $V(t) = P(t) - B(t)$

Mediante la simulación se obtienen los valores de la prima $P(\bar{a}_{\bar{q}}^i)$ para $\varpi = 4,500,000$ y los valores de la reserva $V(t)$ con el fin de encontrar valores óptimos de la prima. A continuación se muestran los resultados para diferentes valores aleatorios de β .

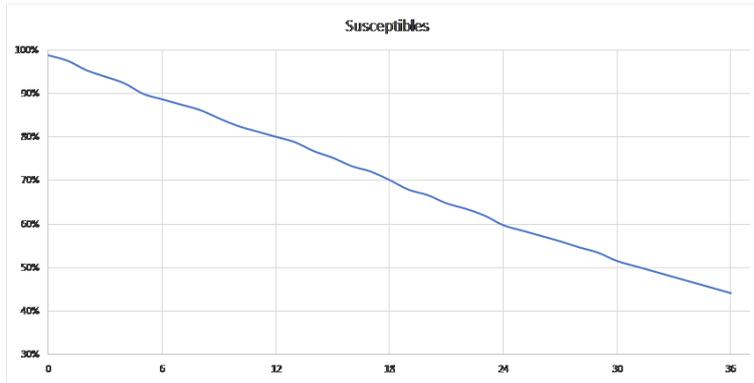


Figura 4.1: Porcentaje de susceptibles s con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$

Fuente: Propia

Al no considerar la posibilidad de reinfección se evidencia un decaimiento del porcentaje de susceptibles a medida que avanza el tiempo, en caso de mantener una tasa de infección $\beta > 0$ el número de susceptibles llegará a ser 0.

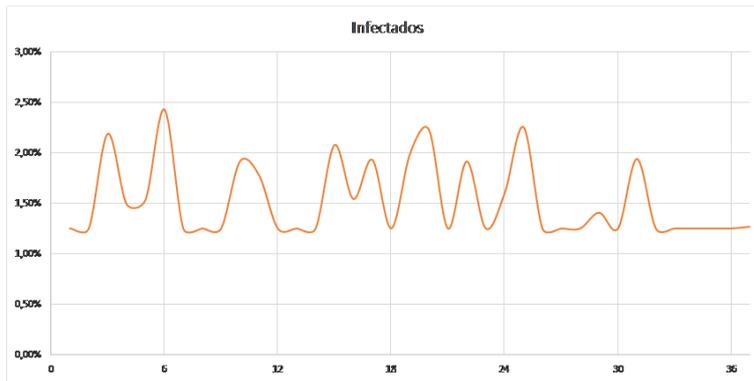


Figura 4.2: Porcentaje de infectados i con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$

Fuente: Propia

Dada la dinámica del vector aleatorio junto con la hipótesis de recuperación del 100%, se presentan las variaciones en el porcentaje de infectados. Ahora utilizamos la aproximación basada en tablas de infección para obtener los valores de $\bar{a}_{t|}^i$ y $\bar{a}_{t|}^s$, recordando tenemos que:

$$\bar{a}_{t|}^i \approx \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} i_k \text{ y } \bar{a}_{t|}^s \approx \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} s_k$$

a continuación se muestran los resultados para $\pi_t = \frac{\bar{a}_{t|}^i}{\bar{a}_{t|}^s}$ con diferentes valores aleatorios de β .

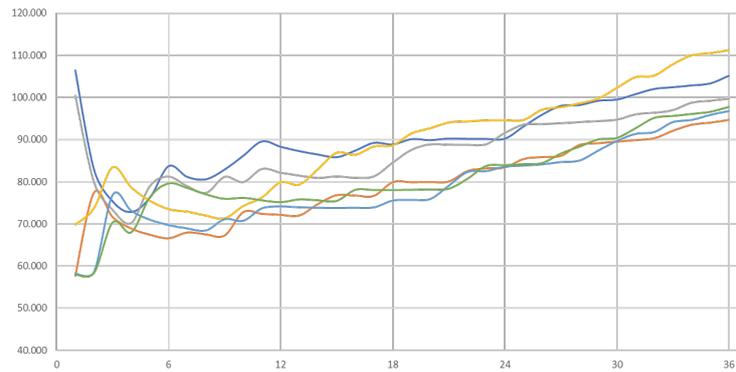


Figura 4.3: Valor de prima π para diferentes periodos t con $\varpi = 4,500,000$

Fuente: Propia

Como se puede observar el promedio de los valores de prima simulados, al cabo de 36 meses, es cercano a 100,000 y por ende hace sentido tomar este valor para el análisis del comportamiento de la reserva obteniendo así los siguientes resultados.

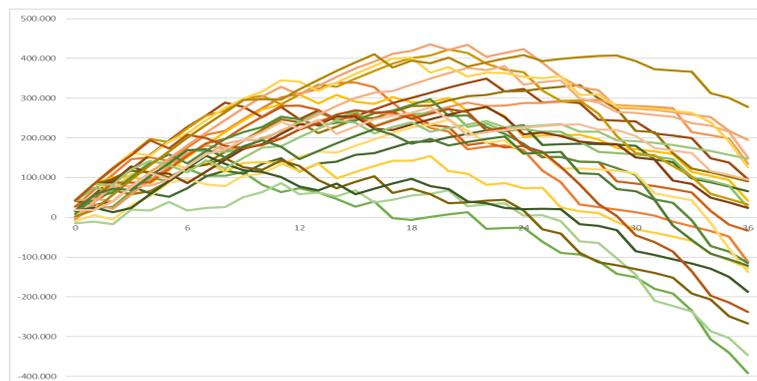


Figura 4.4: Reserva mujeres de 35 años con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$

Fuente: Propia

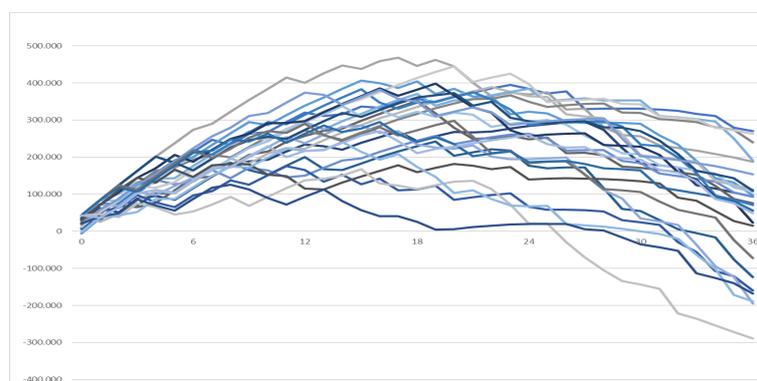


Figura 4.5: Reserva hombres de 35 años con $\pi = 100,000$, $\varpi = 4,500,000$

Fuente: Propia

En las gráficas de las reservas de los hombres y mujeres se puede evidenciar un incremento con un pico alrededor del mes 18, es decir septiembre de 2021, a partir de este punto la

reserva decae poco a poco, dada la dinámica de la reserva no se presenta un punto límite; aun así se logra el comportamiento esperado de la reserva el cual entre sus variaciones tiende a agotarse al final del ejercicio.

4.2. Prima óptima con datos reales

A continuación se describe los elementos que componen la simulación:

- Se establecen los siguientes grupos de edades:

Edad mínima	Edad máxima	Grupo de edad
0	5	1
6	10	2
11	15	3
16	20	4
21	25	5
26	30	6
31	35	7
36	40	8
41	45	9
46	50	10
51	55	11
56	60	12
61	65	13
66	70	14
71	75	15
76	80	16
81	85	17
86	90	18
91	95	19
96	100	20

- Se establecen periodos semanales desde el 1 marzo de 2020 hasta el 4 de marzo de 2023.
- Se extrae la información proporcionada en [6], esta información nos proporciona la fecha de inicio de los síntomas, el género, la edad y el estado resultante del contagio para cada contagio, a partir de la fecha de inicio de los síntomas se establece la fecha de fin de los síntomas sumando 14 días al inicio, esto con el fin de establecer el número de recuperados. Con ayuda del software R se agrupa la información por los periodos semanales, grupos de edades establecidos y género con el fin de obtener el conteo de infectados I y recuperados R .

- Se extrae la información proporcionada en [13] para obtener la población N , esta información nos proporciona el número de personas por año, localidad, sexo y edad. Con ayuda del software R se agrupa la información por género y los grupos de edades establecidos; para establecer la población en cada periodo semanal se asumen una distribución lineal durante cada año.
- Para el parámetro de tasa de interés δ se asume un efectivo semanal.
- El objetivo del ejercicio es establecer las primas óptimas para cada grupo de edad y género asumiendo una aseguradora que cubra a la población de Bogotá, para ello es necesario establecer un factor de afiliación a los seguros de vida, según el último reporte de inclusión financiera [15] la penetración de los seguros de vida se estableció en 12.9%, sin embargo para lograr que la población N cubra en su totalidad a los recuperados es necesario que al menos un 31% de la población esté cubierta, por ello se asume un 31% de la población extraída de [13].
- Para cada periodo se establece el número de susceptibles S como $S = N - I - R$, esto teniendo en cuenta la característica de la población dada por el modelo compartimentado $SIRBD$.

Utilizando la aproximación basada en tablas de infección para obtener los valores de $\bar{a}_{t|}^i$ y $\bar{a}_{t|}^s$, recordando que

$$\bar{a}_{t|}^i \approx \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} i_k \quad \text{y} \quad \bar{a}_{t|}^s \approx \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} s_k$$

se obtienen los siguientes resultados para $\pi_t = \frac{\bar{a}_{t|}^i}{\bar{a}_{t|}^s}$ de hombres y mujeres para los grupos de edad 1, 5, 10, 15 y 20 considerando un pago de 5 millones.

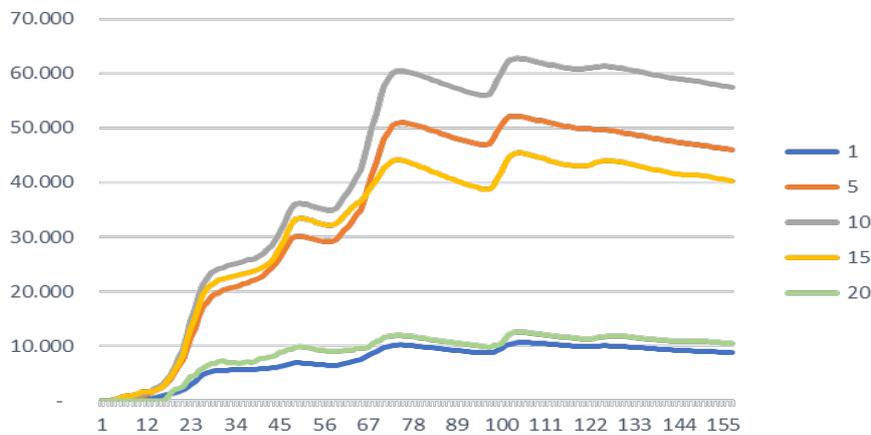


Figura 4.6: Valor de prima π para hombres y diferentes periodos t con $\omega = 5,000,000$

Fuente: Propia

Como se puede evidenciar en la figura 4.6, para los hombres la prima es menor en los grupos 1 y 20, es decir hombres entre los 0 a 5 años o entre los 96 y 100 años, esto se debe posiblemente a que la mortalidad en estas edades se ve afectada por diferentes causas mas allá del COVID-19, mientras que los grupos 5, 10 y 15 presentan primas más altas, así mismo a medida que aumentan los periodos y la propagación del virus se estabiliza, también lo hacen las primas para los diferentes grupos, algo interesante es cómo el grupo 15 de edades entre los 71 y 75 presentan primas superiores al grupo 5 de edades entre 21 y 25, sin embargo alrededor del periodo 67 (junio de 2021) el grupo 5 incrementa su cantidad de infectados lo cual implica en un incremento en las primas, esto posiblemente por una mayor exposición de este grupo.

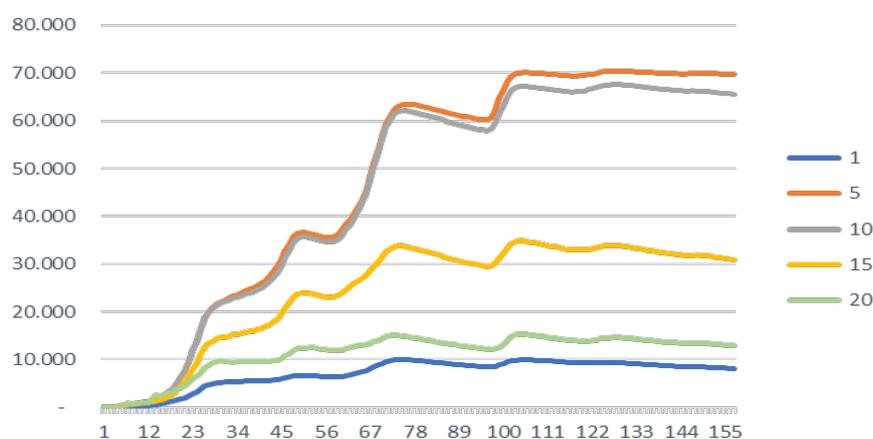


Figura 4.7: Valor de prima π para mujeres y diferentes periodos t con $\varpi = 5,000,000$
Fuente: Propia

Como se puede evidenciar en la figura 4.7, para las mujeres la prima es menor nuevamente en los grupos 1 y 20, es decir mujeres entre los 0 a 5 años o entre los 96 y 100 años, mientras que el grupo 15 presenta un incremento al rededor de los 30,000, los grupos 5 y 10 presentan las primas más altas llegando hasta los 70,000, así mismo a medida que aumentan los periodos y la propagación del virus se estabiliza, también lo hacen las primas para los diferentes grupos.

Una vez realizado este análisis de las primas a lo largo de los periodos, se establecen 3 montos de indemnización de 3, 5 y 10 millones, con los cuales se encuentran las primas óptimas:

Grupo de edad	Mujeres			Hombres		
	Pago 3 M	Pago 5 M	Pago 10 M	Pago 3 M	Pago 5 M	Pago 10 M
1	4.872	8.121	16.241	5.266	8.776	17.552
2	7.136	11.893	23.785	7.193	11.988	23.975
3	10.325	17.208	34.415	9.700	16.166	32.332
4	19.740	32.901	65.801	15.652	26.086	52.173
5	41.864	69.773	139.545	27.583	45.971	91.943
6	47.922	79.870	159.741	33.204	55.340	110.680
7	47.748	79.580	159.160	37.053	61.755	123.510
8	50.113	83.521	167.042	40.947	68.244	136.489
9	42.328	70.546	141.092	36.691	61.151	122.302
10	39.338	65.563	131.126	34.458	57.429	114.859
11	37.107	61.844	123.689	33.000	54.999	109.999
12	31.206	52.010	104.020	31.650	52.751	105.501
13	24.811	41.351	82.702	26.915	44.858	89.715
14	19.563	32.604	65.209	22.564	37.607	75.213
15	18.562	30.936	61.872	24.158	40.264	80.528
16	19.022	31.704	63.407	24.566	40.944	81.888
17	23.479	39.131	78.262	29.079	48.466	96.932
18	24.901	41.502	83.005	29.558	49.263	98.526
19	22.165	36.942	73.884	21.839	36.398	72.796
20	7.726	12.877	25.754	6.281	10.468	20.936

Cuadro 4.2: Primas óptimas por género y grupo etario

Fuente: Propia

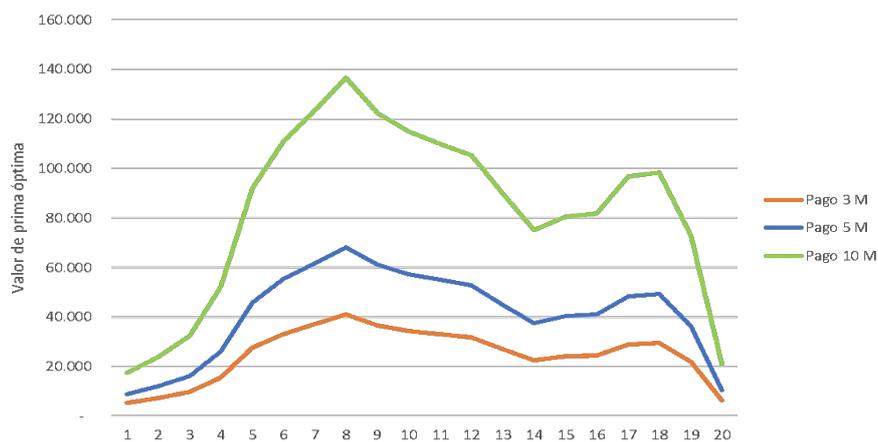


Figura 4.8: Prima óptima para hombres por grupo de edad

Fuente: Propia

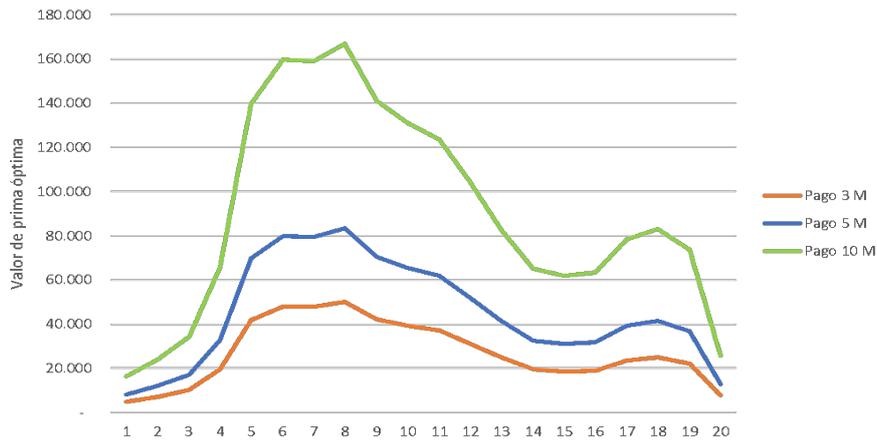


Figura 4.9: Prima óptima para mujeres por grupo de edad

Fuente: Propia

Teniendo en cuenta los resultados observamos como los grupos de edades 5 al 9 resultan ser los más costosos de cubrir, esto es personas entre los 21 a los 45 años. Al comparar los resultados de las primas óptimas de hombres y mujeres se observa que los hombres presentan una prima mas baja para los dos primeros grupos de edades, es decir entre los 0 y 10 años, mientras que a partir de 11 años resulta más costoso cubrir a las mujeres, si bien se presenta una población de mujeres mayor que la población de hombres, en general los contagios en mujeres son un 19% mayores que los de los hombres.

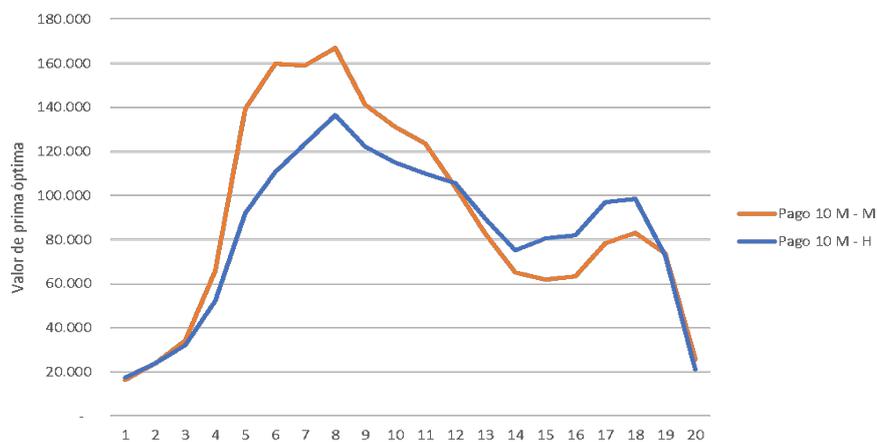


Figura 4.10: Prima óptima hombres y mujeres con pago de 10 M

Fuente: Propia

Se evidencia una diferencia entre las primas óptimas de hombres y mujeres a partir del grupo etario 5, si bien la diferencia disminuye entre los grupos 14 y 16 esto se puede deber al bajo número de casos confirmados entre los 66 y 80 años, posiblemente por su baja exposición.

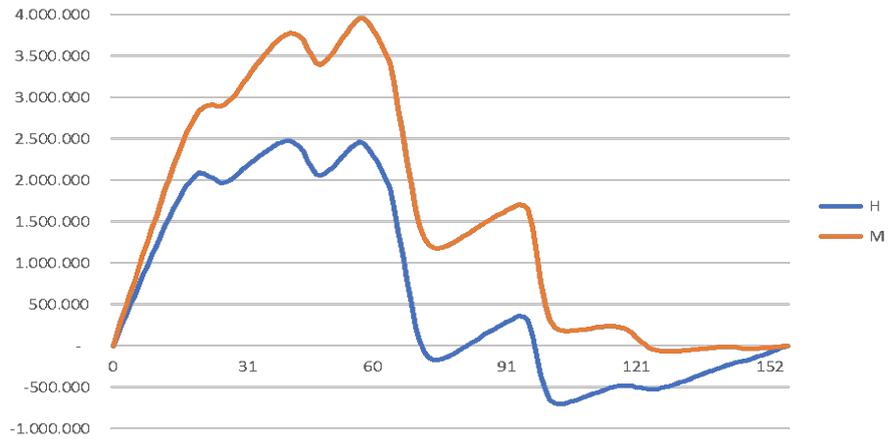


Figura 4.11: Reserva de hombres y mujeres de 35 años con pago de 10 M
Fuente: Propia

En las gráficas de las reservas tanto para hombres como mujeres, se observa un aumento continuo hasta la semana 70, alcanzando su punto máximo alrededor de la semana 60, es decir, en abril de 2021. A partir de este punto, la reserva disminuye gradualmente, experimentando un nuevo pico en diciembre de 2021. Debido a la prima óptima, la reserva se establece en 0 al finalizar el ejercicio.

Conclusiones

Al tomar en cuenta el modelo *SIRBD* es posible obtener expresiones para las primas de seguros que consideran:

- Plan de pago de reclamaciones de anualidades unitarias y pago de primas por anualidades
- Plan de un seguro de duración infinita con indemnización de suma fija en caso de ser recién infectado y pago de primas por anualidades
- Plan de prestación por fallecimiento de una unidad monetaria pagada inmediatamente en el momento de la muerte y pago de primas por anualidades
- Plan con una prestaciones gastos de hospitalización y una prestación de suma fija por fallecimiento

En cada uno de estos planes es posible recuperar las expresiones obtenidas con el modelo *SIR* clásico [16] al considerar $\mu = 0$, $\lambda = 0$ y $d = 0$.

Es posible utilizar las ideas del modelo *SIR* clásico al momento de elaborar las tarifas con métodos numericos como aproximaciones basadas en tablas de infección y series de potencias.

En la literatura se suele utilizar la hipótesis de una población N constante bajo el argumento de que en lapsos de tiempo cortos la población no cambia, como vemos con las nuevas pandemias, los virus se establecen por periodos de tiempo considerables, y bajo el argumento de considerar algunos parámetros que establecen la dinámica de la población N , es posible modelar las primas y reservas de diferentes planes de seguros sin la limitación de periodos cortos de tiempo.

Una de los objetivos al modelar las primas por medio del modelo *SIRBD* era a su vez poder modelar las características de las reservas, para así poder entender la concavidad a partir de puntos críticos encontrados con ayuda del modelo, sin embargo al incluir la tasa de nacimientos λ y el factor de mortalidad μ no se reincorporan las ideas desarrolladas

por [16] en el modelo *SIR* clásico.

En relación al análisis del comportamiento de las reservas, no se obtienen resultados tan descriptivos como en el modelo *SIR* clásico sin embargo es posible obtener resultados favorables de reservas así como primas óptimas teniendo las consideraciones adecuadas sobre los parámetros e información a utilizar.

Como trabajos futuros se considera el abordar varios métodos numéricos que permitan el cálculo de primas y reservas con el fin de comparar cual método es más eficaz en calcular aproximadamente la prima óptima.

Bibliografía

- [1] Alejandro Balbás, Raquel Balbás and José Garrido, Extending Pricing Rules with General Risk Functions, April 2008
- [2] Brauer, Fred y Castillo-Chávez, Carlos. (2001). Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer-Verlag New York.
- [3] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. (1986). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 4th Ed. New York: John Wiley and Sons.
- [4] Bowers, Newton L., Gerber, Hans U., Hickman, James C., Jones, Donald A. and Nesbitt Cecil J. (1997). Actuarial Mathematics. Chicago: The Society of Actuaries.
- [5] Castillo-Chavez, C. & A. Yakubu (2002) Discrete-time SIS models with simple and complex population dynamics, in Mathematical Approaches for Emerging and Re-emerging Infectious Diseases IMA Vol. 125; 153-164.
- [6] Casos confirmados de COVID-19 en Bogotá D.C. <https://datosabiertos.bogota.gov.co/dataset/numero-de-casos-confirmados-por-el-laboratorio-de-covid-19-bogota-d-c>.
- [7] Dushoff, J., W. Huang, & C. Castillo-Chavez (1998) Backwards bifurcations and catastrophe in simple models of fatal diseases, J. Math. Biol. 36: 227-248.
- [8] Hamer, W.H. (1906) Epidemic disease in England - the evidence of variability and of persistence, The Lancet 167: 733-738.
- [9] Kermack, W.O. & A.G. McKendrick (1932) Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. II. Proc. Roy. Soc. London, 138: 55–83.
- [10] Miller, J.C. (2011) A note on a paper by Erik Volz: SIR dynamics in random networks, J.Math. Biol. 62: 349-358.
- [11] Tasa de natalidad en Bogotá D.C. <https://datosabiertos.bogota.gov.co/dataset/tasa-de-natalidad-en-bogota-d-c>.

- [12] Nowak, M., & R.M. May (1996) *Virus Dynamics: Mathematical Principles of Immunology and Virology*, Oxford Univ. Press.
- [13] Pirámide poblacional en Bogotá D.C. <https://datosabiertos.bogota.gov.co/dataset/85bf790d-84d1-4eda-bd6f-40af62e71d95>
- [14] Samia Ghersheen, Vladimir Kozlov, Vladimir Tkachev y UnoWennergren. (2018). Mathematical analysis of complex SIR model with coinfection and density dependence. *Comp and Math Methods Journal*.
- [15] Reporte de Inclusión Financiera 2021. https://www.bancadelasoportunidades.gov.co/sites/default/files/2022-09/Reporte%20de%20inclusión%20financiera%202021_07-09-2022.pdf
- [16] Runhuan Feng y José Garrido. (2011). Actuarial Applications Of Epidemiological Models. *North American Actuarial Journal*.
- [17] Xiaowen Zhou, Stepping–Stone Model with Circular Brownian Migration, August 2005