

Maestría en Ingeniería Civil

Revisión de consideraciones de concepción, análisis y diseño de las estructuras de tensegridad y su aplicación en un modelo de enseñanza para estudiantes de pregrado en ingeniería civil.

German Santiago Olivar Carreño

Bogotá, D.C., 10 de diciembre de 2023



Revisión de consideraciones de concepción, análisis y diseño de las estructuras de tensegridad y su aplicación en un modelo de enseñanza para estudiantes de pregrado en ingeniería civil.

Tesis para optar al título de magíster en Ingeniería Civil, con énfasis en ingeniería Estructural

Nancy Torres Castellanos

Director

Bogotá, D.C., 10 de diciembre de 2023



La tesis de maestría titulada “Revisión de consideraciones de concepción, análisis y diseño de las estructuras de tensegridad y su aplicación en un modelo de enseñanza para estudiantes de pregrado en ingeniería civil”, presentada por Germán Santiago Olivar Carreño, cumple con los requisitos establecidos para optar al título de Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en ingeniería Estructural.

Nancy Torres Castellanos

Camilo José Vega Vargas

Jesús David Ortiz Polanco

Bogotá, D.C., 10 de diciembre de 2023

Dedicatoria.

Este trabajo de grado es dedicado a mis padres y hermanas, que siempre han estado para mí dándome el apoyo necesario en los momentos difíciles, gracias a ellos me levanto día a día a enfrentar los retos de la vida.

Agradecimientos.

Agradezco a Dios por ser mi guía, a mi familia por ser el pilar incondicional para lograr los objetivos que me planteo y a la ingeniera Nancy Torres por su orientación, apoyo y acompañamiento durante todo el proceso de esta investigación.

Resumen

Las estructuras de tensegridad son un sistema compuesto por barras a compresión y cables a tensión, conectados entre sí por medio de pasadores, este sistema estructural presenta múltiples aplicaciones, en las cuales se incluyen torres, puentes, estructuras de cubierta y estructuras desplegadas. A pesar de existir aplicaciones de este sistema compuesto, se ha evidenciado que no existen lineamientos de análisis y diseño establecidos para este tipo de estructuras, lo que ocasiona que su aplicación se vea limitada y no pueda usarse de forma segura como sistema estructural alternativo. Bajo esta premisa se desarrolló el presente trabajo de grado, teniendo como objetivo principal generar una propuesta de enfoque óptimo de este tipo de sistema, tomando como base la literatura existente con el fin de garantizar un correcto análisis del comportamiento de las estructuras de tensegridad e identificar sus limitaciones de uso como sistema estructural. En el documento se consignó un compendio de la información encontrada en los diferentes artículos evaluados, describiendo las características, ventajas y desventajas, búsqueda de forma, análisis y diseño de los sistemas de tensegridad, aportando así al vacío de conocimiento en esta área, obteniendo como resultado un flujo metodológico que se puede valorar como un enfoque óptimo para el análisis y diseño de este tipo de estructuras, plasmando esta idea en la propuesta de un modelo de enseñanza, con el fin de permitir a los estudiantes de pregrado tener un acercamiento a este tipo de sistemas y abriendo la posibilidad a investigaciones futuras que permitan un mayor entendimiento de este tipo de estructuras.

Índice general

Resumen.....	6
Introducción	14
Objetivos	16
1. La tensegridad a través de la historia	17
2. Aplicación de las estructuras de tensegridad.....	22
2.1. Domos y estructuras de cubierta:.....	22
2.1.1. Snowdon Aviary	23
2.1.2. MOOM tensegritic membrane structure.....	24
2.1.3. White Rhino	25
2.1.4. Estadio de la ciudad de la plata.....	28
2.1.5. Georgia Dome	30
2.1.6. Wanda Metropolitano	32
2.2. Torres:.....	35
2.2.1. Torres diseñadas por Kenneth Snelson.....	36
2.2.2. Tower of Rostock:	38
2.3. Puentes:.....	39
2.3.1. Kurlipa Bridge:.....	40
2.3.2. Modelos de puentes:	41
2.4. Estructuras desplegadas:.....	46
3. Características de las estructuras de tensegridad.	49
3.1. Características, ventajas y desventajas:.....	49
3.1.1. Características:	49
3.1.2. Ventajas:.....	51
3.1.3. Desventajas:.....	52
3.1.4. Materiales comúnmente usados:.....	53
3.2. Tensegridad pura y tensegridad falsa (metatensegridad):.....	53
4. El problema de la búsqueda de forma.....	57
4.1. Métodos de búsqueda de forma cinemáticos:.....	59

4.1.1.	Soluciones analíticas:.....	59
4.1.2.	Programación no lineal:.....	62
4.1.2.1.	Problemas de optimización y condiciones de equilibrio:	63
4.1.2.2.	Estabilidad del estado de auto equilibrio:	63
4.1.2.3.	Minimización de la energía de deformación usando material ficticio:	63
4.1.3.	Relajación dinámica:.....	65
4.2.	Métodos de búsqueda de forma estáticos:.....	67
4.2.1.	Método de densidad de fuerza:	67
4.2.1.1.	Método de densidad de fuerza convencional:	68
4.2.1.2.	Método Multiparamétrico de búsqueda de forma:.....	70
4.2.1.3.	Método adaptativo de densidad de fuerza:.....	71
4.2.1.4.	Procedimiento de búsqueda de forma numérico:	73
4.2.1.5.	Método de densidad de fuerza adaptado a la simetría.	74
4.2.1.6.	Algoritmo de Faddeev-LeVerrier.....	75
4.2.2.	Algoritmo genético:	76
4.2.3.	Método de energía:.....	80
4.2.4.	Reducción de coordenadas:	82
4.2.5.	Método de Monte Carlo:.....	84
4.2.6.	Método basado en elementos finitos (método numérico):	86
4.2.7.	Método de optimización restringida:.....	87
4.3.	Sistemas de tensegridad encontrados a partir de los métodos de búsqueda de forma: 90	
5.	Análisis y diseño de estructuras de tensegridad.	100
5.1.	Análisis estático en estructuras de tensegridad:.....	100
5.2.	Criterios de diseño basado en la NSR-10:	102
5.2.1.	Lineamientos de diseño para estructuras en acero basado en la NSR-10 título F: 102	
5.3.	Herramientas computacionales para el análisis y diseño de estructuras de tensegridad:	105
6.	Diagrama de flujo para la concepción, análisis y diseño de estructuras de tensegridad.	107

7.	Propuesta del modelo de enseñanza.	111
8.	Puntos destacados de la investigación.....	114
	Conclusiones generales.	117
	Investigaciones futuras.	118
	Anexo 1: Ejercicios prácticos usando el software comercial SAP2000.	119
	Referencias.....	156

Índice de tablas

Tabla 1. Resumen torres de tensegridad diseñadas por Snelson	36
Tabla 2. Resumen de modelos de puentes.	41
Tabla 3. Clasificación de las aplicaciones mostradas en el capítulo 1.....	55
Tabla 4. Resumen métodos de búsqueda de forma.....	89
Tabla 5. Contenido del libro fundamentos de estructuras de tensegridad.	113

Índice de figuras

Figura 1. Proto-tensegridad. Tomado de recurso electrónico: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Proto-Tensegrity_by_loganson.jpg	17
Figura 2. Proto-tensegridad. Tomado de recurso electrónico: https://civilsguide.com/tensegrity-structure/Early X Piece	18
Figura 3. Propuestas de tensegridad por Emmerich. Tomado de recurso electrónico: http://www.tensegridad.es/Publications/Patents/Emmerich/FR1377291A.pdf	19
Figura 4. Domo geodésico por Fuller. Tomado de recurso electrónico: https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/grandes-personajes/buckminster-fuller-el-hombre-que-inventaba-el-futuro/	23
Figura 5. Snowdon Aviary. Tomado de recurso electrónico: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Snowdon_Aviary_at_London_Zoo,_England-16Aug2009.jpg	24
Figura 6. MOOM tensegritic membrane structure.Tomado de recurso electrónico: https://wewanttolearn.wordpress.com/2012/11/12/moom-tensegritic-membrane-structure-noda-by-kazuhiro-kojima/#:~:text=The%20membrane%20is%20anchored%20at,by%20means%20of%20steel%20pins	25
Figura 7. Respuesta de rigidez de una estructura de tensegridad bajo carga axial. Tomado de (Kawaguchi et al., 2010)	26
Figura 8. Vista interior White Rhino I. tomado de (Kawaguchi et al., 2010)	26
Figura 9. White Rhino I y White Rhino II. White Rhino II Tomado de recurso electrónico: https://www.youtube.com/watch?v=aWVfbrcaUBY . White Rhino I Tomado de (Kawaguchi et al., 2010).....	27
Figura 10. Estadio de la ciudad de la plata. Tomado de recurso electrónico https://www.structuremag.org/?p=962	28
Figura 11. Estructura interior del estado de la ciudad de la plata. Tomado de recurso electrónico: https://www.stadiumguide.com/ciudaddeplata/	29
Figura 12. Cubierta del estadio Georgia Dome. Tomado de recurso electrónico: http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/GEORGIA/g-anal.html	30
Figura 13. Etapas constructivas Georgia Dome. Tomado de recurso electrónico: https://www.birdair.com/birdair-portfolio/georgia-	31

Figura 14. Propuesta Cubierta del estadio. Tomado de (Marzo, n.d.).....	32
Figura 15. Estructura del anillo exterior. Tomado de (Marzo, n.d.).....	33
Figura 16. Vista en perfil de la estructura de la cubierta. Tomado de (Marzo, n.d.).....	34
Figura 17. Construcción Wanda metropolitano. Tomado de (Marzo, n.d.).....	34
Figura 18. Propuestas de torres de tensegridad. Tomado de (Gomez-Jauregui, 2004a) .	35
Figura 19. A. Needle Tower I B. Needle Tower II C. E.C. Column D. Equilateral Quivering Tower E. Tri-Core Column. Tomado de recurso electrónico	
http://kennethsnelson.net/category/sculptures/outdoor-works/	37
Figura 20. Rostock Tower. Tomado de recurso electrónico:	
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Messeturm_Rostock_gro%C3%9F.JPG	38
Figura 21. Puente Kurlipa. Tomado de recurso electrónico:	
https://architectuul.com/architecture/kurilpa-bridge	40
Figura 22.A) Modular Tensegrity Structures: The "Tor Vegata" Footbridge. Tomado de (Micheletti, n.d.).B) A study of a tensegrity structure for a footbridge. Tomado de (Pleşcan et al., 2018).C) Tensegrity Bridge with Prestressed Deck. Tomado de (Briseghella et al., 2010).D) Design of an Experimental Tensegrity Pedestrian Bridge. Tomado de (Tej et al., 2014).E) Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales. Tomado de (Cobos, 2018).F) Tensegrity modules for pedestrian bridges. tomado de (Rhode-Barbarigos et al., 2010).....	45
Figura 23. Estructura Rollow- hope desplegable. tomado de (Rhode-Barbarigos, 2012)..	47
Figura 24. Sistema DDLTG. a) Desplegado b) Plegado. tomado de(Gomez, 2016).....	48
Figura 25.Estructura poligonal. Tomada de de (Tibert & Pellegrino, 2003)	61
Figura 26. Diagrama de flujo para la aplicación de concepción, análisis y diseño de estructuras de tensegridad. Tomado de (Rhode-Barbarigos, 2012) y modificado por fuente propia.....	110
Figura 27. Propuesta de portada para el libro Fundamentos de estructuras de tensegridad. Tomado de fuente propia.....	112
Figura 28. Armadura de tensegridad ejemplo práctico.	120
Figura 29. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.....	121
Figura 30. Sección barras.....	122
Figura 31. Sección cables.....	122
Figura 32. Elementos a compresión y tensión.....	123
Figura 33. Definición porcentaje de tensión en cables.	124

Figura 34. Casos de carga, definición no lineal.....	125
Figura 35. A) Numeración de los elementos B) Estado de carga interna solo pretensión.	126
Figura 36. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z.....	127
Figura 37. A) Estado de carga interna pretensión, peso propio y carga adicional. B) Deformación dirección Z.....	130
Figura 38. Columna de tensegridad tipo X Column ejercicio práctico. Tomado de (Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020).....	132
Figura 39. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.....	133
Figura 40. Sección barras.....	134
Figura 41. Sección Cables.....	134
Figura 42. A) Numeración cables. B) Numeración barras. C) Estado de carga interna solo pretensión caso 25%.	136
Figura 43. A) Numeración cables. B) Numeración barras. C) Estado de carga interna solo pretensión caso 80%.	137
Figura 44. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z. Caso 25%......	138
Figura 45. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z. Caso 80%......	142
Figura 46. Vista lateral estructura principal de la cubierta.	144
Figura 47. Estructura de cubierta, ejercicio práctico.....	144
Figura 48. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.....	145
Figura 49. Sección barras.....	146
Figura 50. Sección cables.....	146
Figura 51. Estado de carga interna solo pretensión.	148
Figura 52. Numeracion elementos barra y cable.....	148
Figura 53. Estado de carga interna pretensión y peso propio.	149
Figura 54. A) Deformacion pretenión y peso propio vista lateral. B) Deformaciones pretensión y peso propio vista 3D.....	150
Figura 55. Estado de carga interna solo pretensión, peso propio y carga adicional.	153
Figura 56. Deformaciones pretensión, peso propio y carga muerta.	153

Introducción

Las estructuras de tensegridad son estructuras espaciales compuestas por barras y cables que se conectan entre sí por medio de pasadores, estas se pueden definir como “un principio estructural basado en el uso de componentes aislados en compresión dentro de una red de tensión continua, de forma que los miembros comprimidos (normalmente conocidos como barras/puntales) no se tocan entre sí y los miembros pretensados en tensión (normalmente conocidos como cables/tendones) delimitan el sistema espacialmente” (Gilewski et al., 2015). A partir de este principio se han diseñado diferentes estructuras alrededor del planeta de las cuales se conocen torres, puentes, estructuras de cubierta y estructuras desplegadas. Este principio estructural ha sido muy controversial debido a que algunos investigadores no consideran que se pueda aplicar el principio en su forma más pura como un sistema estructural, debido a esto las estructuras de tensegridad se dividen en dos grupos; llamados tensegridad pura y metatensegridad, este último con el fin de abrir el campo de aplicación a la ingeniería estructural, donde se tienen en cuenta los principios de la tensegridad incluyendo conceptos que permiten obtener una mayor estabilidad en la estructura. (Mitxelena, 2014) . La estabilidad es otro de los problemas de este tipo de estructuras, ya que estas no basan su equilibrio en la gravedad si no en un estado de auto esfuerzo, lo que se convierte en un problema de búsqueda de forma. Para garantizar este estado de auto equilibrio estable, se han realizado investigaciones, planteando gran cantidad de métodos de búsqueda de forma que permiten un acercamiento a este estado, sin embargo, aún no se refleja un procedimiento claro que permita el análisis y diseño de este tipo de sistemas. (Sultan, n.d.-a)

A la fecha las estructuras de tensegridad no cuentan con guías, normas o manuales que permitan garantizar el análisis y diseño, lo que imposibilita la aplicación de estos sistemas como alternativa estructural. La mayor parte de artículos se basan en la búsqueda de forma de estructuras de tensegridad y por esta razón el interés de este trabajo de grado va dirigido hacia la recopilación de información, plantear cómo debería ser un correcto análisis y cómo se puede aplicar para que estudiantes de pregrado o personas interesadas en este sistema, tengan una alternativa estructural diferente a los sistemas tradicionales.

Este trabajo de grado se divide en tres partes, la primera parte consta de un compendio de la información donde se podrá evidenciar el origen de las estructuras de tensegidad, aplicaciones de este sistema, características, ventajas y desventajas, métodos de búsqueda de forma, avances investigativos y procedimientos de análisis y diseño. La segunda parte consta de un diagrama de flujo que evidencia el procedimiento sugerido para el análisis de este tipo de estructuras para finalmente en la tercera parte realizar la propuesta a un modelo de enseñanza. A continuación, se presentan los objetivos alcanzados en la realización del presente trabajo de grado.

Objetivos

Objetivo general:

Generar un enfoque óptimo para garantizar un correcto análisis del comportamiento de las estructuras de tensegridad e identificar las limitaciones de su uso como sistema estructural.

Objetivos específicos:

- Generar un compendio de literatura sobre el contexto histórico, características, tipología, distribución de carga, análisis y diseño de las estructuras de tensegridad.
- Formular un flujo metodológico que incluya las características, tipologías, idealización de las cargas para un correcto análisis y diseño de las estructuras de tensegridad.
- Diseñar un modelo de enseñanza que permita a los estudiantes comprender, analizar y diseñar los elementos que conforma un sistema estructural de tensegridad bajo los criterios de la estática.

1. La tensegridad a través de la historia

Las estructuras de tensegridad nacen del concepto del constructivismo a mediados del siglo XX, donde el arte empieza a dar una nueva visión por fuera de la homogeneidad y uniformidad, mostrando rasgos más arbitrarios y flexibles, haciendo que los artistas expresaran su conocimiento más allá de hacer una copia de la realidad, motivando a la mente humana a representar las obras bajo una interpretación diferente a lo que se acostumbraba a ver. (Sultan, n.d.-b)

Esto se puede observar en las diferentes estructuras conocidas en la actualidad, donde las construcciones de tensegridad cambian completamente el paradigma, haciendo que las geometrías de las estructuras no necesariamente sean completamente simétricas. El aporte de las estructuras de tensegridad a este cambio de paradigma se puede presenciar en Moscú en 1921, con la primera escultura que se asemeja al concepto de tensegridad, siendo una obra compuesta por tres barras y siete cables, manipulable por un octavo cable sin tensión que servía para manipular la configuración del sistema y mantener el equilibrio; esta obra fue fabricada por el artista constructivista Karl Loganson, conocida como Proto-tensegridad. Esta obra no se clasificó bajo el concepto de tensegridad debido a que carece de equilibrio sin necesidad de intervenir con fuerzas o momentos externos, siendo una de las características de las estructuras de tensegridad. (Sultan, n.d.-b)

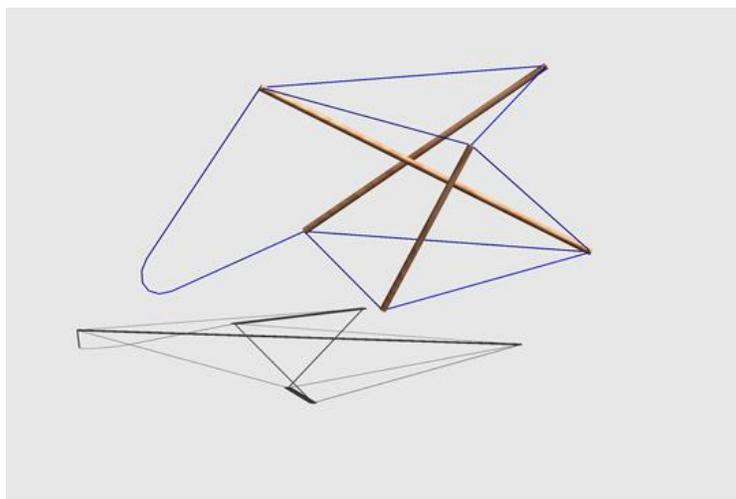


Figura 1. Proto-tensegridad. Tomado de recurso electrónico: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Proto-Tensegrity_by_Loganson.jpg

Pasados casi treinta años desde el concepto de Proto-tensegridad a mediados de los años 50, tres hombres conocidos como los padres de la tensegridad, Richard Buckminster Fuller, David George Emmerich y Kenneth D. Snelson, trabajaron desde diferentes formas el concepto de tensegridad.

Snelson asistía a las conferencias de modelos geométricos dictadas por Fuller, donde se empezó a interesar por los modelos tridimensionales, esto lo llevó a desarrollar la primera escultura de tensegridad conocida como “Early X piece”, compuesta por dos elementos en forma de X y 14 cables. Es una obra que se encuentra en equilibrio sin acción de cargas externas y todos sus cables tensionados. (Gomez-Jauregui, 2004b) (Sultan, n.d.-b)



*Figura 2. Proto-tensegridad. Tomado de recurso electrónico:
<https://civilsguide.com/tensegrity-structure/Early X Piece>*

Buckminster Fuller al analizar la estructura de su estudiante observó que representaba el principio en el que se encontraba trabajando, conocido como tensión integridad, el cual no había plasmado aún, pero se basaba en “la interacción entre elementos continuos de tensión y elementos aislados de compresión”; basado en que la tensión era fundamental para mantener el equilibrio de estas estructuras Fuller la definió posteriormente como tensegridad. (Sultan, n.d.-b) (Gomez-Jauregui, 2004b)

El que Fuller creara el principio de la tensegridad y Snelson fabricara la primera escultura, llevo a una gran controversia en definir quién fue el pionero en este concepto, sin embargo, como menciona Kurtz “Si Fuller reconoce su deuda con Snelson por la invención del principio de tensegridad, Snelson también reconoce su propia deuda con el trabajo de Fuller” (Kurtz, 1968), por lo tanto, se podría decir que fue un trabajo en el que ambas partes aportaron de su conocimiento para lograr crear las estructuras de tensegridad. (Sultan, n.d.-b) (Gomez-Jauregui, 2004b)

Paralelamente, pero sin tener conocimiento del trabajo de Fuller y Snelson, en 1958 David Emerich un arquitecto francés, construyó varios sistemas de tensegridad, (ver figura 3) definiendo el concepto de estructuras tensadas y auto tensadas, siendo estructuras del mismo tipo que las definidas por Fuller y Snelson. (Sultan, n.d.-b) (Gomez-Jauregui, 2004b)



FIG. 1.

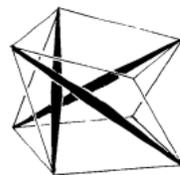


FIG. 2.

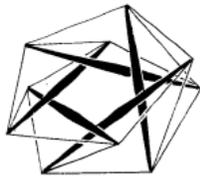


FIG. 3.

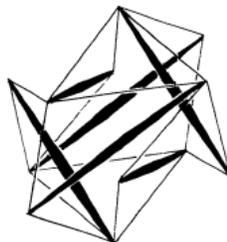


FIG. 4.



FIG. 5.

Figura 3. Propuestas de tensegridad por Emmerich. Tomado de recurso electrónico:
<http://www.tensegridad.es/Publications/Patents/Emmerich/FR1377291A.pdf>

Estos tres hombres continuaron trabajando en las estructuras de tensegridad, aunque con diferentes enfoques, Fuller y Emmerich enfocaron su trabajo a estructuras más cercanas a la ingeniería y la arquitectura, mientras que Snelson no consideraba que estas funcionaran para enfoques ingenieriles, por lo que enfocó su trabajo en el diseño de obras de arte y esculturas.

Entrados los años 70, Anthony Pugh estableció tipologías, clasificación y nomenclatura para las estructuras de tensegridad con patrones esféricos o cilíndricos, denominándolos patrón diamante, patrón zig zag y patrón circuito, esto también lo llevó a la construcción geométrica de diferentes tipos de mallas.

A partir de los años 70 en adelante es de vital importancia destacar a Rene Motro y al laboratorio de mecánica e ingeniería civil, de la Universidad de Montpellier, debido a que en este laboratorio se empiezan a generar grandes avances para darle a las estructuras de tensegridad un enfoque relacionado al ámbito estructural y analítico, incluyendo aspectos como búsqueda de forma, resistencia, estabilidad, deformación, entre otros. (Gómez-Jáuregui, 2012) (Herrera, 2014) (Tang, 2018)

De forma simultánea Ariel Hannor experimentó con prismas tensegríticos o pirámides truncadas, evitando que los elementos en compresión se pusieran en contacto; además de esto en 1987 llevó a cabo su propuesta de cúpula metálica de tensegridad. (Gómez-Jáuregui, 2012) (Herrera, 2014) (Tang, 2018)

En 1988, Emmerich publicó un compendio en el que presentaba teorías, estructuras y modelos que había desarrollado con sus estudiantes. (Gómez-Jáuregui, 2012)

Desde 1996 Wang Bin Bing, estudió estructuras modulares de tensegridad, estableciendo perspectivas para las barras continuas y las barras no continuas, donde evidenció que las barras continuas son tensegridades falsas y las barras no continuas establecen una tensegridad pura, adicional a esto también presenta formas geoméricamente flexibles y rígidas, donde define que la transmisión de carga será más beneficiosa en formas geoméricamente rígidas. También estudió el tipo de conexión entre elementos y los tipos de apoyo, complementando el trabajo de Emmerich dándole un enfoque más estructural que geométrico. (Gómez-Jáuregui, 2012) (Herrera, 2014)

Desde 1997 el laboratorio de mecánica e ingeniería civil, de la universidad de Montpellier, ha estado trabajando con sus estudiantes de pregrado, maestría y doctorado en tesis, investigaciones y proyectos enfocados a las estructuras de tensegridad, ampliando el conocimiento en aspectos como metodologías de búsqueda de forma, estados de pretensado, configuraciones desplegadas, técnicas constructivas, control activo del sistema, dimensionamiento óptimo, etc. (Gómez-Jáuregui, 2012)

En las últimas 2 décadas se evidenció que las estructuras de tensegridad también tienen aplicación como estructuras desplegadas y algunos investigadores han logrado mostrar esto, como lo es Valentin Gomez-Jauregui el cual investiga acerca de las Mallas de doble capa desplegada y Landolf Rhode_Barbarigos quien presenta investigaciones de puentes desplegados.

Como se puede evidenciar a través de la historia, las estructuras de tensegridad han contado con gran acogida e investigaciones que han permitido su análisis, diseño y construcción, por tanto, en el siguiente capítulo, se presentarán algunos ejemplos de estas estructuras innovadoras.

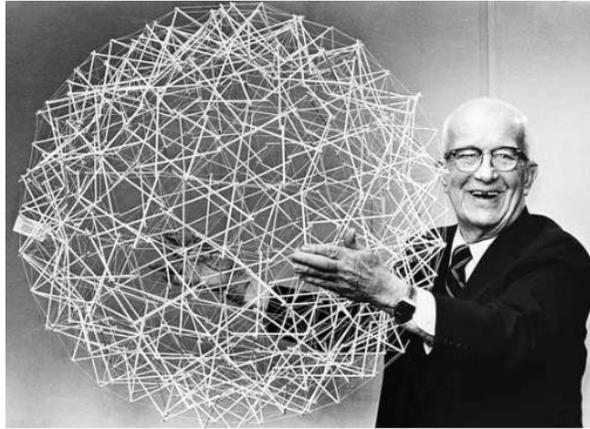
2. Aplicación de las estructuras de tensegridad.

Desde el origen de las estructuras de tensegridad se han podido evidenciar aplicaciones en diferentes campos de la ciencia, este capítulo se enfocará en las aplicaciones que han tenido este tipo de estructuras en la ingeniería estructural y la arquitectura. Es importante hacer énfasis en que la tensegridad se puede dividir en dos grupos, tensegridad pura y tensegridad falsa (metatensegridad), estas estructuras denominadas como tensegridad falsa se categorizan de esta forma, debido a que fueron concebidas como tensegridad, pero por ciertos factores en sus características no cumplen con todos los requisitos para ser una tensegridad pura, estos conceptos se especificaran más adelante y se clasificarán las estructuras acá indicadas tomando como base la literatura existente.

La aplicación en domos, arcos, torres, cubiertas y puentes han sido cuestionadas por algunos autores, debido a que indican que la tensegridad no proporciona ningún beneficio estructural con respecto al que otro sistema estructural puede aportar, sin embargo, las investigaciones, tesis y construcciones, demuestran que la tensegridad es un sistema que se puede hacer realidad implementando condiciones fuera de lo convencional.

2.1. Domos y estructuras de cubierta:

La primera propuesta de domo geodésico basado en estructuras de tensegridad fue realizada por Buckminster Fuller en 1953, sin embargo, esta estructura tenía un comportamiento en el que no se evidenciaba una estabilidad adecuada debido a su baja rigidez. Este diseño no contaba con una correcta triangulación, lo que es un factor que permite a cualquier estructura adquirir una mayor estabilidad. (Gomez-Jauregui, 2004a)



*Figura 4. Domo geodésico por Fuller. Tomado de recurso electrónico:
<https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/grandes-personajes/buckminster-fuller-el-hombre-que-inventaba-el-futuro/>*

Otros investigadores como Kennet Snelson, J. Stanley Black, Anthony Pugh, Oren Vilnay, Miodrag Nesterovic, Rene Motro, Ariel Hanaor, Robert W. Burkhardt's, entre otros, realizaron propuestas e investigaciones respecto a diferentes configuraciones y tipologías que permitieron grandes avances para la construcción de estructuras de tensegridad, entre ellas los domos y las estructuras de cubierta.

A continuación, se presentan algunas aplicaciones de estructuras de cubierta y domos:

2.1.1. Snowdon Aviary.

Construido en el zoológico de London, Inglaterra y diseñado por Cedric Price y Franky Newby en 1960, es un modelo de estructura tensada, que tiene gran similitud a una estructura de tensegridad. Esta estructura cuenta con 45 metros de ancho por 63 metros de largo con una altura máxima de 24 metros. La estructura está compuesta por cuatro tetraedros de acero con una altura de 17 m, estos están conectados mediante cables de 1 pulgada de diámetro, a su vez el equilibrio lo logran mediante puntales de aluminio que están articulados en la base conectados a los pilares de concreto, el cual se puede apreciar en la figura 5.(Blanco Blanch, 2010)



*Figura 5. Snowdon Aviary. Tomado de recurso electrónico:
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Snowdon_Aviary_at_London_Zoo,_England-16Aug2009.jpg*

2.1.2. MOOM tensegritic membrane structure.

El MOOM tensegritic membrane structure es una estructura experimental que se construyó en tan solo un día por 70 estudiantes de the Tokyo University of Science, esta estructura liviana se diseñó para ser un pabellón temporal ver figura 6.

La estructura está compuesta por 131 barras de aluminio sometidas a compresión de diferentes longitudes, estas barras se conectan entre sí por medio de un tejido de poliéster elástico de 0,7 mm de espesor, cumpliendo así con una de las características de la tensegridad.

MOOM tensegritic membran structure tiene un peso de 600 kilogramos, cubriendo un área superficial de 146 metros cuadrados, cuyas dimensiones son 26 metros de largo, 7,5 metros de ancho y 4,25 metros de altura.

Como otra de sus características en su construcción esta estructura fue anclada al suelo con pasadores, lo que hace que no sea del todo auto-portante, incumpliendo

con la definición de tensegridad, por lo que se podría clasificar como una tensegridad falsa.



*Figura 6. MOOM tensegrity membrane structure. Tomado de recurso electrónico:
<https://wewanttolearn.wordpress.com/2012/11/12/moom-tensegrity-membrane-structure-noda-by-kazuhiro-kojima/#:~:text=The%20membrane%20is%20anchored%20at,by%20means%20of%20steel%20pins.>*

2.1.3. White Rhino

En Chiba Japan, se construyeron dos estructuras con membranas de techo, que soportan el peso en dos “pilares” de tensegridad, a estas estructuras se les conoce como White Rhino I y White Rhino II.

- White Rhino I: Construido en el año 2001 en the Tokyo University of Science, se compone de dos elementos estructurales centrales diseñados por módulos simplex de tensegridad, los cuales cuenta con 9 elementos tensionados (tensores) y 3 elementos comprimidos (puntales), para el caso de esta estructura basados en la experimentación observaron que los elementos simplex no tenían la rigidez necesaria para soportar la membrana de techo, por lo que decidieron agregar 3 elementos de tensión adicionales logrando así un mejor comportamiento de rigidez y evitando el desplazamiento inextensional (ver figura 7). (Kawaguchi et al., 2010)

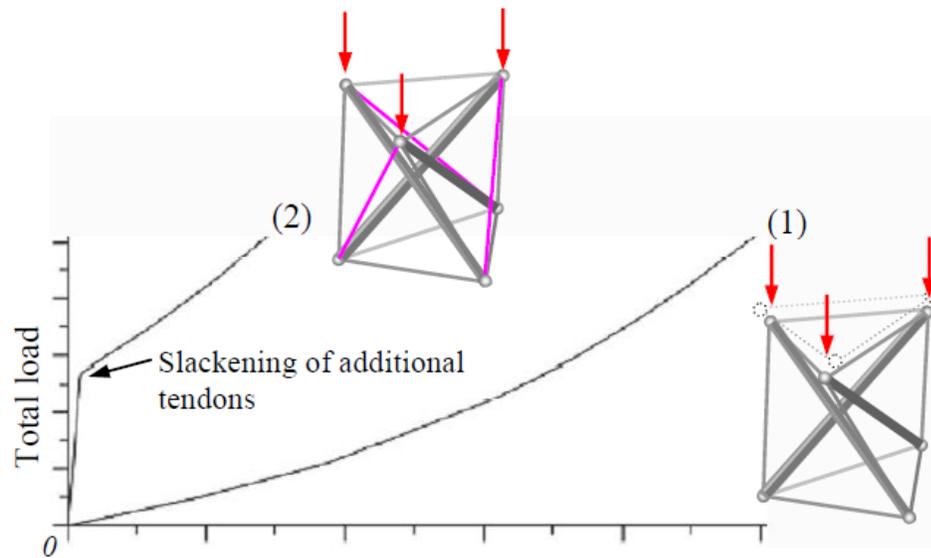


Figura 7. Respuesta de rigidez de una estructura de tensegridad bajo carga axial. Tomado de (Kawaguchi et al., 2010)

Estos pilares fueron concebidos algo diferente a los simplex, debido a que el triángulo inferior es de menor tamaño al triángulo superior, ya que se quería lograr que al ubicar la membrana de techo esta se asemejara a la forma de un cuerno. (Ver figura 8)

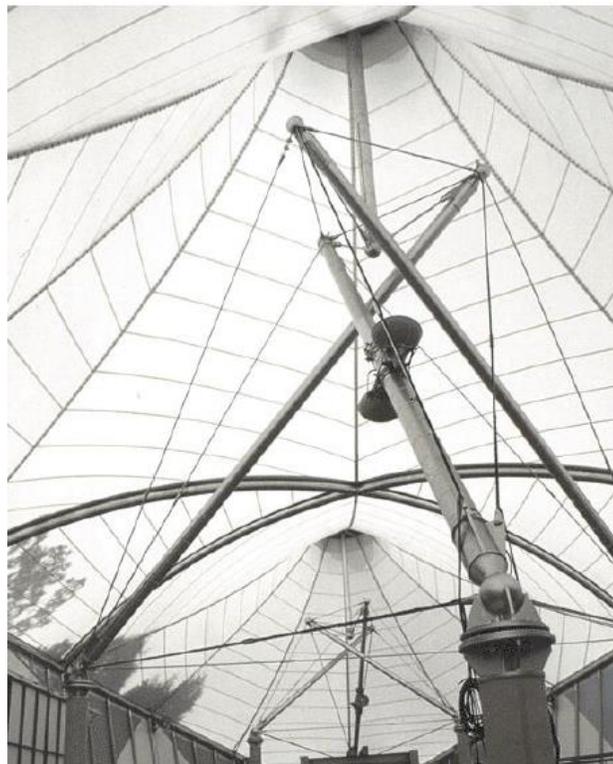


Figura 8. Vista interior White Rhino I. tomado de (Kawaguchi et al., 2010)

Adicional a esto es importante destacar que White Rhino I fue evaluado durante 10 años cada 5 min por medio de galgas extensiométricas, obteniendo resultados de desplazamiento y fuerzas axiales a las que se veía sometida la estructura en tiempo real, lo que permitió seguir avanzando en el conocimiento científico del comportamiento de las estructuras de tensegridad.

- White Rhino II: Basados en las investigaciones obtenidas en White Rhino I, el profesor Imai y el profesor Kenichi Kawaguchi diseñaron White Rhino II en el año 2017.

Esta edificación cuenta con un grado de complejidad mayor a la estructura previamente construida en el año 2001, ya que sus dos pilares de tensegridad son diferentes, el primero de ellos es un elemento compuesto por varios módulos de simplex haciéndolo tener una altura mayor, el segundo de ellos se basa en un módulo de pentágono, como se muestra en la figura 9 se pueden observar las diferencias en cada una de estas edificaciones.

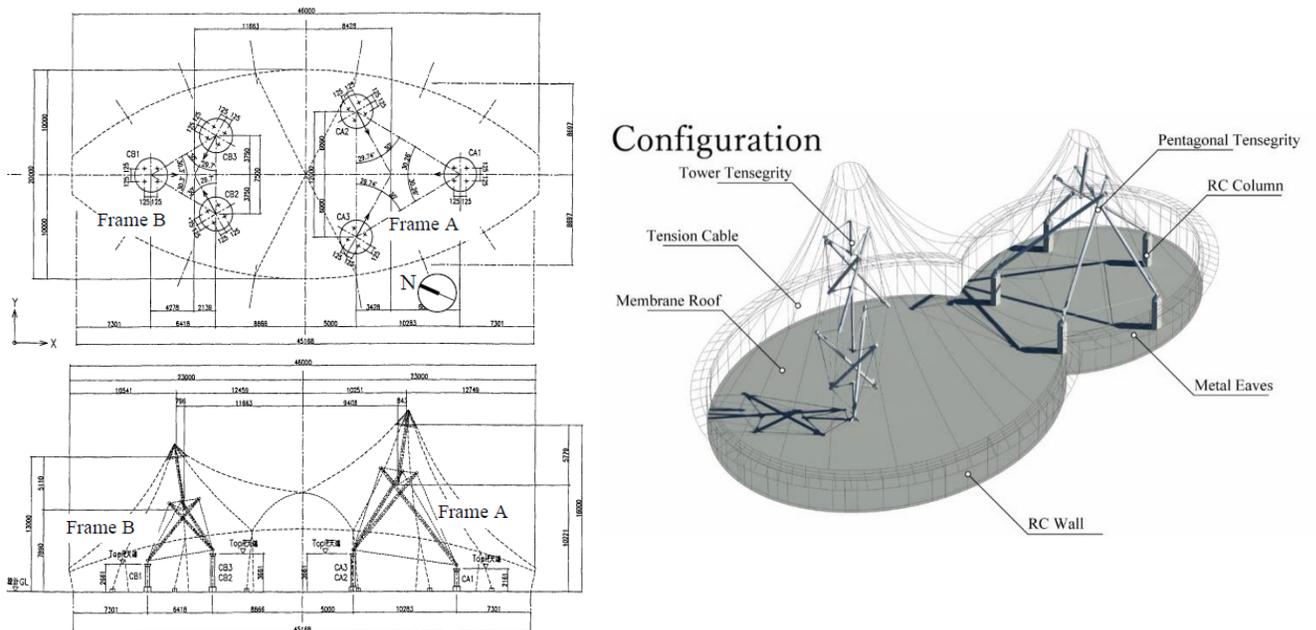


Figura 9. White Rhino I y White Rhino II. White Rhino II Tomado de recurso electrónico: <https://www.youtube.com/watch?v=aWVfbrcaUBY>. White Rhino I Tomado de (Kawaguchi et al., 2010)

Tanto en White Rhino I, como en White Rhino II se evidenció el inconveniente de los desplazamientos excesivos y rigidez baja, por lo que en este caso también se implementaron elementos de tensión adicional que contribuyeron a mantener la rigidez de la estructura tensegrítica.

2.1.4. Estadio de la ciudad de la plata

Diseñado bajo los conceptos del arquitecto Roberto Ferreira y la estructura Tenstar Dome desarrollada por Weidlinger Associates la cual fue patentada para el Georgia Dome.

El Arquitecto Robert Ferreira y el ingeniero Matthys P. Levy representando a Weidlinger Associates empezarán el desarrollo de la cubierta del estadio de la ciudad de la plata proyectando dos círculos de 85 m de diámetro que se intersectan entre sí, haciendo que de manera visual este se vea como un ocho (ver figura 10). La intersección de estos dos círculos simboliza la rivalidad entre los dos equipos de la ciudad, resolviendo el conflicto en un empate. (Garcia, n.d.)

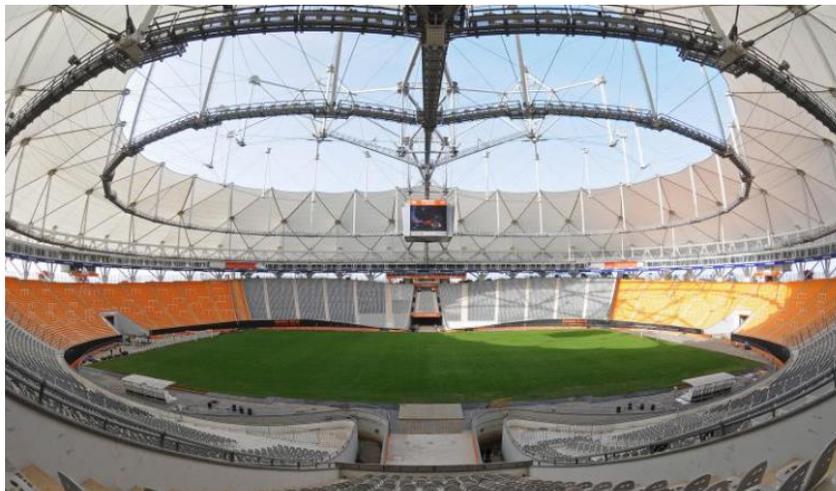


Figura 10. Estadio de la ciudad de la plata. Tomado de recurso electrónico <https://www.structuremag.org/?p=962>

La estructura de cubierta se compone de una armadura triangular de acero a compresión que cubre un perímetro de 697,36 m; dicha estructura perimetral se compone de un cordón superior con diámetro de 42 pulgadas, postes de 36 y 28 pulgadas y por último diagonales de 18 pulgadas. (Garcia, n.d.)

Partiendo de este anillo perimetral a compresión, se unen 3 anillos más que estarán sometidos a compresión en sus elementos verticales, unidos entre sí por medio de cables de hasta 3,9 pulgadas, el primer anillo cuenta con un radio de 69,0 m, el anillo intermedio 46,48 m y el último anillo 24 m. (García, n.d.)

Es importante analizar que la configuración de estos elementos tiene un peso alrededor de 5000 toneladas incluyendo el peso del anillo perimetral, postes, arcos, cables, etc. Adicional a esto las dimensiones del estadio son de 239,09 m de largo por 190,39 m de ancho, por lo que se podría decir que el peso de la cubierta por unidad de área sería de alrededor de 0,11 toneladas por metro cuadrado o 110 kilogramo fuerza por metro cuadrado; aunque no es un dato exacto es posible observar de forma numérica que la estructura es ligera, la configuración mencionada anteriormente se puede apreciar observando la figura 11. (García, n.d.)



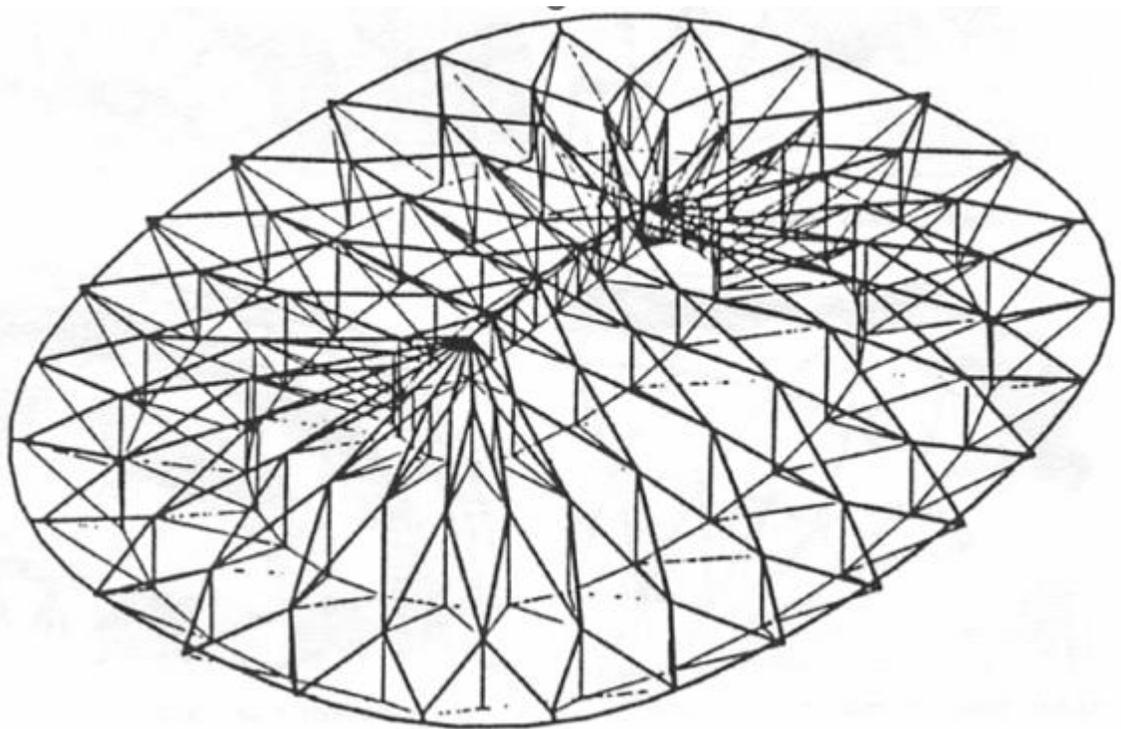
*Figura 11. Estructura interior del estado de la ciudad de la plata. Tomado de recurso electrónico:
<https://www.stadiumguide.com/ciudaddeplata/>*

Cabe destacar que, aunque está cubierta cuenta con similitud a estructuras de tensegridad, debería clasificarse como tensegridad falsa ya que esta se parece más a una estructura de cúpula de cable que, a una estructura de techo convencional, además cuenta con características que no son propias de los sistemas de tensegridad, por ejemplo, esta conecta elementos de compresión entre sí y no es

del todo autoportante debido a los anclajes dispuestos en el perímetro de acero incumpliendo con la definición de tensegridad. (Garcia, n.d.)

2.1.5. Georgia Dome

El Georgia Dome fue diseñado por la empresa Weidlinger Associates y su construcción, fabricación y dirección fue llevada a cabo por BirdAir; se inauguró en el año 1992 siendo un hito para la ingeniería, debido a que fue el estadio más grande en Atlanta y la cubierta que cubría mayor área basada en los principios de la tensegridad, Georgia Dome demostró ser una icónica obra por su innovadora forma de diseño, economía y construcción durante 25 años hasta su demolición en el año 2017. (Melaragno, 1993)



*Figura 12. Cubierta del estadio Georgia Dome. Tomado de recurso electrónico:
<http://www.columbia.edu/cu/gsap/BT/DOMES/GEORGIA/g-anal.html>*

La cubierta tenía una forma elíptica y estaba compuesta por un techo de tela revestido de teflón de 41375 metros cuadrados, siendo sus dimensiones 193 metros en su eje menor y 240 m en su eje mayor (ver figura 12).

La estructura de cubierta se componía de un anillo perimetral principal en concreto de 7,9 metros de ancho por 2,4 metros de alto, dicho elemento estaba apoyado en 52 columnas de concreto. A partir del anillo perimetral se construyeron otros tres anillos de tensegridad en diferentes niveles, en el último de estos tres anillos, se ubicaba una armadura en sentido longitudinal que tenía 56 metros de largo y se componía de nueve elementos de compresión vertical que median 10,5 metros entre el cordón superior e inferior. Cada anillo llevaba 26 elementos en compresión vertical que se extendían verticalmente de un aro al siguiente, los cuales se encontraban estabilizados mediante cables diagonales, ubicándolos de tal forma que no se tocaran entre sí, cumpliendo con uno de los principios de la tensegridad. Estos elementos variaban en longitud: 18,5 metros para los miembros sobre el primer aro, 24,5 metros para los miembros del segundo aro y 15 metros para los miembros que estaban en el tercer aro. Estos elementos de acero tenían un diámetro máximo de 0,6 metros, eran huecos y estaban sellados para evitar cualquier tipo de erosión. Para el diseño de los cables, se escogió dos tipos de elementos tensados, hilos paralelos y cables metálicos, los cuales contaban con diámetros variables entre 1,25 a 4,9 pulgadas. Las uniones pesaban cada una hasta 2 toneladas y fueron patentadas con el nombre de Weidments, las etapas constructivas del Georgia Dome se pueden apreciar en la figura 13. (Melaragno, 1993)

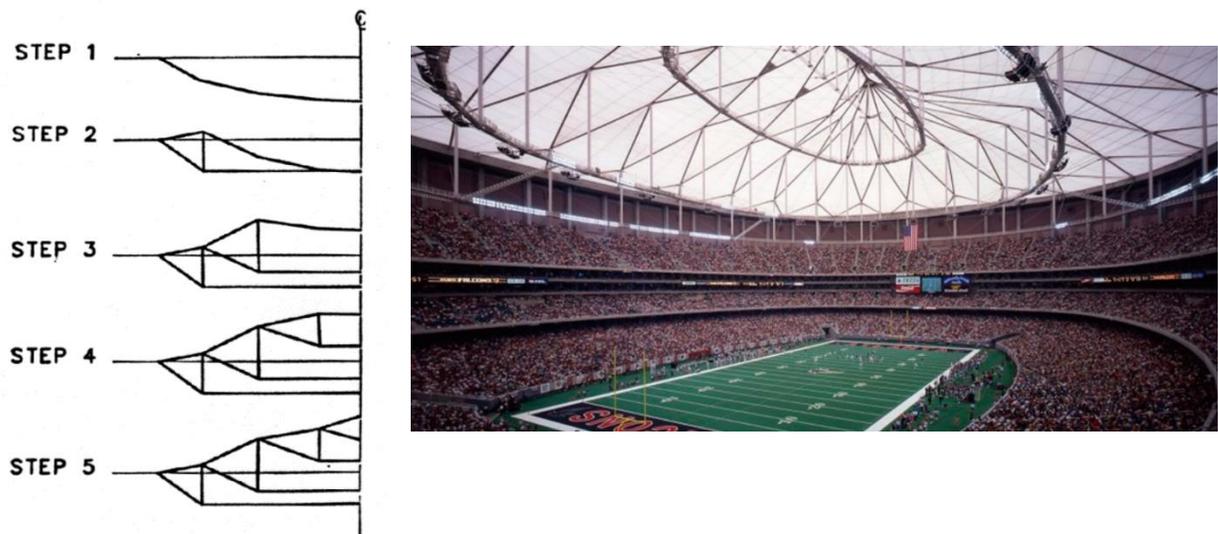


Figura 13. Etapas constructivas Georgia Dome. Tomado de recurso electrónico:
<https://www.birdair.com/birdair-portfolio/georgia->

El Georgia Dome al igual que el Estadio de la ciudad de la plata no se podía categorizar como una estructura de tensegridad cien por ciento pura, debido a que contaba con el apoyo al anillo perimetral, aunque los anillos de la estructura de cubierta se basen en este principio.(Melaragno, 1993)

2.1.6. Wanda Metropolitano

El estadio del Atlético de Madrid fue diseñado y construido entre el año 2007 y 2017 por la empresa Schlaich Bergermann und Partner, Wacker, Geoprin encargada de los diseños estructurales y la empresa Cruz y Ortiz arquitectos encargada del diseño arquitectónico de este. El estadio presenta una cubierta basada en los principios de tensegridad formada por un anillo exterior en compresión con forma de cercha doble tridimensional el cual está unido a un anillo interior en tensión mediante 96 cables tensionados de forma radial, tal como se muestra en la figura 14. (Marzo, n.d.)

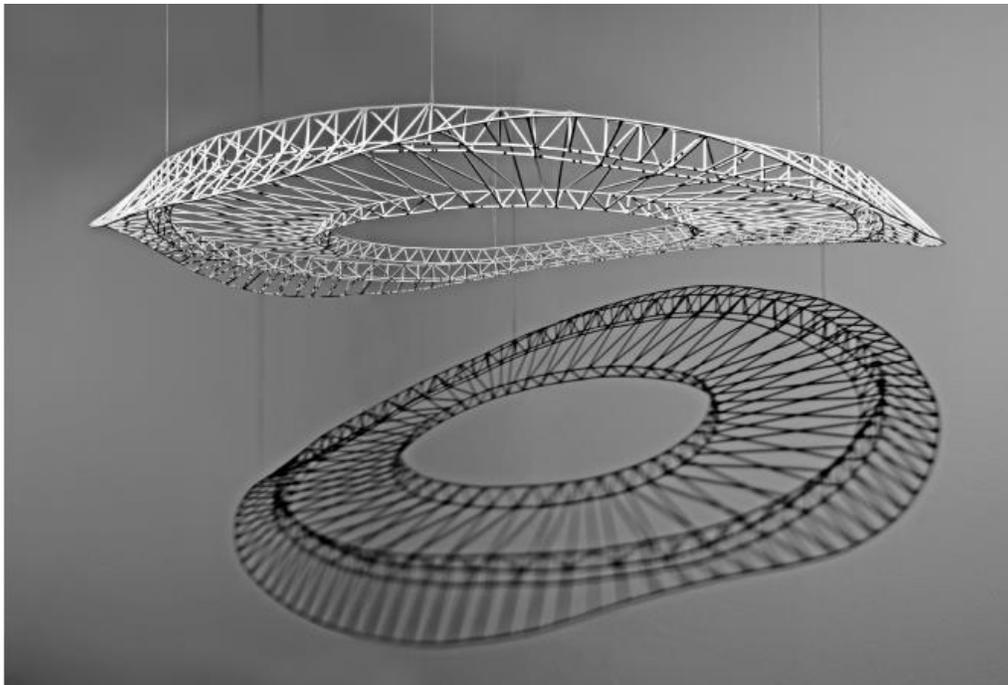


Figura 14. Propuesta Cubierta del estadio. Tomado de Marzo, n.d.)

La forma de ola caracteriza al Wanda Metropolitano siendo una cubierta que protege al 96% de las personas en las graderías del estadio abarcando así alrededor de 46500 metros cuadrados, este mide alrededor de 248 metros en su dirección corta y 286 metros en su dirección larga. (Marzo, n.d.)

El anillo exterior fue diseñado como una armadura tridimensional espacial compuesta por tubos cuadrados de acero huecos conectados mediante soldadura; esta armadura consiste en 96 elementos distribuidos en el cordón inferior y cordón superior, las dimensiones de estos elementos son de 0,7 metros y 1,2 metros respectivamente, cuentan con una altura libre de 7.0 metros entre el cordón inferior y superior (Ver figura 15). (Marzo, n.d.)

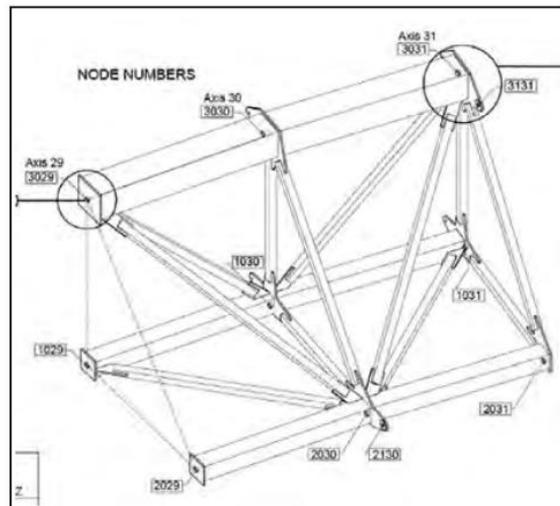


Figura 15. Estructura del anillo exterior. Tomado de (Marzo, n.d.)

La cubierta cuenta con 108 cables de acero que varían su diámetro entre los 55 y 95 milímetros, estos cables fueron configurados con cabezales en cada extremo para ser conectados unos a otros mediante elementos de acero de alta resistencia. 96 cables radiales dispuestos en zigzag lo cual genera una mayor rigidez, 8 cables de tracción inferior y 4 cables de tracción superior (Ver figura 16 y 17). (Marzo, n.d.)

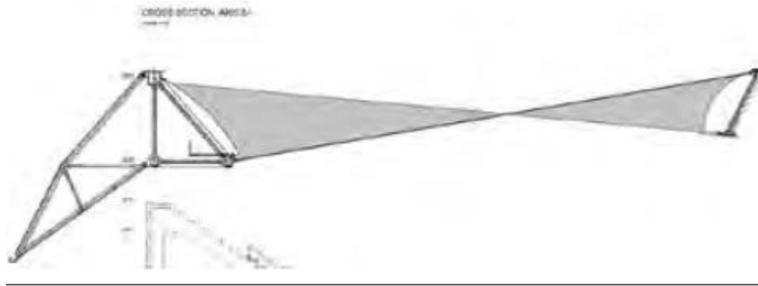


Figura 16. Vista en perfil de la estructura de la cubierta. Tomado de (Marzo, n.d.)

Los materiales utilizados en la cubierta fueron acero para el anillo exterior, interior y los cables, para la membrana se utilizó fibra de vidrio y politetrafluoroetileno, siendo una cubierta liviana con alrededor de 6000 toneladas de peso. (Marzo, n.d.)



Figura 17. Construcción Wanda metropolitano. Tomado de (Marzo, n.d.)

2.2. Torres:

Luego del domo geodésico que planteaba Fuller, su alumno Kenneth Snelson, continuó haciendo diferentes modelos de tensegridad y durante 40 años llegó a diseñar una gran cantidad de torres basadas en el principio de tensión continua y compresión discontinua (Ver figura 18). (Gomez-Jauregui, 2004a)

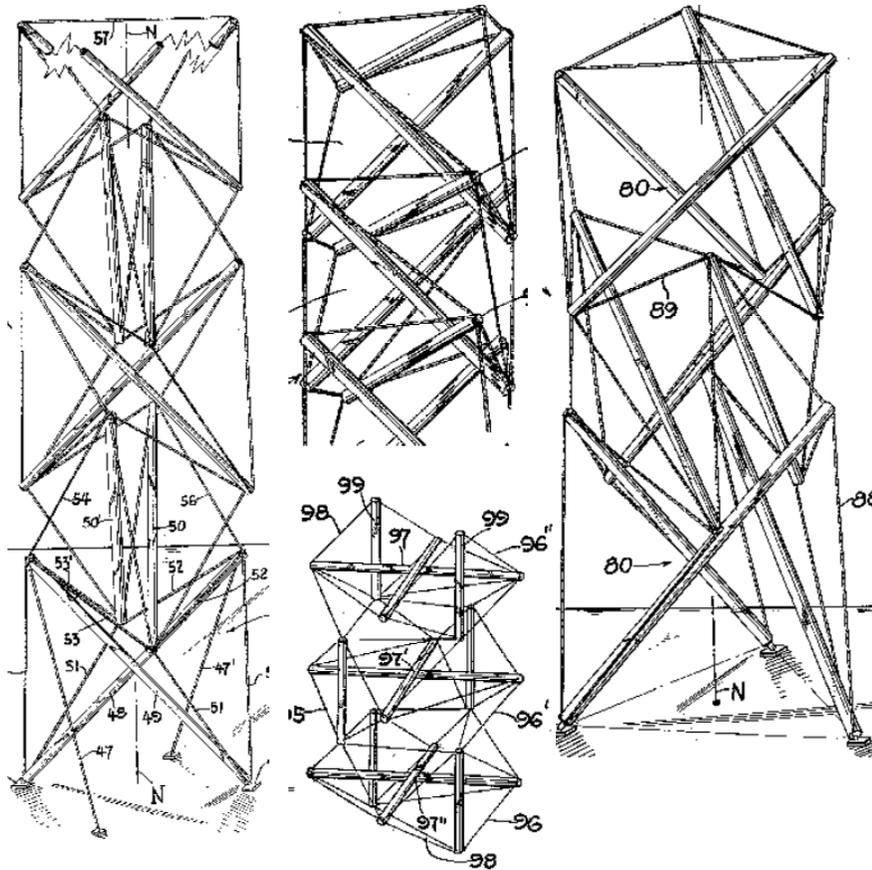


Figura 18. Propuestas de torres de tensegridad. Tomado de (Gomez-Jauregui, 2004a)

Pero no solo Snelson se enfocó en el diseño de torres también otros autores como Emmerish, Burkhardt y más recientemente Mike Schlaich, quien dirige la consultora Schlaich Bergermann and Partner, diseñó la torre más grande de tensegridad conocida en el mundo hasta la actualidad The Tower of Rostock. (Gomez-Jauregui, 2004a)

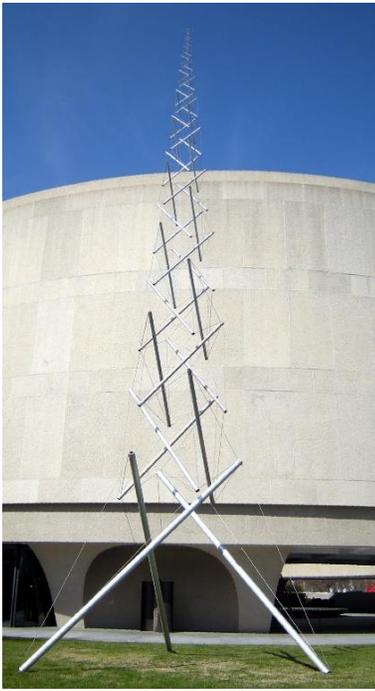
2.2.1. Torres diseñadas por Kenneth Snelson

Las torres diseñadas por Snelson tienen un enfoque artístico mostrando el gran potencial de las estructuras de tensegridad y aunque no cumplan con ninguna función estructural, estas estructuras ya tienen alturas hasta de 30 metros y deben soportar adicional a su peso propio cargas externas como lo es el viento. En la tabla 1 y en la figura 19 se presentan algunas de las torres diseñadas por Snelson, cuya preferencia por materiales se centra en el aluminio y el acero inoxidable.

Tabla 1. Resumen torres de tensegridad diseñadas por Snelson

Torre	Año	Material	Dimensiones	Localización
Needle Tower I (ver figura 19 A)	1968	Aluminio en los elementos de compresión y acero inoxidable en los elementos tensionados	18,2x6,0x6,0 m	Hirshhorn Museum & Sculpture Garden, Washington, D.C.
Needle Tower II (ver figura 19 B)	1969	Aluminio en los elementos de compresión y acero inoxidable en los elementos tensionados	30x6,0x6,0 m	Kröller Müller Museum, Otterlo, Holland
E.C. Column (ver figura 19 C)	1969-1981	Aluminio en los elementos de compresión y acero inoxidable en los elementos tensionados	14x4,0x4,0 m	Albright-Knox Art Gallery
Equilateral Quivering Tower (ver figura 19 D)	1973-1992	latón cromado cepillado para los elementos en compresión y acero inoxidable en los elementos tensionados	25,9x 10,6x9,2 m	Colección privada
Tri-Core Column (ver figura 19 E)	1974	Aluminio en los elementos de compresión y acero inoxidable en los elementos tensionados	22,4x9,02x8,5	Colección privada

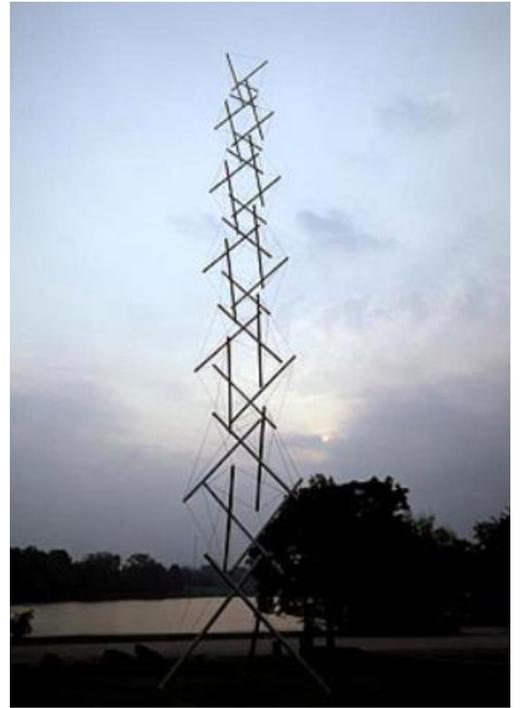
Tomado de recurso electrónico <http://kennethsnelson.net/category/sculptures/outdoor-works/>



A



B



C



D



E

Figura 19. A. Needle Tower I B. Needle Tower II C. E.C. Column D. Equilateral Quivering Tower E. Tri-Core Column.
Tomado de recurso electrónico <http://kennethsnelson.net/category/sculptures/outdoor-works/>

2.2.2. Tower of Rostock:

Diseñada por el ingeniero Mike Schlaich y calculada por el ingeniero Arturu Ruiz Villa, The Tower of Rostock se construyó con 6 módulos simplex, cada simplex cuenta con 3 tubos de acero de 273 mm de diámetro con espesores de 12 a 40 mm, 6 cables de acero de alta resistencia que se dividen en 2 grupos, 3 cables horizontales de 30 y 50 mm de diámetro y el otro grupo conformando los cables diagonales con diámetros de 50 a 75 mm, la unión de estos 6 simplex hace que The Tower of Rostock tenga una altura de 62,3 metros de altura (ver figura 20).(Gomez-Jauregui, 2004a)



*Figura 20. Rostock Tower. Tomado de recurso electrónico:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Messeturm_Rostock_gro%C3%9F.JPG*

El ingeniero Arturo Ruiz Villa menciona que las cargas que se tuvieron en cuenta para el diseño de la torre fueron cargas gravitacionales debidas al peso propio y cargas laterales debidas al viento, donde esta última fue la que se encargó de definir el pretensado de la estructura. El programa de diseño de software escogido por el ingeniero Ruiz fue Sofistik un programa de análisis geométrico no lineal el cual permite usar la teoría de tercer orden para grandes deformaciones. Es de resaltar que para elementos como las juntas de anclaje y la estructura que da forma a la

punta superior de la torre se empleó un software de análisis de elementos finitos. (Gomez-Jauregui, 2004a)

Para obtener mejores resultados en cuanto a la rigidez y los desplazamientos se debe encontrar una pretensión adecuada, en este caso la pretensión escogida fue del 30 por ciento de la capacidad máxima del cable, obteniendo así desplazamientos máximos en la punta de la torre de 800 mm. (Gomez-Jauregui, 2004a)

La estructura fue cimentada con un pilote de concreto de 8 metros de diámetro y 2 metros de altura, adicional a este se ancla al suelo con 6 pilotes prefabricados de 500 mm de diámetro, lo que le da la estabilidad suficiente a la estructura para que no se vuelque. (Gomez-Jauregui, 2004a)

La estructura por el hecho de conectar puntales consecutivos podría pensarse en que no es una tensegridad pura, “Motro estimaría que la torre de rostock se compone de una red continua de cables y tres componentes comprimidos, cada uno de ellos hecho de una cadena de seis puntales, Dado que los tres componentes en compresión no se tocan entre sí, el sistema se verificaría como una tensegridad verdadera. Sería una tensegridad clase 2, porque a los sumo dos miembros en compresión están conectados a cualquier nodo”. (Gomez-Jauregui, 2004a)

2.3. Puentes:

A través de los setenta años que se llevan investigando las estructuras de tensegridad, los puentes se conciben como una aplicación para las estructuras de tensegridad. Se han planteado diferentes modelos de puentes, en los cuales se han podido observar inconvenientes en su estabilidad y rigidez, por lo que en su gran mayoría se convirtieron en meta tensegridades debido a que debían cambiar características que hacían que no se lograra cumplir con los principios bases que definen a la tensegridad.

2.3.1. Kurlipa Bridge:

La Asociación entre Cox Rayner Architects, Baulderstone y Arup Enginners, logró consolidar la creación del puente más largo del mundo basados en los principios de tensegridad, Siendo un puente con una longitud de 128 m de largo para uso de peatones y bicicletas.

Realmente el puente solo tiene un toque de tensegridad óptica, debido a que solo los largueros horizontales se ajustan al principio de tensegridad, usando una estructura atirantada de mástiles múltiples clasificando este puente en un régimen similar al de un puente atirantado. Algunos investigadores lo clasifican como meta tensegridad, tensegridad híbrida o tensegridad falsa.

La estructura del puente se configuró de la siguiente manera: (ver figura 21)

- 18 tableros de Metaldeck.
- 20 mástiles de acero estructural.
- 16 largueros horizontales.
- 72 losas de concreto prefabricado.
- 80 cables helicoidales galvanizados.
- 252 cables de acero inoxidable.

El ensamblaje de estos elementos fue un reto bastante grande, ya que se debía tener un gran nivel de precisión en la instalación; El costo total de la estructura fue de 63 millones de dólares australianos, considerado primicia en los puentes urbanos y nominada a los premios World Architecture Awards Statement. (Micheletti & Podio-Guidugli, 2022)

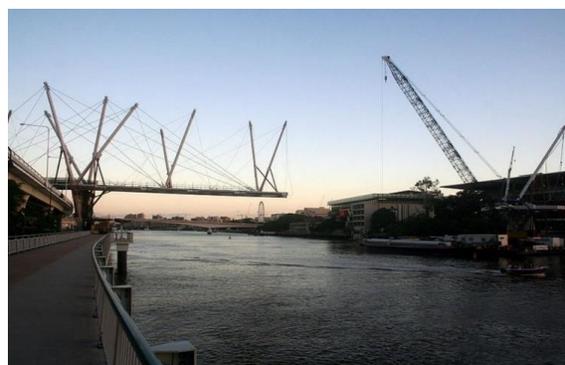


Figura 21. Puente Kurlipa. Tomado de recurso electrónico: <https://architectuul.com/architecture/kurilpa-bridge>

2.3.2. Modelos de puentes:

En la actualidad se conocen modelos que evalúan el comportamiento de la tensegridad en puentes, constituyendo diferentes geometrías y topologías, estos diseños han impactado y podrían ser tomados como referencias para futuras construcciones. En la tabla 2 y figura 22 se presentan algunos modelos recopilados de investigaciones y trabajos de grado.

Tabla 2. Resumen de modelos de puentes.

Título de la investigación	Autor	Configuración Sistema de tensegridad	Características
Modular Tensegrity Structures: The "Tor Vegata" Footbridge (ver figura 22A)	Andrea Micheletti	Luz: 32 metros L modulo: 7,2 m Barras tensión: 72 mm de diámetro; Cables: 12- 24 mm de diámetro; Barras a compresión huecas: 114- 193 mm de diámetro y espesor entre 8-12 mm.	Tor Vergata es un puente peatonal modular compuesto por 5 módulos octaédricos de 7,2 m de largo. Como características inusuales se puede observar que el puente presenta elementos de barras en tensión, estos se ubicaron en los apoyos del puente para darle una mayor rigidez. Adicional a esto el autor de esta investigación, propuso darle una forma de banana al puente con el fin de aumentar la rigidez geométrica y reducir los desplazamientos máximos. El pretensado se realizó en dos etapas, inicialmente se le dio el pretensado a cada módulo de forma individual y luego se realizó el pretensado de los cables suplementarios que conectan a toda la estructura.

<p>A study of a tensegrity structure for a footbridge. (ver figura 22B)</p>	<p>C Pleşcan, M Conţiu and A Dósa Department of Civil Engineering, Transilvania University of Brasov, Romania</p>	<p>Luz: 36 metros Área transversal de los cables y barras son de 2641 y 4617 mm respectivamente. Los elementos a compresión son huecos.</p>	<p>Es un modelo de puente en forma de arco que soportara los elementos del tablero de forma suspendida conectados mediante cables, los autores analizaron 3 hipótesis: 1) Las barras son rectas y los ejes de las barras son concurrentes. 2) Las fuerzas externas son aplicadas en los nodos. 3) Las barras se encuentran articuladas en los nodos. Con estas hipótesis evaluaron el comportamiento del puente bajo cargas estáticas obteniendo los resultados para desplazamientos y momentos, bajo una carga distribuida en toda la luz y una carga aplicada en el centro de la luz.</p>
<p>Tensegrity Bridge with Prestressed Deck. (ver figura 22C)</p>	<p>Bruno Briseghella, About Luigi, Wenjin Huang y Tobia Zordan</p>	<p>Luz: 30 metros, Cable principal: 10 D 15,2 mm, Cable diagonal: D25 mm, Cable transversal: 25 mm</p>	<p>El diseño cuenta con una estructura de tensegridad en forma de arco y losa en forma de arco, el sistema de tensegridad está conformado por dos cables principales, uno en la parte inferior y otro en la parte superior, 5 puntales en cada lado, cables diagonales que conectan los puntales a las vigas trasversales y cables transversales que unen los dos arcos. Los autores realizan el análisis mediante el programa de elementos finitos ANSYS, comparando el comportamiento en la frecuencia de la estructura bajo cambios en las propiedades de los elementos que conforman el puente.</p>

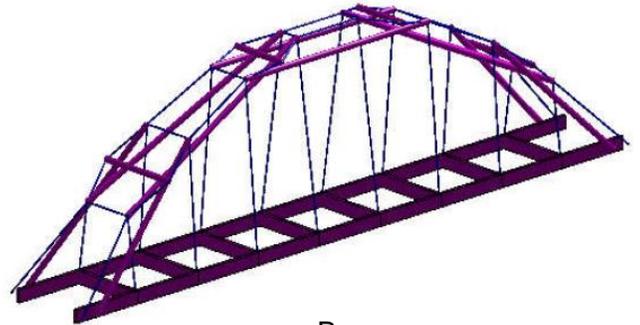
<p>Design of an Experimental Tensegrity Pedestrian Bridge. (ver figura 22D)</p>	<p>PetrTeja, Alena Tejová1. Jiří Kolísko'.c</p>	<p>Cuenta con tres luces de 105 metros, barras, cables y membranas</p>	<p>Su bloque principal tiene una configuración de modulo pentagonal, compuesto por barras, cables y membranas que dan un toque traslucido a la estructura, estas últimas son usadas en sistemas de tensegridad como una variante de los cables, como se pudo observar en el Wanda metropolitano donde también se usaron cables y membranas en la cubierta.</p>
<p>Tensegrity modules for pedestrian bridges. (ver figura 22F)</p>	<p>Landolf RHODE-BARBARIGOS* Nizar BEL HADJ ALI", René MOTRO and Ian F.C. SMITH</p>	<p>Luz:20 metros, el área de las barras varía entre el módulo Cuadrado, modulo Pentágono y modulo Hexágono, las áreas transversales que configuran el sistema se mencionaran en el mismo orden que se nombraron los módulos anteriormente. Área barras:9.23, 10.34, 11,10 cm² Área cables X: 2.83, 3.0, 3.0 cm², Área cables modulo: 1.0, 3.0, 3.0.</p>	<p>Su configuración se obtiene a partir de 4 módulos de tensegridad, en este análisis los autores estudiaron el comportamiento dinámico y estático, del módulo rectangular, pentagonal y hexagonal. En este artículo se realizó análisis paramétrico de la estructura definiendo así la geometría del modelo, realizaron los análisis de pre-esfuerzo, establecieron las dimensiones de los elementos en el diseño bajo la normativa suiza y calcularon la eficiencia estructural del modelo, definiendo que los módulos pentagonales presentaban los mejores resultados.</p>
<p>Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales. (ver figura 22E)</p>	<p>Jaswant Israel Cobos Cobos</p>	<p>Luz: 30 metros. Barras entre:175- 406 mm de diámetro, 8.86 - 11.8 mm de espesor. Cables entre: 26 y 56 mm de diámetro.</p>	<p>El autor realizo el análisis partiendo de la búsqueda de forma, encontrando un modelo estable basado en el pre-esfuerzo de los cables, realizo el análisis estático y el diseño de los elementos estructurales usando el programa de análisis SAP2000. Para la búsqueda de forma busco unir varios módulos, que es una de las características que se puede usar en las estructuras de tensegridad,</p>

			en este caso el autor baso su modelo en módulos de 6 barras y 24 cables, módulos de 8 barras y 28 cables, para el final escoger un modelo para el puente de 11 barras y 44 cables, con 20 nodos libres. Obtuvo resultados de pre-esfuerzo y deformaciones debajo del límite establecido.
--	--	--	--

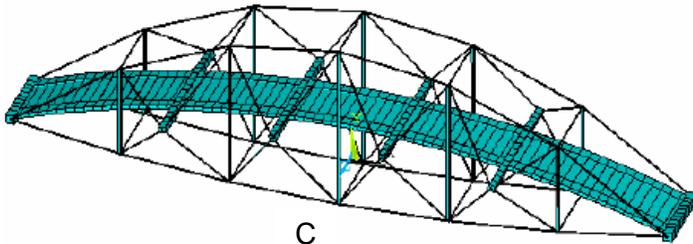
Tomado de (Cobos, 2018)(Y. Wang et al., 2020)(Tej et al., 2014)(Briseghella et al., 2010)(Rhode-Barbarigos et al., 2010)(Micheletti, n.d.)



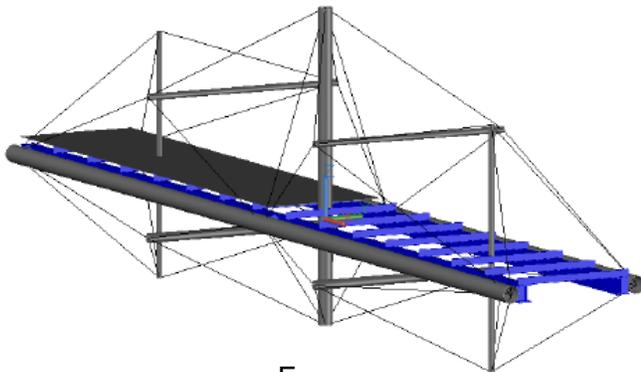
A



B



C



E



D



F

Figura 22.A) Modular Tensegrity Structures: The "Tor Vegata" Footbridge. Tomado de (Micheletti, n.d.).B) A study of a tensegrity structure for a footbridge. Tomado de (Pleșcan et al., 2018).C) Tensegrity Bridge with Prestressed Deck. Tomado de (Briseghella et al., 2010).D) Design of an Experimental Tensegrity Pedestrian Bridge. Tomado de (Tej et al., 2014).E) Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales. Tomado de (Cobos, 2018).F) Tensegrity modules for pedestrian bridges. tomado de (Rhode-Barbarigos et al., 2010)

2.4. Estructuras desplegadas:

Como una aplicación adicional en la ingeniería, las estructuras de tensegridad tienen la capacidad de desplegarse debido a su característica principal, la cual es conectar elementos comprimidos aislados, mediante elementos continuos tensionados. Al no realizar una pretensión inicial a estos elementos, la estructura pierde su rigidez, los elementos comprimidos quedan libres y los elementos que soportan la tensión quedan destensados. Por lo cual, si se varía el estado de pretensión en algunos cables, la estructura podría plegarse o desplegarse, según se requiera. (Mitxelena, 2014)

El proceso de desplegado también se puede realizar variando la longitud de las barras, o haciendo una combinación entre el cambio de longitud de barras y de cables de forma sincronizada controlando los grados de libertad que se le da a la estructura tanto de forma plegada y desplegada. (Mitxelena, 2014)

A pesar de que esta aplicación es viable, muestra algunos problemas en su concepción debido a su complejidad geométrica y desplegando, estos problemas han sido investigados por ingenieros como Landolf Rhode Barbarigos y Valentin Gomez, quienes han desarrollado prototipos de estructuras desplegadas aplicando el principio de tensegridad. (Mitxelena, 2014) (Sultan, n.d.-a)

Landolf Rhode Barbarigos en (2012), presenta el análisis, diseño y construcción de un puente peatonal de 16 metros de longitud compuesto por 4 módulos pentagonales, que activan su movimiento con 70 accionadores (ver figura 23). Para el diseño de cada módulo se contempló en su análisis un estado estático, un estado dinámico y el estado en movimiento de la estructura, de esta forma se definieron los materiales y dimensiones de los elementos que configuran cada módulo del puente. (Mitxelena, 2014) (Sultan, n.d.-a)

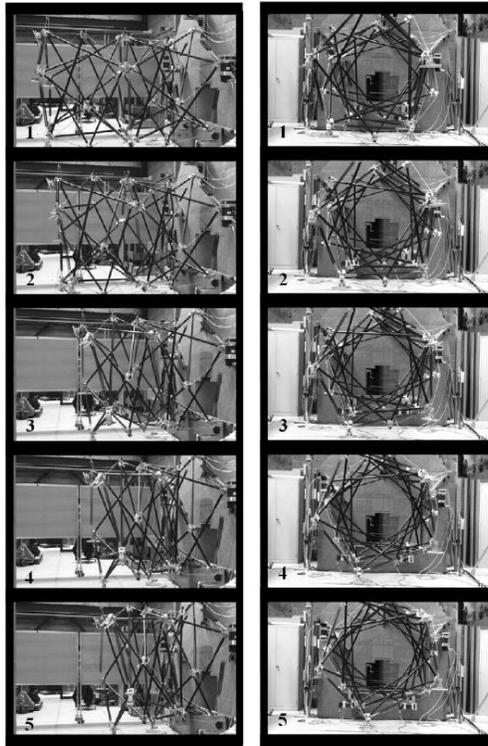


Figura 23. Estructura Rollow-hope desplegable. tomado de (Rhode-Barbarigos, 2012)

Por otra parte, el ingeniero Valentín Gómez (2016), toma como base una estructura de tensegridad estudiada por varios autores conocida como Mallas de doble capa o Double-Layer Tensegrity grids (DLTGs sus siglas en ingles) y propone una nueva estructura en la que incluye la propiedad de despleabilidad, conocida como Mallas de doble capa desplegable o Deployable Double-Layer Tensegrity grids (DDLTGs sus siglas en ingles). La estructura es capaz de cubrir un área de 16 m^2 desplegada y cuando se contrae ocupa un espacio de $0,28 \text{ m}$ de radio y 1.70 de altura, los materiales que se utilizaron en el modelo son barras de acero al carbón S235JR usando un perfil tubular circular HSS $26,9 \times 3$, en cuanto a los cables uso acero de alta resistencia galvanizado usando alambres de acero de 7×19 , adicional a esto es importante destacar que este modelo tiene una gran facilidad de montaje, por lo que se podría usar en estructuras temporales (ver figura 24). (Gomez, 2016)

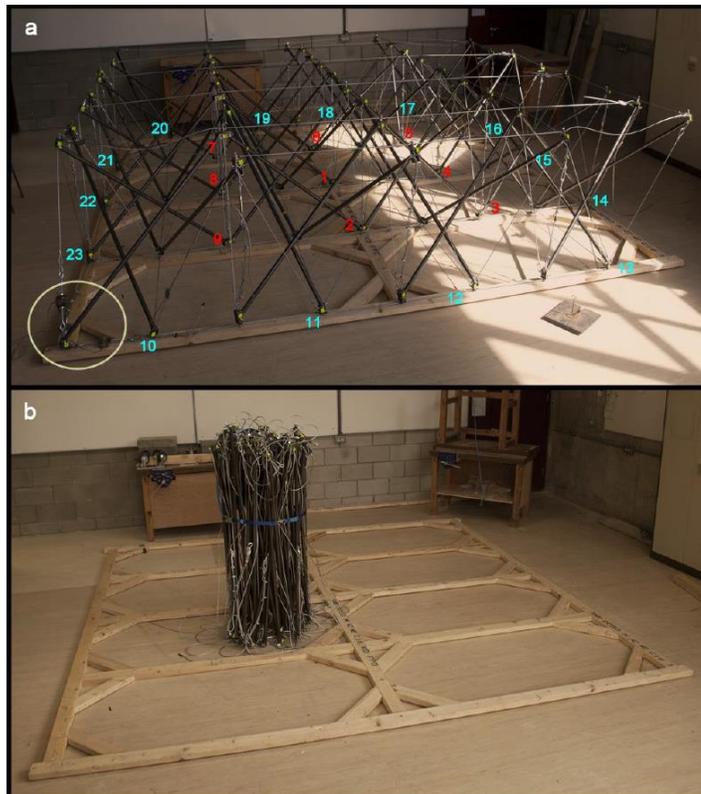


Figura 24. Sistema DDLTG. a) Desplegado b) Plegado. tomado de(Gomez, 2016)

En esta investigación no se evaluarán los problemas que presentan las estructuras de tensegridad desplegable, ya que no hace parte del alcance del trabajo de grado.

3. Características de las estructuras de tensegridad.

En la sección 2 “Aplicación de las estructuras de tensegridad”, se observó que este tipo de configuraciones cuentan con parámetros específicos para ser clasificados como tensegridad, adicional a esto se mostraron diferentes modelos adoptados en análisis, diseño y construcción. Por lo que ya conociendo su origen, antecedentes y aplicación en el presente capítulo se complementará en lo relacionado a sus características, ventajas, desventajas y materiales comúnmente usados. en este capítulo también se dará una clasificación a las estructuras previamente mostradas con el fin de presentar de manera coherente que estructuras pueden ser consideradas como de tensegridad pura o tensegridad falsa

La viabilidad de un sistema estructural depende de sus características, y esto no es una excepción para las estructuras de tensegridad, múltiples autores consideran las estructuras de tensegridad como un nuevo sistema estructural diferente a los sistemas convencionales, que permite obtener excelentes beneficios a la hora de dar una solución a un problema estructural; pero no todos los autores están de acuerdo con que la tensegridad deba aplicarse a la ingeniería civil debido a que consideran que lo ofrecido por la tensegridad, lo podrían adquirir de otros modelos estructurales. Es por esta razón que conocer las características del sistema estructural de tensegridad tiene una gran importancia, con el fin de definir que parámetros se deben tener en cuenta antes de modelar una estructura basada en este principio.

3.1. Características, ventajas y desventajas:

3.1.1. Características:

Investigadores como Ariel Hanaor y Valentín Gómez, han desarrollado trabajos donde reflejan la realidad de las estructuras de tensegridad, su potencial y también sus dificultades. Como características principales de las estructuras de tensegridad se identifican los siguientes conceptos:

- La optimización del material hace que este tipo de estructuras sean muy livianas, debido a que solo se requieren elementos en las líneas de acción de las cargas, por lo que son muy resistentes en comparación con estructuras de peso similar, logrando que la eficiencia de este tipo de estructuras sea bastante alta. (Mitxelena, 2014) (Gomez-Jauregui, 2004a) (Juan & Mirats Tur, 2008)
- No tiene elementos redundantes, aunque en caso de que un elemento falle, otro elemento tiene la capacidad de desempeñar su papel y hacer que la estructura siga funcionando. Adicional a esto se pueden agregar más tendones para que la estructura presente una mayor estabilidad y evitar las fallas de los elementos, este principio es usado en estructuras inteligentes. (Gomez-Jauregui, 2004^a) (Juan & Mirats Tur, 2008)
- A diferencia de los sistemas convencionales las estructuras de tensegridad no dependen de la gravedad para llegar al equilibrio, son estructuras que encuentran su auto estabilidad gracias a la pretensión que se le aplica, haciéndolas estables en cualquier posición incluso en el aire. (Gomez-Jauregui, 2004^a) (Deepak Bansod et al., 2014).
- La mayoría de los sistemas de tensegridad funcionan como pares de espejos. (Gomez-Jauregui, 2004a)
- Es posible construir estructuras de tensegridad complejas a partir de módulos de tensegridad elementales mástiles, rejillas, cuerdas, etc. (Gomez-Jauregui, 2004a) (Deepak Bansod et al., 2014)
- Su capacidad de carga aumenta a medida que aumenta el pretensado, por lo que el grado de tensión de los componentes pretensados es directamente proporcional a la sección transversal de los elementos, lo que hace que ocupen un mayor espacio y aumente su peso (Gomez-Jauregui, 2004^a) (Deepak Bansod et al., 2014)
- Los elementos comprimidos no presentan estados límites de pandeo ni de torsión, debido a que son discontinuos las líneas de acción de las cargas son específicas y cortas. (Gomez-Jauregui, 2004a)

- Funcionan de forma sinérgica, es decir, su comportamiento no puede predecirse considerando el comportamiento de cualquiera de sus componentes por separado. (Gomez-Jauregui, 2004a)
- La rigidez de la estructura depende del montaje empleado y de sus materiales, pueden ser estructuras flexibles o rígidas de gran resistencia según se requiera. (Gomez-Jauregui, 2004a)
- La respuesta carga-deformación de toda la estructura de tensegidad no es lineal, debido a que la rigidez aumenta rápidamente con el aumento de carga, como en un puente colgante, adicional a esto funcionan fuera de la teoría de pequeñas deformaciones. (Gomez-Jauregui, 2004a) (Deepak Bansod et al., 2014)
- Bajo cargas dinámicas, este tipo de estructuras tiene la capacidad de responder en conjunto, debido a que la vibración hace que la tensión se redistribuya en toda la estructura en poco tiempo. (Gomez-Jauregui, 2004a) (Deepak Bansod et al., 2014)

A medida que las investigaciones han avanzado el estado del conocimiento de estas estructuras, las ventajas y desventajas también han tenido evolución, algunas desventajas han sido solucionadas y se han evidenciado características que no son del todo beneficiosas, esto se debe en gran medida a la evolución de la tecnología que ha proporcionado una mayor facilidad en el análisis estructural permitiendo que este tipo de estructuras se desarrollen de forma más sencilla que hace 30 años. A continuación, se evidencian las ventajas y desventajas (Mitxelena, 24) (Gomez-Jauregui, 2004^a) (Juan & Mirats Tur, 2008) (Deepak Bansod et al., 2014) (Gomez-Jauregui et al., 2023) que presentan actualmente las estructuras de tensegidad.

3.1.2. Ventajas:

- Este tipo de estructuras usan patrones inusuales en sus miembros longitudinales lo que genera que puedan lograr una gran resistencia con una masa más pequeña.
- La estabilidad de la estructura depende de su propia configuración y topología, no de apoyos externos.

- No hay puntos críticos de debilidad.
- Debido a la disposición del espacio y los elementos de corta longitud, no se presentan estados límites torsionales ni de pandeo.
- Las fuerzas transmitidas y los elementos se alinean de forma precisa, tomando el camino más corto para soportar el esfuerzo.
- Son capaces de transmitir cargas de vibración rápidamente.
- Tienen la capacidad de crear sistemas complejos, uniendo módulos de tensegridad individuales estables, lo que implica que se pueda pensar en una extensión infinita de una pieza ensamblada.
- Cuentan con la propiedad de despleabilidad, esto se debe a que los elementos comprimidos se encuentran separados y sus miembros están conectados mediante rótulas, facilitando esta capacidad.
- Al ser una estructura que requiere de pretensión para su estabilidad, permite al diseñador controlar la rigidez, por lo que se puede modificar fácilmente el comportamiento de la estructura bajo fuerzas externas.

3.1.3. Desventajas:

- En algunos modelos las estructuras de tensegridad debido a su complejidad se vuelven menos ligeras que las estructuras convencionales. Esto se debe a que, al querer controlar las deformaciones de la estructura, se aumentan las dimensiones de la sección transversal de los elementos que la conforman, lo que hace que esta característica principal pueda verse afectada.
- Las barras empiezan a chocar entre sí y presentan congestión cuando las estructuras son grandes.
- Deformaciones altas y rigidez geométrica baja. Las estructuras de tensegridad no presentan miembros comprimidos consecutivos, generando que el recorrido de las cargas sea en forma de zigzag.
- En construcciones de gran tamaño, resulta difícil usar fuerzas de pretensado lo suficientemente altas para que la estructura sea rígida, como consecuencia la estructura no pueda soportar las cargas críticas para las que fue diseñada.

- Al no tener un correcto control en el despliegue esta capacidad se puede ver afectada en los cables, ya que se pueden enredar generando que la estructura pierda toda capacidad estructural, tanto es su estado comprimido o expandido.

3.1.4. Materiales comúnmente usados:

Los materiales de construcción con los que se evalúan los sistemas de tensegridad deben tener excelentes propiedades mecánicas bajo carga axial, puntales a compresión y cables a tensión.

Para los puntales se ha podido observar el uso de materiales como el acero, la madera y la guadua. Para los cables por lo general se evidencia el uso del acero, ya que presenta excelentes propiedades a tensión. Sin embargo, las estructuras de tensegridad dan para evaluar el comportamiento de diferentes materiales como el FRP a compresión y usarlo, así como puntal.

3.2. Tensegridad pura y tensegridad falsa (metatensegridad):

Como se mencionó anteriormente estas estructuras se pueden clasificar como tensegridad pura o tensegridad falsa (metatensegridad), esto se debe a que las estructuras conocidas como metatensegridad presentan características estructurales que no van relacionadas con el concepto totalmente puro de la tensegridad, por lo que es necesario diferenciar estos dos grupos. Usar estructuras de metatensegridad permite obtener un mejor comportamiento estructural y así ampliar su campo de aplicación, por esta razón la mayoría de las estructuras concebidas hasta la fecha son estructuras de metatensegridad. Como características diferenciales entre estos dos grupos de estructuras se puede evidenciar que:

- Las tensegridades puras tienen una mejor claridad en los esfuerzos y sencillez, pero limita la rigidez.

- En las estructuras de metatensegridad se evidencia un mejor comportamiento en el recorrido de las cargas, sin embargo, aún sigue presentando un comportamiento no deseado en algunas estructuras.
- En las metas-tensegridades la construcción y el control de la geometría se hace más sencillo, debido a que se permiten realizar conexiones entre barras, mientras que en las tensegridades puras esto no es viable.

De esta forma dependiendo de las necesidades del diseño se puede elegir que cualidades tendrá la estructura. (Mitxelena, 2014)

Por otra para identificar si la estructura es de tensegridad pura se debe tener en cuenta que:

- Basados en la definición ampliada de Motro, para que una estructura sea de tensegridad todos los elementos comprimidos deben estar dentro del sistema, es decir no pueden hacer parte del límite, ya que este se encuentra definido por las líneas de tensión, constituidas por cables.
- La estructura debe estar en auto equilibrio estable, es decir no depende de ninguna fuerza externa ni de los apoyos para lograr el equilibrio, esta se encuentra en equilibrio aun en la órbita.

También se debe tener en cuenta que en la tensegridad pura las barras conectan en los nodos, únicamente con otros cables, sin embargo, al conectar en los nodos un número mayor de barras hace que pierda pureza, por lo que se empieza a clasificar como metatensegridad. Esta clasificación se conoce como tensegridades de tipo $K > 1$, la cual consiste en evaluar el número de barras que parten de un mismo nodo, lo que significa que, si a un nudo llegan más de 1 barra, la tensegridad se clasificaría de esa forma, por ejemplo, si a un nudo llegan 2 barras sería tensegridad de tipo $K = 2$, si llegaran 3 barras sería de tipo $K = 3$. (Gomez-Jauregui et al., 2023)

En la tabla 4 se puede observar la clasificación de las estructuras mostradas en el capítulo “Aplicación de las estructuras de tensegridad”, con el fin de dar al lector una perspectiva de estructuras de tensegridad pura o metatensegridad.

Tabla 3. Clasificación de las aplicaciones mostradas en el capítulo 1.

Estructura	Tenseguridad pura	Metatenseguridad	Observaciones
Snowdon Aviary			No se puede clasificar entre estos dos grupos, debido a que no es realmente una estructura de tenseguridad.
MOOM tensegritic 55embran structure.		X	Como se indicó, la estructura está delimitada por elementos de compresión y adicional a esto su estabilidad depende de los apoyos.
White Rhino I	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad
White Rhino II	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad
Estadio de la ciudad de la plata		X	Su anillo perimetral de compresión y que su estabilidad depende de este soporte lo convierte en metatenseguridad.
Georgia Dome		X	Su anillo perimetral de compresión y que su estabilidad depende de este soporte lo convierte en metatenseguridad.
Wanda Metropolitano		X	Su anillo perimetral de compresión y que su estabilidad depende de este soporte lo convierte en metatenseguridad.
Needle Tower I	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad pura.
Needle Tower II	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad pura.

E.C. Column	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad pura.
Equilateral Quivering Tower	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad pura.
Tri-Core Column	X		Cumple con los requisitos de tenseguridad pura.
Tower of Rostock		X	Algunos autores la definen como tenseguridad pura, pero realmente es una tenseguridad de tipo $K > 1$, debido a que en los nodos presenta conexiones de más de 1 barra.
Kurlipa Bridge		X	Tenseguridad óptica.

Información tomada de fuente propia

El hecho de que se definan dos tipos de tenseguridad se debe a que el análisis de estas estructuras es complejo, por lo que se deben interpretar múltiples parámetros de diseño para llegar a una solución viable, como lo menciona Landolf Rhode Barbarigos, “Un análisis completo de un sistema de tenseguridad comprende tres pasos: Búsqueda de forma, Implementación de auto esfuerzo y el estudio del comportamiento bajo cargas externas.” Es decir, que es necesario hacer inicialmente un análisis de equilibrio interno y luego comprobar que con las cargas externas este estado de equilibrio se siga cumpliendo, pero adicional a estos análisis de carga es necesario encontrar una forma que sea estable. (Rhode-Barbarigos et al., 2010)

4. El problema de la búsqueda de forma.

En sistemas estructurales tradicionales encontrar una estructura que sea estable, puede llegar a ser más sencillo, debido a que, estos sistemas se encuentran estandarizados es posible escoger parámetros donde previamente conocemos algunas de las propiedades que nos permiten acercarnos a la estabilidad de la estructura. Para los sistemas de tensegridad esto es diferente y se hace más complejo, debido a que cada tipología tiene una relación de esfuerzos completamente diferente y dependiendo del grado de pretensión que se aplique, esta puede tomar cualquier patrón estable o inestable, es decir el pretensado y la configuración de los miembros es interdependiente entre sí. (Mitxelena, 2014)(J. Y. Zhang & Ohsaki, 2015)

A partir de lo mencionado se entiende que el problema de diseñar y construir estructuras de tensegridad comienza con el problema de búsqueda de forma, este consiste en encontrar una configuración de equilibrio estable bajo un conjunto específico de combinaciones de fuerzas externas y condiciones de contorno partiendo de una configuración arbitraria. Con este procedimiento es posible reflejar la condición de auto equilibrio estable bajo el pretensado de los elementos. (Aloui et al., 2018)

El auto esfuerzo y la estabilidad son conceptos fundamentales para emplear un sistema de tensegridad, por lo que el problema de búsqueda de forma se puede solucionar al encontrar una configuración de auto esfuerzo estable que permita el diseño de estas estructuras. En (Gomez-Jauregui et al., 2023), los autores mencionan que para encontrar una solución al problema de búsqueda de forma se podría ampliar a una clasificación de tres grupos:

- Búsqueda de fuerza, En este procedimiento se conoce previamente las conectividades de los miembros como las coordenadas locales de la estructura y se realiza una búsqueda numérica para determinar el grado de auto esfuerzo con el fin de que la estructura sea estable.
- Búsqueda de forma, compuesto por métodos como densidad de fuerza, relajación dinámica, matrices iterativas, elementos finitos, algoritmos evolutivos, optimización.
- Búsqueda de conectividades de miembros, en este grupo se conocen las posiciones nodales y se establece un procedimiento de búsqueda de conectividades de los

miembros y del grado de auto esfuerzo capaz de asegurar el auto esfuerzo y la estabilidad de la estructura.

La búsqueda de forma, la búsqueda de fuerza y la búsqueda de conectividades por lo general se han estudiado por separado, pero al trabajar estos tres parámetros como variables de diseño en conjunto, es posible ampliar las soluciones del problema de búsqueda de forma en estructuras de tensegridad, solucionando además de esto la conectividad de los miembros, posiciones nodales y densidad de fuerza en los miembros. (Xu et al., 2018)

A través de los años de investigación se han planteado múltiples métodos de búsqueda de forma, donde se reconoce que para que una estructura de este tipo sea de interés, la distribución de tensiones debe ser admisible y el sistema debe ser estable (Micheletti & Podio-Guidugli, 2022), por lo que se han realizado análisis en dos clasificaciones de búsqueda de forma cinemática y estática. En el capítulo 4.1 y 4.2 se presentan los métodos de búsqueda de forma para encontrar soluciones a las configuraciones para estructuras de tensegridad. (Juan & Mirats Tur, 2008)

Para (Y. Wang et al., 2021) Una estructura de tensegridad es determinada principalmente por tres factores, topología (es decir las conectividades de los miembros), geometría (es decir, coordenadas nodales: x , y , z) y densidades de fuerza (es decir fuerzas de los miembros divididos por su longitud. En un proceso de búsqueda de forma, la topología se da por adelantado y no cambia durante el proceso, y la geometría y las densidades de fuerza se desconocen, por tanto, se trata como parámetros de diseño para lograr una estructura de tensegridad estable. Se debe tener en cuenta que, en la búsqueda de forma, hay miembros que deben actuar como cables y miembros que deben actuar como puntales, después de determinarse su función, esta no puede cambiar y todos los miembros en la estructura obtenida deben tener densidades de fuerza distintas de cero. En un proceso de búsqueda de topología, no se conoce con anterioridad que miembros deberían actuar como cables y que miembros deberían actuar como puntales, por lo tanto, es necesario determinarlos mediante el procedimiento de búsqueda. En este procedimiento las densidades de fuerza de los miembros pueden ser cero con el fin de que la topología pueda cambiarse, es decir, si se evidencia un miembro con densidad de fuerza cero, este puede eliminarse y de esta forma la topología cambia. Por lo tanto, la principal diferencia entre la

búsqueda de forma y la búsqueda de topología está en los parámetros dados y las variables de diseño. Se puede observar que tanto la búsqueda de forma como la búsqueda de topología son problemas acoplados; pero la diferencia es que en la búsqueda de forma la determinación geométrica se combina con la determinación de densidades de fuerza, mientras que en la búsqueda de topología la determinación de esta se combina con la determinación de las densidades de fuerza. (Y. Wang et al., 2021)

4.1. Métodos de búsqueda de forma cinemáticos:

Los métodos cinemáticos se pueden identificar partiendo de una hipótesis en la cual uno de sus elementos (puntales o cables), debe mantener la longitud constante y el otro puede variar esta propiedad hasta alcanzar su máximo o mínimo (mínimo para barras y máximo para cables), este procedimiento se puede relacionar implícitamente con la escultura Proto tensegrid de Karl Loganson, el cual estableció el equilibrio de la estructura variando la longitud de los cables, sin definir con exactitud un estado de pretensión. A continuación, se presentan las propiedades, fórmulas y conceptos básicos de algunos de los métodos cinemáticos. (Tibert & Pellegrino, 2003)

4.1.1. Soluciones analíticas:

El método analítico establece parámetros enfocados en la geometría donde define las coordenadas de cada nodo y luego modifica las expresiones de longitud de los puntales basado en la configuración arbitraria de la longitud de los cables. (Juan & Mirats Tur, 2008)

Nomenclatura:

R	Radio
H	Altura
θ	Ángulo de giro
v	Numero de aristas del polígono
L_c	Longitud de cable

L_s longitud de puntal

Tomando como ejemplo la figura 30 la cual consta de cables a lo largo de los bordes de un prisma regular, en donde se observa que se conectan los vértices del polígono superior con los vértices del polígono inferior a través de puntales. La estructura de tensegridad se obtiene basada en la rotación de los polígonos superior e inferior (los polígonos permanecen en el plano XY mientras giran), esta rotación es dependiente del valor de v y del desplazamiento de los vértices conectados al puntal. (Tibert & Pellegrino, 2003)

Como se menciona en (Tibert & Pellegrino, 2003) Connelly y Terrel, aprovecharon la simetría de este ejemplo para definir una geometría compacta, por lo que plantearon para la figura 3 los siguientes parámetros:

- El cable lateral 1-2, es vertical en la configuración inicial
- El ángulo entre los extremos del puntal es $2\pi j/v$.

Donde j es un número entero menor que v . Las coordenadas de los nodos del 1 al 5 son las siguientes.

$$P_1 = [R, 0, 0] \quad (4.1.1-1)$$

$$P_2 = [R\cos(\theta), R\sen(\theta), H] \quad (4.1.1-2)$$

$$P_3 = [R\cos(\theta + \frac{2\pi j}{v}), R\sen(\theta + \frac{2\pi j}{v}), H] \quad (4.1.1-3)$$

$$P_4 = [R\cos(\theta + \frac{2\pi j}{v}), -R\sen(\theta + \frac{2\pi j}{v}), 0] \quad (4.1.1-4)$$

$$P_5 = [R\cos(\theta + \frac{2\pi j}{v}), R\sen(\theta + \frac{2\pi j}{v}), 0] \quad (4.1.1-5)$$

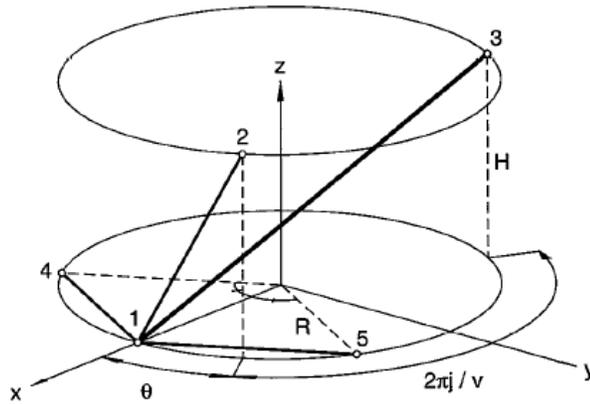


Figura 25. Estructura poligonal. Tomada de de (Tibert & Pellegrino, 2003)

La búsqueda de forma cinemática se obtiene a partir del cuadrado de las longitudes del cable lateral 1-2 y del puntal 1-3.

$$L_c^2 = 2R^2(1 - \cos(\theta)) + H^2 \quad (4.1.1-6)$$

$$L_s^2 = 2R^2 \left(1 - \cos \left(\theta + \frac{2\pi j}{v} \right) \right) + H^2 \quad (4.1.1-7)$$

La ecuación 4.1.1-7 se puede reescribir como:

$$L_s^2 = 4R^2 \sin \left(\theta + \frac{\pi j}{v} \right) \sin \left(\frac{\pi j}{v} \right) + L_c^2 \quad (4.1.1-8)$$

Por lo que para cada longitud de cable l_c , la longitud del puntal l_s es maximizada por:

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{v} \right) \quad (4.1.1-9)$$

Basados en la formulación, se puede observar que el método es bastante sencillo, sin embargo, para casos donde la configuración no sea simétrica este procedimiento se vuelve inválido, ya que no cuenta con simplicidad cuando hay mayor número de variables, esto hace que describir la configuración de una estructura de tensegridad se convierta en algo demasiado complejo usando este método.

4.1.2. Programación no lineal:

Para este método se realiza un análisis de minimización restringida, donde se contempla un sistema en el cual se conoce inicialmente la conectividad de los elementos y las coordenadas nodales, de esta forma se varía la longitud de algunos puntales escogidos, manteniendo relaciones de longitud, hasta llegar a la condición de equilibrio en el sistema. (Tibert & Pellegrino, 2003)

Nomenclatura:

S(X) Función de energía de deformación total

E_i Modulo de Young del miembro i

L_i Longitud del miembro i

A_i Área del miembro i

El problema de minimización se puede ver como:

$$f(x, y, z) \tag{4.1.2-1}$$

$$g_i(x, y, z) = 0 \text{ for } i = 1, \dots, n$$

Donde la función f es la longitud negativa de uno de los puntales y la función g_i representa la longitud del cable. Algunos autores aplicaron este método para encontrar diferentes configuraciones de tensegridad, por ejemplo, como lo menciona (Tibert & Pellegrino, 2003) Pellegrino lo usó para encontrar el prisma triangular y el tetraedro truncado. Con herramientas de análisis más avanzadas de la década pasada (Ohsaki & Zhang, 2015) proporcionaron el análisis de torres de tensegridad usando el método de programación no lineal usando materiales ficticios resolviendo problemas de optimización.

El enfoque de programación no lineal para encontrar formas utilizando materiales ficticios, se puede dividir en tres secciones tal como nos lo presentan en (Ohsaki & Zhang, 2015)

4.1.2.1. Problemas de optimización y condiciones de equilibrio:

Como se mencionó anteriormente el problema de búsqueda de forma se adopta como un problema de minimización en función de las coordenadas nodales. Inicialmente se analiza la estructura de tensegridad con un material ficticio para generar coordenadas nodales y fuerzas axiales que permitan obtener una condición de auto equilibrio, con un control adecuado se puede llevar este material ficticio previamente escogido, al material real sin que las propiedades de conectividad y fuerza axial de la estructura de tensegridad escogidas anteriormente cambien luego de que se les asigna. (Ohsaki & Zhang, 2015)

4.1.2.2. Estabilidad del estado de auto equilibrio:

En la última década los problemas de minimización para resolver problemas de búsqueda de forma han sido usados con frecuencia, pero la condición de estabilidad del estado de auto equilibrio aún se puede seguir investigando. (Ohsaki & Zhang, 2015) basados en la definición de matriz de rigidez y en el método directo de Liapunov's, consideran la función $F(X)$ como una función de Liapunov's suponiendo que existe un amortiguamiento adecuado, se puede concluir que el estado de equilibrio al resolver el problema $F(X)$ es estable. De esta forma si la función es convexa presentando un mínimo local, se puede decir que el estado de equilibrio minimizado de $F(X)$ usando material ficticio es estable, por lo contrario, si la función no es convexa, no se garantiza la estabilidad del estado de equilibrio encontrado mediante la optimización. (Ohsaki & Zhang, 2015)

4.1.2.3. Minimización de la energía de deformación usando material ficticio:

Se elige la energía de deformación total como función objetivo para la longitud de un elemento sin pre-esfuerzo, por tanto, la energía de deformación de un miembro i se puede considerar como una función $L_i(X)$, que se denota como $S_i(L_i(X))$.

La energía de deformación del miembro i se define como:

$$S_i(L_i(X)) = \frac{E_i A_i}{2L_i^0} (L_i(X) - L_i^0)^2 \quad (4.1.2-2)$$

Por lo que la energía total se puede obtener como:

$$S(X) = \sum_{i=1}^m S_i(L_i(X)) \quad (4.1.2-2)$$

Donde la forma de auto equilibrio se puede encontrar resolviendo el problema de optimización minimizando $S(X)$. Cuando no se da ninguna restricción, la condición estacionaria de $S(X)$ se escribe como:

$$\nabla S(X) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_i(L_i(X))}{\partial L_i(X)} \nabla L_i(X) = 0 \quad (4.1.2-3)$$

Basados en que la función objetivo es la energía de deformación total, el problema de optimización se convierte en resolver un problema de análisis estándar, de tal forma que se garantiza la compatibilidad de los nodos para longitudes de miembros no pre-esforzados específicos. Esto se puede explicar bajo el principio de energía potencial total mínima que garantiza la estabilidad de la forma de equilibrio obtenida, minimizando la energía de deformación de la estructura sin cargas externas. (Ohsaki & Zhang, 2015)

En resumen, se puede decir que el proceso de optimización para la búsqueda de forma por este método usando materiales ficticios se puede ver como:

- **Paso 1:** Asignar propiedades de materiales para cables y puntales, incluyendo materiales ficticios para algunos cables.
- **Paso 2:** Definir la función de longitudes de miembros que debe minimizarse.
- **Paso 3:** Resolver el problema de optimización.
- **Paso 4:** Reasignar las propiedades de los materiales reales y calcular las longitudes no pre esforzadas de modo que las fuerzas axiales no cambien con respecto a las calculadas en el paso anterior.
- **Paso 5:** Verificar la estabilidad del estado de auto equilibrio utilizando las propiedades reales del material.

Para concluir este capítulo cabe destacar que este método tiene la ventaja de usar software que permiten la solución de ecuaciones complejas, adicional a esto el método sin optimización no es factible para sistemas demasiado grandes, sin embargo, al incluir procesos de optimización en la minimización este puede generar buenos resultados en el análisis. (Tibert & Pellegrino, 2003)

4.1.3. Relajación dinámica:

La relajación dinámica cuenta con un procedimiento iterativo, el cual consiste en plantear un modelo dinámico ficticio para seguir el movimiento de la estructura, desde el momento de carga cero, hasta el momento donde la estructura encuentra el equilibrio gracias al amortiguamiento. La relajación dinámica es usada con éxito en estructuras de membranas y redes de cables, Motro y Belkacem lo aplicaron a las estructuras de tensegridad como un método general para este tipo de estructuras, lo que permite concluir que la relajación dinámica es adecuada para el análisis de estructuras compuestas por cables y armaduras, de esta forma se permite suponer que los elementos que conforman estas estructuras tienen geometrías perfectamente lineales, conectadas mediante uniones de pasadores y que todas las cargas se aplican en los nodos.

Nomenclatura:

M	Matriz de masa
D	Matriz de amortiguación
K	Matriz de rigidez
F	Vector de fuerzas externas.
d''	Vector de aceleración
d'	Vector de velocidad
d	Vector de desplazamiento

La formulación general de este método está dada por la ecuación de movimiento:(Tibert & Pellegrino, 2003) (Rhode-Barbarigos, 2012)

$$M\ddot{d} + D\dot{d} + Kd = f \quad (4.1.3-1)$$

Evaluando la ecuación 4.1.3-1 en todos los términos relacionados con la velocidad y establecidos como cero, se podría decir que es un método estático, generando así una solución estática que se puede distinguir como el estado de equilibrio de una resultante de vibración amortiguada. (Rhode-Barbarigos, 2012)

Un concepto clave para este método se conoce como amortiguación cinética, el cual consiste en rastrear el movimiento no amortiguado de la estructura, intentando disminuir el tiempo de cálculo y mejorar la convergencia. La energía cinética se calcula a partir de los vectores de velocidad en cada paso de tiempo, si se detecta un pico en la energía cinética, todas las velocidades nodales se vuelven cero. Este procedimiento se sigue efectuando hasta que se logra el equilibrio de fuerzas internas y externas, lo que significa que la energía cinética se hace lo suficientemente pequeña. (Rhode-Barbarigos, 2012) (Tibert & Pellegrino, 2003)

Basados en esta información se puede concluir que el análisis estático se convierte en un análisis pseudo dinámico, el valor semilla y el paso en las iteraciones para el análisis dinámico se eligen de tal forma que la respuesta transitoria sea rápida y de este modo obtener la solución estática de la carga aplicada.

Este método tiene excelentes propiedades de convergencia y una respuesta computacionalmente rápida, ya que no requiere de la matriz de rigidez para encontrar el equilibrio, sin embargo, también presenta inconvenientes en su aplicabilidad para estructuras irregulares haciéndolo algo complejo. (Rhode-Barbarigos, 2012) (Tibert & Pellegrino, 2003)

4.2. Métodos de búsqueda de forma estáticos:

En los métodos estáticos se establece una relación de equilibrio entre las configuraciones de una estructura con topología dada (conectividad nodal) y las fuerzas en sus miembros. (Tibert & Pellegrino, 2003)

4.2.1. Método de densidad de fuerza:

En el método de densidad de fuerza hay una condición de no degeneración que se debe satisfacer para estructuras de tensegridad, esta condición se debe a que en las estructuras de tensegridad existen valores propios de la matriz de densidad de fuerza menores que cero, lo que ocasiona problemas de singularidad al momento de resolver las matrices, por esta razón varios investigadores han buscado la forma de solucionar este problema y han desarrollado múltiples métodos que mejoran estas carencias que presenta el método convencional,

A continuación, se presentan las ecuaciones fundamentales del método y algunas de las variantes que se han ido desarrollando para hacer que este funcione de una mejor manera, siendo uno de los métodos más usados para la búsqueda de forma en estructuras de tensegridad. (Cai & Feng, 2015)

Nomenclatura:

C	Matriz de conectividad
q	Vector de densidad de fuerza
Q	Diagonal del vector de densidad de fuerza
e	Módulo de Young.
a	Área
D	Matriz de densidad de fuerza
f	Vector de fuerzas externas
h	deficiencia de rango
Φ	Vector propio

A Matriz de equilibrio

4.2.1.1. Método de densidad de fuerza convencional:

Se supone una estructura de tenseguridad con m miembros, n nodos libres y n^f nodos fijos. Sea k un miembro conectado a los nodos i y j ($i < j$) entonces los valores de entrada i y j en la k -ésima fila de la matriz de conectividad C^s son 1 y -1. Por otro lado, si los nodos i y j no están conectados por el miembro k , entonces los elementos correspondientes en la matriz de conectividad C^s son cero. Esto se puede resumir de la siguiente manera.

$$C_{(k,p)}^s = \begin{cases} 1 & \text{para } p = i \\ -1 & \text{para } p = j \\ 0 & \text{para los otros casos} \end{cases} \quad (4.2.1-1)$$

Por conveniencia, los nodos fijos están precedidos por los nodos libres en la secuencia de numeración. Por lo tanto, la matriz de conectividad C^s se puede dividir en dos partes como:

$$C^s = (C \quad C^f) \quad (4.2.1-2)$$

Suponiendo que las barras de armadura están hechas de materiales linealmente elásticos, la densidad de fuerza q_k se puede escribir de la siguiente manera cuando la deformación es pequeña:

$$q_k = \frac{1}{L_k} \left(e_k a_k \frac{l_k - l_k^0}{l_k^0} \right) = e_k a_k \left(\frac{1}{l_k^0} - \frac{1}{l_k} \right) \quad (4.2.1-3)$$

Entonces el vector de densidad de fuerza q se puede dar como $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ y Q es la versión diagonal del vector de densidad de fuerza q .

Por lo que las ecuaciones de equilibrio en cada dirección se pueden dar como:

$$\begin{aligned} C^T Q C x + C^T Q C^f x^f &= f^x \\ C^T Q C y + C^T Q C^f y^f &= f^y \end{aligned} \quad (4.2.1-4)$$

$$C^T Q C z + C^T Q C^f z^f = f^z$$

Si se define D y D^f como:

$$D = C^T Q C \quad (4.2.1-5)$$

$$D^f = C^T Q C^f$$

Siendo D la matriz de densidad de fuerza, las ecuaciones de equilibrio se pueden reescribir como:

$$Dx + D^f x^f = f^x$$

$$Dx + D^f y^f = f^y \quad (4.2.1-6)$$

$$Dx + D^f z^f = f^{xz}$$

Por tanto, la matriz de densidad se puede escribir directamente, sin pasar por matriz C y la matriz Q como:

$$D_{(i,j)} = \begin{cases} \sum_{k \in \varphi} q_k & \text{para } i = j \\ -q_k & \text{Si los nodos } i \text{ y } j \text{ estan conectados por el miembro } k \\ 0 & \text{para los otros casos} \end{cases} \quad (4.2.1-7)$$

Esta sección se documentó tomando como base los artículos (Cai & Feng, 2015)(Koohestani, 2015)(J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006)

Se debe tener en cuenta que la formulación anteriormente presentada es válida para estructuras de cables o de membranas. Mientras que para una estructura de tensegridad la matriz de densidad de fuerza presenta una deficiencia de rango de al menos uno, porque la suma de sus elementos en cada fila o columna es siempre igual a cero. Esto se debe al hecho de que las estructuras de tensegridad no cuentan con nodos fijos, es decir no hay nodos que restrinjan el movimiento. Por lo tanto, las ecuaciones de auto equilibrio sin cargas externas se pueden simplificar de la siguiente manera: (Cai & Feng, 2015)

$$Dx = f^x = 0$$

$$Dx = f^y = 0 \quad (4.2.1-8)$$

$$Dx = f^z = 0$$

La matriz de densidad de fuerza de D de una estructura de tensegridad es deficiente en rango, debido a que la ecuación 4.2.1-8 no puede resolverse mediante la inversa de D debido a que D es singular. (Fan et al., 2023)

Se define la deficiencia de rango h de D como

$$h = n - \text{rango}(D) \quad (4.2.1-9)$$

Donde n es el número de columnas de la matriz C.

De la ecuación 4.2.1-8, se sabe que el espacio de soluciones de la ecuación de auto equilibrio en cada dirección esta abarcado por h vectores independientes. Si una estructura se encuentra en un espacio con menos dimensiones que d, entonces se dice que la estructura es deficiente en el espacio nulo d. (Fan et al., 2023) (Zhang & Ohsaki, 2006)

Si una estructura de tensegridad no es deficiente en un espacio d, entonces la deficiencia de rango h de su matriz de densidad de fuerza debería mantener la siguiente relación:

$$h \geq d + 1 \quad (4.2.1-10)$$

La ecuación 4.2.1-10 no es la única condición que se debe cumplir para la no deficiencia de una estructura de tensegridad. La independencia lineal de los vectores de coordenadas también se debe satisfacer además de garantizar una configuración no deficiencia en el espacio dimensional d.(Fan et al., 2023)

4.2.1.2. Método Multiparamétrico de búsqueda de forma:

Vassart y Motro propusieron un método de búsqueda de forma multiparamétrico que proporcionó una forma de resolver la no deficiencia de este tipo de estructuras. Este método consiste en la selección de parámetros múltiples que permiten la obtención de diferentes configuraciones de estructuras de tensegridad que cumplen con los requerimientos exigidos. Para la aplicación de este método se requiere cierto grado de experiencia en diseño debido a que se requiere escoger previamente los estados de pretensión y los tipos de elementos que conforman la estructura. (Fan et al., 2023)

4.2.1.3. Método adaptativo de densidad de fuerza:

Como se menciona en (Fan et al., 2023) y (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006) presentaron el método de densidad de fuerza adaptativa siendo una extensión del método de búsqueda de forma para redes de cables, este método consiste en evaluar la deficiencia de rango de la matriz de densidad de fuerza D , tomando los valores propios de D , de esta forma se puede actualizar de manera automática los valores de densidad de fuerza adaptándose al requisito de deficiencia de rango.

- **Formulación del vector de fuerza:**

La matriz de densidad de fuerza inicial D se calcula a partir de la ecuación 4.2.1-5, por tanto, la nueva matriz de densidad de fuerza actualizada \bar{D} mediante los valores propios $\hat{\Lambda}$ se da como: (Fan et al., 2023)

$$\bar{D} = \Phi \hat{\Lambda} \Phi^T \quad (4.2.1-11)$$

Donde Φ contiene los vectores propios de D como $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_i \dots \Phi_n]$, $D\Phi_i = \lambda_i^D \Phi_i$. A partir de esto se sabe que el nuevo vector de densidad de fuerza \bar{q} es dado por:

$$\bar{q} = (B^T B)^{-1} B^T D^{-T} \quad (4.2.1-12)$$

Donde B se define para describir la relación de las densidades de fuerza y los miembros $B^T = [B_1^T \dots B_i^T \dots B_n^T]$, por lo que $B_{i,j,k}$ se define como: (Fan et al., 2023)

$$B_{k,i,j} = \begin{cases} 1 & \text{Si el vertice } i = k \text{ y el miembro } j \text{ estan conectados al vertice } k \\ -1 & \text{Si el vertice } i \neq k \text{ y el miembro } j \text{ estan conectados por el vertice } k \\ 0 & \text{para los otros casos} \end{cases}$$

$$(4.2.1-13)$$

- **Análisis de valores propios y descomposición espectral de la matriz de equilibrio:**

Sea la matriz simétrica de la ecuación 4.2.1-11, donde los elementos diagonales de la matriz $\hat{\Lambda}$ son $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ son los valores propios de la matriz D, y se ordenan de menor a mayor como:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$$

Adicional a esto la i-esima columna de Φ_i de Φ es el vector propio correspondiente λ_i . Adicional a esto se sabe que el número de valores propios distintos de cero de la matriz D es igual a su rango, por tanto, se puede decir que r es el número de valores propios no positivos de D y se tienen los siguientes casos: (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006)

Caso 1: $r \leq h^*$

Caso 2: $r > h^*$

Para el caso 1, se puede asignar 0 a los primero h^* valores propios de D

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, h^* \quad (4.2.1-14)$$

Para obtener los valores propios modificados, se puede aplicar la matriz de equilibrio modificando $\hat{\Lambda}$ como

$$\bar{D} = \Phi \hat{\Lambda} \Phi^T \quad (4.2.1-15)$$

Realizando este procedimiento de forma iterativa, la matriz \bar{D} tendrá la deficiencia de rango requerida h^* sin ningún valor propio negativo.

Para el caso 2, la deficiencia de rango será mayor a la requerida, si se aplica la misma operación que para el caso 1. Para el caso 2 se tienen varias alternativas:

- Asignar valores positivos a algunos valores propios negativos.
- Especificar más h^* coordenadas independientes en el proceso de búsqueda de forma.

El método de densidad de fuerza adaptativa se divide en dos partes primero se desea obtener el conjunto de densidades de fuerza factibles y luego se determina un conjunto independiente de coordenadas nodales, de esta forma se adquiere una configuración geométrica única y no deficiente. (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006)

En (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006) presentan, algoritmos para la obtención de estos dos procesos, los cuales se muestran a continuación:

Algoritmo 1: densidades de fuerza factibles:

- **Paso 0:** Especificar un vector inicial de densidad de fuerza q^0 para obtener D^0 mediante 4.2.1-5. Formule B y g^0 con las restricciones lineales específicas. Inicie $i = 0$.
- **Paso 1:** Asigne 0 a los h^* valores propios más pequeños de D_i y reescriba \bar{D}_i mediante la ecuación 4.2.1-15.
- **Paso 2:** Obtenga \bar{g}^{i+1} , calcule \bar{q}^{i+1} , a partir de la ecuación 4.2.1-15 y actualice D^{i+1} de la ecuación de equilibrio.
- **Paso 3:** Si se cumple $n - \text{rango}(D^{i+1}) = h^*$, entonces $\bar{q} = q^{i+1}$, se termina el proceso, si no se cumple se debe repetir la iteración, a partir de los valores obtenidos.

Algoritmo 2: Densidad de fuerza adaptativo:

- **Paso 0:** Definir la topología de la estructura.
- **Paso 1:** Especificar restricciones lineales y un conjunto inicial de densidades de fuerza.
- **Paso 2:** Obtener un conjunto de densidades de fuerza factibles mediante el algoritmo 1.
- **Paso 3:** Especificar un conjunto independiente de coordenadas nodales para obtener una configuración única y no deficiente de la estructura.

Para más detalle de estos algoritmos y de su aplicación en ejemplos numéricos se puede consultar (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006).

4.2.1.4. Procedimiento de búsqueda de forma numérico:

Como lo menciona (Estrada et al., 2006) se toma la deficiencia de rango de la matriz D como condición terminal de las iteraciones. En este caso Estrada tomó la matriz de equilibrio A como matriz objetivo. La deficiencia de rango s debe ser mayor o igual a 1 y las ecuaciones de equilibrio se pueden transformar en $Aq = 0$, donde la matriz A se puede calcular como:

$$A = \begin{pmatrix} c^T \text{diag}(CX) \\ c^T \text{diag}(CY) \\ c^T \text{diag}(CZ) \end{pmatrix} \quad (4.2.1-16)$$

Las coordenadas nodales actualizadas se pueden calcular mediante la función del vector de densidad de fuerza, $[X_i \ Y_i \ Z_i]$, donde el vector de densidad de fuerza inicial q_0 es un vector de signos:

$$q_0 = [1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1]^T \quad (4.2.1-17)$$

Donde los miembros positivos representan la tensión y los miembros negativos la compresión.

El vector de densidad de fuerza actualizado se puede calcular mediante otra función, como $q_i = f(X_i Y_i Z_i)$. Este método no requiere una gran experiencia en diseño, pero el costo computacional es realmente alto debido a la cantidad de variables que se deben tener en cuenta para el diseño. (Fan et al., 2023)

4.2.1.5. Método de densidad de fuerza adaptado a la simetría.

Para superar algunas de las dificultades, las restricciones geométricas de los vértices y las restricciones de densidad de fuerza de los elementos que conforman el sistema de tensegridad se clasifican por medio de las propiedades de simetría para simplificar la matriz de densidad de fuerza y las coordenadas nodales. La matriz de densidad de fuerza \bar{D} adaptada a la simetría se puede convertir en una forma diagonal de bloque mediante las matrices irreducibles de ciertos grupos de simetría. Por ejemplo, para una tensegridad con simetría diédrica, la matriz de densidad de fuerza adaptada a la simetría es: (Fan et al., 2023)

$$\bar{D} = \bar{D}^{A1} \oplus \bar{D}^{A2} (\oplus \bar{D}^{B1} \oplus \bar{D}^{B2}) \oplus 2 \sum_{k=1}^p \bar{D}^{Ek} \quad (4.2.1-18)$$

Donde el bloque \bar{D}^μ se puede expresar con las matrices irreducibles del grupo diédrico, la conectividad de los vértices y las densidades de fuerza de los miembros conectados. La deficiencia de rango correspondiente del primero al (d+1) bloques son iguales a cero, como $\det(\bar{D}^{-A1}) = 0, \det(\bar{D}^{-A2}) = 0, \dots, \det(\bar{D}^{-d+1}) = 0$. Así se obtienen las relaciones de densidades de fuerza en diferentes tipos y combinado con la teoría de grupos el cálculo computacional se reducirá aún mas. (Fan et al., 2023)

4.2.1.6. Algoritmo de Faddeev-LeVerrier.

El algoritmo de Faddeev LeVerrier sirve para calcular el polinomio característico de matrices cuadradas, es decir este permite generar relaciones entre las densidades de fuerza de los miembros que proporcionan las condiciones de estados de auto esfuerzo. Este método es relativamente sencillo, ya que, solo se requieren operaciones básicas como sumas y multiplicaciones evitando así operaciones como factorizaciones triangulares y descomposiciones de valores propios de la matriz de densidad de fuerza. Este se presenta como alternativa a los procedimientos anteriormente nombrados. A continuación, se evalúan las ecuaciones y el procedimiento para la aplicación de este método: (Koohestani, 2017)

Se establece $A = A_1$ y se calcula

$$c_1 = tr(A_1) \quad (4.2.1-19)$$

Donde tr se define como la traza de una matriz. A continuación, se calculan los coeficientes de la siguiente manera:

$$A_2 = A(A_1 - c_1 I) \quad c_2 = \frac{1}{2} tr(A_2) = \frac{1}{2} (tr(AA_1) - c_1 c_1) \quad (4.2.1-20)$$

$$A_3 = A(A_2 - c_2 I) \quad c_3 = \frac{1}{3} tr(A_3) = \frac{1}{3} (tr(AA_2) - c_2 c_1) \quad (4.2.1-20)$$

Hasta n iteraciones

$$A_n = A(A_{n-1} - c_{n-1} I) \quad c_n = \frac{1}{n} tr(A_n) = \frac{1}{n} (tr(AA_{n-1}) - c_{n-1} c_1) \quad (4.2.1-20)$$

Y se puede demostrar que A_n se puede reducir a una matriz diagonal. Sin embargo, debido a la deficiencia de rango innata de la matriz de densidad de fuerza, su determinante es cero, de lo que se sigue $A_n = 0$ y $c_n = 0$.

Cabe destacar que este procedimiento que este método puede llegar a presentar errores numéricos y para matrices de gran tamaño deja de ser eficiente. Adicional a esto actualmente existen métodos con más viabilidad para el análisis de este tipo de estructuras a través de este método. (Koohestani, 2017)

4.2.2. Algoritmo genético:

Los algoritmos genéticos se utilizan como una técnica de búsqueda global fundamentada en la teoría de evolución de Darwin de la supervivencia del más fuerte. Este método se puede clasificar en el grupo de algoritmos metaheuristicos para dar solución a problemas basados en la mecánica de la selección natural y la genética. El algoritmo genético consiste en hacer evolucionar una población aleatoria inicial de soluciones factibles, para crear mejores soluciones basadas en operadores genéticos, por tanto, se puede determinar que para estructuras de tensegridad el dato de entrada inicial podría ser un número de entrada del nodo, siendo este un número par y de esta forma se garantiza que ningún puntal se va a conectar con otro puntal entre sí. Adicional a lo mencionado, esta información indica que la matriz de conectividad y el vector de densidad de fuerza se pueden generar únicamente con la información de los nodos, es decir se crea el rango de conjuntos factibles de coordenadas nodales y densidades de fuerza. (Lee & Lee, 2014) (Gan et al., 2015) (Koohestani, 2012)

Nomenclatura:

Y	Matriz diagonal función de la Matriz de Rigidez D y de la Matriz de equilibrio A.
NC	Numero definido de miembros.
NS	NC-2.
Γ	Conjunto total de densidades de fuerza para cables y puntales.
q^s	Densidades de fuerzas de puntales.

- q^c Densidades de fuerza de cables.
- m Número total de miembros.

Durante el proceso inicial es necesario calcular la matriz de densidad de fuerza a partir de la fuerza inicial del vector de densidad, como se evidenció en el método de densidad de fuerza. Luego de esto se hace uso del algoritmo genético para obtener los valores iniciales que conducen a la matriz de densidad de fuerza y de esta forma satisfacer la ecuación de equilibrio asegurando que no existen miembros que tengan la misma conectividad. (Lee & Lee, 2014) (Gan et al., 2015)

En el método de algoritmo genético se evalúa una función de aptitud, esta se mide para conocer la aptitud que tiene un elemento dentro del sistema. Basados en esto, se pueden evidenciar diferentes tipos de funciones de aptitud, que se han ido desarrollando a través del tiempo, por ejemplo, en (Lee & Lee, 2014) presentan la siguiente función de aptitud que consta de 3 variable α , β y γ .

$$\text{Minimizar: } \alpha\beta\gamma \quad (4.2.2-1)$$

Sujeto a:

$$\left| \frac{q_i^s - q_j^s}{q_i^s} \right| \leq \varepsilon_0 \quad (q_i^s, q_j^s \in \Gamma^s) \quad (4.2.2-2)$$

$$\left| \frac{q_i^c - q_j^c}{q_i^c} \right| \leq \varepsilon_0 \quad (q_i^c, q_j^c \in \Gamma^c) \quad (4.2.2-3)$$

Donde:

$$\alpha = \sum_{i=1}^s |\lambda_i| \quad (4.2.2-4)$$

$$\beta = \sum_{j=1}^b \frac{1}{|q_j|} \quad (4.2.2-5)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m (q_k)^2}{m} - \left(\frac{\sum_{k=1}^m q_k}{m} \right)^2} \quad (4.2.2-6)$$

En la ecuación 4.2.2-1 α es la sumatoria de los primeros $d+1$ valores propios más pequeños de la matriz de densidad de fuerza, El termino β es una variable que

aumenta el valor de la función de aptitud que relaciona las densidades de fuerza con valores cero o cercanos a cero. Garantizando que el valor converja con las densidades de fuerza cerca de los límites superior e inferior. La función de γ es uniformar los valores de densidad de fuerza de los cables para que se pueda minimizar el valor de la función de aptitud. (Lee & Lee, 2014)

En las ecuaciones 4.2.2-2 y 4.2.2-3 se evidencia un término Γ el cual es el conjunto total de densidades de fuerza, siendo ecuaciones con restricciones opcionales para lograr las formas regulares de las estructuras de tensegridad.

Como se mencionó anteriormente, hay diferentes formas de evaluar una función de aptitud, en (Gan et al., 2015) se evalúan la aptitud total para una población individual basados en cuatro funciones de aptitud:

$$FV = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (4.2.2-7)$$

Donde la función de aptitud total dará como resultado un valor cercano a cero como el mejor objetivo de aptitud del algoritmo genético.

- **Evaluación del estado de auto equilibrio:**

La deficiencia de rango de la matriz singular Y se utiliza como valor de aptitud de la población individual. Para reducir el espacio de búsqueda, solo se busca una deficiencia de rango de la matriz Y , lo que da un estado de auto equilibrio de la estructura de tensegridad. Un rango de deficiencia de la matriz se encuentra cuando el valor de la diagonal inferior derecha de la matriz se acerca a cero: (Gan et al., 2015)

$$f_1 = Y(d \times n^n, n^b) \quad (4.2.2-8)$$

La ecuación 4.2.2-8 dará un valor cero como mejor aptitud si la diagonal final de la matriz Y da como resultado un valor cercano a cero a nulo, de lo contrario, el valor de aptitud será mayor a cero. (Gan et al., 2015)

- **Restricción de conectividad en un nodo:**

Se requiere un numero definido de miembros NC para garantizar que existen conexiones suficientes en los nodos, asegurando que no se presentan soluciones inviables. La siguiente función evalúa las restricciones de conectividad:

$$f_2 = \sum_{j=1}^{n^n} \left| (NC - \sum_{i=1}^{n^b} |C(i,j)|) \right| \quad (4.2.2-9)$$

“La ecuación anterior, dará como resultado un valor cero como la mejor aptitud si el número de miembros en un nodo es igual a NC; de lo contrario, el valor de aptitud será mayor a cero”. (Gan et al., 2015)

- **Solo un puntal en una restricción de nodo.**

Una de las características típicas de una estructura de tensegridad es que los elementos de puntal no se pueden conectar entre sí. Para evitar que dos puntales se conecten entre si se adopta la siguiente función de aptitud:

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n^n} \left| (NS - \sum_{i=1}^{n^b} |CT(i,j)|) \right| \quad CT = \text{diag}(q^0)^T |C| \quad (4.2.2-10)$$

Donde NS se puede obtener como NS = NC-2. El resultado de la diagonal de la matriz de densidades de fuerza puede dar la cantidad total del número de miembros en todos los nodos restringidos por el NC. “La ecuación 4.2.2-10 dará el mejor valor de aptitud de cero solo si no hay dos miembros de puntal conectados en un nodo; de lo contrario será mayor que cero”. (Gan et al., 2015)

El uso de esta restricción implica que debe haber un número par de nodos, para lograr que la configuración cuente con dos nodos de conexión por cada puntal y estén separados de los demás nodos. (Gan et al., 2015)

- **No hay restricción de intersección entre dos puntales.**

$$f_4 = \begin{cases} 0, & \text{si } p > r \text{ no intersecciona} \\ 2, & \text{si } p \leq r \text{ intersecciona} \end{cases} \quad (4.2.2-11)$$

Donde r es representa la distancia mínima entre dos líneas como el diámetro físico del puntal o cable.

En conclusión, el método de algoritmo genético permite evaluar el comportamiento de estructuras de tensegridad estableciendo unos parámetros iniciales y evaluándolos hasta encontrar un resultado donde se encuentre la estabilidad de la estructura, es un método con un gran consumo computacional por la cantidad de iteraciones, pero es relativamente rápido. (Gan et al., 2015)

4.2.3. Método de energía:

Este método presenta gran similitud con el método de densidad de fuerza, su principal diferencia se basa en que los conceptos de rigidez pueden expresarse en términos de energía, por lo que es posible definir una función que modele la energía en un sistema de tensegridad. Por lo tanto, se debe tener en cuenta que el cambio de energía se observa cuando los elementos que conforman la estructura presentan un cambio de longitud. Para los cables la energía aumenta cuando estos se tensionan y para los puntales la energía aumenta cuando estos se comprimen. (Juan & Mirats Tur, 2008)

Nomenclatura:

ω Estado de estrés, relación directa con la densidad de fuerza q .

E(P) Energía potencial

Ω Matriz relacionada con la matriz de densidad de fuerza D

Dada una configuración n de puntos en un espacio dimensional d , se denota por:

$$p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T \quad (4.2.3-1)$$

Una estructura de tensegridad viene dada por $G(p)$, siendo esta el gráfico de p donde cada elemento que conforma superficie se designa como un cable o un puntal; como restricciones se puede observar que:

- Los cables no pueden aumentar en longitud.
- Los puntales no pueden disminuir en longitud

Por lo que se define un estado de estrés ω para $G(p)$, el cual se puede determinar cómo auto estrés si (Tibert & Pellegrino, 2003):

$$\sum_j \omega_{ij}(p_j - p_i) = 0 \quad (4.2.3-2)$$

Donde $\omega_{ij} \geq 0$ para cables y $\omega_{ij} \leq 0$ para puntales. Si se compara la ecuación 4.2.3-2 con la ecuación 4.2.1-8, se puede identificar que ω_{ij} es idéntico al parámetro de densidad de fuerza q_{ij} . (Tibert & Pellegrino, 2003)

Aunque se satisfaga la condición de equilibrio dada por la ecuación 4.2.3-2, esto no asegura que la estructura se encuentre en equilibrio estable, por lo que es necesario incluir el principio de que energía potencial total funcional debe estar en un mínimo local para que la estructura sea estable. Por lo que se define la energía potencial en función de ω_{ij} como:

$$E(p) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij} \|p_j - p_i\|^2 \quad (4.2.3-3)$$

La ecuación 4.2.3-3 busca encontrar un mínimo absoluto que corresponde a la longitud en reposo en el elemento. Suponiendo que todos los elementos se comportan como resortes elásticos lineales, los cables, tendrán una longitud en reposo de cero y los puntales tendrán una longitud en reposo infinita.

Dejando:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.2.3-4)$$

Un vector columna de longitud d_n , que contiene las coordenadas x,y, z de p.

Si se reescribe la ecuación de energía potencial de forma cuadrática se obtiene:

$$E(p) = \frac{1}{2} \bar{p}^T \begin{bmatrix} \Omega & \dots & \dots \\ \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \Omega \end{bmatrix} \bar{p} \quad (4.2.3-5)$$

Donde los elementos Ω_{ij} están dados por:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} -\omega_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k \neq i} \omega_{ik} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{Si no hay conexiones entre } i \text{ y } j \end{cases} \quad (4.2.3-5)$$

Por lo que se puede observar la similitud que existe entre la ecuación 4.2.3-3 con la ecuación dada en el método de densidad de fuerza 4.2.1-7, esto permite comprender de forma más clara las características del método de densidad de fuerza y como se puede utilizar para encontrar configuraciones de equilibrio en estructuras de tensegridad. (Tibert & Pellegrino, 2003)

Tal como se mencionó en el método de densidad de fuerza, en el espacio nulo de Ω se contiene al menos un vector trivial para estructuras de tensegridad, lo que genera que no se pueda tener con precisión resultados positivos de $E(P)$ que depende de Ω , por lo tanto, la condición para que la estructura de tensegridad sea estable encontrando un mínimo local en p de la función $E(P)$, puede no presentar errores de convergencia. (Tibert & Pellegrino, 2003)

Para obtener una estructura de tensegridad super estable se requiere encontrar un conjunto de densidades de fuerza tal que la nulidad de Ω sea $d+1$.

Como lo menciona (Tibert & Pellegrino, 2003) Connely y Back analizaron gran cantidad de estructuras de tensegridad con diferentes tipos de simetría usando este método, basados en dos suposiciones:

- Existe un estado simétrico de auto esfuerzo con una densidad de fuerza 1 en cada cable y $-\omega_s$ en cada puntal.
- Existen dos tipos de cables y un solo tipo de puntal.
- La densidad de fuerza en el puntal se elige de manera que la estructura sea super estable.

4.2.4. Reducción de coordenadas:

Este método consiste en identificar un conjunto de coordenadas generalizadas para un sistema de tensegridad particular y utilizar manipulación simbólica para obtener la matriz de equilibrio, las soluciones obtenidas por este método suelen ser complejas debido a que la matriz de equilibrio que se obtiene presenta grandes dimensiones. Sin embargo, algunos autores han dado solución a algunas estructuras de tensegridad que cuentan con simetría. (Juan & Mirats Tur, 2008)

Nomenclatura:

- b** Elementos
- M** Cables
- O** Puntales
- t** Esfuerzo Axial
- δg Desplazamiento virtual.

Una estructura de tensegridad contiene elementos b compuesto por cables M y O puntales. Los puntales son considerados como un conjunto de restricciones bilaterales que actúan sobre la estructura del cable. Por lo tanto, se define un conjunto de N coordenadas independientes $g = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T$ las cuales definen la orientación y posición de los puntales. (Tibert & Pellegrino, 2003)

Si se considera un estado de auto esfuerzo para la estructura y sea t_j , el esfuerzo axial en un elemento de cable j ; La fuerza del cable $t = [t_1, t_2, \dots, t_m]^T$ se evidencia el estado de equilibrio con fuerzas en los puntales y cargas externas cero. Tomando como base el trabajo virtual se encuentra un conjunto de ecuaciones de equilibrio que relacionan las fuerzas en los cables, pero sin indicar explícitamente las fuerzas en los puntales. Al considerar un desplazamiento virtual δg de la estructura que no implica extensión de los puntales (Tibert & Pellegrino, 2003). El cambio de longitud del cable j es:

$$\delta l_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial l_j}{\partial g_i} \delta g_i \quad (4.2.4-1)$$

Considerando todos los cables, dados en la ecuación 4.2.4-1

$$\delta I = A^T \delta g \quad (4.2.4-2)$$

Donde los elementos $N \times M$ de la matriz A son:

$$A_{ij} = \frac{\delta l_j}{\delta g_i} \quad (4.2.4-3)$$

Debido a que las extensiones de los puntales son cero, el trabajo virtual en los puntales también es cero, por lo tanto, el trabajo interno total, solo de los cables es:

$$t^T \delta I = (At)^T \delta g \quad (4.2.4-4)$$

Para que la estructura esté en equilibrio, este debería ser cero para cualquier desplazamiento virtual δg , lo que permite la siguiente reducción de ecuaciones:

$$At = 0 \quad (4.2.4-5)$$

Para que esta ecuación tenga una solución no trivial se requiere que:

$$\text{rango}(A) < M \quad (4.2.4-6)$$

Donde solo son de interés las soluciones totalmente positivas:

$$t_j > 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, M \quad (4.2.4-6)$$

Las condiciones analíticas generales que gobiernan la forma de una estructura de tensegridad en una topología dada se pueden obtener analizando las ecuaciones 4.2.4-6 y 4.2.4-7. (Tibert & Pellegrino, 2003)

4.2.5. Método de Monte Carlo:

El Método de Monte Carlo consiste en un esquema de aceptación y rechazo, lo que significa que es un proceso estocástico, consiste en generar para cada paso una configuración de prueba en un muestreo aleatorio, que posteriormente se compara con la configuración de prueba del paso anterior. Para que una configuración dada sea aceptable la energía debe ser menor a la del paso precedente, si la energía es superior lo más probable es que la configuración sea rechazada. (Y. Li et al., 2010)

Nomenclatura:

- M^j** Lista de elementos que contienen el nodo j.
- N^j** Lista de nodos que contienen el nodo j
- O^j** Dirección de la lista de elementos en M_j
- f^j** Vector de fuerza externa en el nodo j
- Eⁱ** Energía potencial del elemento i
- E₀** Energía total

Para el caso de las estructuras de tensegridad, estas se deben ver como un sistema molecular, donde las barras y los cables se pueden considerar como átomos y enlaces atómicos respectivamente. Para dar una solución a esto en (Y. Li et al., 2010), realizaron la propuesta de un método de búsqueda de forma aplicando el método de Monte Carlo, para el cual propusieron los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Especificar la información básica de la estructura, seleccionando una configuración aleatoria como configuración inicial P_0 y establecer el paso de la siguiente iteración como $n=1$.
- **Paso 2:** Para cada nodo j y elemento i , calcular M^j , N^j , O^j , el vector de fuerza interna t^j , el vector de fuerza nodal resultante f^j , la energía potencial del elemento E^i , la energía total E_0 y otros parámetros.
- **Paso 3:** Seleccionar un nodo aleatorio y darle a este nodo un desplazamiento aleatorio para generar una configuración de prueba P_t .
- **Paso 4:** Compare la energía potencial E de la configuración de prueba P_t con la del paso anterior P_{n-1} . Si la energía disminuye, la configuración de prueba se aceptará como la configuración para el siguiente paso de iteración, es decir $P_n = P_t$. De lo contrario la configuración de prueba será rechazada y la configuración seguirá siendo la misma que la anterior, es decir, $P_n = P_{n-1}$.
- **Paso 5:** Si el sistema no está en equilibrio, establecer $n=n+1$ y vaya al paso 3.
- **Paso 6:** Cuando se alcanza el estado de equilibrio, la iteración terminará y la configuración final se asumirá como forma estable.

Existen algunas diferencias entre la aplicabilidad de este método para simulaciones moleculares, que no afectan a los sistemas de tensegridad, por ejemplo, para sistemas de tensegridad el estado de equilibrio es determinista, la temperatura no tiene relevancia dentro del proceso de búsqueda de forma, los elementos que conectan a cada nodo no cambian luego tener una topología dada y la fuerza entre dos nodos conectados es solo una función de su distancia. Adicional a esto en este tipo de estructuras la fuerza resultante f_i se utiliza como referencia para definir si se alcanza el equilibrio y con ello llegar a la estabilidad. En el procedimiento de

búsqueda de forma se escoge un nodo y este se mueve en cada paso de iteración, por lo que el ajuste en la fuerza nodal será de una magnitud muy pequeña.

El método de Monte Carlo aplicado a la búsqueda de forma de estructuras de tensegidad permite resolver problemas más complejos y de gran escala, esto comparado con algunos de los métodos mostrados anteriormente, como lo es el método de energía propuesto por Connelly y el método de relajación dinámica, ya que el método de Monte Carlo reduce el costo asociado a la actualización de los elementos que conectan los nodos y el cálculo de la energía en el sistema. (Y. Li et al., 2010)

4.2.6. Método basado en elementos finitos (método numérico):

Los métodos que se basan en elementos finitos, también se les puede llamar métodos numéricos, estos trabajan de forma iterativa hasta encontrar el equilibrio para conformar una estructura de tensegidad

Nomenclatura:

n_n Numero de nodos.

n_c Numero de cables.

El funcionamiento de este método (Pagitz & Mirats Tur, 2009) define como variables de entrada al algoritmo la topología de la estructura, Longitud de barras no deformadas, longitud de cables, pretensado de cables y la rigidez de las barras. El algoritmo esta dividido en dos etapas:

- **Etapas 1:** se obtiene el equilibrio del sistema con barras elásticas y longitudes de cables dadas. Asimismo, la información de primer y segundo orden se calcula en la configuración de equilibrio que relaciona el cambio de longitudes de barras con el cambio de longitudes de cables.
- **Etapas 2:** se basa en la información de primer y segundo orden de la etapa 1, supone barras elásticas y cables pretensados con rigidez axial cero. Para la etapa 2 se modifican las longitudes de los cables individuales, manteniendo la longitud total del cable, disminuyendo la energía del sistema.

Es importante tener presente que dependiendo de la dimensión espacial del sistema $2n_n$ o $3n_n$, hay grados de libertad que aplican en la primera etapa y solo n_c+1 grados de libertad en la segunda etapa.

(Pagitz & Mirats Tur, 2009) lograron demostrar que bajo la aplicación de este método se puede llegar al equilibrio con pocas iteraciones, a partir de condiciones con alto grado de distorsión, sin embargo, también se evidencia que para la aplicación del método se deben conocer gran cantidad de variables.

Para obtener más detalle de la aplicación del método se recomienda consultar (Pagitz & Mirats Tur, 2009)

4.2.7. Método de optimización restringida:

El método de optimización restringida es un método versátil para encontrar estructuras de tensegridad estables, inicialmente este método establece un modelo de optimización con restricción de igualdad que simula la formación de estructuras de tensegridad, para posteriormente aplicar los multiplicadores de Lagrange y transformarlo en un sistema equivalente sin restricciones. El modelo de optimización se puede resolver, analizando por separado las condiciones estacionarias de las variables originales y los multiplicadores de Lagrange, de este modo las coordenadas nodales se actualizan dos veces en cada paso de la iteración. (P. Zhang et al., 2021)

Adicional a lo anteriormente mencionado, este modelo aplica el método mencionado en la sección 3.1.3., esto con el fin de maximizar la velocidad de convergencia y mejorar la precisión en el proceso de optimización restringida. En (P. Zhang et al., 2021) los autores identifican cuatro pasos, que se tienen en cuenta para la aplicación de la teoría de la optimización restringida en el análisis de búsqueda de forma, los cuales son:

- **Paso 1:** Modelo de optimización
- **Paso 2:** Aplicación de la técnica de relajación dinámica en la resolución del modelo de optimización
- **Paso 3:** Tratamiento de restricción de límites

- **Paso 4:** Discusiones sobre el exponente de potencia de las longitudes de los cables en función objetivo

Este algoritmo cuenta con una ventaja con la que no cuentan los demás métodos y es que permite el análisis de sistemas de tensegridad con soportes externos, es decir, que también podría ampliarse para el análisis de cargas externas, de igual forma, es un método que proporciona una herramienta para analizar sistemas de tensegridad con grados de dificultad mayores, lo que permite pensar en más aplicaciones a la ingeniería estructural.

Basados en el estudio de la literatura de los métodos para analizar las estructuras de tensegridad, se logra evidenciar que algunos de los métodos explicados dentro de este documento, suelen ser poco eficientes para encontrar estructuras de tensegridad estables. Los métodos convencionales que más destacan son el método de densidad de fuerza que presenta un gran uso para el cálculo de estas estructuras y el método de algoritmo genético el cual no funciona para estructuras a gran escala, sin embargo, métodos como el de Monte Carlo, elementos finitos, algoritmo genético y de optimización permiten acercarse a soluciones más eficientes para este tipo de estructuras gracias a los avances de herramientas computacionales. (P. Zhang et al., 2021) (Gomez-Jauregui et al., 2023)

En (Juan & Mirats Tur, 2008), presentan un resumen de los métodos de búsqueda de forma más conocidos, el cual permite entender que parámetros se requieren para la aplicación de cada método, incluyendo estabilidad, geometría, simetría, topología y si el análisis es posible usando fuerzas externas. Estos parámetros permiten definir si el método a usar para un caso específico de estructura de tensegridad es viable o inviable. En la tabla 4 se muestra el resumen de los criterios presentados anteriormente para los diferentes métodos.

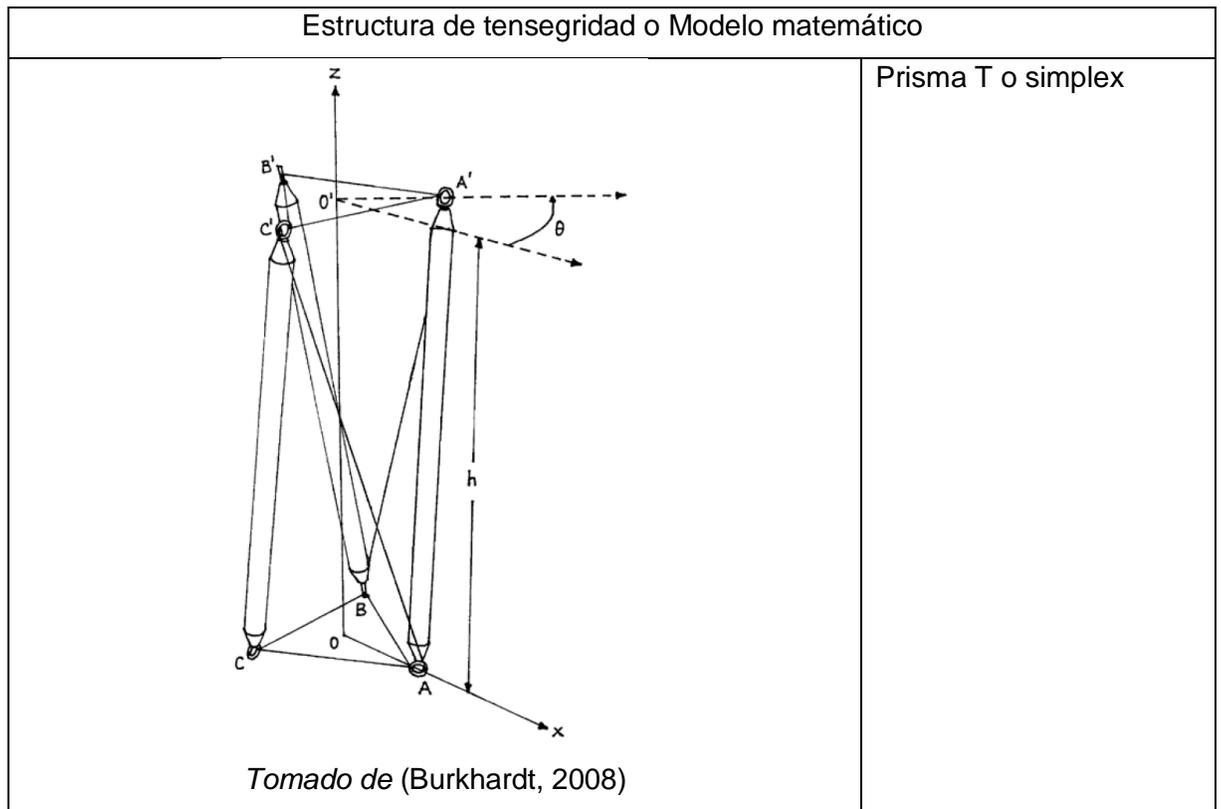
Tabla 4. Resumen métodos de búsqueda de forma y parámetros identificados.

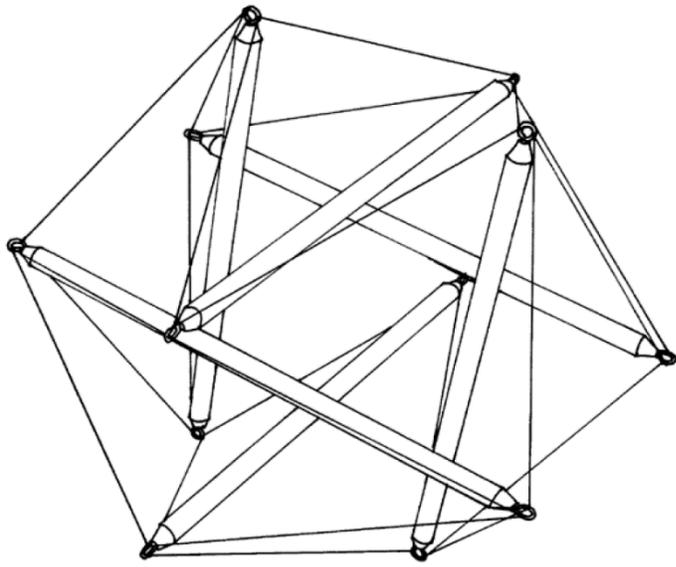
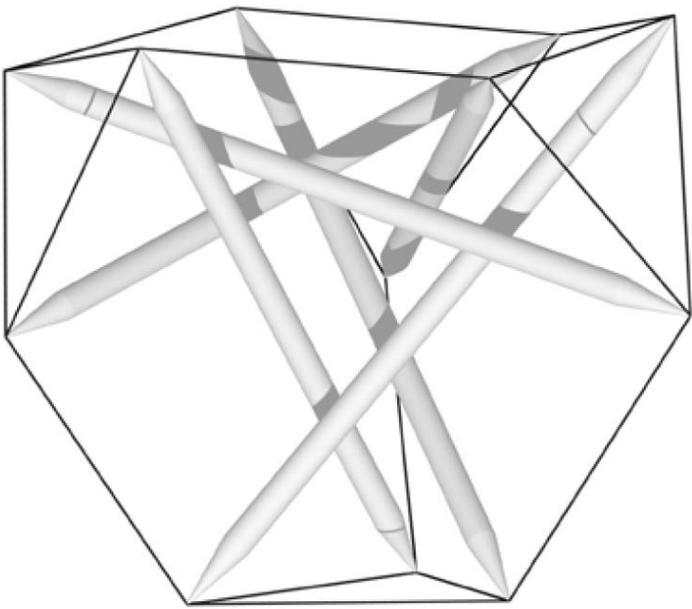
Método	Tipo	Es estable	Necesita una configuración inicial valida	Usa simetría	Necesita una topología inicial	Usa fuerzas externas
Solución analítica	Cinemático	No	No	Si	Si	No
Programación no lineal	Cinemático	No	Si	No	Si	No
Relajación dinámica	Cinemático	Si	Si	No	Si	Si
Solución analítica	Estático	Si	No	Si	Si	No
Método de densidad de fuerza	Estático	Se debe solucionar	No	No	Si	Si
Método de energía	Estático	Si	No	No	Si	No
Reducción de coordenadas	Estático	Si	No	Si	Si	No
Ecuaciones diferenciales	Estático	Si	Si	No	Si	No
Aproximación sucesiva	Ambos	Algunas tensiones deben arreglarse	Algunas coordenadas deben arreglarse	No	Si	No
Método Algebraico	Estático	Se debe solucionar	No	No	Si	Si
Algoritmo genético	Topológico	Si	No	No	No	No
Programación cuadrática secuencial	Ambos	Si	No	No	No	Si
Método numérico	Ambos	Si	No	No	Si	No

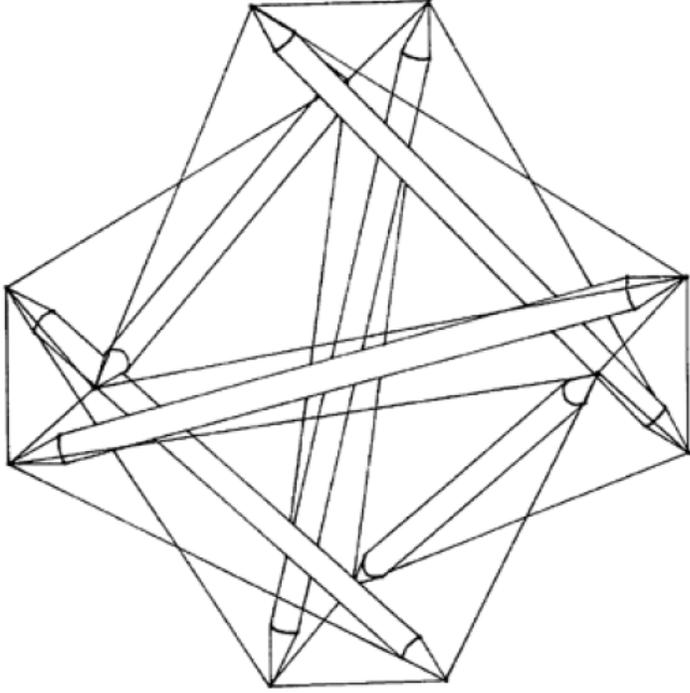
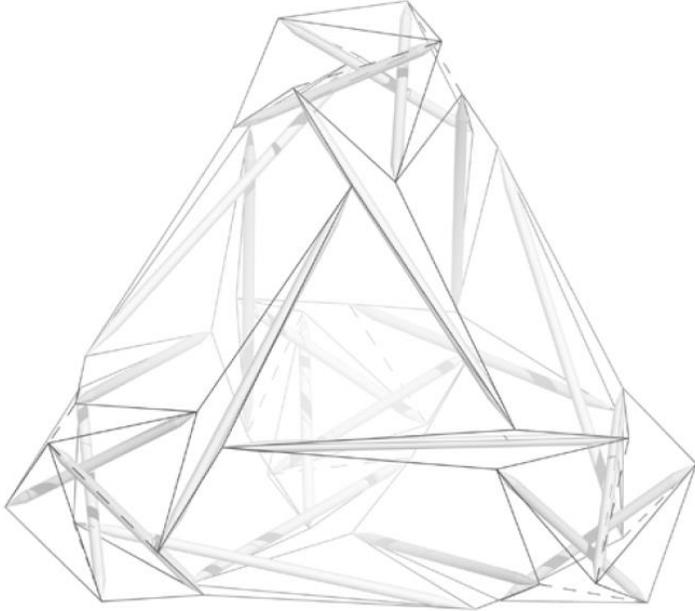
tomado de (Juan & Mirats Tur, 2008)

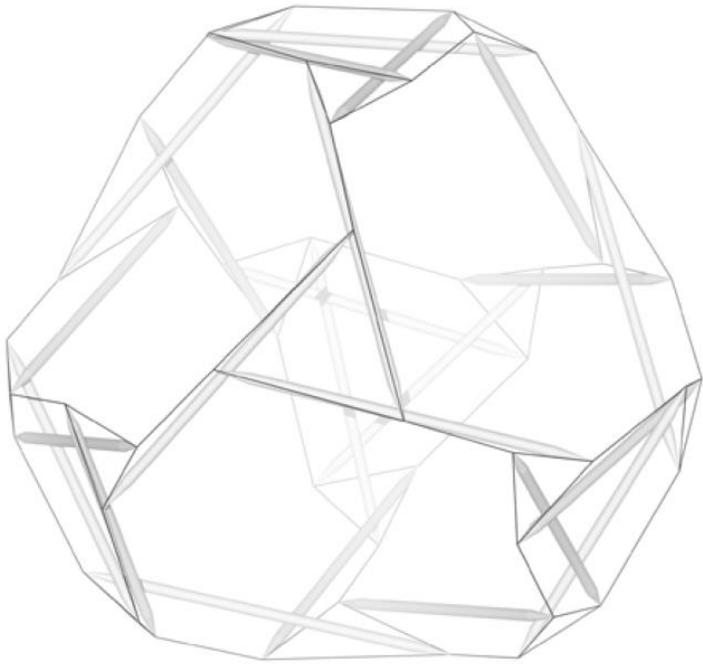
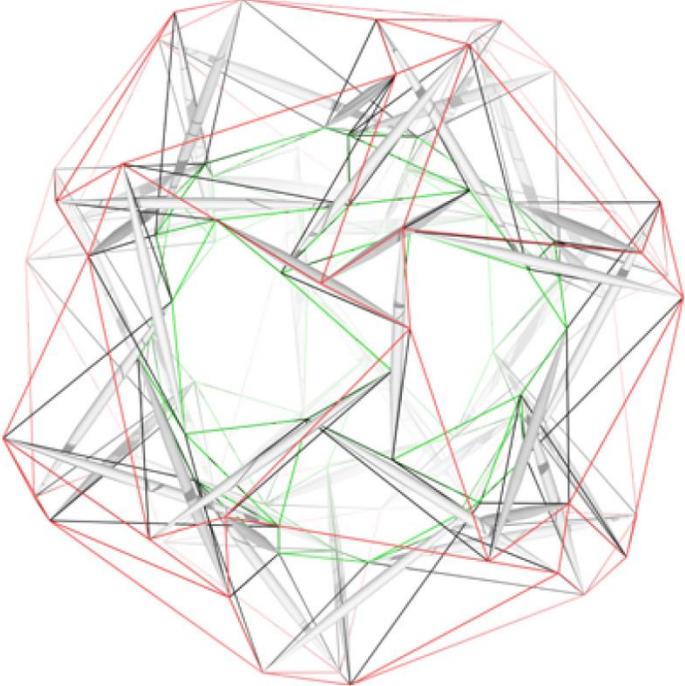
4.3. Sistemas de tensegridad encontrados a partir de los métodos de búsqueda de forma:

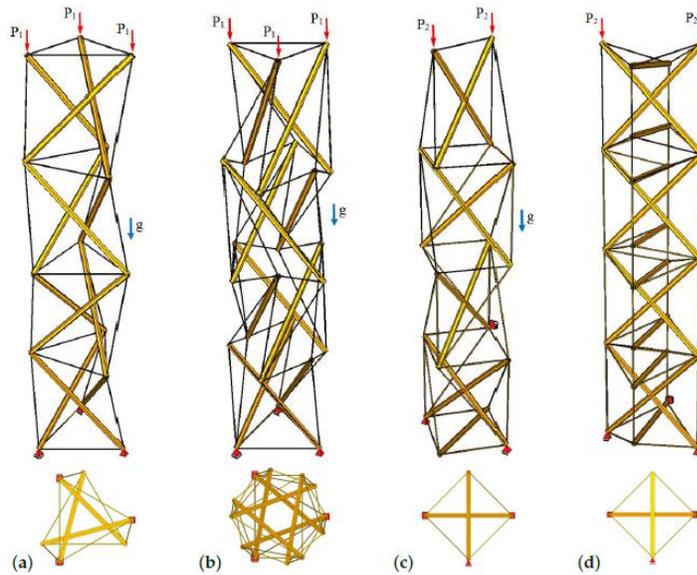
En esta sección se presentan algunas ilustraciones de los sistemas de tensegridad fundamentales y modelos matemáticos que se han propuesto a través de diferentes investigaciones, los cuales se pueden consolidar como futuras estructuras o la base para nuevas investigaciones.



 <p data-bbox="548 877 935 915">Tomado de (Burkhardt, 2008)</p>	<p data-bbox="1182 226 1511 260">Icosaedro de tensegridad</p>
 <p data-bbox="548 1654 935 1692"><i>Tomado de</i> (Burkhardt, 2008)</p>	<p data-bbox="1182 930 1511 963">Tetraedro de tensegridad</p>

 <p data-bbox="548 1014 935 1052"><i>Tomado de (Burkhardt, 2008)</i></p>	<p data-bbox="1179 226 1511 260">2v Diamante T-Tetraedro</p>
 <p data-bbox="548 1787 935 1824"><i>Tomado de (Burkhardt, 2008)</i></p>	<p data-bbox="1179 1066 1511 1100">4v Diamante T-Tetraedro</p>

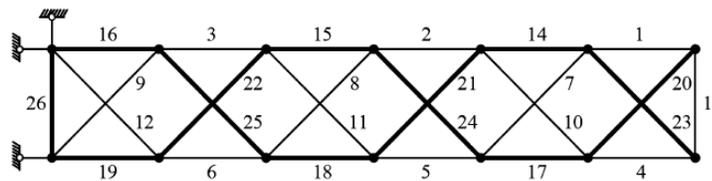
 <p data-bbox="548 982 935 1016"><i>Tomado de (Burkhardt, 2008)</i></p>	<p data-bbox="1179 226 1487 260">4v Zig-Zag T-Tetraedro</p>
 <p data-bbox="548 1755 935 1789"><i>Tomado de (Burkhardt, 2008)</i></p>	<p data-bbox="1179 1035 1370 1068">4v T-Octaedro</p>



Tomado de (S. Li et al., 2020; Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020)

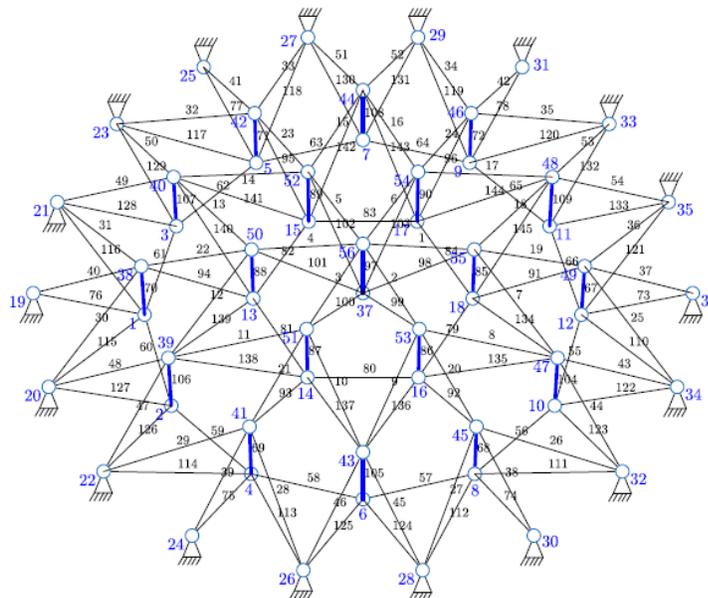
Propuesta de columnas de tensegridad basadas en secciones de:

- a) Simplex
- b) Simplex superpuesto
- c) X
- d) Octaedro

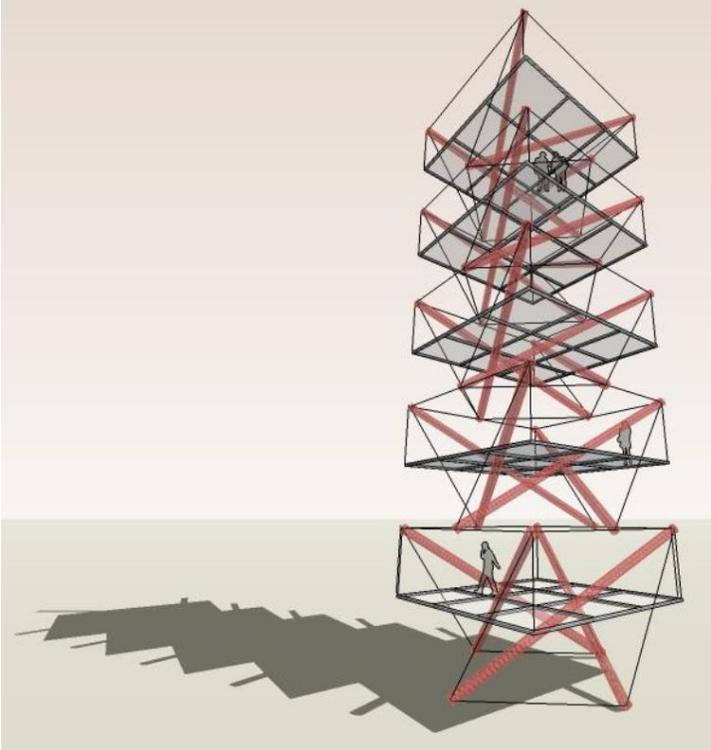
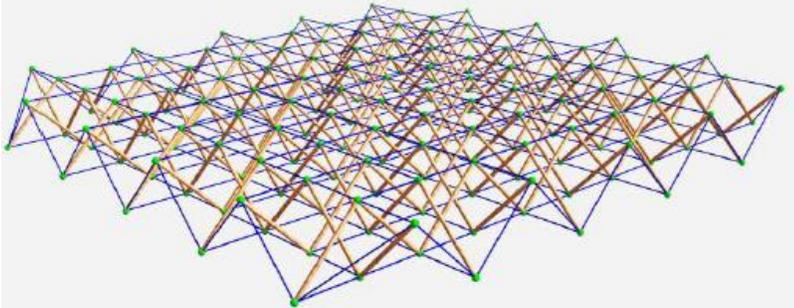
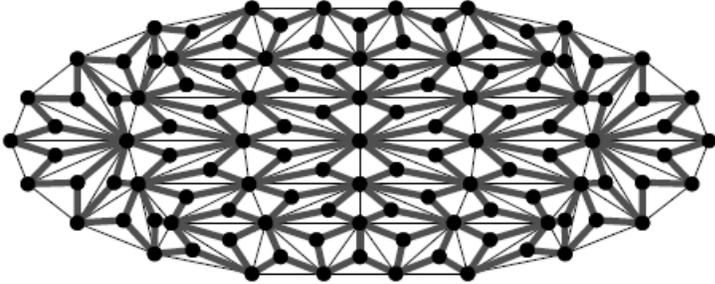


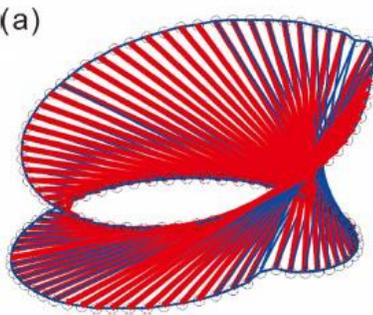
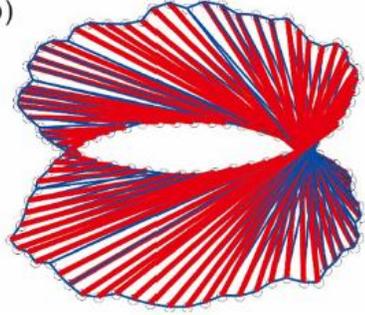
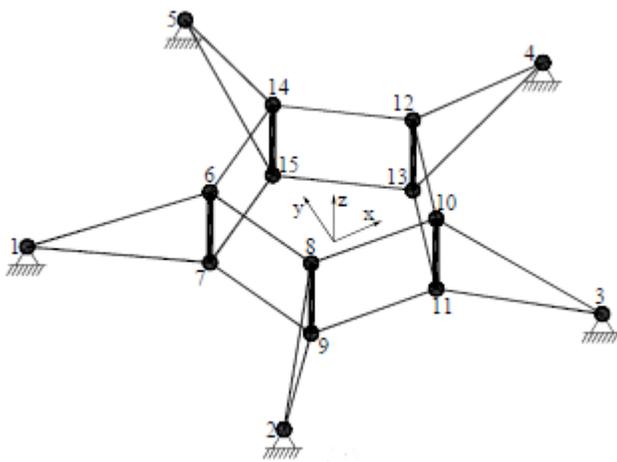
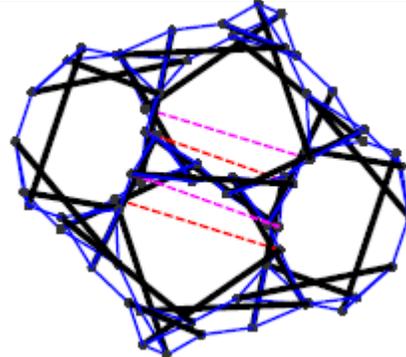
Tomado de (S. Li et al., 2020)

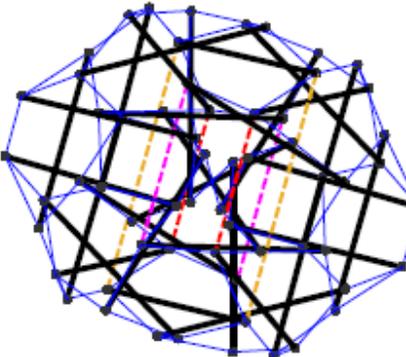
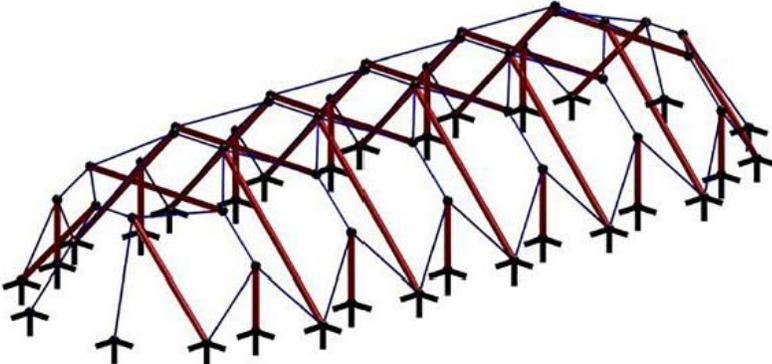
Propuesta de celosía plana de tensegridad.

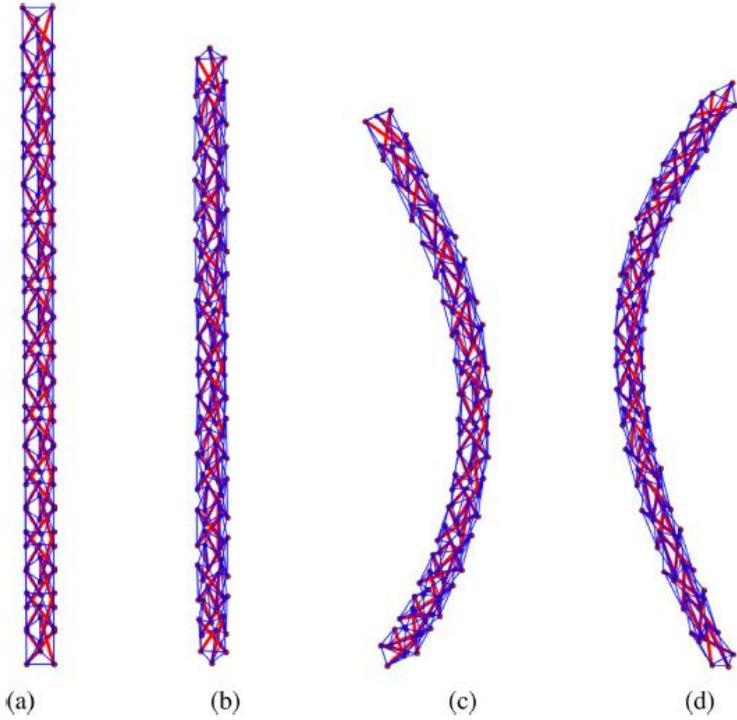
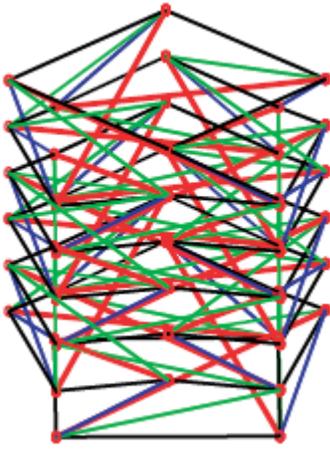


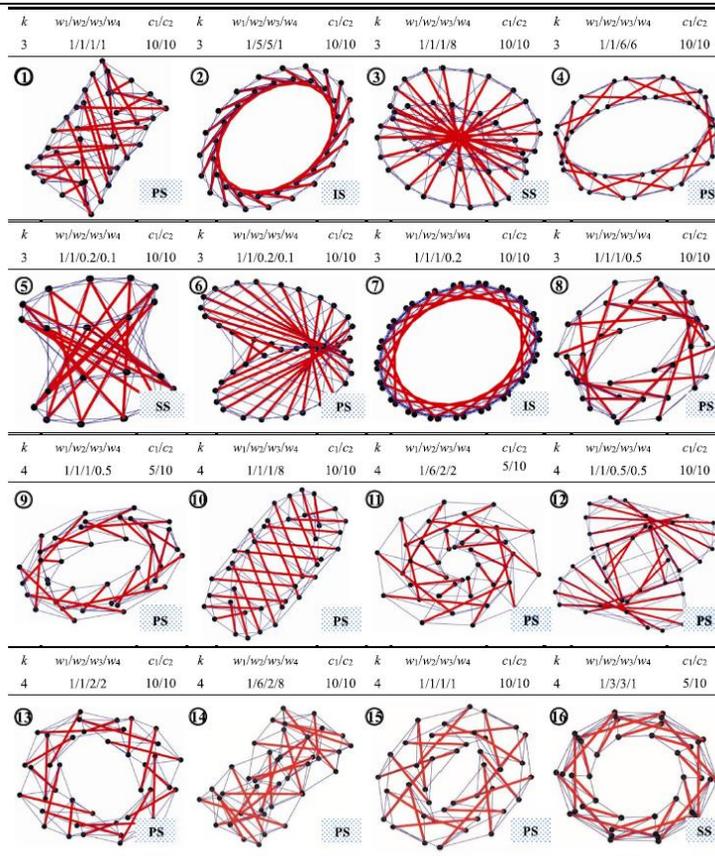
Cúpula tridimensional de Kiewitt basado en tensegridad.

<p>Tomado de (Mirzaaghazadeh et al., 2021)</p>	
 <p>Tomado de (Blanco Blanch, 2010)</p>	<p>Propuesta para torre de tensegridad con función de mirador.</p>
 <p>Tomado de (Gómez-Jáuregui & Otero, 2011)</p>	<p>Mallas de tensegridad de doble capa.</p>
	<p>Paso final de la creación de una estructura elíptica de tensegridad, determinada por el método de búsqueda de forma de multiplicación celular.</p>

<i>Tomado de (Aloui et al., 2018)</i>		
<p>(a)  (b) </p> <p><i>Tomado de (Yuan et al., 2017)</i></p>		<p>Tensegridad cilíndrica celular determinada por el método de búsqueda de forma de Levenberg-Marquardt.</p> <p>a) Configuración inicial. b) Configuración de equilibrio.</p>
		<p>Estructura tridimensional de cúpula de cable compuesta por cinco puntales.</p>
<i>Tomado de (Pietroni et al., 2017)</i>		
		<p>Dodecaedro de tensegridad con cables adicionales.</p>
<i>Tomado de (H. Wang et al., 2022)</i>		

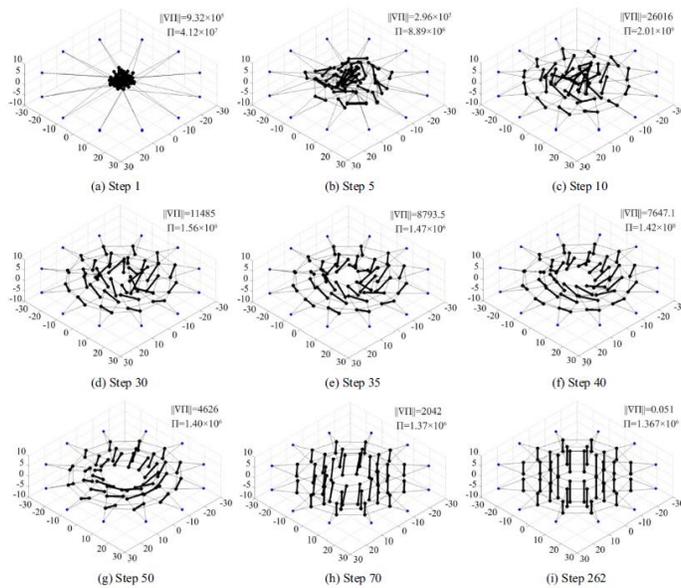
 <p data-bbox="521 632 964 663"><i>Tomado de (H. Wang et al., 2022)</i></p>	<p data-bbox="1182 226 1507 310">Icosaedro de tensegridad con cables adicionales.</p>
 <p data-bbox="548 1087 938 1119"><i>Tomado de (Botis et al., 2022)</i></p>	<p data-bbox="1182 684 1507 814">Propuesta de una estructura de tensegridad apoyada.</p>

 <p>(a) (b) (c) (d)</p> <p><i>Tomado de (Ohsaki & Zhang, 2015)</i></p>	<p>Torre de tensegridad de 20 capas.</p> <p>a) Forma inicial.</p> <p>b) Forma de equilibrio usando un material elástico lineal.</p> <p>c) Forma de equilibrio con un material rígido</p> <p>d) Forma de equilibrio con un material blando.</p>
 <p><i>Tomado de (Masic et al., 2005)</i></p>	<p>Torre de tensegridad Shell-class.</p>



Tomado de (P. Zhang et al., 2021)

Resultado de búsqueda de forma por el método de optimización de una estructura conformada por 20 puntales.



Tomado de (P. Zhang et al., 2021)

Proceso de búsqueda de forma por el método de optimización para una estructura espacial de celosía conformada por cables.

5. Análisis y diseño de estructuras de tensegridad.

Para continuar con el análisis de las estructuras de tensegridad, se debe conocer previamente una estructura que sea estable y auto esforzada, (esto se estudia por medio de alguno de los métodos presentados en el capítulo 4) lo que permite tener un punto de referencia y así aplicar un análisis más acertado. Se debe tener en cuenta que el análisis y diseño de estructuras de tensegridad aún no están definidos de forma estandarizada y no cuentan con lineamientos aceptados, esto quiere decir, que el diseño de estructuras de tensegridad no forma parte del diseño estructural convencional, sin embargo, los ingenieros buscan aproximaciones que les permitan conocer más de la estructura, por lo que se fundamentan en las bases de diseño que se establecen en las normas recomendadas de cada país (Colombia NSR-10) como base de partida, teniendo en cuenta los criterios de seguridad y utilidad que estas suministran, haciendo un análisis conjunto entre lo que ofrecen las estructuras de tensegridad y las pautas de diseño de estructuras convencionales. (Rhode-Barbarigos, 2012)

5.1. Análisis estático en estructuras de tensegridad:

Como se mencionó anteriormente del capítulo 3 se puede conocer una topología y un estado de auto esfuerzo en el cual se asegura la estabilidad de la estructura, a esto se le conoce como el primer estado de carga. En este punto se tienen todos los parámetros iniciales para asegurar que la estructura se encuentra en equilibrio estable, por lo general sin tener en cuenta cargas externas, luego es necesario hacer un segundo análisis incluyendo el peso propio de la estructura y hasta un tercer análisis para tener en cuenta las cargas externas aplicadas sobre esta, donde las cargas pueden ser de cualquier tipo. (Rhode-Barbarigos, 2012) (Gomez, 2016)

Los sistemas de tensegridad obtienen su rigidez de dos grupos, de las propiedades del material y la rigidez geométrica. La rigidez material está relacionada con las características físicas de los elementos y la rigidez geométrica está basada en la pretensión que se le aplica al sistema, es decir, actúa de forma directamente proporcional, al aumentar la pretensión en la estructura también se está aumentando su rigidez, funcionando como efecto estabilizador. Sin embargo, esta pretensión se

debe verificar cuidadosamente, debido a que un sistema que cuenta con un alto grado de pretensión también es un sistema que no tiene gran capacidad de carga, haciendo que su primer grupo de rigidez se vea afectado y los elementos puedan alcanzar su resistencia última si no se eligen correctamente sus propiedades físicas y geométricas. (Rhode-Barbarigos, 2012)

Estos sistemas son flexibles y pueden llegar a sufrir grandes deformaciones, por lo que requieren de un análisis que tenga en cuenta la actualización de la geometría junto con los incrementos de carga (análisis paramétrico), por lo que se usan métodos como el análisis estructural geométrico no lineal, método de relajación dinámica con amortiguación cinética, método de Newton Raphson, método de elementos discretos, etc. (Rhode-Barbarigos, 2012) (Gomez, 2016) (Winkelmann et al., 2018)

Para estos tipos de análisis se pueden incluir diferentes parámetros, por ejemplo, en (Rhode-Barbarigos, 2012), proporcionan como variable la sección transversal de los elementos y el grado de pretensión. En (Winkelmann et al., 2018), los autores evaluaron 3 grupos de parámetros. Para el grupo A escogieron, el diámetro de los elementos, módulos elásticos y el grado de pretensión, para el grupo B tomaron las longitudes de los elementos y la imperfección de la elevación de los nodos, por último, para el grupo C tomaron los radios que forman la estructura. Evidenciando que los grupos de parámetros que presentan mejores resultados son el B y el C. Por su parte, S. Li evaluó parámetros geométricos sobre la rigidez y la resistencia de la estructura. (S. Li et al., 2020) Esto permite inferir que los parámetros de análisis y diseño no están completamente estandarizados, actualmente estos se definen dependiendo del diseñador y del método seleccionado para hacer el análisis. Sin embargo, (Rhode-Barbarigos et al., 2010) basados en el comportamiento de las estructuras de tensegridad proporcionan cuatro criterios que se deben tener en cuenta para el análisis de este tipo de estructuras:

- Es necesario realizar un método de búsqueda de forma para identificar la topología inicial de la estructura de tensegridad en base a un auto esfuerzo inicial que permite las condiciones de auto equilibrio.

- La acción de la tensegridad implica grandes desplazamientos, por lo tanto, un análisis preciso de estos sistemas generalmente requiere la consideración de no linealidad geométrica.
- El comportamiento de la estructura no se puede predecir analizando los elementos por separado, se requiere de un análisis global de la estructura.
- Las estructuras de tensegridad pueden ser cinemáticamente indeterminadas.

Con este análisis se puede evidenciar el número de grados de auto esfuerzo y los mecanismos infinitesimales de un sistema de tensegridad, que son clave para definir si la estructura es determinada o indeterminada de forma estática y cinemática. (Botis et al., 2022)

5.2. Criterios de diseño basado en la NSR-10:

La NSR-10 divide sus lineamientos basados en el tipo de material a usar, la mayoría de los sistemas de tensegridad están compuesto por estructuras de acero y de madera, sin embargo, se han desarrollado estudios en materiales como el PVC, el aluminio, la guadua y en metamateriales de bajo consumo, adicional a esto se pueden evaluar sistemas de tensegridad compuestos por materiales como el FRP.

A continuación, se darán los lineamientos que se deben seguir si se desea hacer un diseño de una estructura de tensegridad en acero, por lo que se proporciona una breve descripción de lo mostrado en el título F de la NSR-10.

5.2.1. Lineamientos de diseño para estructuras en acero basado en la NSR-10 título F:

Como se ha mencionado en el transcurso de este documento las estructuras de tensegridad solo presentan solicitaciones de carga axial, cables a tracción y puntales a compresión. En la NSR-10 título F proporcionan los requerimientos mínimos que se deben cumplir para que un elemento dentro de una estructura que presenta las solicitaciones mencionadas anteriormente tenga un comportamiento adecuado y se pueda tener un margen de seguridad y confianza dentro del diseño. A continuación,

se muestran las ecuaciones principales adoptadas por la NSR-10 para los elementos a tracción y a compresión en acero:

- **Elementos a tracción:**

Nomenclatura:

- P_n Resistencia de diseño para el estado de fluencia.
 P_u Resistencia de diseño para el estado de rotura.
 F_y Esfuerzo de fluencia mínimo especificado para el tipo de acero
 F_u Esfuerzo de ultimo especificado para el tipo de acero
 A_g Área bruta del elemento
 A_e Área neta del elemento, Para cables $A_g = A_e$
 ϕ_t Coeficiente de reducción de resistencia para tensión

Para el caso de tracción se tiene que:

$$\phi P_n \geq P_u \quad (4.2.1-1)$$

La ecuación 4.2.1-1 representa el estado de fluencia por tensión sobre el área bruta:

$$P_n = F_y A_g \quad (4.2.1-2)$$

$$\phi_t = 0.9$$

La ecuación 4.2.1-2 representa el estado de rotura por tensión sobre el área neta:

$$P_u = F_y A_e \quad (4.2.1-3)$$

$$\phi_t = 0.75$$

Por lo que el valor de resistencia a la tensión se tomará como el menor valor obtenido para los estados límites de fluencia y rotura dados por la ecuación 4.2.1-2 y 4.2.1-3, respectivamente

- **Elementos a compresión:**

Nomenclatura:

P_n Resistencia de diseño para el estado de compresión.

F_{cr} Esfuerzo de pandeo por flexión.

F_e Esfuerzo crítico de pandeo elástico.

A_g Área bruta del elemento.

ϕ_c Coeficiente de reducción de resistencia para compresión.

Para el caso de compresión se tiene que:

$$\phi P_c \geq P_u \quad (4.2.1-4)$$

La ecuación 4.2.1-5 representa la resistencia nominal a compresión para el estado límite de pandeo por flexión, para miembros sin elementos esbeltos, donde este límite de esbeltez debe ser menor de 200 para elementos solicitados a compresión.

$$P_n = F_{cr} A_g \quad (4.2.1-5)$$

$$\phi_c = 0.9$$

Donde el esfuerzo de pandeo por flexión, F_{cr} se calcula como:

a) Si $\frac{KL}{r} \leq 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$ o $f_e \geq f_y$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{f_e} \right] f_y \quad (4.2.1-6)$$

b) Si $\frac{KL}{r} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}$ o $f_e < f_y$

$$F_{cr} = 0.877 f_y \quad (4.2.1-7)$$

Donde el esfuerzo crítico de pandeo elástico, F_e se calcula como:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (4.2.1-8)$$

Cabe destacar que en estructuras de tensegridad suele despreciarse este tipo de estado limite, debido a que los elementos comprimidos suelen ser muy cortos y no presentan pandeo por flexión, sin embargo, si debe evaluarse el pandeo local dependiendo de la sección que se use para el sistema de tensegridad.

Aunque solo se esté mostrando la formulación dada por la NSR-10 para elementos de acero, cabe destacar, que la NSR-10 cuenta con lineamientos para estructuras de madera, aluminio y guadua. Sin embargo, es importante resaltar que los coeficientes de reducción ϕ que se establecen dentro de la NSR-10 no están validados para estructuras de tensegridad. Para establecer coeficientes que permitan un mayor grado de seguridad al implementar este tipo de sistema, se debe evaluar el comportamiento de diferentes estructuras y comparar modelos matemáticos con prototipos a escala dentro de un laboratorio, de esta forma se logra minimizar la incertidumbre al diseñar. Como nota adicional para efectos académicos dentro de los ejercicios prácticos presentados en el Anexo 1, se usan los coeficientes de reducción suministrados por la NSR-10 para estructuras de acero, haciendo la aclaración de que estos solo son usados con fines académicos y para su uso profesional en estructuras reales deben evaluarse con mayor rigurosidad.

5.3. Herramientas computacionales para el análisis y diseño de estructuras de tensegridad:

Las estructuras de tensegridad han sido estudiadas durante setenta años, en su inicio era complejo llegar a encontrar formas que fueran estables y permitieran un análisis cercano a la ingeniería estructural. A partir de los años noventa con el auge de los computadores se empezaron a plantear nuevas herramientas computacionales que agilizaban el análisis de estas estructuras, haciendo que su complejidad disminuyera. Por esta razón en los último 20 años, las estructuras de tensegridad han tenido gran avance investigativo en los métodos de búsqueda de forma, en las herramientas de resolución de modelos matriciales y de problemas numéricos, en problemas de optimización, hasta software comerciales que permiten

evaluar estructuras convencionales se pueden ajustar de tal forma que se tenga una aproximación a los resultados de un sistema de tensegridad. Herramientas computacionales como Matlab o Python permiten programar los requerimientos de búsqueda de forma de una estructura de tensegridad y analizarlas con los complementos que estos tienen, programas como FEM Sofistick, ANSYS o ToyGL permiten hacer iteraciones de un análisis paramétrico para obtener el análisis estructural optimizado de un sistema de tensegridad garantizando la estabilidad y programas comerciales como SAP2000, Midas Gen, Robot Structural donde se pueden verificar deflexiones y cargas internas de un sistema de tensegridad bajo una topología establecida y un estado de auto esfuerzo definido.

Como se logró evidenciar, aunque en las estructuras de tensegridad no se cuente con lineamientos de análisis y diseño establecidos, las investigaciones presentadas en el presente documento permiten acercarnos a diseños que presentan una lógica estructural que dan cierto grado de seguridad. Esto se debe a los conceptos de la tensegridad, los lineamientos de diseño de estructuras convencionales y las herramientas computacionales de análisis, que dan a conocer información clave que permite adoptar estos diseños para su futura aplicación.

6. Diagrama de flujo para la concepción, análisis y diseño de estructuras de tensegridad.

En el siguiente diagrama de flujo se propone un enfoque claro de cómo interpretar las estructuras de tensegridad, analizarlas y diseñarlas, este diagrama se construyó basado en el diagrama propuesto en (Rhode-Barbarigos, 2012), el cual se complementó considerando el definir una necesidad o uso, escoger el método de búsqueda de forma y la definición de variables para alcanzar una estructura de tensegridad auto esforzada estable. Estos tres pasos se definieron debido a que se evidenció que la interpretación de las estructuras de tensegridad parte desde la búsqueda de forma, lo cual es uno de los puntos más importantes para el desarrollo de este tipo de sistemas, ya que sin una estructura de tensegridad previamente evaluada y clasificada como estructura auto esforzada estable no es posible llevar a cabo un análisis estructural y un diseño.

El flujo metodológico presentando en la figura 26, sigue el siguiente desarrollo:

Paso 1: Se define el uso de la estructura dependiendo de las necesidades del diseño a desarrollar.

Paso 2: Se elige el método de búsqueda de forma con el cual se establecerá la topología inicial del sistema de tensegridad.

Paso 3: Se evalúan las variables que aplican a cada método estableciendo la topología, la conectividad entre nodos y el estado de autoesfuerzo sin tener en cuenta cargas externas. Si el sistema obtenido es estable continua el paso 4, de no ser estable es necesario regresar al paso 2 o definir nuevas variables.

Paso 4: Se definen las propiedades físicas de los elementos que van a conformar el sistema.

Paso 5: En este paso se define el porcentaje de pretensión que se aplicara a los cables, reconociendo que en el paso 6 y 7 se debe desarrollar un análisis no lineal debido al comportamiento que presentan los cables. Adicional a esto, es importante asegurar que el comportamiento de la estructura solo presente solicitaciones bajo carga axial, compresión en barras y tensión en cables.

Como se mencionó a través de este documento el análisis no lineal se puede llevar a cabo bajo diferentes métodos como lo son los elementos finitos, la relajación dinámica, método de Newton Raphson, entre otros, pero también es posible hacer uso de herramientas computacionales como las mencionadas en la sección 5.3. A continuación, se presenta la formulación para llevar a cabo el análisis de una estructura de tensegridad a través del método de los elementos finitos:

Una estructura de tensegridad se construye a partir de elementos que solo responden a cargas axiales, por lo que el análisis se puede llevar a cabo como un elemento de tipo cercha. El comportamiento de un elemento tipo cercha se describe a través de la matriz de compatibilidad $B_e (\in \mathbb{R}^{1 \times 4})$ y la matriz de rigidez geométrica definida como $K_{Ge} (\in \mathbb{R}^{1 \times 4})$, teniendo en cuenta el estado de pretensión S_e : (Obara et al., 2019)

$$B_e = [-c \quad -s \quad c \quad s], K_{Ge} = \frac{S_e}{l_e} \begin{bmatrix} I_e & -I_e \\ -I_e & I_e \end{bmatrix}; I_e = \begin{bmatrix} s^2 & -cs \\ -cs & c^2 \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

Donde:

$$c = \frac{x_j - x_i}{l_e}, s = \frac{y_j - y_i}{l_e}$$

Las propiedades mecánicas de la estructura vienen dadas por la matriz de elasticidad $E (\in \mathbb{R}^{n \times n})$:

$$E = \text{diag} \left[\frac{E_1 A_1}{L_1} \quad \frac{E_2 A_2}{L_2} \quad \dots \quad \frac{E_n A_n}{L_n} \right] \quad (6-2)$$

A su vez la matriz $q (\in \mathbb{R}^{m \times 1})$ representa los grados de libertad m que tiene la estructura analizada:

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_m]^T \quad (6-3)$$

Construyendo la matriz de compatibilidad global que relaciona los grados de libertad de la estructura y la matriz de rigidez geométrica global, se obtiene la ecuación 6-4, siendo esta la ecuación de equilibrio a partir de los desplazamientos:

$$K_L q = P \quad (6-4)$$

Donde $K_L (\in \mathbb{R}^{m \times m})$ representa la matriz de rigidez lineal y $P (\in \mathbb{R}^{m \times 1})$ el vector de carga, La matriz K_L se obtiene como:

$$K_L = B^T E B \quad (6-5)$$

Para tener en cuenta la no linealidad de las ecuaciones de equilibrio y el grado de pretensión se incluye a la ecuación 6-4, la matriz de rigidez geométrica en el sistema:

$$(K_L + K_G) q = P \quad (6-6)$$

Basados en la ecuación 6-6 se pueden obtener los desplazamientos, las reacciones y las cargas internas en el sistema, de esta forma dando solución a la estructura de tensegridad conservando las condiciones de no linealidad y asegurando que los elementos se comportan bajo carga axial. (Obara et al., 2019) Para obtener una convergencia más rápida el análisis no lineal en el anexo 1, se llevará a cabo mediante el programa SAP2000.

Paso 6: Se realiza el análisis estructural, bajo el estado de esfuerzo establecido en el paso 5 incluyendo el peso propio de la estructura, si la estructura cumple con los estados límites de resistencia mostrados en la sección 5.2 y todos los cables se encuentran tensados, se continua en el paso 7, de lo contrario es necesario redefinir las propiedades físicas de los elementos en el paso 4 o definir un nuevo estado de pretensión en el paso 5.

Paso 7: Se realiza el análisis estructural, bajo el estado de esfuerzo establecido en el paso 5, incluyendo el peso propio de la estructura y las cargas adicionales, si la estructura cumple con los estados límites de resistencia, todos los cables se encuentran tensados y las deformaciones cumplen con los estados límites de servicio, continua el paso 8, de lo contrario es necesario redefinir las propiedades físicas de los elementos en el paso 4 o definir un nuevo estado de pretensión en el paso 5.

Paso 8: Se desarrollo el análisis completo para una estructura de tensegridad que satisface las condiciones de diseño de la NSR-10 y los principios de análisis con las que estas funcionan.

Como se puede evidenciar las estructuras de tensegridad requieren de procesos iterativos en cada una de sus etapas, desde la búsqueda de forma hasta el análisis estructural, por

lo que es un proceso de un alto grado de dificultad y con alto consumo de tiempo en el análisis.

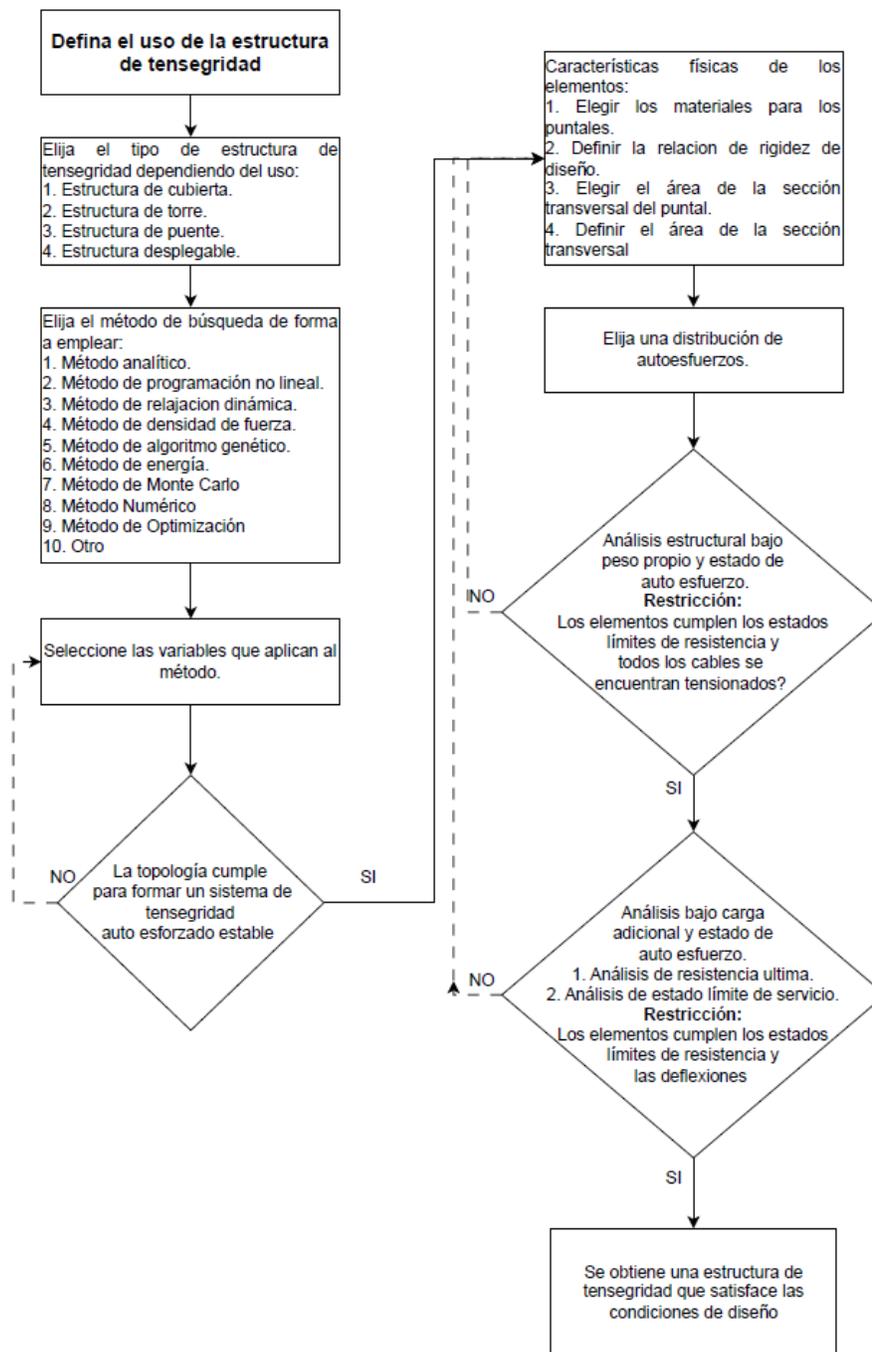


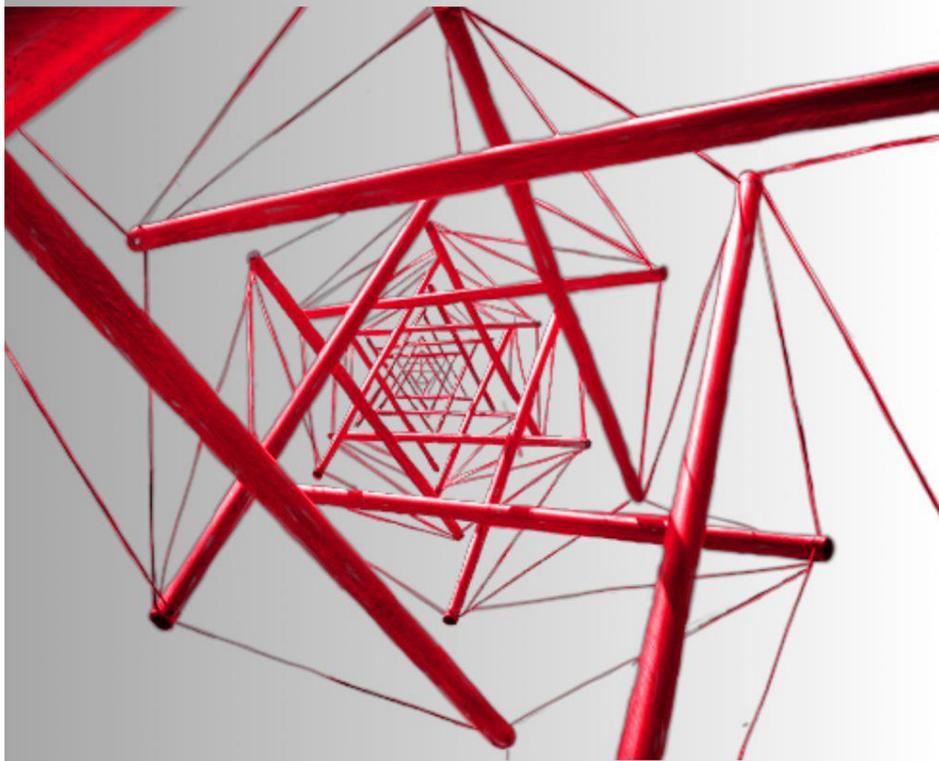
Figura 26. Diagrama de flujo para la aplicación de concepción, análisis y diseño de estructuras de tensegridad. Tomado de (Rhode-Barbarigos, 2012) y modificado por fuente propia.

7. Propuesta del modelo de enseñanza.

Para el modelo de enseñanza se estudiaron tres diferentes ideas que dieran respuesta al problema inicial planteado, se evaluó la posibilidad de generar un laboratorio, videos explicativos o un libro. Basados en la investigación se optó por realizar la propuesta de un libro de fundamentos de estructuras de tensegridad, ya que se evidenció que la mayor parte de investigaciones tienen un gran nivel de dificultad y no centran sus esfuerzos en los fundamentos que permiten interpretar, analizar y diseñar estructuras de tensegridad aplicadas a la ingeniería estructural para estudiantes de pregrado, a continuación, se presenta la portada del libro y el contenido de este:

Fundamentos en estructuras de tensegridad

Aplicado a la ingeniería estructural



Germán Santiago Olivar Carreño

Figura 27. Propuesta de portada para el libro *Fundamentos de estructuras de tensegridad*. Tomado de fuente propia.

Tabla 5. Contenido del libro fundamentos de estructuras de tensegridad.

1. Reseña histórica
1.1. Origen
1.2. Aplicaciones
1.2.1. Estructuras de cubierta y domos
1.2.2. Torres
1.2.3. Puentes
1.2.4. Estructuras desplegadas
2. Características
2.1. Ventajas y desventajas
2.2. Tensegridad pura y tensegridad falsa
2.3. Clasificación de las estructuras de tensegridad
3. Búsqueda de forma
3.1. Métodos de búsqueda de forma cinemáticos
3.2. Métodos de búsqueda de forma estáticos
3.3. Sistemas de tensegridad encontrados a partir de los métodos de búsqueda de forma.
4. Análisis y diseño de estructuras de tensegridad
4.1. Análisis estático de estructuras de tensegridad
4.2. Criterios de diseño basados en la NSR
4.2.1. Lineamientos de diseño para estructuras en acero.
4.2.2. Lineamientos de diseño para estructuras en madera.
4.3. Herramientas computacionales para el análisis y diseño.
5. Diagrama de flujo para la concepción, análisis y diseño de estructuras de tensegridad.
6. Ejemplos prácticos.
6.1. Ejemplo 1. Armadura de tensegridad.
6.1. Ejemplo 2. Estructura espacial de cúpula de tensegridad.

Tomado de fuente propia

8. Puntos destacados de la investigación.

Esta revisión de literatura ha permitido identificar múltiples conceptos con relación a las aplicaciones, características, métodos de búsqueda de forma análisis y diseño de las estructuras de tensegridad. A continuación, se presentan algunos puntos a resaltar:

- El conocer las características, ventajas y desventajas de las estructuras de tensegridad permite conocer la viabilidad de la aplicación de estos sistemas a la ingeniería estructural, de esta forma se puede garantizar que la estructura va a ser solución a la necesidad que se desee suplir o el proyecto que se plantee ejecutar.
- Las estructuras de tensegridad presentan múltiples aplicaciones, entre las mostradas en este documento están los domos, cubiertas, torres, puentes y estructuras desplegables, sin embargo, estas no son las únicas aplicaciones que pueden llevarse a cabo bajo un modelo de tensegridad, también puede ser estudiada la posibilidad de llevar a cabo estudios para estructuras como torres eléctricas, parques eólicos, mezanines temporales y de esta forma ampliar su rango de aplicación.
- Las estructuras de tensegridad presentan características impactantes a la hora de su aplicación, entre ellas se tiene la capacidad de estar en equilibrio sin necesidad de factores externos, esto quiere decir que la estructura siempre buscara el equilibrio aun cuando esta se encuentre suspendida en el aire. Por lo tanto, la gravedad no tiene ningún criterio de equilibrio dentro de estos sistemas y esto podría significar que sea posible hacer estructuras de tensegridad que tengan capacidad de carga, sin importar el lugar donde se construyan. Siendo esta una de las razones para ser usada en la ingeniería aeroespacial.
- Las estructuras de tensegridad en su estado más puro tienen limitadas aplicaciones en la ingeniería estructural, sin embargo, el concepto de metatensegridad permite tener acercamiento a sistemas más estables que permiten el análisis con apoyos y cargas externas, por lo que se evidencia que este tipo de estructuras son aplicables como un sistema estructural alternativo, tal y como se reflejó en las aplicaciones mostradas.
- La discusión entre si la tensegridad puede aplicarse a la ingeniería o no, es algo que genera dudas al momento de idealizar una estructura de este tipo, sin embargo, aunque existan los conceptos de tensegridad pura y metatensegridad, esto no cambia el hecho de que sea cual sea el régimen en el que se clasifiquen, estas requieren de un gran reto

de análisis. Debido a esto, el estudiar estos sistemas como alternativa estructural permite desarrollar conocimiento en un campo del cual se está empezando a aprender, más allá de definir si es puro o es falso, o definir si se puede usar o no, es resolver como interpretar este tipo de estructuras, generando así las bases que abran las puertas al conocimiento de los sistemas de tenseguridad.

- Los métodos de búsqueda de forma son la herramienta principal para el análisis inicial de estructuras de tenseguridad, sin embargo, estos métodos muestran un alto grado de complejidad y no todos los métodos funcionan de forma correcta para encontrar de forma ágil los estados de auto esfuerzo estable.
- El estudio de los métodos de búsqueda de forma para la aplicación a estructuras de tenseguridad es bastante amplio y se han presentado grandes avances gracias a las herramientas computacionales con las que se cuentan a la fecha, sin embargo, sigue existiendo gran incertidumbre alrededor de que método arroja los mejores resultados, por esta razón es de vital importancia seguir trabajando en estos, para establecer una ruta más definida de cómo abordar los problemas de búsqueda de forma en estructuras de tenseguridad.
- El análisis y diseño no cuentan con lineamientos estandarizados, a pesar de ello, los métodos de optimización, el análisis paramétrico o los análisis de sensibilidad permiten obtener una respuesta optima de las estructuras de tenseguridad, sin embargo, se requiere de más estudios, para lograr estandarizar este tipo de sistemas.
- Implementar las normas establecidas por cada país para el análisis y diseño de estructuras tradicionales en sistemas de tenseguridad, permite tener un grado de confianza mayor a la hora de generar aplicaciones de estos sistemas, debido a que estas normas establecen los mínimos requeridos para que una estructura presente un buen comportamiento, aunque su naturaleza no sea igual, podemos tener una aproximación de su comportamiento.
- El análisis de las estructuras de tenseguridad se realiza a través de iteraciones hasta lograr la configuración deseada, esto puede generar un largo trabajo computacional, generando costos elevados, sin garantizar que se llegue a una solución viable.
- La construcción de estos sistemas puede llegar a ser compleja, debido a que se deben identificar los patrones que siguen los sistemas de tenseguridad de forma milimétrica, esto nos permite pensar en que no solo se debe aprender a analizar y diseñar, también

se deben establecer técnicas constructivas que faciliten la implementación de estas estructuras.

- Tanto para los sistemas estructurales tradicionales como para los sistemas de tensegridad, las herramientas computacionales generan una gran ayuda para el análisis de estos, sin embargo, las estructuras de tensegridad requieren de programas de análisis que permita hacer iteraciones durante el análisis y diseño de forma automatizada, debido a que, es necesario evaluar 3 procesos los cuales empiezan por el estado de auto esfuerzo adecuado para que la estructura sea estable, posteriormente se debe verificar el estado de auto esfuerzo bajo peso propio y por ultimo un análisis bajo cargas externas estáticas o dinámicas. Esto hace que en cada uno de los procesos mencionados se tengan múltiples resultados para la estructura.

Conclusiones generales.

- a) Analizar y diseñar estructuras de tensegridad es una tarea desafiante. Este compendio de información permitió conocer el contexto histórico, interpretar las características, comprender las tipologías, analizar cómo se comportan las cargas y revisar las propuestas para análisis y diseño de las estructuras de tensegridad.
- b) El flujo metodológico presenta una ruta para el análisis y diseño óptimo de las estructuras de tensegridad. Seguir este flujo metodológico permitirá a los interesados una interpretación lógica de este tipo de sistema.
- c) El modelo de enseñanza es un libro que refleja el compendio de información suministrado dentro de este documento, de esta forma aportando a los estudiantes de pregrado o a personas interesadas en este tipo de sistema una base sólida para la interpretación óptima de este tipo de estructuras.

Investigaciones futuras.

Este trabajo de grado pretende abrir una línea de investigación que se encargue de solucionar algunos de los problemas que presentan este tipo de estructuras, así que, como propuestas para futuros trabajos se propone:

- a) Realizar el análisis de búsqueda de forma para estructuras comúnmente usadas en ingeniería civil como lo son columnas, vigas, armaduras, pórticos y evidenciar si cuentan con la viabilidad para su aplicación.
- b) Presentar una propuesta de estandarización para el análisis y diseño de estructuras de tensegidad.
- c) Revisar el comportamiento de estructuras tensadas de tensegidad, redes de cables, estructuras de membranas y comparar el funcionamiento de cada una de estas para cumplir la misma función.
- d) Evaluar el comportamiento de la rigidez en una estructura de tensegidad estable, para diferentes materiales, como el acero, madera, guadua, aluminio, FRP, etc.
- e) Análisis, Diseño y Construcción de una estructura de tensegidad en la Escuela Colombiana de Ingeniería. Propuesta: Estructura de cubierta para el paradero de buses en frente de la Escuela Colombiana de Ingeniería.
- f) Comparar una armadura de tensegidad con una armadura convencional y evaluar parámetros de resistencia, costos, eficiencia estructural y emisiones de CO₂.
- g) Evaluar la viabilidad en la aplicación de estructuras de tensegidad para torres eléctricas y parques eólicos.
- h) Evaluación del comportamiento de una estructura de tensegidad cargas dinámicas.

Anexo 1: Ejercicios prácticos usando el software comercial SAP2000.

Este anexo se realiza con el fin de presentar algunos ejercicios prácticos, que permiten comprender la ciencia detrás de las estructuras de tensegridad, analizar los conceptos aprendidos dentro de este compendio y aplicar el flujo metodológico presentado en el capítulo 6.

Se evalúan tres ejercicios prácticos con relación a diferentes elementos estructurales, los cuales son una armadura, columna y estructura de cubierta. La topología se tomó de las estructuras mostradas en el capítulo 4.3. Los resultados se obtienen del programa de análisis computacional SAP2000, debido a que este cuenta con un módulo de cables muy completo, que permite al usuario variar la pretensión de los cables, ajustando los valores de la fuerza o las deformaciones en los cables y barras. En los ejercicios mostrados se optó por variar la pretensión aplicando directamente un porcentaje de la fuerza resistente total del cable, de esta forma se controla la tensión en los cables y la compresión en las barras. Adicional a esto, para el análisis estático se deben tener en cuenta las siguientes hipótesis dadas por (Pleșcan et al., 2018):

- Las barras son rectas y los ejes de las barras son concurrentes en los nodos.
- Las fuerzas externas se aplican en los nodos.
- Las barras se encuentran articuladas en los nodos

De esta forma se garantiza que los elementos se encuentran sometidos solo a cargas de tensión y compresión, garantizando que la deformación total de la estructura estará en función del cambio de longitud en las barras.(Pleșcan et al., 2018)

A continuación, se presentan los ejercicios propuestos con su respectiva solución paso a paso.

Nota: Los pasos 1,2 y 3 se obtienen a través de investigaciones, por lo que en estos no se presenta de forma analítica su obtención.

Ejercicio A: Evalúe el comportamiento estático de la armadura en voladizo mostrada en la figura 28 por medio del programa SAP2000. Se conocen los siguientes parámetros:

- Los cables de acero son tipo Boa 6x19 con alma de acero y fibra de 9,5 mm de diámetro, compuesto por un acero tipo A416 Gr 250.
- Las barras son de acero de 50 mm de diámetro y espesor de 3 mm, compuestas por un acero tipo A500 grado B para perfiles redondos.
- La pretensión que se debe usar es del 25% de la resistencia total del cable.
- La armadura está sometida a una carga de 2 kN como carga adicional dispuesta en cada uno de sus nodos.

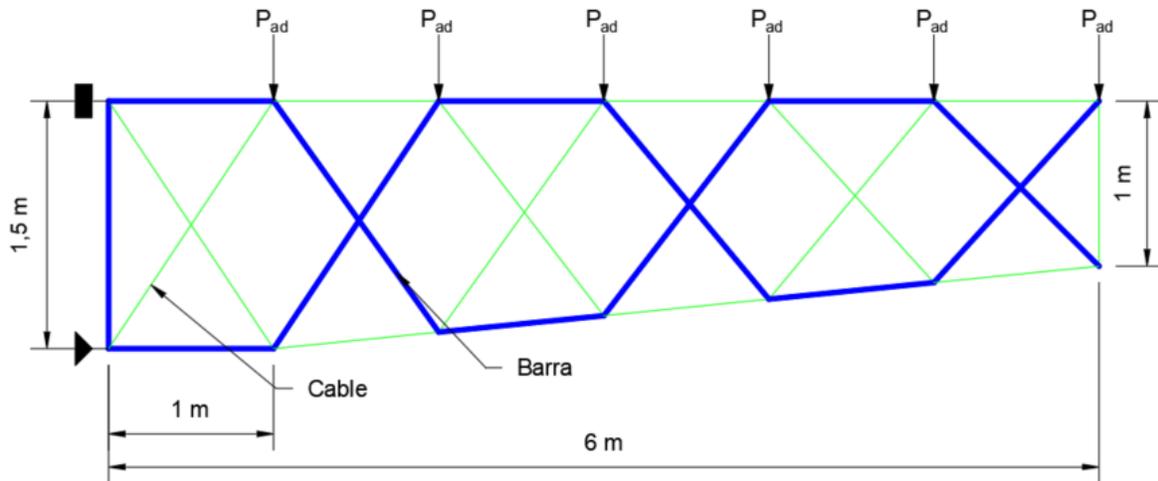


Figura 28. Armadura de tensegridad ejemplo práctico.

Solución punto a:

- **Paso 1:** Se define el tipo de uso de la estructura como una armadura de tensegridad tipo $k = 2$, debido a que se conectan dos puntales entre sí en el mismo nodo. Este tipo de armadura define dos unidades básicas que conforman el sistema, conocidas como unidad A y Unidad B. La unidad A consta de dos elementos horizontales compuestos por cables y dos elementos diagonales conformados por barras, mientras que la unidad B, consta de dos elementos horizontales compuestos por barras y dos elementos diagonales conformados por cables. (S. Li et al., 2020)
- **Paso 2:** Para encontrar la forma estable de la armadura se utilizó un método de optimización. (S. Li et al., 2020)

- **Paso 3:** Basado en (S. Li et al., 2020) se evidencia que el sistema de tenseguridad es estable.
- **Paso 4:** Definición de materiales, rigidez, y áreas de sección transversal.

En la figura 29, 30 y 31 se muestra la definición de los materiales, secciones transversales de las barras y de los cables que conforman el sistema en el programa SAP2000, respectivamente.

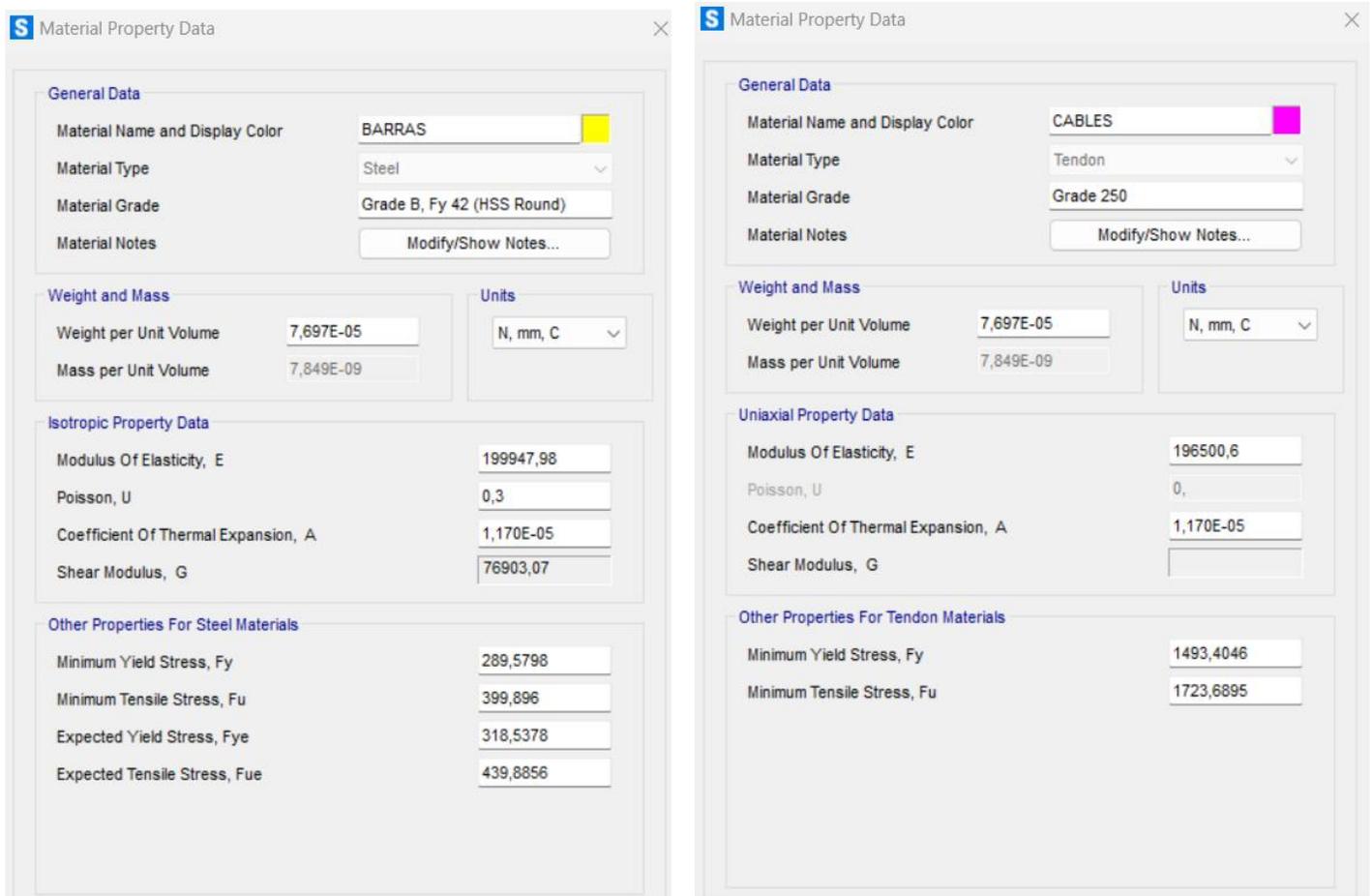


Figura 29. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.

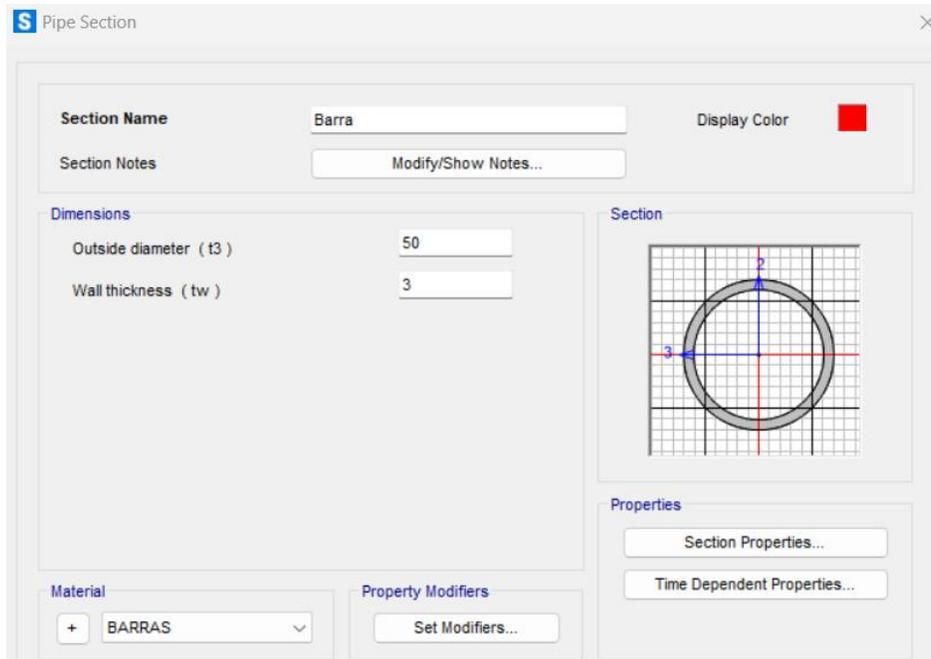


Figura 30. Sección barras.

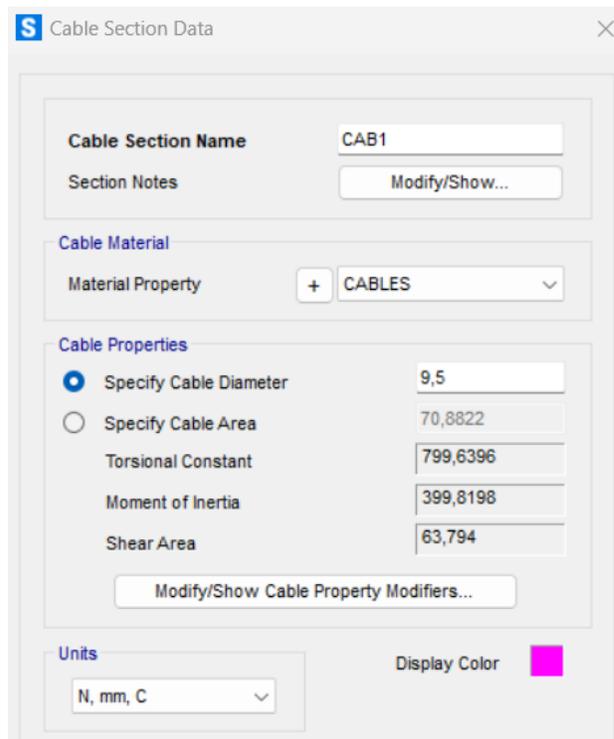


Figura 31. Sección cables.

- **Paso 5:** Se elige el estado de autoesfuerzo de la estructura estableciendo la pretensión del cable como el 25% de su resistencia última. Por tanto, es necesario verificar la ecuación 4.2.1-1, 4.2.1-2 y 4.2.1-3 (Ver sección 4.2.1), con el fin de encontrar el valor de la pretensión.

$$P_n = \phi_t F_y A_g = \frac{0,9 \cdot 1493 \text{ MPa} \cdot 70.88 \text{ mm}^2}{1000} = 95.3 \text{ kN}$$

$$P_n = \phi_t F_u A_e = \frac{0,75 \cdot 1723 \text{ MPa} \cdot 70.88 \text{ mm}^2}{1000} = 91.6 \text{ kN}$$

Como se mencionó en el capítulo 5.2 se escoge el estado limite que presente el menor valor de resistencia en este caso, será el estado límite de rotura, por lo tanto, el valor de pretensión inicial estará dado por:

$$f_t = 0,25 P_n = 22.9 \text{ kN} \approx 23 \text{ kN}$$

Antes de evaluar la estructura es necesario asegurar que los elementos solo soporten tensión para los cables y compresión para las barras por lo que se realiza el procedimiento mostrado en la figura 32 dentro del programa.

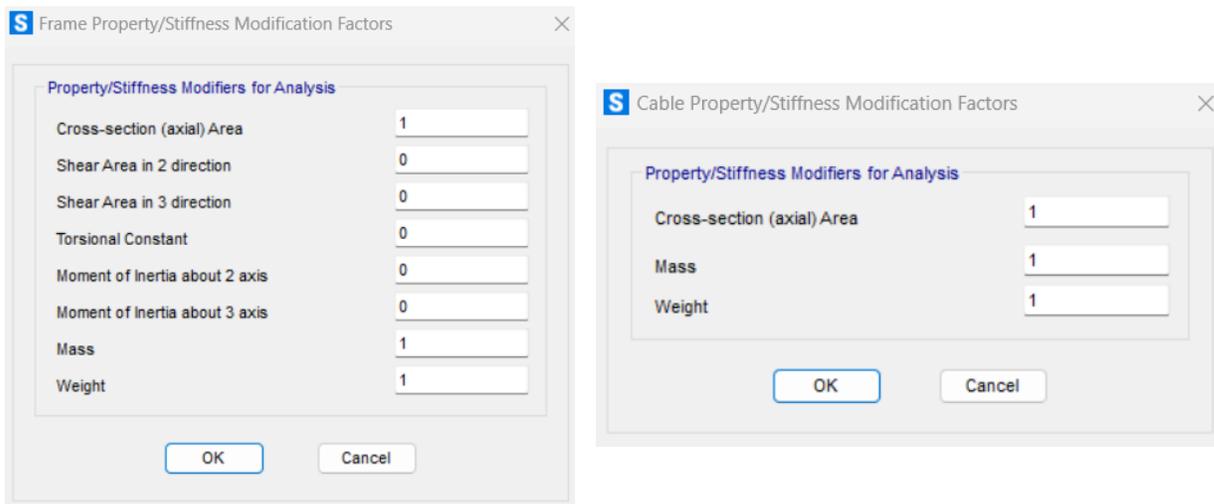


Figura 32. Elementos a compresión y tensión.

Partiendo de la información mostrada, es posible establecer el estado de pretensión en los cables, y empezar con el primer análisis de la estructura dentro de SAP2000.

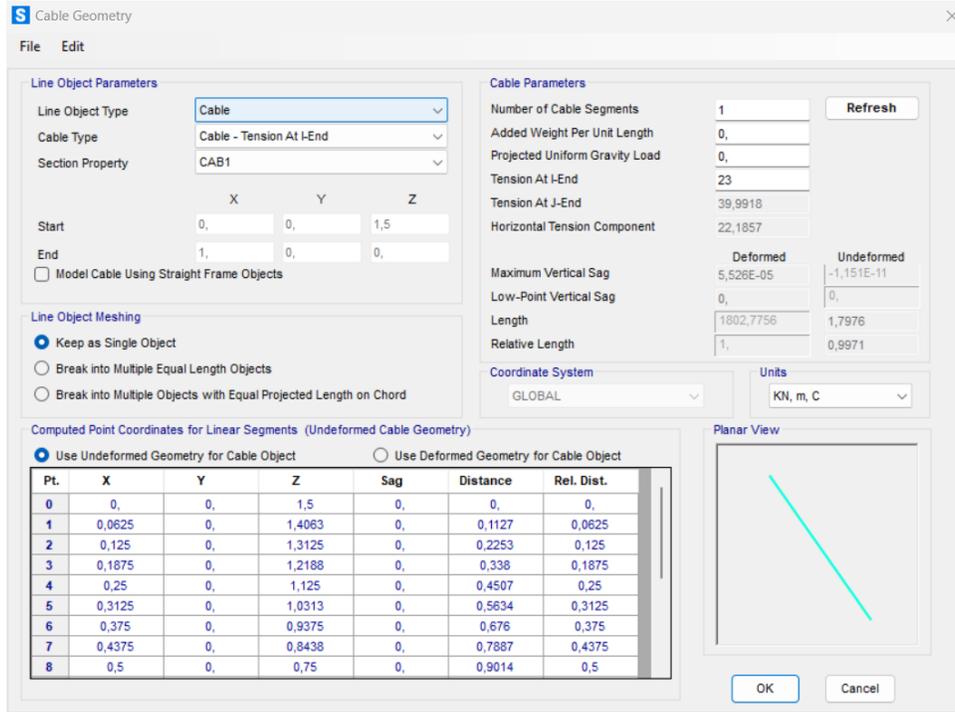


Figura 33. Definición porcentaje de tensión en cables.

En la figura 33, es posible evidenciar como se establece la tensión dentro del cable, donde primero se define un objetivo de tensión, para que el programa calcule cual será la longitud deformada, la longitud sin deformar y la máxima deformación que tendrá el cable.

Posteriormente se establece los casos de carga para realizar un análisis no lineal, debido a que es una estructura compuesta por cables, lo que se evidencia en la figura 34.

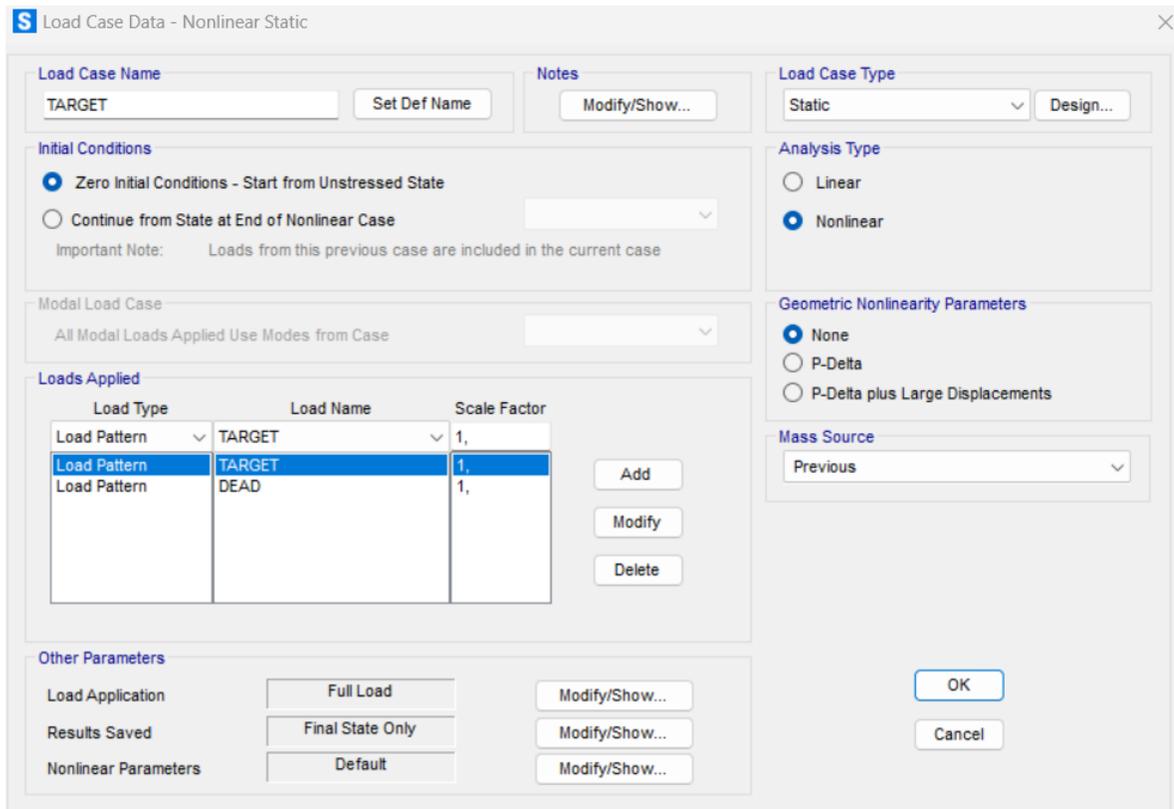
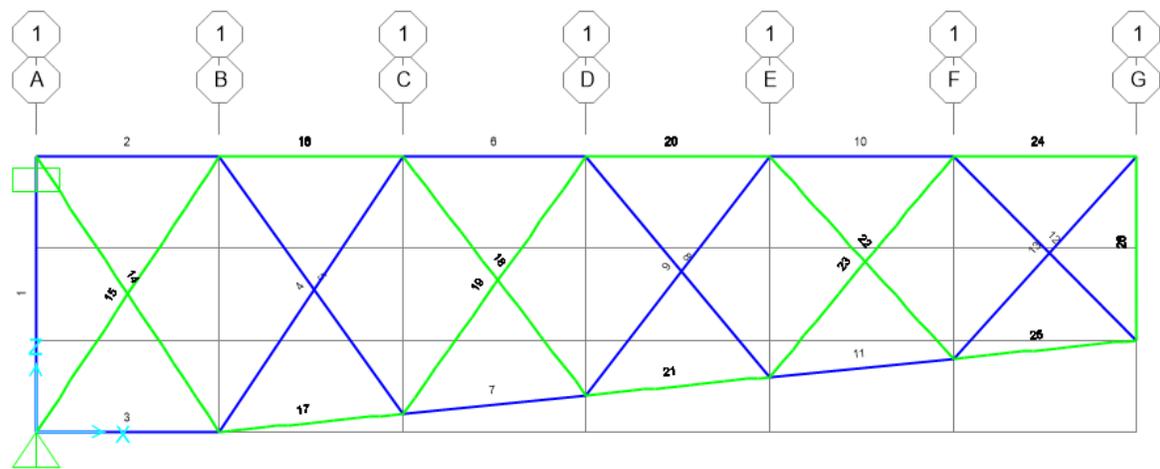


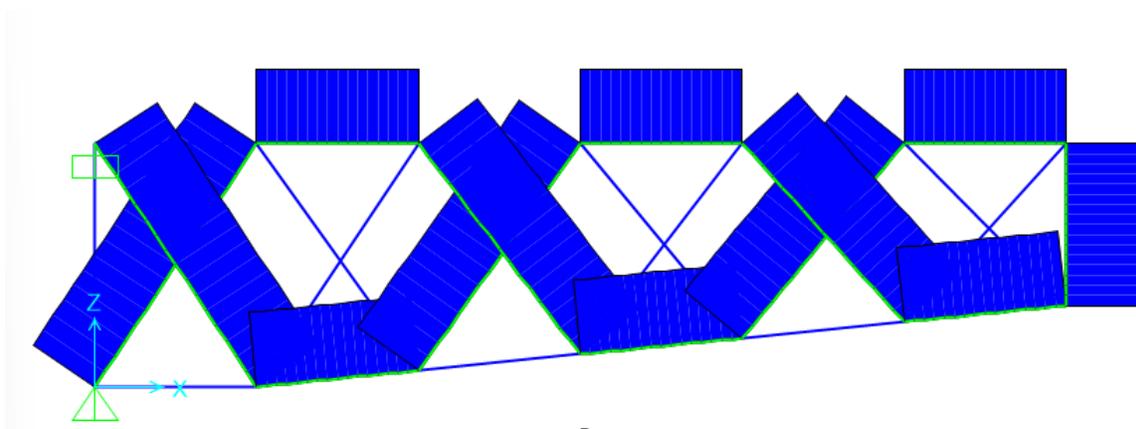
Figura 34. Casos de carga, definición no lineal.

El análisis no lineal se realiza para todos los casos de carga, los cuales se definieron dentro del programa como peso propio, autoesfuerzo y carga muerta adicional.

En la figura 35, se evidencia el estado de pretensión de la armadura, lo que nos señala que sin tener en cuenta la carga muerta relacionada al peso propio, la estructura se encuentra en equilibrio.



A



B

Figura 35. A) Numeración de los elementos B) Estado de carga interna solo pretensión.

- **Paso 6:** Se analiza la estructura incluyendo el peso propio, verificando si todos los cables se encuentran tensionados y los elementos cumplen con los estados limite.

En la figura 36, se puede observar que todos los cables se encuentran a tensión y las barras a compresión, también es posible identificar que la deformación máxima en dirección Z es de 7.5 mm.

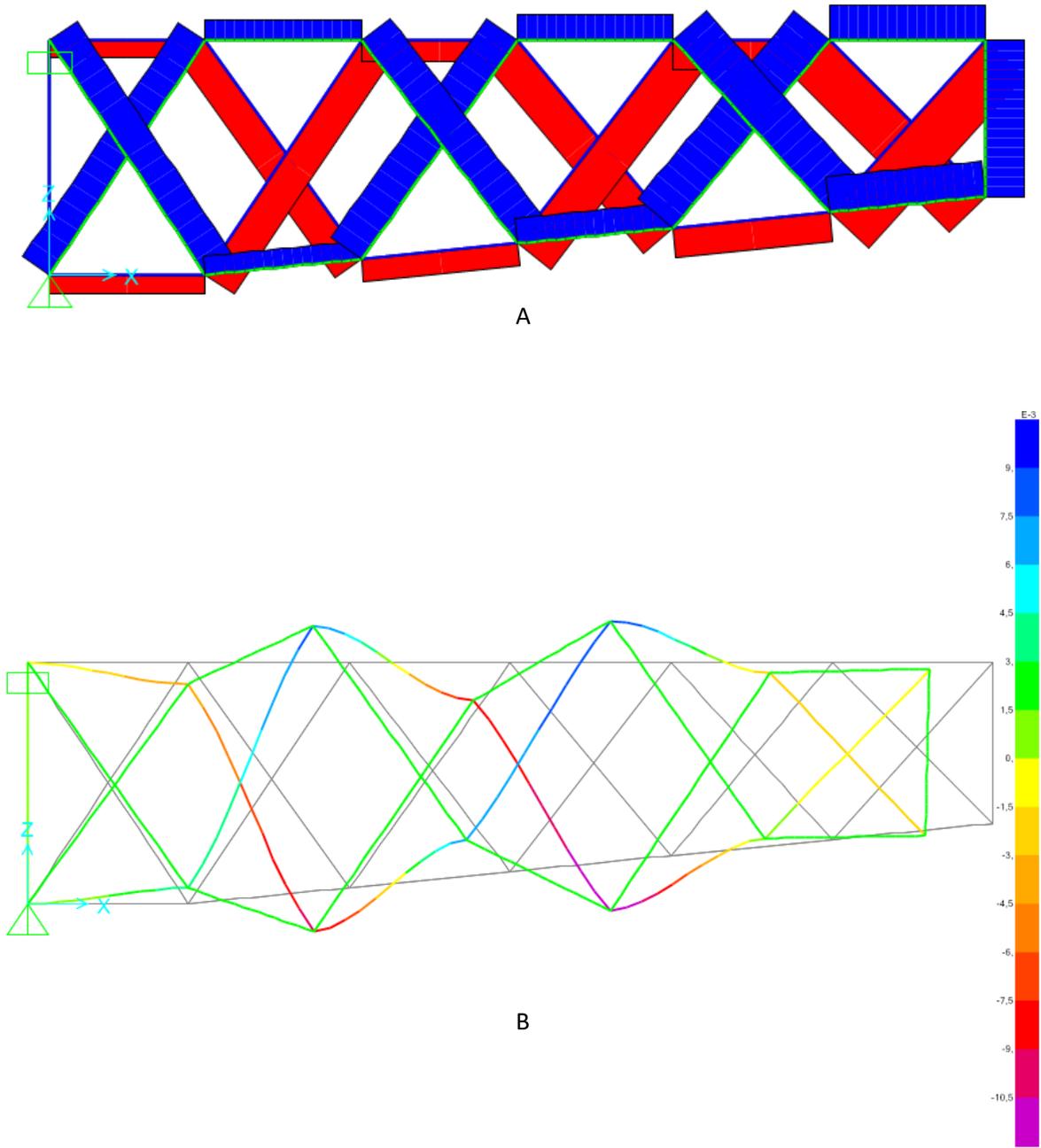


Figura 36. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z.

Tabla 3. Carga interna en cada elemento.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
1	TARGET	-0,03	Compresión
2	TARGET	-10,70	Compresión
3	TARGET	-12,73	Compresión
4	TARGET	-22,57	Compresión
5	TARGET	-21,08	Compresión
6	TARGET	-13,74	Compresión
7	TARGET	-14,64	Compresión
8	TARGET	-25,35	Compresión
9	TARGET	-26,87	Compresión
10	TARGET	-18,79	Compresión
11	TARGET	-19,00	Compresión
12	TARGET	-32,19	Compresión
13	TARGET	-33,83	Compresión
14	TARGET	21,43	Tensión
15	TARGET	20,74	Tensión
16	TARGET	13,06	Tensión
17	TARGET	11,76	Tensión
18	TARGET	23,00	Tensión
19	TARGET	23,00	Tensión
20	TARGET	16,52	Tensión
21	TARGET	16,15	Tensión
22	TARGET	23,00	Tensión
23	TARGET	23,00	Tensión
24	TARGET	22,75	Tensión
25	TARGET	22,88	Tensión
26	TARGET	23,00	Tensión

Tomado de fuente propia

En la tabla 6 se evidencia que todos los cables se encuentran por debajo de su resistencia última, debido a que la tensión máxima que se presenta es de 26.2 kN.

Para las barras es necesario calcular la resistencia última de estas, por lo tanto, se verifica como:

Barras	K	L (m)	r (mm)	KL/r	Ecuación que aplica
Diagonal	1	1,72	16,65	103,3	4.2.1-6
Horizontal	1	1	16,65	60,1	4.2.1-6

Diagonal:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 MPa}{103.3^2} = 184.9 MPa$$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{F_e}\right] f_y = \left[0.658 \frac{289}{184.9}\right] 289 MPa = 150.4 MPa$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 150.4 MPa * 442.96 mm^2 = 60 kN$$

Horizontal:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 MPa}{50^2} = 546.4 MPa$$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{F_e}\right] f_y = \left[0.658 \frac{289}{546.4}\right] 289 MPa = 231.9 MPa$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 231.9 MPa * 442.96 mm^2 = 92 kN$$

Basados en los resultados obtenidos se puede evidenciar que las barras se encuentran por debajo del límite de pandeo por flexión.

- **Paso 7:** Se analiza la estructura incluyendo el peso propio y la carga adicional de 2 kN, verificando finalmente los estados de resistencia ultima y el estado de servicio.

En la figura 37 y en la tabla 7, se evidencia que algunos de los elementos de barras se encuentran en tensión, lo cual genera que ya no se cumpla con el principio principal de tenseguridad, adicional a esto se observa que uno de los cables horizontales se encuentra en el límite para dejar de estar en tensión, lo que generaría que el cable se suelte y genera inestabilidad en la estructura.

En cuanto a la deflexión, esta debe ser menor que $L/480 = 12.5$ mm, por lo que la deflexión de 49.5 mm está excediendo el límite establecido.

En este caso es necesario realizar un nuevo análisis eligiendo secciones transversales, hasta que se cumpla con las condiciones requeridas por el flujo metodológico.

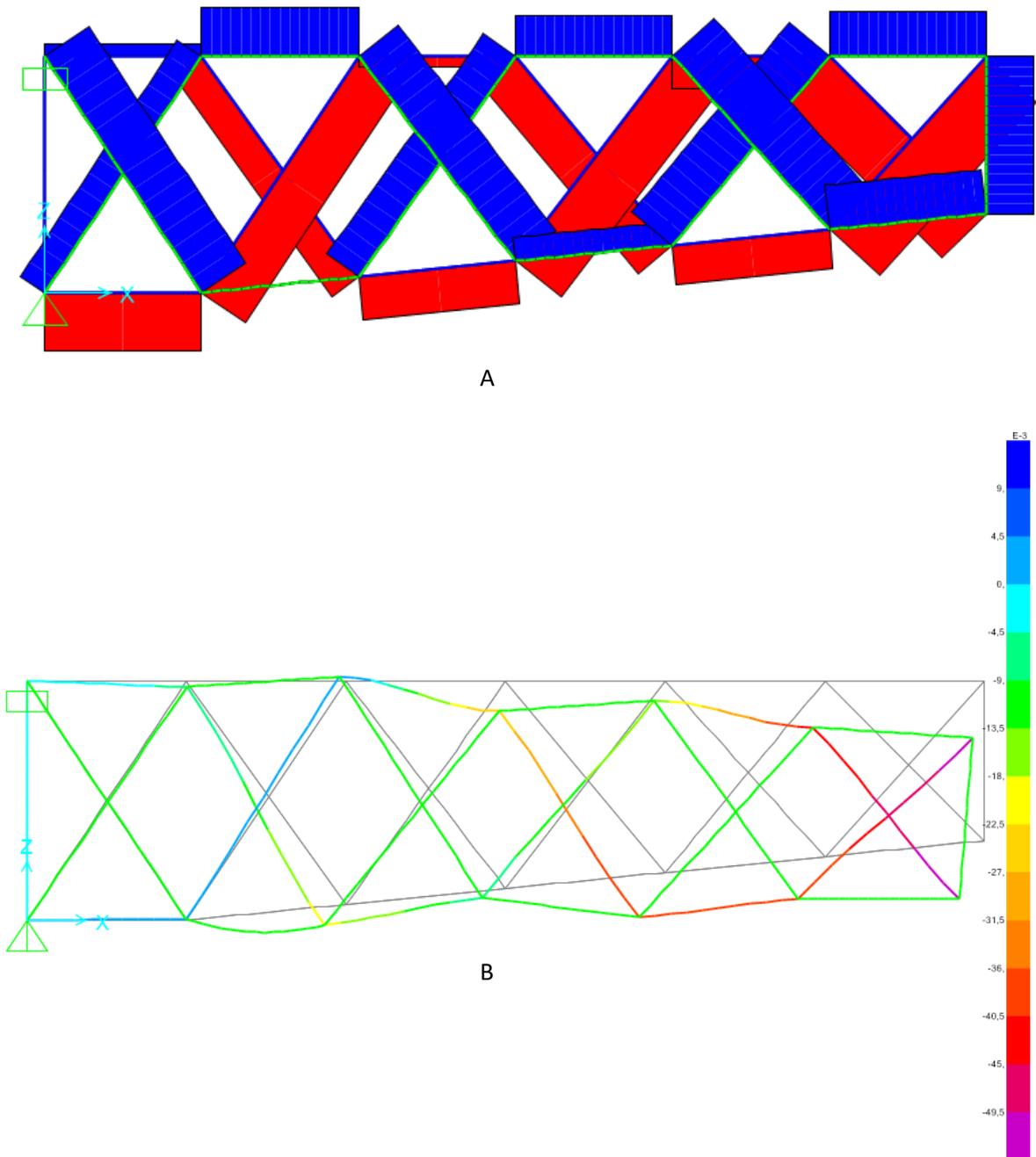


Figura 37. A) Estado de carga interna pretensión, peso propio y carga adicional. B) Deformación dirección Z.

Tabla 4. Carga interna en cada elemento.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
1	DEADAD	-0,03	Compresión
2	DEADAD	8,31	Tensión
3	DEADAD	-37,54	Compresión
4	DEADAD	-33,78	Compresión
5	DEADAD	-21,38	Compresión
6	DEADAD	-6,97	Compresión
7	DEADAD	-27,20	Compresión
8	DEADAD	-28,58	Compresión
9	DEADAD	-37,16	Compresión
10	DEADAD	-20,61	Compresión
11	DEADAD	-24,97	Compresión
12	DEADAD	-39,35	Compresión
13	DEADAD	-43,23	Compresión
14	DEADAD	33,87	Tensión
15	DEADAD	18,77	Tensión
16	DEADAD	31,16	Tensión
17	DEADAD	0,01	Tensión
18	DEADAD	32,25	Tensión
19	DEADAD	24,92	Tensión
20	DEADAD	25,98	Tensión
21	DEADAD	15,01	Tensión
22	DEADAD	36,20	Tensión
23	DEADAD	33,38	Tensión
24	DEADAD	28,74	Tensión
25	DEADAD	28,27	Tensión
26	DEADAD	30,24	Tensión

Tomado de fuente propia

- **Paso 8:** Es necesario escoger unas dimensiones que satisfagan los límites de diseño impuestos.

Ejercicio B: Evalúe el comportamiento estático de la columna tipo X Column mostrada en la figura 38 por medio del programa SAP2000. Si se conocen los siguientes parámetros:

- Cuenta con 4 módulos cada uno con $h = 1.0$ m y su base es de 0.35×0.35 m.
- Los cables de acero son tipo Boa 6x19 con alma de acero y fibra de 13 mm de diámetro, compuesto por un acero tipo A416 Gr 250.
- Las barras son de acero de 50 mm de diámetro y espesor de 3 mm, compuestas por un acero tipo A500 grado B para perfiles redondos.
- La columna se debe evaluar para dos casos de pretensión del 25% y el 80%, en el paso 6 defina que estado de pretensión presenta los mejores resultados.
- La columna está sometida a una carga de 12,5 kN como carga adicional dispuesta en los nodos superiores.

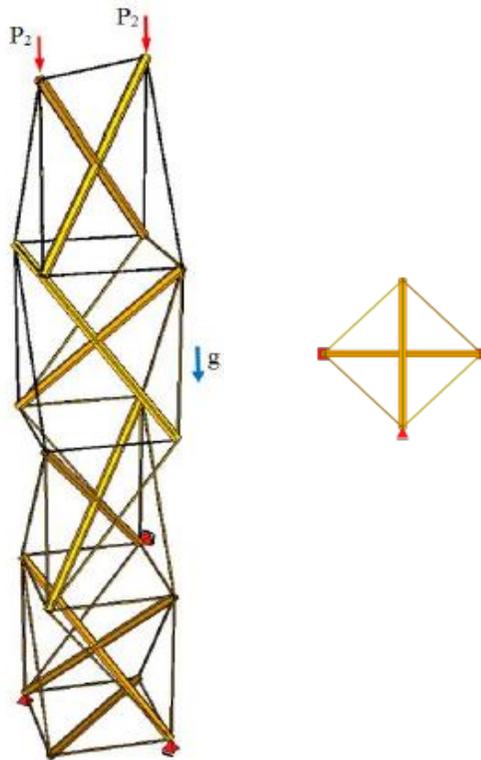


Figura 38. Columna de tensegridad tipo X
Column ejercicio práctico. Tomado de
(Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020)

Solución ejercicio b:

- **Paso 1:** Se define el tipo de uso de la estructura, como una columna de tensegridad tipo X Column. (Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020)
- **Paso 2:** El sistema de columnas X column, está compuesto por módulos conectados uno entre otro, el método utilizado para calcular este sistema no se especifica, debido a que son módulos fundamentales, que se pueden encontrar partiendo de formas regulares con alguno de los métodos mencionado en el capítulo 3. (Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020)
- **Paso 3:** Basado en (Zawadzki & Sabouni-Zawadzka, 2020) se evidencia que el sistema de tensegridad es estable
- **Paso 4:** Definición de materiales, rigidez, y áreas de sección transversal.

En la figura 39, 40 y 41 se muestra la definición de los materiales, secciones transversales de las barras y de los cables que conforman el sistema en el programa SAP2000, respectivamente.

The figure displays two screenshots of the SAP2000 Material Property Data dialog box, comparing the properties for 'BARRAS' (left) and 'CABLES' (right).

Left Screenshot (BARRAS):

- General Data:** Material Name and Display Color: BARRAS; Material Type: Steel; Material Grade: Grade B, Fy 42 (HSS Round); Material Notes: Modify/Show Notes...
- Weight and Mass:** Weight per Unit Volume: 7,697E-05; Mass per Unit Volume: 7,849E-09; Units: N, mm, C
- Isotropic Property Data:** Modulus Of Elasticity, E: 199947,98; Poisson, U: 0,3; Coefficient Of Thermal Expansion, A: 1,170E-05; Shear Modulus, G: 76903,07
- Other Properties For Steel Materials:** Minimum Yield Stress, Fy: 289,5798; Minimum Tensile Stress, Fu: 399,896; Expected Yield Stress, Fye: 318,5378; Expected Tensile Stress, Fue: 439,8856

Right Screenshot (CABLES):

- General Data:** Material Name and Display Color: CABLES; Material Type: Tendon; Material Grade: Grade 250; Material Notes: Modify/Show Notes...
- Weight and Mass:** Weight per Unit Volume: 7,697E-05; Mass per Unit Volume: 7,849E-09; Units: N, mm, C
- Uniaxial Property Data:** Modulus Of Elasticity, E: 196500,6; Poisson, U: 0,; Coefficient Of Thermal Expansion, A: 1,170E-05; Shear Modulus, G: (empty)
- Other Properties For Tendon Materials:** Minimum Yield Stress, Fy: 1493,4046; Minimum Tensile Stress, Fu: 1723,6895

Figura 39. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.

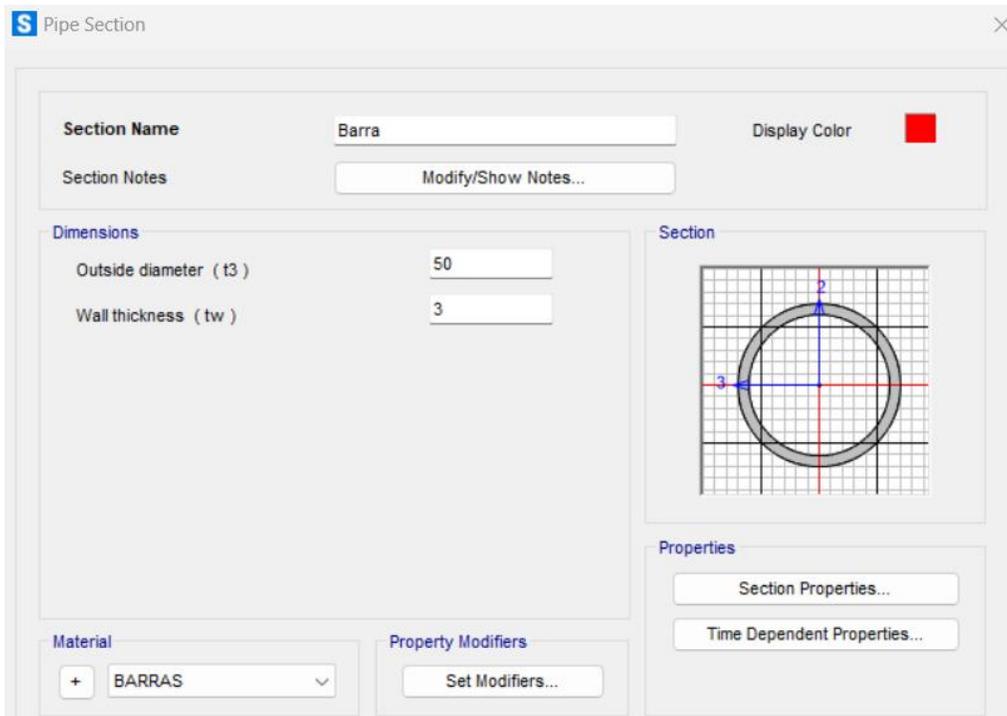


Figura 40. Sección barras.

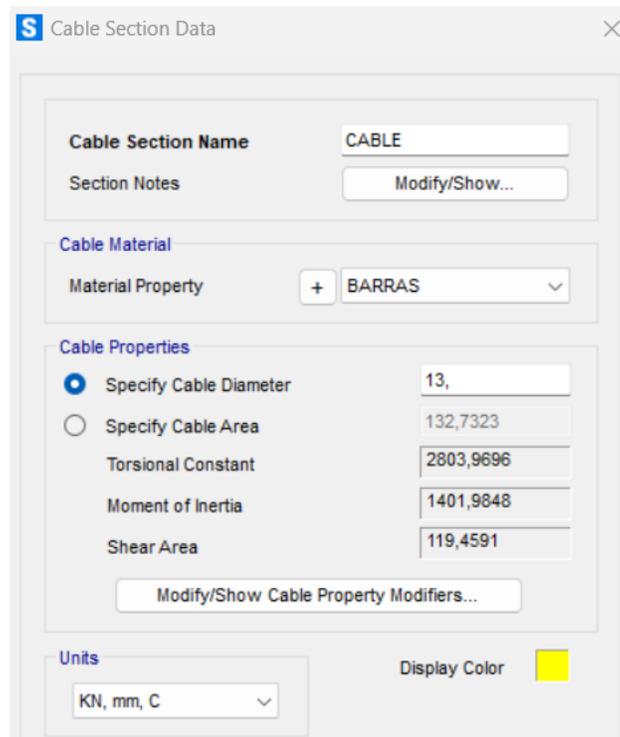


Figura 41. Sección Cables

- **Paso 5:** Se elige el estado de autoesfuerzo de la estructura estableciendo la pretensión del cable como el 25% y 80% de su resistencia ultima. Por tanto, es necesario verificar la ecuación 4.2.1-1, 4.2.1-2 y 4.2.1-3, con el fin de encontrar el valor de la pretensión.

$$P_n = \phi_t F_y A_g = \frac{0,9 * 1493 \text{ MPa} * 132,7 \text{ mm}^2}{1000} = 178,3 \text{ kN}$$

$$P_n = \phi_t F_u A_e = \frac{0,75 * 1723 \text{ MPa} * 132,7 \text{ mm}^2}{1000} = 171,5 \text{ kN}$$

Como se mencionó en el capítulo 5.2 se escoge el estado limite que presente el menor valor de resistencia en este caso, será el estado límite de rotura, por lo tanto, el valor de pretensión inicial estará dado por:

$$f_t = 0,25 P_n = 42,9 \text{ kN} \approx 43 \text{ kN}$$

$$f_t = 0,8 P_n = 137,2 \text{ kN} \approx 137 \text{ kN}$$

Realizando el mismo procedimiento presentado en el ejercicio a, se obtienen los resultados mostrados de la figura 42 y 43, se evidencia el estado de autoesfuerzo de la columna, observando que esta se encuentra en equilibrio sin tener en cuenta las cargas debidas al peso propio, tanto para el caso de 25% y 80% de pretensión.

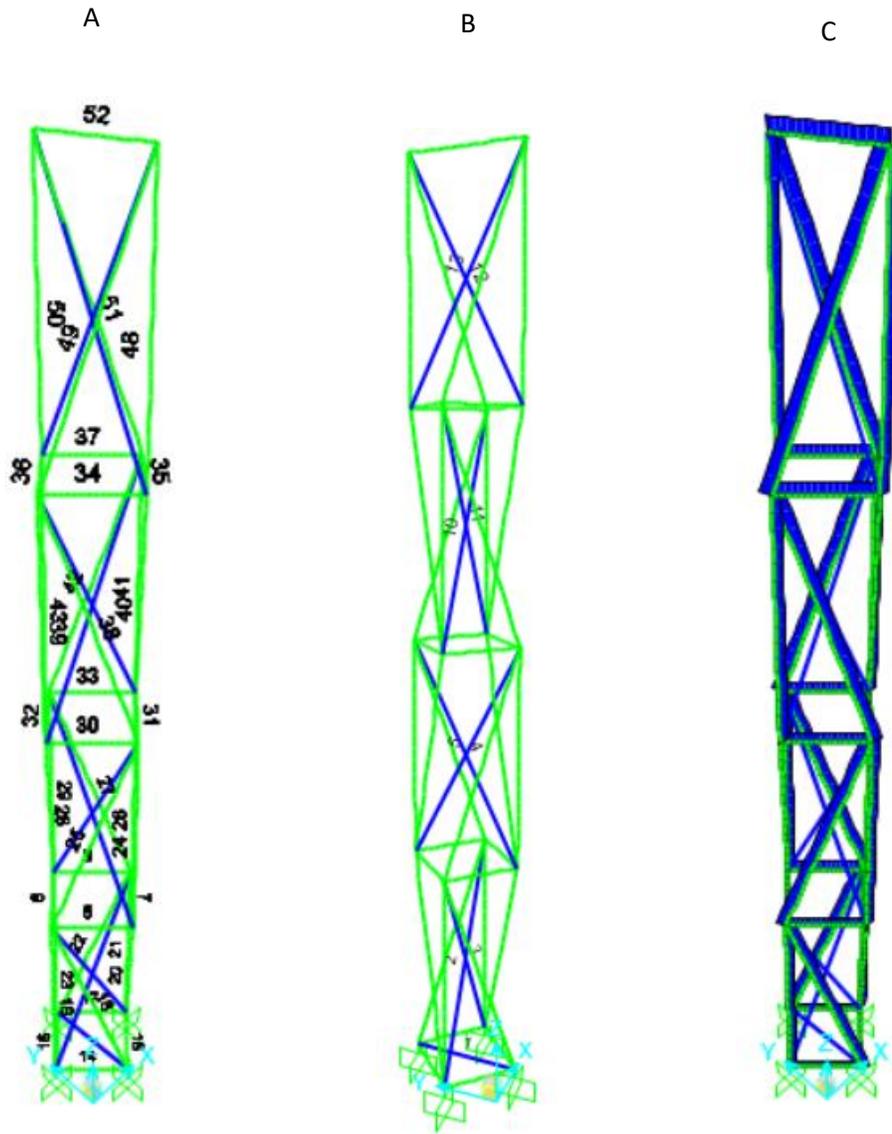


Figura 42. A) Numeración cables. B) Numeración barras. C) Estado de carga interna solo pretensión caso 25%.

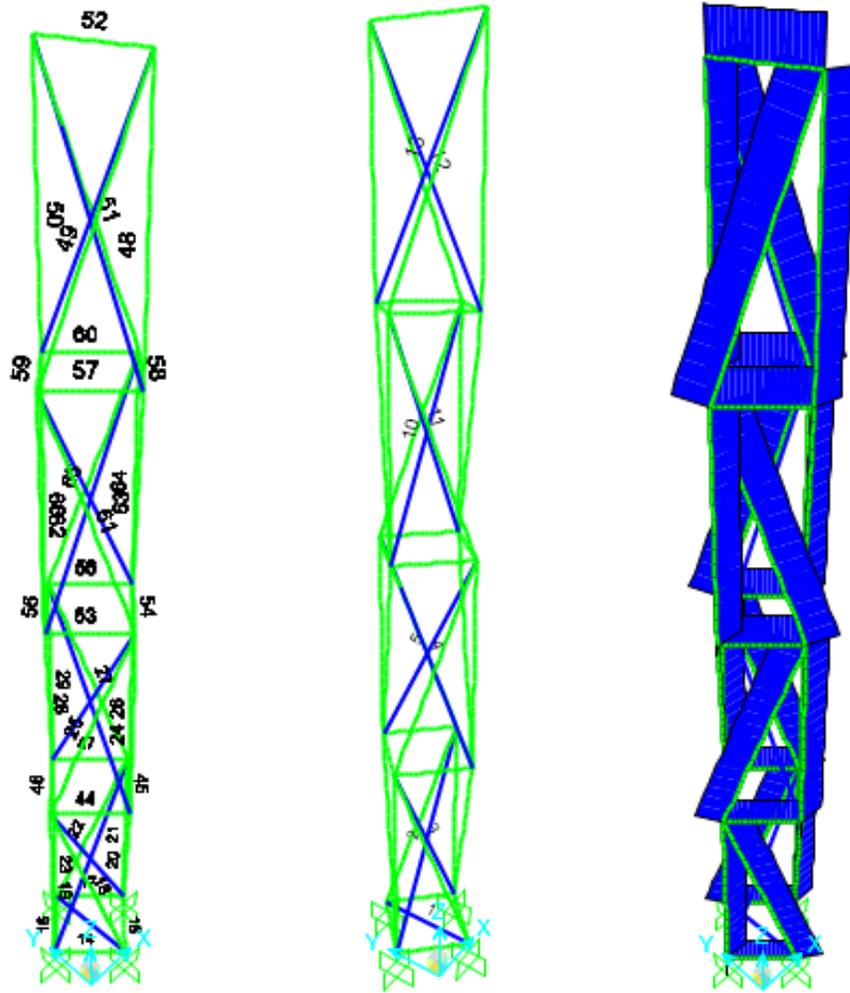


Figura 43. A) Numeración cables. B) Numeración barras. C) Estado de carga interna solo pretensión caso 80%.

- **Paso 6:** Se analiza la estructura incluyendo el peso propio, verificando si todos los cables se encuentran tensionados y los elementos cumplen con los estados limite.

En la figura 44 y en la tabla 8, para el caso de 25% se puede observar que todos los cables se encuentran a tensión y las barras a compresión, también es posible identificar que la deformación máxima en dirección Z es de 45,5 mm. Cabe destacar que algunos de los cables se encuentran próximos a perder su tensión.

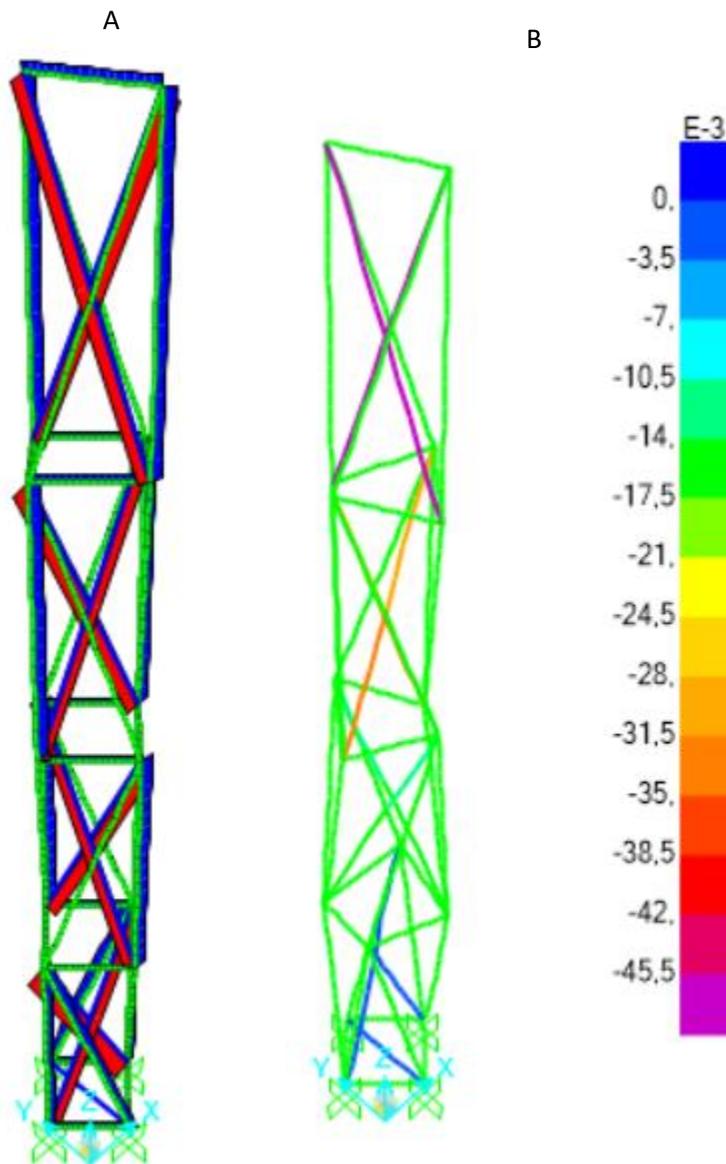


Figura 44. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z. Caso 25%.

Tabla 5. Carga interna en cada elemento caso 25%.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
1	TARGET	0,00	Tensión
2	TARGET	-86,66	Compresión
3	TARGET	-86,66	Compresión
4	TARGET	-64,84	Compresión
5	TARGET	-64,84	Compresión
6	TARGET	17,91	Tensión
7	TARGET	23,95	Tensión
8	TARGET	23,95	Tensión
9	TARGET	17,91	Tensión
10	TARGET	-60,57	Compresión
11	TARGET	-60,57	Compresión
12	TARGET	-57,49	Compresión
13	TARGET	-57,49	Compresión
14	TARGET	43,00	Tensión
15	TARGET	43,00	Tensión
16	TARGET	43,00	Tensión
17	TARGET	43,00	Tensión
18	TARGET	37,70	Tensión
19	TARGET	41,54	Tensión
20	TARGET	0,02	Tensión
21	TARGET	41,54	Tensión
22	TARGET	37,70	Tensión
23	TARGET	0,02	Tensión
24	TARGET	43,00	Tensión
25	TARGET	1,66	Tensión
26	TARGET	0,02	Tensión
27	TARGET	1,66	Tensión
28	TARGET	0,02	Tensión
29	TARGET	43,00	Tensión
30	TARGET	19,60	Tensión
31	TARGET	19,32	Tensión
32	TARGET	19,32	Tensión
33	TARGET	19,60	Tensión
34	TARGET	17,99	Tensión
35	TARGET	18,67	Tensión
36	TARGET	18,67	Tensión
37	TARGET	17,99	Tensión

38	TARGET	2,13	Tensión
39	TARGET	43,00	Tensión
40	TARGET	0,31	Tensión
41	TARGET	43,00	Tensión
42	TARGET	2,13	Tensión
43	TARGET	0,31	Tensión
48	TARGET	43,00	Tensión
49	TARGET	1,62	Tensión
49	TARGET	1,62	Tensión
50	TARGET	43,00	Tensión
51	TARGET	1,62	Tensión
52	TARGET	25,22	Tensión

Tomado de fuente propia

En la figura 45 y en la tabla 9, para el caso del 80% se puede observar que todos los cables se encuentran a tensión y las barras a compresión, también es posible identificar que la deformación máxima en dirección Z es de 140 mm. El tensionar más los cables genera que la deformación de las barras sea más alta.

Tabla 6. Carga interna en cada elemento caso 80%.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
1	TARGET	0,00	Tensión
2	TARGET	-311,64	Compresión
3	TARGET	-311,64	Compresión
4	TARGET	-225,96	Compresión
5	TARGET	-225,96	Compresión
10	TARGET	-211,73	Compresión
11	TARGET	-211,73	Compresión
12	TARGET	-196,84	Compresión
13	TARGET	-196,84	Compresión
14	TARGET	137,00	Tensión
15	TARGET	137,00	Tensión
16	TARGET	137,00	Tensión
17	TARGET	137,00	Tensión
18	TARGET	136,64	Tensión
19	TARGET	137,00	Tensión
20	TARGET	0,02	Tensión
21	TARGET	137,00	Tensión

22	TARGET	136,64	Tensión
23	TARGET	0,02	Tensión
24	TARGET	137,00	Tensión
25	TARGET	22,90	Tensión
26	TARGET	7,90	Tensión
27	TARGET	22,90	Tensión
28	TARGET	7,90	Tensión
29	TARGET	137,00	Tensión
44	TARGET	61,84	Tensión
45	TARGET	84,78	Tensión
46	TARGET	84,78	Tensión
47	TARGET	61,84	Tensión
48	TARGET	137,00	Tensión
49	TARGET	13,31	Tensión
50	TARGET	137,00	Tensión
51	TARGET	13,31	Tensión
52	TARGET	83,85	Tensión
53	TARGET	65,17	Tensión
54	TARGET	66,01	Tensión
55	TARGET	66,01	Tensión
56	TARGET	65,17	Tensión
57	TARGET	61,44	Tensión
58	TARGET	64,33	Tensión
59	TARGET	64,33	Tensión
60	TARGET	61,44	Tensión
61	TARGET	13,32	Tensión
62	TARGET	137,00	Tensión
63	TARGET	7,86	Tensión
64	TARGET	137,00	Tensión
65	TARGET	13,32	Tensión
66	TARGET	7,86	Tensión

Tomado de fuente propia

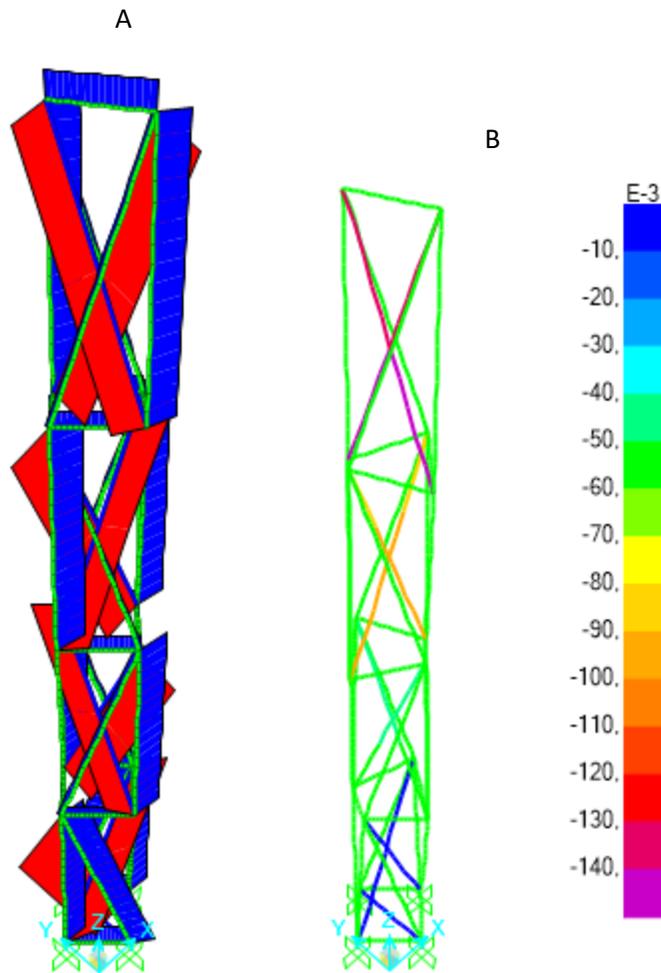


Figura 45. A) Estado de carga interna bajo pretensión y peso propio. B) Deformación dirección Z. Caso 80%.

Basados en los resultados mostrados para una pretensión del 25%, los cables no van a actuar como tensores al agregar la carga adicional, por lo que la estructura perderá rigidez y por lo tanto su estabilidad. Esto nos permite identificar que para columnas la pretensión debe ser mayor que para vigas o armaduras, lo que genera que la estructura este más próxima a un estado donde supera la resistencia última.

A continuación, se presenta el procedimiento para el caso de 80% de pretensión, en este caso se evidencia que todos los cables se encuentran por debajo de su resistencia máxima, debido a que la tensión máxima que se presenta es de 169 kN.

Para las barras es necesario calcular la resistencia última de estas, por lo tanto, se verifica como:

Barras	K	L (m)	r (mm)	KL/r	Ecuación que aplica
Diagonal	1	1,2	16,65	72,1	4.2.1-6

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 MPa}{72.13^2} = 379 MPa$$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{F_e} \right] f_y = \left[0.658 \frac{289}{379} \right] 289 MPa = 210 MPa$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 150.4 MPa * 442.96 mm^2 = 83.73 kN$$

Con los resultados obtenidos del paso 6, es necesario volver a elegir un estado de pretensión y secciones transversales para los elementos, que permitan cumplir con el criterio de resistencia ultima, para barras y cables. Adicional a esto también se puede concluir que para esta columna un estado de pretensión del 25% es insuficiente para que los cables presenten un buen comportamiento bajo carga adicional, mientras que un estado de pretensión del 80 % genera que se concentren esfuerzos muy altos en las barras.

Ejercicio C: Evalúe el comportamiento estático de la estructura de cubierta mostrada en las figuras 46 y 47 por medio del programa SAP2000. Se conocen los siguientes parámetros:

- Los cables de acero son tipo Boa 6x19 con alma de acero y fibra de 52 mm de diámetro, compuesto por un acero tipo A416 Gr 250.
- Las barras son de acero de 115 mm de diámetro y espesor de 6.5 mm, compuestas por un acero tipo A500 grado B para perfiles redondos.
- La estructura de cubierta tiene una pretensión del 25% en todos sus cables
- La cubierta está sometida a una carga de 1,5 kN como carga adicional dispuesta en cada uno de los nodos superiores.
- La estructura se obtiene haciendo girar la figura 46 alrededor del eje de giro 12 veces a un ángulo de 30°

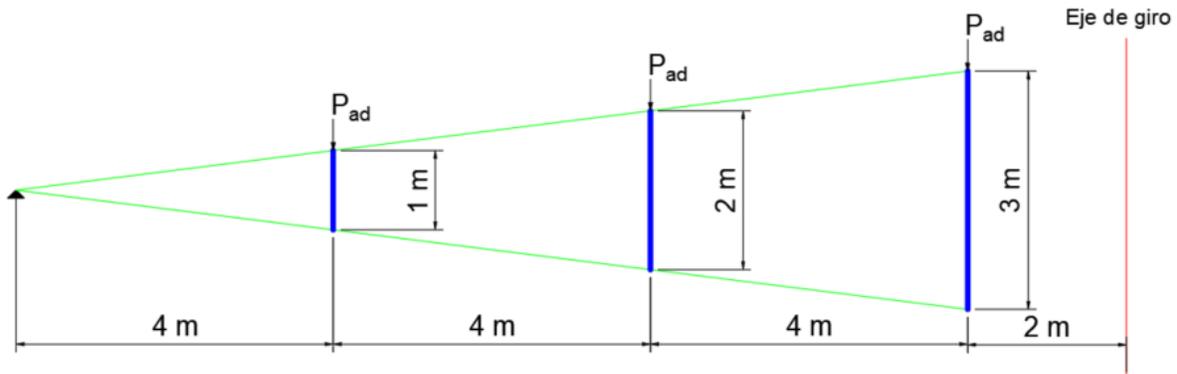


Figura 46. Vista lateral estructura principal de la cubierta.

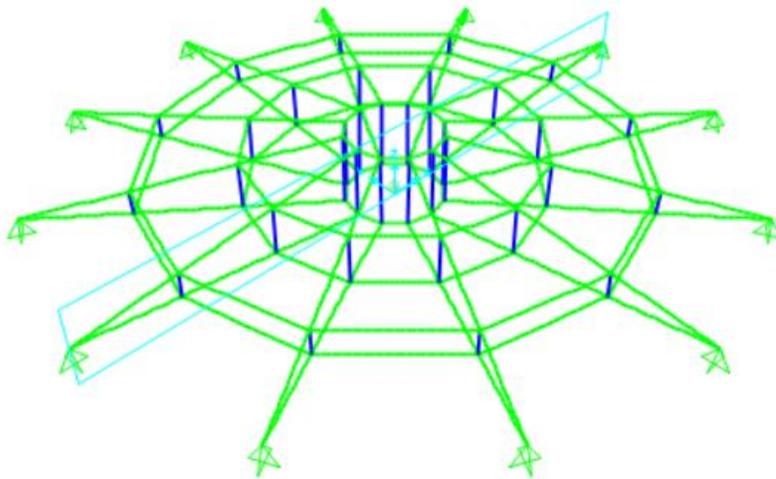


Figura 47. Estructura de cubierta, ejercicio práctico.

Solución punto c:

- **Paso 1:** Se define el tipo de uso de la estructura, como una cubierta de tensegridad de tipo cúpula tensada de Geiger. (P. Zhang et al., 2021)
- **Paso 2:** La estructura se definió por medio de un método de optimización. (P. Zhang et al., 2021)
- **Paso 3:** Basado en (P. Zhang et al., 2021) se evidencia que el sistema de tensegridad es estable.
- **Paso 4:** Definición de materiales, rigidez, y áreas de sección transversal.

En la figura 48, 49 y 50 se muestra la definición de los materiales, secciones transversales de las barras y de los cables que conforman el sistema en el programa SAP2000, respectivamente.

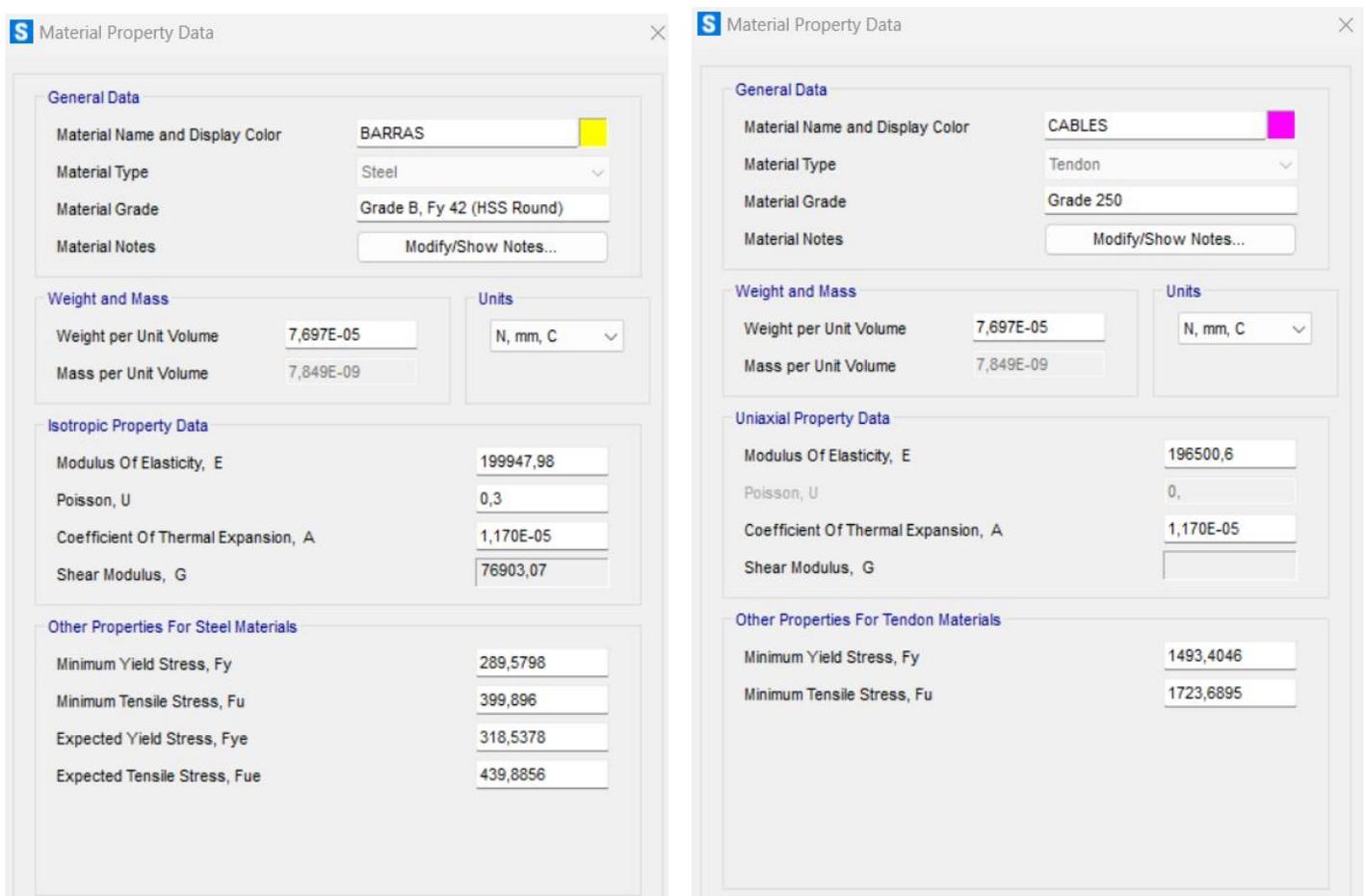


Figura 48. Propiedades de los materiales usados para cables y barras.

Section Name **Display Color** ■

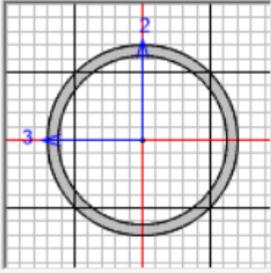
Section Notes

Dimensions

Outside diameter (t3)

Wall thickness (tw)

Section



Properties

Material

Property Modifiers

Figura 49. Sección barras.

S Cable Section Data ×

Cable Section Name

Section Notes

Cable Material

Material Property

Cable Properties

Specify Cable Diameter

Specify Cable Area

Torsional Constant

Moment of Inertia

Shear Area

Units

Display Color ■

Figura 50. Sección cables.

- **Paso 5:** Se elige el estado de autoesfuerzo de la estructura estableciendo la pretensión del cable como el 25%. Por tanto, es necesario verificar la ecuación 4.2.1-1, 4.2.1-2 y 4.2.1-3, con el fin de encontrar el valor de la pretensión.

$$P_n = \phi_t F_y A_g = \frac{0,9 * 1493 \text{ MPa} * 2123 \text{ mm}^2}{1000} = 2852 \text{ kN}$$

$$P_n = \phi_t F_u A_e = \frac{0,75 * 1723 \text{ MPa} * 2123 \text{ mm}^2}{1000} = 2743 \text{ kN}$$

Como se mencionó en el capítulo 5.2 se escoge el estado limite que presente el menor valor de resistencia en este caso, será el estado límite de rotura, por lo tanto, el valor de pretensión inicial estará dado por:

$$f_t = 0,25 P_n = 685.9 \text{ kN} \approx 686 \text{ kN}$$

Realizando el mismo procedimiento presentado en el ejercicio a, se obtienen los resultados mostrados de la figura 51, donde se evidencia el estado de autoesfuerzo de la cubierta, se encuentra en equilibrio sin tener en cuenta las cargas debidas al peso propio.

En la figura 52 se observa la numeración de los elementos, como es una estructura replicada de forma radial y las condiciones de carga son iguales para todos los nodos, el resultado de cada armadura será igual debido a la simetría.

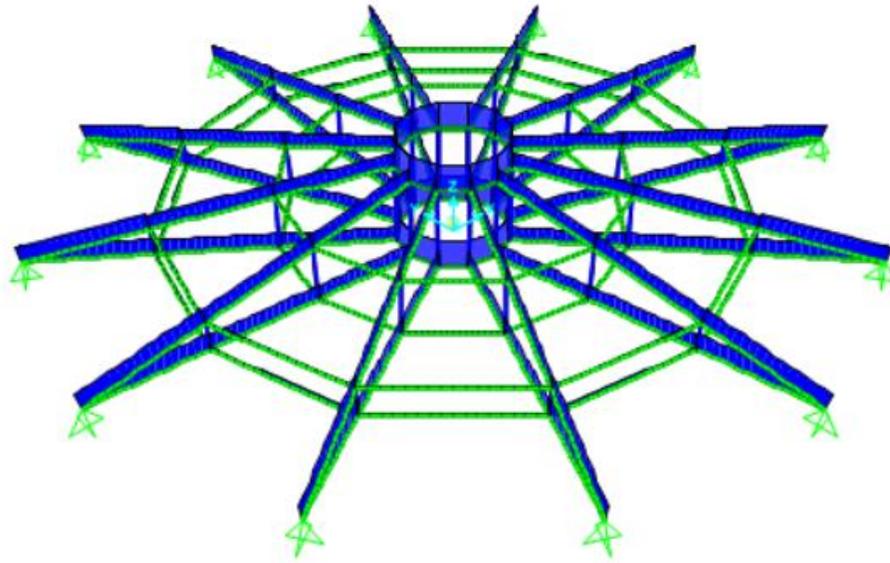


Figura 51. Estado de carga interna solo pretensión.

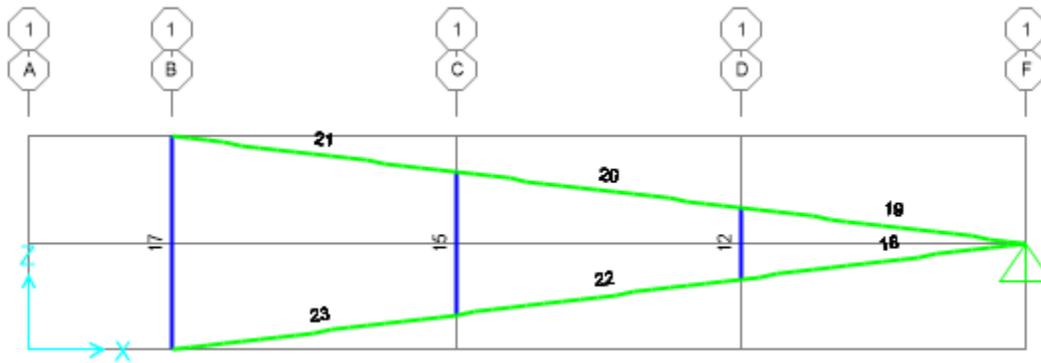


Figura 52. Numeracion elementos barra y cable.

- **Paso 6:** Se analiza la estructura incluyendo el peso propio, verificando si todos los cables se encuentran tensionados y los elementos cumplen con los estados limite.

En la figura 53 y 54, para el 25% de pretensión se puede observar que todos los cables se encuentran a tensión y las barras a compresión, también es posible identificar que la deformación máxima en dirección Z es de 23.8 mm.

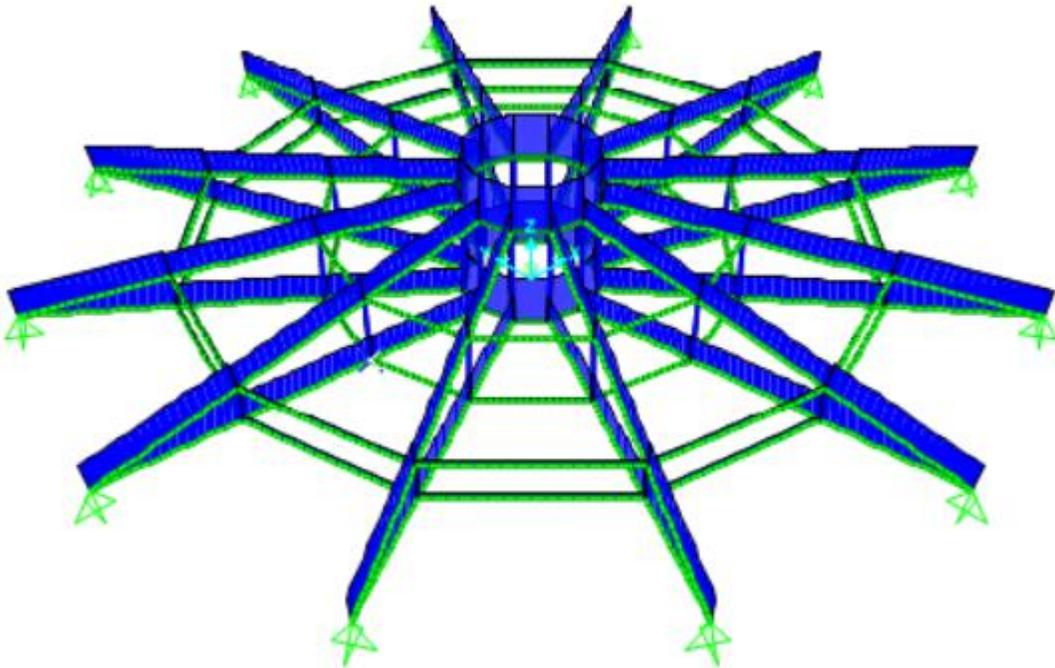


Figura 53. Estado de carga interna pretensión y peso propio.

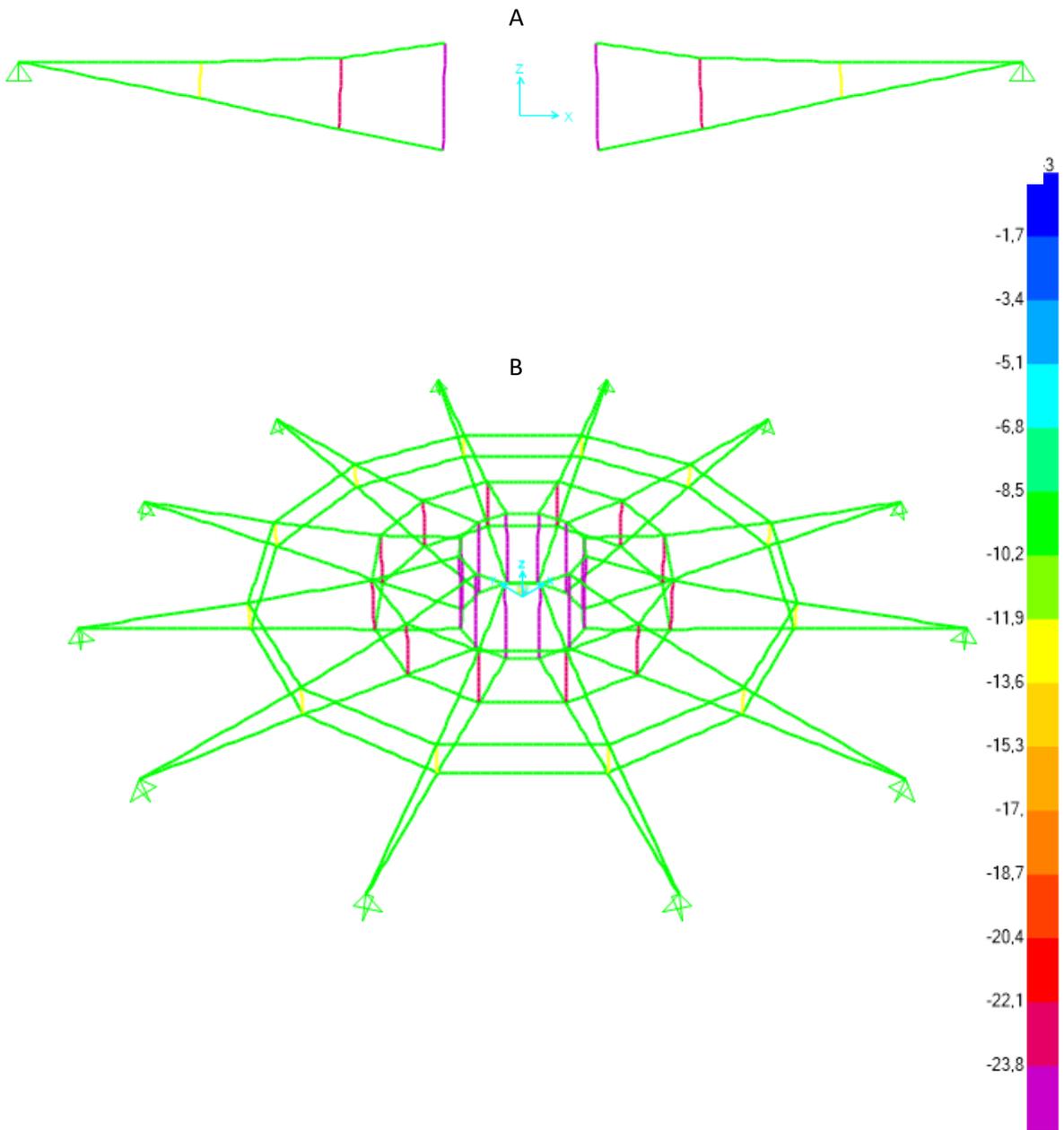


Figura 54. A) Deformacion pretensión y peso propio vista lateral. B) Deformaciones pretensión y peso propio vista 3D.

Tabla 7. Carga interna en cada elemento.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
12	TARGET	-36,37	Compresión
15	TARGET	-33,12	Compresión
17	TARGET	-49,68	Compresión
18	TARGET	967,82	Tensión
19	TARGET	957,92	Tensión
19	TARGET	686,03	Tensión
20	TARGET	659,01	Tensión
21	TARGET	686,03	Tensión
22	TARGET	668,56	Tensión
23	TARGET	685,94	Tensión

Tomado de fuente propia

En la tabla 10, se evidencia que todos los cables se encuentran por debajo de su resistencia última, debido a que la tensión máxima que se presenta es de 957 kN.

Para las barras es necesario calcular la resistencia última de estas, por lo tanto, se verifica como:

Barras	K	L (m)	r (mm)	KL/r	Ecuación que aplica
Vertical	1	1	16,65	60,1	4.2.1-6
	1	2	16,65	120,1	4.2.1-6
	1	3	16,65	180,2	4.2.1-7

L = 1 m

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 \text{ MPa}}{60.1^2} = 546 \text{ MPa}$$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{F_e}\right] f_y = \left[0.658 \frac{289}{546}\right] 289 \text{ MPa} = 231 \text{ MPa}$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 231 \text{ MPa} * 2123 \text{ mm}^2 = 442.5 \text{ kN}$$

L = 2 m

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 \text{ MPa}}{120.1^2} = 136.8 \text{ MPa}$$

$$F_{cr} = \left[0.658 \frac{f_y}{f_e} \right] f_y = \left[0.658 \frac{289}{136.8} \right] 289 \text{ MPa} = 119.4 \text{ MPa}$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 119.4 \text{ MPa} * 2123 \text{ mm}^2 = 228.1 \text{ kN}$$

L = 3 m

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r} \right)^2} = \frac{\pi^2 199947.98 \text{ MPa}}{180^2} = 60.90 \text{ MPa}$$

$$F_{cr} = 0.877 f_y = 0.877 * 60.9 \text{ MPa} = 53.4 \text{ MPa}$$

$$P_n = \phi_c F_{cr} A_g = 0.9 * 53.4 \text{ MPa} * 2123 \text{ mm}^2 = 102 \text{ kN}$$

El valor máximo a compresión se presenta en el puntal L = 3 m con un valor de 94 kN, por lo tanto, la estructura cumple criterios de resistencia tanto para los cables como para las barras, las solicitaciones se encuentran por debajo del estado límite de resistencia última.

- **Paso 7:** Se analiza la estructura incluyendo el peso propio y la carga adicional de 2 kN, verificando finalmente los estados de resistencia última y el estado de servicio.

En la figura 55, 56 y en la tabla 11, es posible observar que la estructura se encuentra bajo una solicitación máxima de 983 kN y 51 kN para los cables y el puntal L=3, respectivamente, incluyendo el peso propio, la pretensión y las cargas adicionales. Por lo tanto, se concluye que para el estado límite de resistencia última la estructura está cumpliendo.

La deflexión máxima permitida de la estructura para una luz de 28 m es de L/480 = 58.3 mm, por lo que la deflexión de 26,6 mm está cumpliendo con el límite establecido, así que la estructura también cumple con el estado límite de servicio.

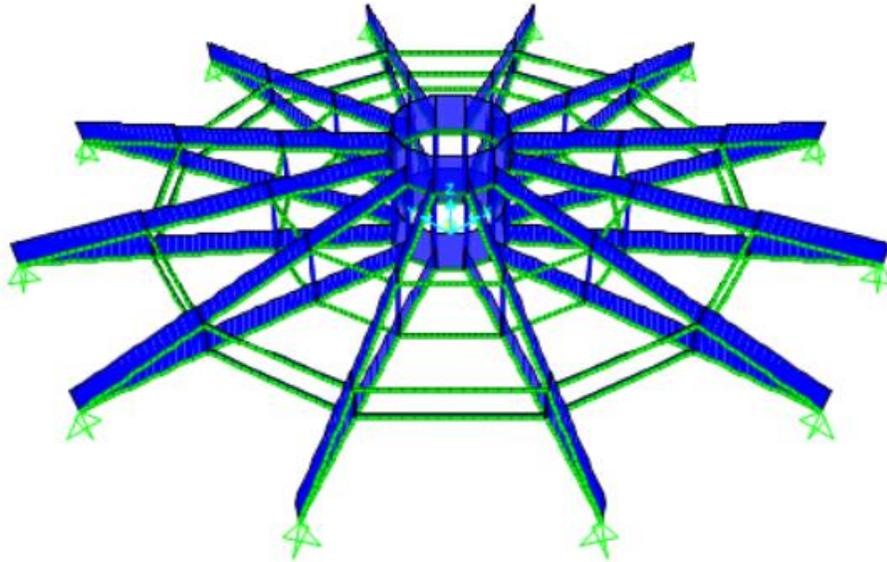


Figura 55. Estado de carga interna solo pretensión, peso propio y carga adicional.

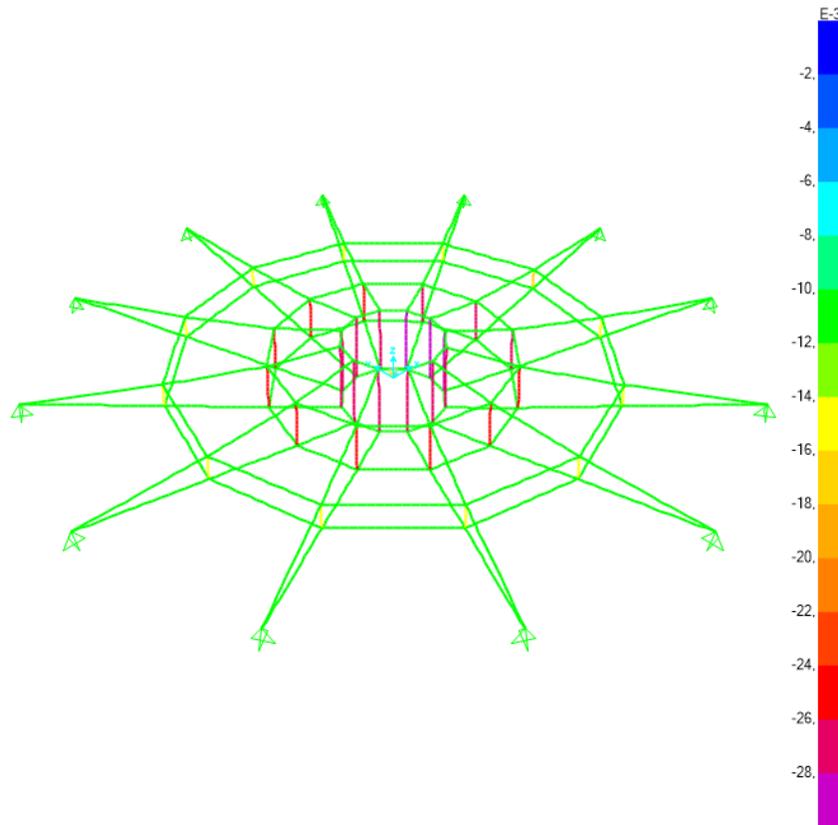


Figura 56. Deformaciones pretensión, peso propio y carga muerta.

Tabla 8. Carga interna en cada elemento.

Elemento	Caso de carga	Carga interna (kN)	Estado
12	DEADAD	-37,92	Compresión
15	DEADAD	-34,68	Compresión
17	DEADAD	-51,22	Compresión
18	DEADAD	983,71	Tensión
19	DEADAD	942,96	Tensión
20	DEADAD	647,23	Tensión
21	DEADAD	385,08	Tensión
22	DEADAD	681,02	Tensión
23	DEADAD	407,03	Tensión

Tomado de fuente propia

- **Paso 8:** La estructura de tensegridad cumple con los requisitos mínimos establecidos bajo el caso estático.

El flujo metodológico del capítulo 6, muestra consistencia en cuanto al análisis estático de las estructuras de tensegridad, permitiendo escoger, interpretar y aprender sobre este tipo de sistemas. Cada uno de los ejercicios prácticos planteados genera resultados diferentes que se deben evaluar.

En el ejercicio práctico a, el flujo metodológico se aplicó hasta el paso 7 debido a inconsistencias en sus cables, que generarían la pérdida de rigidez en sus elementos, aunque sus elementos individualmente soportaran la carga.

En el ejercicio b, la columna no tenía una definición correcta de pretensado, por lo que los resultados esperados tanto para el caso de 25% y 80% de pretensión eran inconsistentes, presentando alteración en los cables y llevando la resistencia de las barras por encima del límite establecido. En consecuencia, el flujo metodológico llegó hasta el paso 6.

Por último, el ejercicio c muestra una estructura de cubierta más compleja, la cual presenta una estructura principal que se replica radialmente 12 veces para generar lo que se conoce como cupulas tensadas de Grieg. En este caso el flujo metodológico continúa hasta el paso 8, logrando ser definida como una estructura de tensegridad que cumple con los requisitos de diseño para el caso estático, sin embargo, el diseño se puede refinar llevando a disminuir el consumo de material.

Cabe destacar que tanto para el ejercicio a como para el ejercicio b, es posible tomar nuevos parámetros hasta que se cumpla con todo el proceso mencionado en el flujo metodológico. Sin embargo, el propósito de los ejercicios presentados es mostrar cómo el cambio de los parámetros hace que el sistema cumpla o no bajo el caso estático.

Referencias.

- Aloui, O., Orden, D., & Rhode-Barbarigos, L. (2018). Generation of planar tensegrity structures through cellular multiplication. *Applied Mathematical Modelling*, *64*, 71–92. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.07.024>
- Blanco Blanch, P. (2010). *PRETENSADO DE COLUMNAS TENSEGRITY PARA EL INCREMENTO DE RIGIDEZ AXIL*. Universidad Politécnica de Catalunya.
- Botis, M. F., Imre, L., & Cerbu, C. (2022). Computer-aided design of a tensegrity structure. *Structures*, *38*, 340–360. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.01.084>
- Briseghella, B., Fenu, L., Huang, W., & Zordan, T. (2010). Tensegrity bridge with prestressed deck. *Large Structures and Infrastructures for Environmentally Constrained and Urbanised Areas*, 432–433. <https://doi.org/10.2749/222137810796025195>
- Burkhardt, R. W. (2008). *A Practical Guide to Tensegrity Design 2nd edition*. <http://bobwb.tripod.com/tenseg/book/revisions.html>.
- Cai, J., & Feng, J. (2015). Form-finding of tensegrity structures using an optimization method. *Engineering Structures*, *104*, 126–132. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.09.028>
- Cobos, J. (2018). *Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales*.
- Deepak Bansod, Y., Nandanwar, D., & Burša, J. (2014). OVERVIEW OF TENSEGRITY-I: BASIC STRUCTURES. In *Engineering MECHANICS* (Vol. 21, Issue 5).
- Estrada, G. G., Bungartz, H. J., & Mohrdieck, C. (2006). Numerical form-finding of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, *43*(22–23), 6855–6868. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012>
- Fan, L., Xu, R., Shi, P., Feng, X., & Chen, Y. (2023). Simplified form-finding for tensegrity structures through reference joints of symmetry orbits. *Structures*, *49*, 1157–1167. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.006>
- Gan, B. S., Zhang, J., Nguyen, D. K., & Nouchi, E. (2015). Node-based genetic form-finding of irregular tensegrity structures. *Computers and Structures*, *159*, 61–73. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.07.003>
- Garcia, F. (n.d.). *Tensegridad y el Estadio de la plata*.
- Gomez, V. (2016). *Design, Fabrication and Construction of a 4 Deployable Double-Layer Tensegrity Grid 5*.

- Gómez-Jáuregui, & Otero, V. 1 *. (2011). *APLICACIÓN DE MALLAS DE TENSEGRIDAD COMO ESTRUCTURAS LIGERAS*.
- Gomez-Jauregui, V. (2004a). *Tensegrity structures and their application to architecture Tensegrity Structures*. <https://www.researchgate.net/publication/228781961>
- Gomez-Jauregui, V. (2004b). *Tensegrity structures and their application to architecture Tensegrity Structures View project Double Layer Tensegrity Grids View project*. <https://www.researchgate.net/publication/228781961>
- Gómez-Jáuregui, V. (2012). Mallas tensegríticas de doble capa y manipulaciones de rot-umbela. *Informes de La Construcción*, 64(527), 331–344. <https://doi.org/10.3989/ic.11.053>
- Gomez-Jauregui, V., Carrillo-Rodriguez, A., Manchado, C., & Lastra-Gonzalez, P. (2023). Tensegrity Applications to Architecture, Engineering and Robotics: A Review. In *Applied Sciences (Switzerland)* (Vol. 13, Issue 15). Multidisciplinary Digital Publishing Institute (MDPI). <https://doi.org/10.3390/app13158669>
- Herrera, J. (2014). *Los sistemas de tensegridad*.
- Juan, S., & Mirats Tur, J. M. (2008). Tensegrity frameworks: Static analysis review. *Mechanism and Machine Theory*, 43(7), 859–881. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.06.010>
- Kawaguchi, K. 'ichi, Ohya, S., Vormus, S., & Student, G. (2010). *Long-Term Monitoring of White Rhino, Building with Tensegrity Skeletons*.
- Koohestani, K. (2012). Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm. *International Journal of Solids and Structures*, 49(5), 739–747. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.11.015>
- Koohestani, K. (2015). Reshaping of tensegrities using a geometrical variation approach. *International Journal of Solids and Structures*, 71, 233–243. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.025>
- Koohestani, K. (2017). On the analytical form-finding of tensegrities. *Composite Structures*, 166, 114–119. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.059>
- Lee, S., & Lee, J. (2014). Form-finding of tensegrity structures with arbitrary strut and cable members. *International Journal of Mechanical Sciences*, 85, 55–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.04.027>
- Li, S., Xu, X., Tu, J., Wang, Y., & Luo, Y. (2020). Research on a New Class of Planar Tensegrity Trusses Consisting of Repetitive Units. *International Journal of Steel Structures*, 20(5), 1582–1595. <https://doi.org/10.1007/s13296-020-00392-8>

- Li, Y., Feng, X. Q., Cao, Y. P., & Gao, H. (2010). A Monte Carlo form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 47(14–15), 1888–1898. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.03.026>
- Marzo, A. (n.d.). *Vista de Estadio Wanda Metropolitano. Caso de estudio cubierta del estadio*.
- Masic, M., Skelton, R. E., & Gill, P. E. (2005). Algebraic tensegrity form-finding. *International Journal of Solids and Structures*, 42(16–17), 4833–4858. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.014>
- Melaragno, M. (1993). TENSEGRITIES FOR SKELETAL DOMES: THE GEORGIA DOME; A CASE STUDY. In *ARCHITECTURE* VOL. 37, NOS. 1-4.
- Micheletti, A. (n.d.). *LNACM 61 - Modular Tensegrity Structures: The "Tor Vergata" Footbridge*.
- Micheletti, A., & Podio-Guidugli, P. (2022). Seventy years of tensegrities (and counting). In *Archive of Applied Mechanics* (Vol. 92, Issue 9, pp. 2525–2548). Springer Science and Business Media Deutschland GmbH. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02192-4>
- Mirzaaghazadeh, K., Abedi, K., & Shekastehband, B. (2021). An efficient self-stress design of tensegrity shell structures. *Meccanica*, 56(1), 147–168. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01260-9>
- Mitxelena, J. B. (2014). *XXX, SISTEMAS ESTRUCTURALES DESPLEGABLES PARA INFRAESTRUCTURAS DE INTERVENCIÓN URBANA AUTOCONSTRUIDAS*.
- Ohsaki, M., & Zhang, J. Y. (2015). Nonlinear programming approach to form-finding and folding analysis of tensegrity structures using fictitious material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 69–70, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.06.020>
- Pagitz, M., & Mirats Tur, J. M. (2009). Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 46(17), 3235–3240. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.04.018>
- Pietroni, N., Tarini, M., Vaxman, A., Panozzo, D., & Cignoni, P. (2017). Position-based tensegrity design. *ACM Transactions on Graphics*, 36(6). <https://doi.org/10.1145/3130800.3130809>
- Pleşcan, C., Conțiu, M., & Dósa, A. (2018). A study of a tensegrity structure for a footbridge. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 399(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/399/1/012044>
- Rhode-Barbarigos. (2012). *An Active Deployable Tensegrity Structure*. Ecole Polytechnique Federale de Lausanne.

- Rhode-Barbarigos, L., Bel Hadj Ali, N., Motro, R., & Smith, I. F. (2010). Designing tensegrity modules for pedestrian bridges. In *Engineering Structures* (Vol. 32, Issue 4).
- Sultan, C. (n.d.-a). *Tensegrity Structures: Sixty Years of Art, Science, and Engineering*.
- Sultan, C. (n.d.-b). *Tensegrity Structures: Sixty Years of Art, Science, and Engineering*.
- Tang, R. (2018). *Tensegridad y Arquitectura*.
- Tej, P., Tejová, A., & Kolísko, J. (2014). Design of an experimental tensegrity pedestrian bridge. *Applied Mechanics and Materials*, 587–589, 1646–1649.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.587-589.1646>
- Tibert, A. G., & Pellegrino, S. (2003). Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, 18(4), 209–223.
<https://doi.org/10.1260/026635103322987940>
- Wang, H., Huang, Z., Yi, J., Jiang, W., & He, Z. (2022). Static Analysis on Some Typical Tensegrities with Additional Cables. *Journal of Engineering Mechanics*, 148(3).
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)em.1943-7889.0002060](https://doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0002060)
- Wang, Y., Xu, X., & Luo, Y. (2020). Topology design of general tensegrity with rigid bodies. *International Journal of Solids and Structures*, 202, 278–298.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.030>
- Wang, Y., Xu, X., & Luo, Y. (2021). A unifying framework for form-finding and topology-finding of tensegrity structures. *Computers and Structures*, 247.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106486>
- Winkelmann, K., Kłos, F., & Rapca, M. (2018). Experimental study and numerical optimization of tensegrity domes - A case study. *AIP Conference Proceedings*, 1922.
<https://doi.org/10.1063/1.5019127>
- Xu, X., Wang, Y., & Luo, Y. (2018). Finding member connectivities and nodal positions of tensegrity structures based on force density method and mixed integer nonlinear programming. *Engineering Structures*, 166, 240–250. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.063>
- Yuan, X. F., Ma, S., & Jiang, S. H. (2017). Form-finding of tensegrity structures based on the Levenberg–Marquardt method. *Computers and Structures*, 192, 171–180.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.005>
- Zawadzki, A., & Sabouni-Zawadzka, A. Al. (2020). In search of lightweight deployable tensegrity columns. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(23), 1–19. <https://doi.org/10.3390/app10238676>

Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2006). Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18–19), 5658–5673.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.10.011>

Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2015). *Mathematics for Industry 6 Tensegrity Structures*.
<http://www.springer.com/series/13254>

Zhang, P., Zhou, J., & Chen, J. (2021). Form-finding of complex tensegrity structures using constrained optimization method. *Composite Structures*, 268.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113971>