Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Programa de Matemáticas

Grafos Inducidos Sobre Funciones Aritméticas

Trabajo de Grado

Director

PhD. Julián Andrés Agredo Echeverry

Autor

Johan S. Suárez Espinosa

Diciembre 2023

Resumen

En este texto se estudiarán dos tipos de grafos que se definen a partir de cualquier grupo finito, esto es, los grafos inducidos por estos grupos dependen del conjunto de los elementos y de la operación definida en el grupo, más concretamente la construcción de los grafos depende del orden de los elementos del grupo, el cual depende totalmente de la operación que se defina en el conjunto. A su vez para la construcción de dichos grafos consideramos una función aritmética h, la cual también afecta el comportamiento del grafo a tratar. La primera parte del documento se centra en recordar de una forma básica la estructura de un grafo, algunas propiedades, definiciones y la relación entre ellos a través de isomorfismos, también se presenta la definición de función aritmética. Luego de esto se presenta la definición de los grafos anteriormente mencionados $OP(G)$ y $G_h(\mathfrak{G})$, se consideran algunos ejemplos y finalmente se desarrolla la teoría que nos permite relacionarlos.

En la última parte del texto se presentan algunas caracterizaciones de los grafos a partir del grupo y función aritmética que los define, algunos resultados importantes de esta última parte incluyen teoremas de completitud de grafos y teoremas para el cálculo del espectro de la matriz de adyacencia de los grafos $G_h(\mathfrak{G})$ que aportan una gran información para el análisis espectral de estas matrices.

Palabras clave: Grafos, grupos, funciones aritméticas, isomorfismos, matriz de adyacencia, completitud de grafos, espectro.

Abstract

In this text, two types of graphs defined from any finite group will be studied. That is, the graphs induced by these groups depend on the set of elements and the operation defined in the group. More specifically, the construction of the graphs depends on the order of the elements in the group, which in turn relies entirely on the operation defined in the set. In the construction of these graphs, we also consider an arithmetic function h, which influences the behavior of the graph under consideration. The first part of the document focuses on rememeber the basic structure of a graph, some properties, definitions, and the relationship between them through isomorphisms. The definition of the arithmetic function is also presented. Following this, the definition of the previously mentioned graphs $OP(G)$ and $G_h(\mathfrak{G})$ is introduced, along with some examples. Finally, the theory that allows us to relate them is developed.

In the last part of the text, some characterizations of the graphs are presented based on the group and arithmetic function that defines them. Some important results from this final part include theorems on graph completeness and theorems for calculating the spectrum of the adjacency matrix of the graphs $G_h(\mathfrak{G})$, which provide valuable information for spectral analysis.

Keywords: Graphs, groups, arithmetic function, isomorphisms, adjacency matrix, graph completeness, spectrum.

Introducción

La teoría de grafos ha sido una herramienta fundamental para la resolución de problemas en matemáticas, desde su creación en el siglo XVIII con la resolución del problema de los puentes de Königsberg dada por Leonhard Euler el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel en la ciudad de Königsberg (actualmente Kaliningrado) de tal forma que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. La resolución de este problema se publicaría en el año 1736 por Euler en un trabajo titulado "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" y sería considerado como el primer resultado de la teoría de grafos. Más adelante, esta teoría sería más desarrollada y con esta se demostraría una gran gama de teoremas en matemáticas, siendo algunos de los más esenciales el teorema de Euler para poliedros convexos que asegura que para cualquier poliedro convexo sin orificios con V vértices, A aristas y C caras se cumple la identidad $V - A + C = 2$ o más recientemente, el teorema de los cuatro colores, que afirma que cualquier mapa geográfico plano con regiones continuas puede ser coloreado con a lo más cuatro colores de tal forma que dos regiones vecinas no tengan el mismo color.

La noción de coloración, así como la de grafo ha sido constantemente generalizada para ser usada en nuevas ramas de las matemáticas. Sin ir más lejos, se puede hablar de grafos con una cantidad infinita de vértices y estos a su vez son usados en la teoría emergente de la probabilidad cuántica o del análisis espectral. En este documento se desarrollan algunas propiedades de dos tipos de grafos particulares descritos en términos de dos objetos matemáticos también bastante utilizados los cuales son los grupos finitos y las funciones aritméticas, tomando como base el artículo [1] publicado en 2022 por R. Rajendra et al. quienes a su vez recopilan el bagaje histórico de aquellas personas que han descubierto los resultados que aquí se presentan. Cualquier lector que tenga un conocimiento básico en teoría de grupos puede ser capaz de entender las ideas presentadas en este texto.

Índice

1. Preliminares

En esta parte se presentan algunos de los resultados más relevantes de las teorías que se necesitaran para la parte principal del texto. Esta sección se divide en una parte introductoria a la teoría de grafos donde se presenta un resultado clásico sobre la matriz de adyacencia de un grafo. La segunda parte presenta algunas de las funciones aritméticas que son más utilizadas.

1.1. Grafos

Definición 1. Un *grafo simple* G es una pareja ordenada (V, E), donde V es un conjunto finito y $E \subseteq \{A \subseteq V : \mathrm{card}(A) = 2\}$, es decir E es un conjunto con subconjuntos de dos elementos en V.

1. Los elementos de V son llamados *vertices* o *nodos* de G y si el grafo no está especificado como pareja ordenada denotaremos $V(G)$ al conjunto de nodos de G, *i.e.* $V(G)$ es el primer elemento de la pareja ordenada G.
2. Los conjuntos de dos elementos de E son llamados *aristas* de G y si el grafo no está especificado como pareja ordenada denotaremos $E(G)$ al conjunto de aristas de G, *i.e.* $E(G)$ es el segundo elemento de la pareja ordenada G.
3. Dos nodos u y v se dice que son *adyacentes en* G si el conjunto $\{u, v\} \in E$, *i.e.* si $\{u, v\}$ es una arista de G. Si es claro el grafo sobre el cuál se está trabajando se dirá simplemente que u y v son *adyacentes* y lo denotaremos por $u \sim v$.

Definición 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $u \in V$ definimos el *grado* de u, denotado $\deg(u)$ como el número de vertices $v \in V$ tales que $u \sim v$. Si el grafo es tal que $\deg(u) = \kappa \in \mathbb{N}$ es fijo para todo $u \in V$ se dice el grafo es *regular*.

Definición 3. Sea $V = \{1, 2 \ldots, n\}$. Definimos el *grafo completo de n nodos*, denotado K_n como el grafo con vertices $V(K_n) = V$ y en donde $\{u, v\} \in E(K_n)$ si y sólo si $u \neq v$.

Definición 4. Sea $G = (V, E)$ un grafo, una secuencia de puntos $u = x_0, x_1, \ldots, v = x_n \in V$ $(n \geq 1)$ es llamado un *camino de longitud n de u a v* o simplemente *n-camino* si $x_i \sim x_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Un grafo se dice *conexo* si cualesquiera dos vertices $u, v \in V$ están conectados por un camino.

Un n-camino $u = x_0, x_1, \ldots, v = x_n$ de u a v es llamado *n-trayectoría de u a v* si los vertices x_i, $i = 0, \ldots, n-1$ son distintos entre si. Una n-trayectoría $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es llamado un *n-cíclo* si $x_0 = x_n$, en partícular un 3-cíclo es llamado un *triángulo*.

Definición 5. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo definimos $\partial : V \times V \longrightarrow \mathbb{N}$ por $\partial(u, u) = 0$ y

$$\partial(u, v) = \min\{n \in \mathbb{N} : \text{existe un } n\text{-camino de } u \text{ a } v\}$$

para todo $u \neq v$ puede verse que esta función es una métrica en V. Llamamos a esta función la *distancia grafo*. Definimos el *diametro de un grafo conexo G* por

$$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{diam}(V) = \sup\{\partial(u, v) : u, v \in V\}$$

Definición 6. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos se dice que G_1 es un *subgrafo* de G_2 si $V_1 \subseteq V_2$ y $E_1 \subseteq E_2$.

Definición 7. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ grafos. Una aplicación $\phi : V \longrightarrow V'$ es llamado un *isomorfismo de grafos* si (i) ϕ es biyectiva y (ii) si $u, v \in V$ entonces $\{u, v\} \in E$ si y sólo si $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E'$. Si existe un isomorfismo entre dos grafos se dice que estos son *isomorfos.* Si $\phi : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo de grafos entonces se dice que ϕ es un *automorfismo.*

Definición 8. Un grafo se dice *completo* si es isomorfo a algún K_n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Definición 9. Un grafo G se dice *etiquetado* si dado que $\mathrm{card}(V(G)) = n$ entonces existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $V(G)$ y el conjunto $\{1, \ldots, n\}$. En caso de que el grafo sea etiquetado usualmente se escribirá $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Note que todo grafo puede ser etiquetado.

Definición 10. La *matriz de adyacencia* de un grafo etiquetado $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ es la matriz $A_G = [a_{ij}]$ de tamaño $n \times n$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ v_i \sim v_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 1. *Sean $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ un grafo etiquetado, $m \in \mathbb{N}$ y A_G su matriz de adyacencia. Si ${A_G}^m = [c_{ij}]$ entonces c_{ij} coincide con el número de m-caminos de v_i a v_j.*

Demostración. Suponga que $A_G = [a_{ij}]$ y ${A_G}^n = [c_{ij}]$ entonces

$$c_{ij} = \sum_{k_1, \ldots, k_{m-1} \in \{1, \ldots, n\}} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{m-1} j}$$

donde $a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{m-1} j} = 1$ si y sólo si $v_i \sim v_{k_1} \sim \cdots \sim v_{k_{m-1}} \sim v_j$ es un m-camino de v_i a v_j y $a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 k_3} \cdots a_{k_{m-1} j} = 0$ si y sólo si algún par de vertices subsecuentes $v_i, v_{k_1}, \cdots, v_{k_{m-1}}, v_j$ no son adyacentes y por lo tanto $v_i, v_{k_1}, \cdots, v_{k_{m-1}}, v_j$ no es un m-camino. Así c_{ij} cuenta el número de m-caminos de v_i a v_j. □

Definición 11. Si G es un grafo etiquetado y A_G de tamaño $n \times n$ es su matriz de adyacencia con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ como sus valores propios (posiblemente repetidos), entonces definimos el *espectro* de G como el conjunto de valores propios de A_G y la *energía* de G por

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Definición 12. Un *bigrafo* o *grafo bipartito* es un grafo $G = (V, E)$ para el cuál existe una partición de V en dos subconjuntos propios V_1 y V_2 de tal manera que todo elemento de E es de la forma $\{v_1, v_2\}$ donde $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Definición 13. Sean $V_1 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n)\}$ y $V_2 = \{(2,1), (2,2), \ldots, (2,m)\}$. Definimos el *bigrafo completo de n y m nodos*, denotado $K_{n,m}$ como el grafo con vertices $V(K_{n.m}) = V_1 \cup V_2$ y en donde $\{v_1, v_2\} \in E(K_{n,m})$ si y sólo si $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Definición 14. Un bigrafo se dice *completo* si es isomorfo a $K_{n,m}$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Un bigrafo se llama una *estrella* si es isomorfo a $K_{1,m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, el elemento correspondiente a $(1,1)$ mediante esta transformación se le llama el *centro de la estrella*.

Definición 15. Un *trigrafo* o *grafo tripartito* es un grafo $G = (V, E)$ para el cuál existe una partición de V en tres subconjuntos propios V_1, V_2 y V_3 de tal manera que todo elemento de E es de la forma $\{v_i, v_j\}$ donde $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_j$ para $i = 1, 2, 3$ y $j \neq i$.

Definición 16. Sean $V_1 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n)\}$, $V_2 = \{(2,1), (2,2), \ldots, (2,m)\}$ y $V_3 = \{(3,1), (3,2), \ldots, (3,r)\}$. Definimos el *bigrafo completo de n, m y r nodos*, denotado $K_{n,m,r}$ como el grafo con vertices $V(K_{n.m,r}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y en donde $\{v_i, v_j\} \in E(K_{n,m,r})$ si y sólo si $v_i \in V_i$ y $v_j \in V_3$, $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

Definición 17. Un trigrafo se dice *completo* si es isomorfo a $K_{n,m,r}$ para algunos $n, m, r \in \mathbb{N}$.

Definición 18. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Una *n-coloración* de G ($n \in \mathbb{N}$) es una función $\theta : V \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ tal que si $u \sim v$ entonces $\theta(u) \neq \theta(v)$. Note que ya que todo grafo puede ser etiquetado entonces siempre existe una r-coloración de G, siendo $r = \text{card}(V)$ y siendo esta coloración $\theta(v_i) = i$. Definimos el *número cromático del grafo G*, $\chi(G)$ por

$$\chi(G) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : G \text{ tiene una } n\text{-coloración}\}.$$

De esta definición puede notarse los siguientes hechos importantes

- $\chi(G) \leq \text{card}(V)$.
- Si G es un grafo completo entonces $\chi(G) = \text{card}(V)$ (suponga que existe una s-coloración θ con $s < r = \text{card}(V)$ entonces para la etiqueta $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ se tiene que ya que $v_i \sim v_j$ para todo $i \neq j$ entonces $\theta(v_i) \neq \theta(v_j)$ para todo $i \neq j$, luego $s = \text{card}(\theta(V)) \geq r$, lo cual es imposible pues $s < r$).
- Si G es un grafo bipartito entonces $\chi(G) \leq 2$ (Sean V_1 y V_2 una partición de $V(G)$ y defina θ por

  $$\theta(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in V_1, \\ 2 & \text{si } v \in V_2. \end{cases},$$

  entonces θ es una 2-coloración ya que si $u \sim v$ entonces $u \in V_1$ y $v \in V_2$, luego $\theta(u) = 1 \neq 2 = \theta(v)$). Note que si existiesen si $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ tales que $v_1 \sim v_2$ se tendría que para cualquier $r-$coloración θ, $\theta(v_1) \neq \theta(v_2)$ y por lo tanto $r \geq 2$. Luego $\chi(G) = 2$.
- Si G es un grafo tripartito entonces $\chi(G) \leq 3$ (Sean V_1, V_2 y V_3 una partición de $V(G)$ entonces la función θ definida por

  $$\theta(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in V_1, \\ 2 & \text{si } v \in V_2, \\ 3 & \text{si } v \in V_3. \end{cases},$$

  es una coloración ya que si $u \sim v$ entonces $u \in V_i$ $v \in V_j$ para algunos $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \neq i$, luego $\theta(u) = i \neq j = \theta(v)$).

1.2. Funciones aritméticas

Definición 19. Una función compleja h se dice que es *aritmética* si su dominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, *i.e.* $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Una función aritmética h se dice *multiplicativa* si $h(nm) = h(n)h(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $\gcd(n, m) = 1$. Una función aritmética h se dice *completamente multiplicativa* si $h(nm) = h(n)h(m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 20. Definimos la función aritmética $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de Euler o función indicatriz de Euler, como la función definida por la formula,

$$\phi(n) = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : \gcd(n, k) = 1, k \leq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Definición 21. Definimos la función aritmética $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, 0, -1\}$ de Möbius, por la formula

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ donde los } p_i \text{ son primos distintos,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

Definición 22. Definimos la función aritmética $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ de Mangoldt, por la formula

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{si } n = p^k \text{ para algún } p \text{ primo y } k \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Definición 23. Definimos la función aritmética $\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, -1\}$ de Liouville, por la formula

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^{r_1 + \cdots + r_k} & \text{si } n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \text{ donde los } p_i \text{ son primos distintos.} \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Estas son algunas de las funciones aritméticas más usadas en muchas ramas de las matemáticas, puede verificarse sin mucha dificultad que las funciones de las definiciones 22, 23 y 25 son multiplicativa, mientras la función de la definición 24 no lo es, ni siquiera cumple la propiedad de que $\Lambda(1) = 1$. Estas propiedades serán utiles al construir grafos.

2. Grafos de funciones aritméticas sobre grupos finitos

2.1. Definición y ejemplos

Una forma interesante de crear grafos finitos consiste en tomar funciones aritméticas y grupos finitos y a partir de sus ordenes construir su condición de adyacencia. Para las siguientes definiciones considere $\mathfrak{G}$ un grupo finito. Denotaremos el orden de un elemento u por $o(u)$.

Definición 24. Definimos el *grafo coprimo de orden del grupo* $\mathfrak{G}$, $OP(\mathfrak{G})$ como aquel con vertices $V(OP(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ y en donde dos nodos u y v diferentes son adyacentes si y sólo si $\gcd(o(u), o(v)) = 1$.

Definición 25. Sea h una función aritmética, definimos el *grafo de función aritmética del grupo* $\mathfrak{G}$ *respecto a la función aritmética* h o simplemente el *h-grafo de* $\mathfrak{G}$, $G_h(\mathfrak{G})$ como aquel con vertices $V(G_h(\mathfrak{G})) = \mathfrak{G}$ y en donde dos nodos u y v diferentes son adyacentes si y sólo si $h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v))$.

Ejemplo 1. Considere el grupo finito $\mathfrak{G} = S_3$, el grupo simétrico sobre un conjunto de tres elementos. Este grupo tiene representación como tabla de Cayley de la siguiente forma:

$\cdot$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	a	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

donde se interpreta $S_3 = \{e, a, b, c, d, f\}$ como un conjunto de símbolos con la operación interna definida por el resultado de la tabla concerniente al producto fila $\cdot$ columna. *e.g.* $c \cdot b = f$ y $f \cdot a = c$. Calculamos los ordenes de cada elemento y obtenemos que $o(e) = 1, o(c) = o(d) = o(f) = 2$ y $o(a) = 3 = o(b)$. A partir de esta información podemos obtener los grafos $G_h(S_3)$ respecto a las funciones $\phi, \mu, \lambda, \Lambda$ y la función no multiplicativa $h_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$h_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ n+1 & \text{si } n = 2,3,4,6,9, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

En su respectivo ordenes tenemos que

1. Para la función ϕ de Euler vemos que $\phi(2 \cdot 3) = 2 = \phi(2)\phi(3)$, $\phi(1 \cdot 2) = 1 = \phi(1)\phi(2)$ y $\phi(1 \cdot 3) = 2 = \phi(1)\phi(3)$, lo cual implica que en $G_\phi(S_3)$, $e \sim u$ para todo $u \in S_3 \setminus \{e\}$ y $a, b \sim c, d, f$ (donde este símbolo se entiende como todas las adyacencias tomando un elemento a la izquierda de $\sim$ y uno a la derecha del mismo). Por último, note que $\phi(2^2) = 2 \neq 1 = \phi(2)^2$ y $\phi(3^2) = 6 \neq 4 = \phi(3)^2$ y por lo tanto $a \not\sim b$ y ninguno de los elementos c, d, f son adyacentes.

2. Para la función μ de Möbius vemos que $\mu(2 \cdot 3) = 1 = \mu(2)\mu(3)$, $\mu(1 \cdot 2) = 1 = \mu(1)\mu(2)$ y $\mu(1 \cdot 3) = 1 = \mu(1)\mu(3)$, lo cual implica que en $G_\mu(S_3)$, $e \sim u$ para todo $u \in S_3 \setminus \{e\}$ y $a, b \sim c, d, f$. Por último $\mu(n^2) = 0 \neq 1 = \mu(n)^2$ para $n = 2, 3$, nuevamente esto implica que $a \not\sim b$ y ninguno de los elementos c, d, f son adyacentes.

3. Para la función λ de Liouville vemos que $\lambda(2 \cdot 3) = 1 = \lambda(2)\lambda(3)$, $\lambda(1 \cdot 2) = -1 = \lambda(1)\lambda(2)$ y $\lambda(1 \cdot 3) = -1 = \lambda(1)\lambda(3)$, lo cual implica que en $G_\lambda(S_3)$, $e \sim u$ para todo $u \in S_3 \setminus \{e\}$ y $a, b \sim c, d, f$. Por último ya que $\lambda(n^2) = 1 = \lambda(n)^2$ para $n = 2, 3$, entonces se tienen el resto de adyacencias $a \sim b, c \sim d, f$ y $d \sim f$. Luego $G_\lambda(S_3) \cong K_6$ (este símbolo expresa que los dos grafos son isomorfos) es completo.

4. Para la función no multiplicativa Λ de Mangoldt vemos que $\Lambda(2 \cdot 3) = 0 \neq \ln(2)\ln(3) = \Lambda(2)\Lambda(3)$, $\Lambda(1 \cdot 2) = \ln(2) \neq 0 = \Lambda(1)\Lambda(2)$ y $\Lambda(1 \cdot 3) = \ln(3) \neq 0 = \Lambda(1)\Lambda(3)$, lo cual implica que en $G_\Lambda(S_3)$ ninguno de los elementos de $S_3 \setminus \{e\}$ es adyacente a e y ninguno de los elementos de $\{a, b\}$ es adyacente a algún elemento de $\{c, d, f\}$. Por último ya que $\Lambda(n^2) = 0 \neq \ln(n)^2 = \lambda(n)^2$ para $n = 2, 3$, entonces se tiene que tampoco se cumplen las demás posibles adyacencias, *i.e.* $a \not\sim b, c \not\sim d, c \not\sim f$ y $d \not\sim f$. Así, $E(G_\Lambda(S_3)) = \emptyset$.

5. Por último para la función no multiplicativa h_0 tenemos que $h_0(2 \cdot 3) = 7 \neq 12 = h_0(2)h_0(3), h_0(1 \cdot 2) = 3 = h_0(1)h_0(2)$ y $h_0(1 \cdot 3) = 4 = h_0(1)h_0(3)$, esto implica que en $G_{h_0}(S_3)$, $e \sim u$ para todo $u \in S_3 \setminus \{e\}$ y ninguno de los elementos de $\{a, b\}$ es adyacente a algún elemento de $\{c, d, f\}$. Por último $h_0(2^2) = 5 \neq 9 = h_0(2)^2$ y $h_0(3^2) = 10 \neq 16 = h_0(3)^2$ lo cual implica que tampoco se cumplen las demás posibles adyacencias, *i.e.* $a \not\sim b, c \not\sim d, c \not\sim f$ y $d \not\sim f$. Finalmente $G_{h_0}(S_3) \cong K_{1,5}$ es una estrella con centro en e.

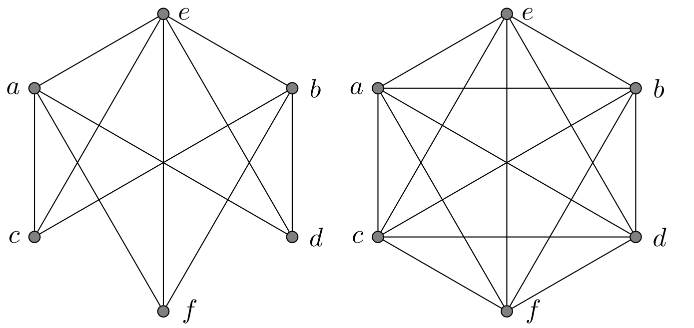

Figura 1: De izquierda a derecha, $G_\phi(S_3) = G_\mu(S_3)$ y $G_\lambda(S_3)$

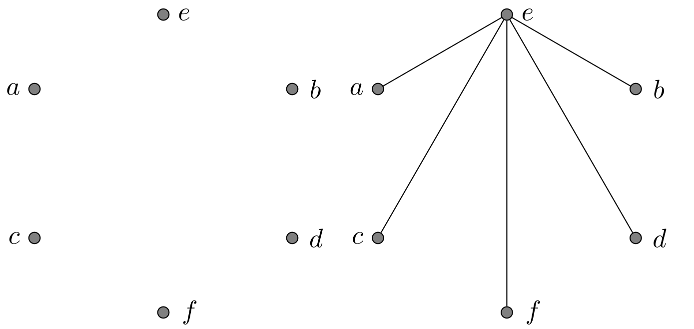

Figura 2: De izquierda a derecha, $G_\Lambda(S_3)$ y $G_{h_0}(S_3)$

El cálculo de las adyacencias para los grafos de funciones aritméticas para este grupo fue relativamente sencillo, de hecho todos los productos de ordenes nm eran el producto de números relativamente primos o cuadrados, al considerar funciones aritméticas se puede caracterizar muchas de sus propiedades de cada uno de estos grafos al estudiar propiedades tales como si una función aritmética *"envía 1 en 1"* o si *"separa cuadrados"*.

Por último calculemos las adyacencias del grafo coprimo de orden del grupo S_3, $OP(S_3)$. En este caso las únicas adyacencias que se tienen son $e \sim u$ para todo $u \in S_3 \setminus \{e\}$ y $a, b \sim c, d, f$, nodos para las cuales sus ordenes son relativamente primos. Note que el grafo coprimo de orden en este caso coincide con el grafo $G_\phi(S_3)$. Queremos demostrar que de hecho para cualquier grupo finito $\mathfrak{G}$ el grafo coprimo de orden de este grupo coincide con el ϕ-grafo de $\mathfrak{G}$.

2.2. Algunas propiedades sobre los grafos

Proposición 1. *Sea h una función aritmética. Si $\mathfrak{G}_1$ es un subgrupo de un grupo finito de $\mathfrak{G}_2$, entonces $G_h(\mathfrak{G}_1)$ es un subgrafo de $G_h(\mathfrak{G}_2)$.*

Demostración. Ya que $\mathfrak{G}_1$ es un subgrupo de $\mathfrak{G}_2$, entonces $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2$, luego $V(G_h(\mathfrak{G}_1)) \subseteq V(G_h(\mathfrak{G}_2))$. Por otro lado, ya que $\mathfrak{G}_1$ es un subgrupo de $\mathfrak{G}_2$ entonces $u^n \in \mathfrak{G}_1$ para todo $u \in \mathfrak{G}_1$ y todo $n \in \mathbb{N}$, luego el orden de todo elemento de $\mathfrak{G}_1$ es el mismo que en $\mathfrak{G}_2$. Así si $u, v \in \mathfrak{G}_1$ son adyacentes en $G_h(\mathfrak{G}_1)$ entonces lo siguen siendo en $G_h(\mathfrak{G}_2)$. $\square$

Proposición 2. *Sea $\mathfrak{G}$ un grupo finito. Si h es una función aritmética completamente multiplicativa, entonces $G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo completo.*

Demostración. Sean $u, v \in \mathfrak{G}$ entonces ya que h es completamente multiplicativa se tiene que $h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v))$. Así $u \sim v$ y por lo tanto $G_h(\mathfrak{G})$ es completo. $\square$

Proposición 3. *Sean h una función aritmética, $\mathfrak{G}_1$ y $\mathfrak{G}_2$ dos grupos finitos isomorfos. Entonces $G_h(\mathfrak{G}_1)$ es isomorfo a $G_h(\mathfrak{G}_2)$.*

Demostración. Sea $\phi : \mathfrak{G}_1 \longrightarrow \mathfrak{G}_2$ un isomorfismo de grupos, entonces $o(\phi(u)) = o(u)$ para todo $u \in \mathfrak{G}_1$. Sean $u, v \in \mathfrak{G}_1$ entonces por la igualdad

$$h(o(u))h(o(v)) = h(o(\phi(u)))h(o(\phi(v)))$$

se sigue que $\{u, v\} \in E(G_h(\mathfrak{G}_1))$ si y sólo si $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E(G_h(\mathfrak{G}_2))$. Así ϕ es también un isomorfismo de grafos. $\square$

Nota. El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Considere h una función completamente multiplicativa y considere los grupos V_4 el grupo de Klein y $\mathbb{Z}_4$ el grupo aditivo de los enteros modulo 4. Por la proposición 2 $G_h(V_4)$ y $G_h(\mathbb{Z}_4)$ son isomorfos a K_4 y por lo tanto isomorfos entre si. Sin embargo, se sabe que los grupos V_4 y $\mathbb{Z}_4$ no son isomorfos.

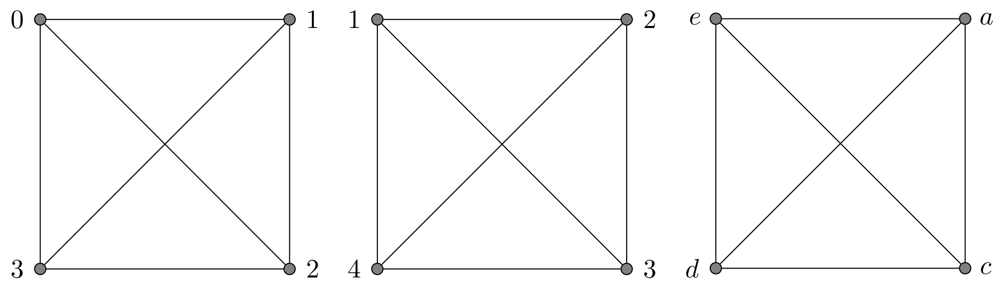

Figura 3: Distintas vistas del "mismo" grafo, $G_h(\mathbb{Z}_4) \cong K_4 \cong G_h(\mathbb{Z}_4)$

Proposición 4. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h es una función aritmética tal que $h(1) = 1$. Entonces $\{e, u\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$ para todo $u \in \mathfrak{G}$.*

Demostración. Ya que e es el elemento neutro de $\mathfrak{G}$ entonces $o(e) = 1$. Sea $u \in \mathfrak{G}$ entonces $h(o(e)o(u)) = h(1 \cdot o(u)) = 1 \cdot h(o(u)) = h(1)h(o(u)) = h(o(e))h(o(u))$. Así $\{e, u\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$ para todo $u \in \mathfrak{G}$. $\square$

Note que si una función aritmética h es multiplicativa, entonces se cumple la condición $h(1) = 1$ de forma inmediata y por lo tanto la proposición anterior es válida para cualquier función multiplicativa. Puede parecer que la proposición anterior es muy simple, sin embargo tiene consecuencias muy importantes en lo que respecta a la estructura del grafo, tales consecuencias quedan enunciadas en el siguiente corolario.

Corolario. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h una función aritmética tal que $h(1) = 1$. Entonces*

1. $G_h(\mathfrak{G})$ *es un grafo conexo con* $\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) \leq 2$.
2. $\deg(e) = n - 1 \leq \operatorname{card}\left(E(G_h(\mathfrak{G}))\right) \leq \binom{n}{2}$.

Demostración. Ya que $h(1) = 1$ por el teorema anterior se sigue que $\{e, u\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$ para todo $u \in \mathfrak{G}$. Luego

1. Si $u, v \in \mathfrak{G}$ entonces $u \sim e \sim v$ es un 2-camino de u a v, luego $\partial(u, v) \leq 2$ para todo $u, v \in \mathfrak{G}$ y por lo tanto
$$\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) = \sup_{u,v \in \mathfrak{G}} \partial(u, v) \leq 2.$$
2. Nuevamente por el teorema anterior $\{e, u\} \in E$, para todo $u \in V$. Por lo tanto $\deg(e) = n - 1$.

□

Proposición 5. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h una función multiplicativa. Si $u \in \mathfrak{G}$ es tal que* $\gcd(o(u), o(v)) = 1$ *para todo $v \neq u$ en $\mathfrak{G}$ entonces* $\deg(u) = n - 1$.

Demostración. Ya que h es multiplicativa entonces $h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v))$ para todo $v \in \mathfrak{G}$ tal que $\gcd(o(u), o(v)) = 1$, así $u \sim v$ para todo $v \neq u$. □

Teorema 2. *Sea $\mathfrak{G}$ un grupo finito. Si h es una función multiplicativa, entonces $OP(\mathfrak{G})$ es un subgrafo de $G_h(\mathfrak{G})$.*

Demostración. Ya que ambos grafos tienen el mismo conjunto de vertices $\mathfrak{G}$ basta ver que se cumple la contenencia en su conjunto de aristas. Sean $u, v \in \mathfrak{G}$ tales que $\{u, v\} \in E(OP(\mathfrak{G}))$ entonces $\gcd(o(u), o(v)) = 1$. Ya que h es multipicativa se cumple que $h(o(u)o(v)) = h(o(u)))h(o(v))$ y por lo tanto $\{u, v\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$. Así, $OP(\mathfrak{G})$ es subgrafo de $G_h(\mathfrak{G})$. □

Corolario. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito y h una función multiplicativa. Entonces,*

$$OP(\mathfrak{G}) = G_h(\mathfrak{G}) \iff (\forall u, v \in \mathfrak{G} : h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v)) \Longrightarrow \gcd(o(u), o(v)) = 1).$$

Teorema 3. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito y ϕ la función ϕ de Euler,*

$$G_\phi(\mathfrak{G}) = OP(\mathfrak{G})$$

Demostración. La función ϕ es multiplicativa y además cumple la siguiente igualdad

$$\phi(nm) = \frac{1}{\phi\left(\gcd(n, m)\right)}\phi(n)\phi(m).$$

Esta identidad implica que si $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ entonces $\phi\left(\gcd(n, m)\right) = 1$ y por lo tanto que $\gcd(n, m) = 1$. Así, por el corolario anterior $G_\phi(\mathfrak{G}) = OP(\mathfrak{G})$. □

Corolario. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito y H el conjunto de todas las funciones multiplicativas. Entonces*

$$\bigcap_{h\in H} G_h(\mathfrak{G}) = OP(\mathfrak{G})$$

donde,

$$\bigcap_{h\in H} G_h(\mathfrak{G}) = \left(\mathfrak{G}, \bigcap_{h\in H} E\left(G_h(\mathfrak{G})\right)\right)$$

Demostración. Por definición se tiene que el conjunto de vertices es el mismo en ambos grafos. Por el teorema 1 se tiene

$$E(OP(\mathfrak{G})) \subseteq E(G_h(\mathfrak{G})), \quad \forall h \in H$$

luego,

$$E(OP(\mathfrak{G})) \subseteq \bigcap_{h\in H} E(G_h(\mathfrak{G})).$$

Por otro lado, por el teorema 2 $G_\phi(\mathfrak{G}) = OP(\mathfrak{G})$ donde $\phi \in H$, así

$$\bigcap_{h\in H} E(G_h(\mathfrak{G})) \subseteq E(G_\phi(\mathfrak{G})) = E(OP(\mathfrak{G})) \subseteq \bigcap_{h\in H} E(G_h(\mathfrak{G})).$$

De donde se concluye que

$$\bigcap_{h\in H} E(G_h(\mathfrak{G})) = E(OP(\mathfrak{G}))$$

y por lo tanto

$$\bigcap_{h\in H} G_h(\mathfrak{G}) = OP(\mathfrak{G}).$$

□

3. Caracterización del grafo de función aritmética

Luego de presentar la relación que existe entre los grafos $OP(\mathfrak{G})$ y $G_h(\mathfrak{G})$ se quiere ver algunas consecuencias surgidas sobre el grafo $G_h(\mathfrak{G})$ al imponer algunas condiciones sobre las función aritmética h que consideramos o al imponer algunas otras al grupo $\mathfrak{G}$.

3.1. Separación de números primos

Ejemplo 2. Considere h una función aritmética tal que $h(1) = 1$ y $\mathbb{Z}_2$ el grupo aditivo de los enteros modulo 2, por la proposición 4, $\{0, 1\} \in E(G_h(\mathbb{Z}_2))$ y por lo tanto $G_h(\mathbb{Z}_2) \cong K_2$. Considere ahora, $\mathbb{Z}_3$ el grupo aditivo de los enteros modulo 3, entonces $o(0) = 1$, $o(1) = 3$ ya que $\mathbf{3} \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \equiv_3 0$ y $o(2) = 3$ ya que $2 + 2 + 2 = 6 \equiv_3 0$ pero $\mathbf{1} \cdot 2, \mathbf{2} \cdot 2 \not\equiv_3 0$. Así, por la misma proposición $\{0, 1\}, \{0, 2\} \in E(G_h(\mathbb{Z}_3))$, mientras que $\{1, 2\} \in E(G_h(\mathbb{Z}_3))$ si y sólo si $h(3^2) = h(o(1)o(2)) = h(o(1))h(o(2)) = h(3)^2$. Note a su vez que si $\{1, 2\} \notin E(G_h(\mathbb{Z}_3))$ entonces $V_1 = \{0\}$ y $V_2 = \{1, 2\}$ vuelven a $G_h(\mathbb{Z}_3)$ una estrella con centro en 0. Por lo tanto tenemos la siguiente afirmación.

Sea h una función aritmética tal que $h(1) = 1$ entonces

- $G_h(\mathbb{Z}_2) \cong K_2$,
- $G_h(\mathbb{Z}_3) \cong K_3$ si y sólo si $h(3^2) = h(3)^2$,
- $G_h(\mathbb{Z}_3)$ es una estrella con centro en 0 si y sólo si $h(3^2) \neq h(3)^2$.

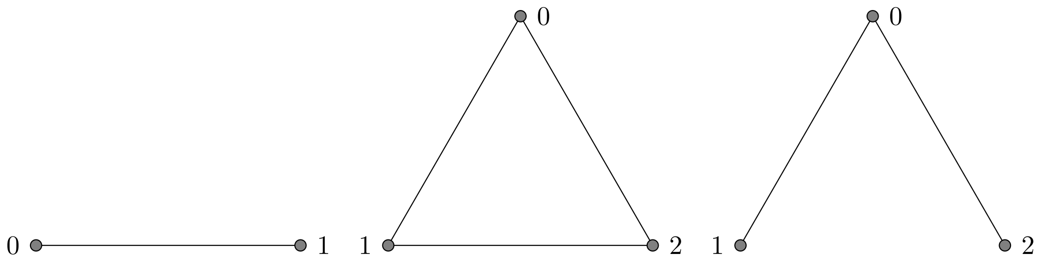

Figura 4: De izquierda a derecha, $G_h(\mathbb{Z}_2)$, $G_h(\mathbb{Z}_3)$ si $h(3^2) = h(3)^2$ y $G_h(\mathbb{Z}_3)$ si $h(3^2) \neq h(3)^2$

El siguiente teorema nos brinda condiciones necesarias para determinar si el grafo $G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo completo o una estrella.

Teorema 4. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden $p > 2$ un número primo y h una función multiplicativa. Entonces*

1. *$G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo completo si y sólo si $h(p^2) = h(p)^2$,*
2. *$G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella si y sólo si $h(p^2) \neq h(p)^2$.*

Demostración.

1. ($\Longrightarrow$) Suponga que $G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo completo. Ya que $o(\mathfrak{G}) = p > 2$, entonces existen dos elementos $u, v \in \mathfrak{G} \backslash \{e\}$ y ya que p es primo se sigue por el teorema de Lagrange que $o(u) = o(v) = p$. Como $\mathfrak{G}$ es completo se tiene que $\{u, v\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$ y por lo tanto
$$h(p^2) = h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v)) = h(p)^2.$$
($\Longleftarrow$) Recíprocamente suponga que $h(p^2) = h(p)^2$, ya que h es multiplicativa, $h(1) = 1$ y por la proposición 4 se sigue que $\{e, u\} \in G_h(\mathfrak{G})$ para todo $u \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$. Sean $u, v \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$ dos elementos distintos, ya que $o(\mathfrak{G}) = p$ primo, por el teorema de Lagrange $o(u) = o(v) = p$ entonces
$$h(o(u)o(v)) = h(p^2) = h(p)^2 = h(o(u))h(o(v)).$$
Así por definición de $G_h(\mathfrak{G})$ se sigue que $\{u, v\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$, por lo tanto $G_h(\mathfrak{G})$ es completo.
2. ($\Longrightarrow$) Suponga que $G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella. Ya que $h(1) = 1$ se tiene que $\{e, u\} \in E(G_h(\mathfrak{G}))$ para todo $u \in \mathfrak{G} \backslash \{e\}$. Sean u, v dos nodos cualesquiera distintos de e, nuevamente se tiene que $o(u) = o(v) = p$ y ya que $G_h(\mathfrak{G})$ es estrella se sigue que e es su centro y por lo tanto u y v no son adyacentes. Por lo tanto
$$h(p^2) = h(o(u)o(v)) \neq h(o(u))h(o(v)) = h(p)^2.$$
($\Longleftarrow$) Recíprocamente suponga que $h(p^2) \neq h(p)^2$, ya que $h(1) = 1$ nuevamente por la proposición 4 se sigue que $\{e, u\} \in G_h(\mathfrak{G})$ para todo $u \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$. Más aún, si $u, v \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$ son dos puntos distintos entonces
$$h(o(u)o(v)) = h(p^2) \neq h(p)^2 = h(o(u))h(o(v))$$
y por lo tanto u y v no son adyacentes. Así $G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella con centro en e siendo isomorfo a $K_{1,p-1}$.

□

Corolario 1. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden $p > 2$, un número primo y h una función multiplicativa. Entonces*

1. $\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) = 1$ *y* $\chi(G) = p$, *si* $h(p^2) = h(p)^2$,
2. $\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) = 2$ *y* $\chi(G) = 2$, *si* $h(p^2) \neq h(p)^2$.

Demostración.

1. Si $h(p^2) = h(p)^2$, entonces $G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo completo, luego
$$\partial(u, v) = 1, \quad \forall u, v \in \mathfrak{G}.$$
Así, $\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) = 1$ y $\chi(G_h(\mathfrak{G})) = p$ por las notas al margen de la definición 18.
2. Si $h(p^2) \neq h(p)^2$ se tiene por el corolario de la proposición 4 que $\operatorname{diam}(G_h(\mathfrak{G})) = 2$. Además, ya que $G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella con centro en e se sigue que $e \sim u$ para cualquier $u \in V(G_h(\mathfrak{G})) \setminus \{e\}$, siendo $e \in \{e\}$, nuevamente por las observaciones de la definición 18 se sigue que $\chi(G_h(\mathfrak{G})) = 2$.

□

Corolario 2. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden $p > 2$ un número primo y h una función multiplicatica. Entonces*

1. *Si $h(p^2) = h(p)^2$, el grafo $G_h(\mathfrak{G})$ tiene espectro*
$$\begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix}$$
(*en esta notación la primera fila indica los valores propios, mientras que la segunda fila indica su respectiva multiplicidad) y su energía es $\mathcal{E}(G_h(\mathfrak{G})) = 2(p-1)$.*
2. *Si $h(p^2) \neq h(p)^2$, el grafo $G_h(\mathfrak{G})$ tiene espectro*
$$\begin{pmatrix} \sqrt{p-1} & 0 & -\sqrt{p-1} \\ 1 & p-2 & 1 \end{pmatrix}$$
y por lo tanto energía $\mathcal{E}(G_h(\mathfrak{G})) = 2\sqrt{p-1}$.

Demostración.

1. Ya que $h(p^2) = h(p)^2$ entonces $G_h(\mathfrak{G})$ es completo y por lo tanto
$$A_{G_h(\mathfrak{G})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
independiente de la forma en que se etiquete $G_h(\mathfrak{G})$, note que el polinomio caracteristico de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$ es
$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}$$

de donde se ve que $\lambda = -1$ es una raíz de $p(\lambda)$. Por otro lado, note que

$$A_{G_h(\mathfrak{G})}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = (p-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

por lo tanto $\lambda = p-1$ es otro valor propio de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$. Para ver las multiplicidades de estos valores propios note que si $\lambda = -1$ entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}(\lambda) = \dim\big(\ker(A_{G_h(\mathfrak{G})} - \lambda I)\big) = \operatorname{nul}(A_{G_h(\mathfrak{G})} - \lambda I) &\overset{(i)}{=} p - \operatorname{ran}(A_{G_h(\mathfrak{G})} - \lambda I)\\ &= p - \operatorname{ran}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} = p-1.\end{aligned}$$

(i) por el teorema del rango y la nulidad. Así, los valores propios de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$ son $\lambda = -1, p-1$ con multiplicidades $\operatorname{mult}(\lambda) = p-1, 1$ respectivamente.

2. Ya que $h(p^2) \neq h(p)^2$ entonces $G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella con centro en e. Disponga $V(G_h(\mathfrak{G})) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ de tal forma que $v_1 = e$, entonces

$$A_{G_h(\mathfrak{G})} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Nuevamente, el polinomio caracteristico de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$ viene dado por

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda\end{pmatrix}$$

de donde se ve que $\lambda = 0$ es un valor propio de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$, con multiplicidad

$$\begin{aligned}\operatorname{mult}(\lambda) = \operatorname{nul}(A_{G_h(\mathfrak{G})} - \lambda I) &= p - \operatorname{ran}(A_{G_h(\mathfrak{G})} - \lambda I)\\ &= p - \operatorname{ran}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = p-2.\end{aligned}$$

Por otro lado, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{p-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{p-1} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{p-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que entonces $\lambda = \pm\sqrt{p-1}$ son otros dos valores propios de $A_{G_h(\mathfrak{G})}$. Así, $A_{G_h(\mathfrak{G})}$ tiene valores propios $\lambda = 0, \sqrt{p-1}, -\sqrt{p-1}$ con multiplicidades $\operatorname{mult}(\lambda) = p-2, 1, 1$ respectivamente.

En ambos casos el cálculo de la energía se sigue de la definición. $\square$

3.2. Grupos de orden pq y p^k

Teorema 5. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h una función multiplicatica. Si n no es una potencia de algún número primo, entonces $G_h(\mathfrak{G})$ no es una estrella.*

Demostración. Al ser h multiplicativa se sabe que $e \sim u$ para todo $u \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$. Para ver que $G_h(\mathfrak{G})$ no es una estrella basta ver que existen dos elementos distintos $u, v \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$ tales que $u \sim v$. En efecto, ya que n no es una potencia prima entonces existen dos números primos distintos p y q que dividen a n. Por el teorema de Cauchy para grupos abelianos finitos existen elementos $u, v \in \mathfrak{G} \setminus \{e\}$ con $o(u) = p$ y $o(v) = q$ entonces, claramente se tiene que $\gcd(o(u), o(v)) = 1$ y por lo tanto

$$h(o(u)o(v)) = h(o(u))h(o(v)).$$

Así, $u \sim v$ y por lo tanto $G_h(\mathfrak{G})$ no es una estrella. $\square$

Corolario 1. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h una función multiplicatica. Si $G_h(\mathfrak{G})$ es una estrella, entonces $n = p^k$ para algún número primo p.*

Corolario 2. *Sean $\mathfrak{G}$ un grupo finito de orden n y h una función multiplicatica. Si n no es una potencia de algún número primo, entonces*

1. *$G_h(\mathfrak{G})$ tiene al menos un triángulo (i.e. un cíclo de tres elementos).*
2. *$\chi(G_h(\mathfrak{G})) \geq 3$.*

Demostración. En la demostración del teorema 4 vemos la existencia de un triángulo $u \sim e \sim v \sim u$. Luego para cualquier r-coloración de $G_h(\mathfrak{G}), \theta$ se tiene que $\theta(u) \neq \theta(e)$, $\theta(e) \neq \theta(v)$ y $\theta(u) \neq \theta(v)$, así $r \geq 3$. $\square$

Teorema 6. *Sea h una función multiplicativa tal que $h(r^2) \neq h(r)^2$ para cualquier número primo r. Si $\mathfrak{G}$ es un grupo no abeliano de orden pq, donde p y q son dos números primos distintos, entonces*

1. *$G_h(\mathfrak{G})$ es un grafo tripartito completo isomorfo a $K_{1,r,s}$, donde r y s son el número de elementos de orden p y q en $\mathfrak{G}$ respectivamente.*
2. *$\chi(G_h(\mathfrak{G})) = 3$.*

Demostración. Sean $P = \{x \in \mathfrak{G} : o(x) = p\}$ y $Q = \{x \in \mathfrak{G} : o(x) = q\}$, entonces $r = \text{card}(P)$, $s = \text{card}(Q)$. Los conjuntos P, Q y $\{e\}$ forman una partición de $\mathfrak{G}$ ya que son no vacíos por el teorema de Cauchy, disjuntos dos a dos y además por el teorema de Lagrange todo elemento distinto de e tiene orden p ó q. Ya que h es multiplicativa se tiene que $e \sim u$ y $e \sim v$ para todo $u \in P$ y $v \in Q$ ya que p y q son números primos entonces $\gcd(o(u), o(v)) = 1$ para todo $u \in P$ y $v \in Q$ y por lo tanto $u \sim v$ para todo $u \in P$ y $v \in V$, además que para cualesquiera $u_1, u_2 \in P$ se tiene por hipótesis que

$$h(o(u_1)o(u_2)) = h(p^2) \neq h(p)^2 = h(o(u_1))h(o(u_2))$$

y por lo tanto u_1 y u_2 no son adyacentes. Un razonamiento similar prueba que v_1 y v_2 no son adyacentes si $v_1, v_2 \in Q$. Así se tiene que $G_h(\mathfrak{G})$ es isomorfo al grafo tripartito completo $K_{1,r,s}$, al ser un grafo tripartito se sigue que $\chi(G_h(\mathfrak{G})) \leq 3$ y al ser completo se sigue que dados $u \in P$ y $v \in Q$ entonces $e \sim u \sim v$, luego para cualquier coloración $\theta, \theta(e) \neq \theta(u), \theta(u) \neq (v)$ y $\theta(v) \neq \theta(e)$, luego $\chi(G) \geq 3$. Por lo tanto $\chi(G) = 3$. □

4. Conclusiones

Con este trabajo se pudo evidenciar una estructura de grafo consistente sobre la cual se pueden extraer numerosas propiedades sobre la completitud de los grafos, la conexidad, la coloración o el análisis espectral de la matriz de adyacencia del grafo. También se comprobó que el grafo coprimo de orden $OP(\mathfrak{G})$ se desprende como un caso particular del grafo de grupo respecto a una función aritmética $G_h(\mathfrak{G})$ tomando como función aritmética $h = \phi$ la función ϕ de Euler. Es importante recalcar la última parte del texto la cuál relaciona toda la teoría desarrollada a los p-subgrupos de Syllow de un grupo finito $\mathfrak{G}$ o de un grupo con orden pq. Como trabajo futuro se propone investigar nuevas propiedades sobre el grafo $G_h(\mathfrak{G})$ como la *distancia-regularidad* o la *quasi-distancia-regularidad* del grafo.

5. Bibliografía

[1] R. Rajendra, et. al., *Arithmetic Function Graph of a Finite Group*. Palestine Journal of Mathematics. **11(2)**(2022), 488–495.

[2] F. Harary, *Graph Theory*, Addison Wesley, Reading, Mass, (1972).

[3] D. M. Burton, *Elementary number theory*, 6th ed., McGraw Hill Education (New York), (2007).

[4] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, Second Ed., John Wiley & Sons, (2003).

[5] A. Hora, N. Obata, *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).