Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Programa de Matemáticas

El Problema de Dirichlet a partir del Análisis Complejo

Trabajo de Grado

Director

PhD. Julián Andrés Agredo Echeverry

Autor

Johan S. Suárez Espinosa

Mayo 2024

Resumen

En este texto se solucionarán con herramientas proporcionadas por el área del análisis complejo dos problemas de valores iniciales muy importantes en el ámbito de las ecuaciones diferenciales parciales, conocidos bajo el nombre de problemas de Dirichlet. La primera parte del texto sirve como una introducción superficial a la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) en ella se define la ecuación diferencial parcial de Laplace, sus soluciones conocidas como funciones armónicas y a su vez el operador Laplaciano ∇^2, así como una notación estándar para los espacios de funciones diferenciables. Posteriormente se presentan al lector resultados clásicos y algunos más específicos del análisis complejo que nos servirán de herramientas al resolver los problemas de Dirichlet.

La segunda parte del texto está centrada en resolver los problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace, inicialmente en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y posteriormente a través de los resultados obtenidos como consecuencia de este hecho se soluciona para el semiplano superior $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, a partir de la solución de estos problemas se obtienen resultados igualmente relevantes en el análisis complejo como la relación entre funciones armónicas y aquellas que cumplen la propiedad del valor medio, entre otras.

Palabras clave: Funciones armónicas, ecuación de Laplace, problema de Dirichlet, propiedad del valor medio, análisis complejo.

Abstract

In this text, two very important initial value problems in the field of partial differential equations, known as Dirichlet problems, will be solved using tools provided by the area of complex analysis. The first part of the text serves as a superficial introduction to the theory of partial differential equations (PDEs) in this part the Laplace's partial differential equation is defined, its solutions known as harmonic functions, and in turn, the Laplacian operator ∇^2, as well as standard notation for spaces of differentiable functions. Subsequently, classical and some more specific results of complex analysis are presented to the reader, which will serve as tools in solving the Dirichlet problems.

The second part of the text focuses on solving the Dirichlet problems for the Laplace equation, initially in the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ and subsequently through the results obtained as a consequence of this fact, it is solved for the upper half-plane $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. From the solution of these problems, equally relevant results in complex analysis are obtained, such as the relationship between harmonic functions and those that satisfy the mean value property, among others.

Keywords: Harmonic functions, Laplace's equation, Dirichlet problem, mean value property, complex analysis.

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales y en especial de los problemas de Dirichlet es de gran importancia en diversas áreas de la física, la ingeniería y las matemáticas aplicadas, en específico una de las ecuaciones diferenciales más importantes es la ecuación de Laplace o su equivalente no homogéneo, la ecuación de Poisson que tiene diversas aplicaciones. Estos problemas, que involucran la determinación de funciones armónicas sujetas a ciertas condiciones de contorno, presentan desafíos fundamentales en la comprensión y resolución de fenómenos físicos y procesos de difusión.

El análisis complejo emerge como una poderosa herramienta en la resolución de estos problemas. Al aprovechar la riqueza de técnicas y resultados del análisis complejo, se puede abordar de manera efectiva la determinación de soluciones para problemas de Dirichlet en regiones especiales del plano complejo.

En este trabajo, exploraremos cómo las herramientas del análisis complejo pueden emplearse para resolver problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace en regiones especiales del plano complejo. Nos adentraremos en la teoría detrás de estas herramientas y examinaremos su aplicación para obtener resultados importantes del análisis complejo como la equivalencia existente entre las funciones armónicas y las funciones que tienen la propiedad del valor medio.

Índice

1. Preliminares

En esta sección repasamos, algunos conceptos y resultados importantes de las teorías que vamos a tratar. Por tanto, se presentan nociones básicas de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, así como una segunda parte enfocada significativamente al análisis complejo, omitiendo nociones básicas como las propiedades de los números complejos, e introduciendo principalmente resultados significativos sobre la teoría de las funciones armónicas, haciendo principal énfasis en la propiedad del valor medio, entre otras.

1.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Se desarrollará una teoría básica a la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (*Abreviado.* EDPs) para funciones definidos en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Aunque este texto pretende únicamente resolver un problema de esta disciplina para unos ciertos subconjuntos especiales unicamente de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, el plano complejo. Se presenta además la noción general de lo que es un problema de Dirichlet.

Definición 1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $z_0 \in D$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua a valor real y $e_m \in \mathbb{R}^n$ $(m \in \mathbb{N}, m \leq n)$ el vector definido por la formúla

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = m \\ 0, & \text{si } k \neq m \end{cases};$$

El m-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$. Definimos la *derivada parcial de u respecto a x_m en el punto z_0* como el límite

$$\frac{\partial u}{\partial x_m}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(z_0 + he_m) - u(z_0)}{h},$$

siempre y cuando este exista. Si este límite existe para todo punto $z \in D$ se dice que la función u es *diferenciable respecto a x_m en D*, y a partir de esto se define la fúnción

$$u_{x_m} = \frac{\partial u}{\partial x_m} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z_0 \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x_m}(z_0)$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ se define la *k-ésima derivada de u respecto a x_m en el punto z_0* de forma recursiva como el límite

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}(z_0) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_m^{k-1}}(z_0)\right),$$

$$\frac{\partial^1 u}{\partial x_m^1}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x_m}(z_0),$$

siempre y cuando este límite exista (note que esto implica la diferenciablidad de la función $\partial^j u/\partial x_m^j$ para todo $j = 1, \ldots, k-1$). Si este límite existe para todo punto $z \in D$ se dice que la función u es *k veces diferenciable respecto a x_m en D* y se define como puede sospecharse la función

$$u_{x_m^k} = \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k} : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$z_0 \longmapsto \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}(z_0)$$

Definición 2. Un *multiíndice* es un vector $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, el *orden* de un multiíndice α es el número natural

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|.$$

Definición 3. Sean $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multiíndice y D, z_0 y u como en la definición 1. Se define la *derivada parcial iterada de u respecto al multiíndice α en el punto z_0* como el límite

$$D^\alpha u(z_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(z_0) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \circ \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right)(z_0);$$

Siempre y cuando este exista. Como ya es de costumbre si el límite existe para todo punto $z \in D$ diremos que la función u es *diferenciable respecto al multiíndice α en D* e inducimos la función $D^\alpha u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ como se esperaría. Adicionalmente si el orden del multiíndice α es k, diremos que *el orden de la derivada iterada $D^\alpha u$ es k.*

Definición 4. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $k \in \mathbb{N}$ y $C(D) = C^0(D)$ el conjunto de las funciones $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Definimos el conjunto $C^k(D)$ de las funciones *k veces diferenciables en D* como aquel de las funciones k veces diferenciables, es decir, las funciones $u \in C(D)$ tales que $D^\alpha u \in C(D)$ para todo multiíndice α con orden $|\alpha| \leq k$. *i.e.*

$$C^k(D) := \bigcap_{|\alpha| \leq k} \{u \in C(D) : D^\alpha u \in C(D)\}.$$

Sea $u \in C^k(D)$, definimos el conjunto $\mathfrak{D}^k u$ de todas las derivadas iteradas de u de orden menor o igual que k. *i.e.*

$$\mathfrak{D}^k u := \bigcup_{i=1}^{k} \{D^\alpha u \in C(D) : \alpha \text{ es un multiíndice de orden } i\}.$$

Definición 5. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $k \in \mathbb{N}$. Una *ecuación diferencial parcial de orden k* (EDP) es una expresión de la forma

$$F(z, u) = 0$$

donde $F : \mathbb{R}^n \times \mathfrak{D}^k(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ y donde al menos aparece una expresión no nula $D^\alpha u$ para algún multiíndice α con orden k y donde u es la incógnita. Si F es lineal en u y en sus derivadas iteradas, se dice que la ecuación es *lineal.*

Existen muchos ejemplos de EDPs, la mayoría basados en fenomenos físicos que se pueden modelar a partir de funciones $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o incluso $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. Para ver algunos ejemplos clásicos de EDPs vea [4] *pág. 1.*

Definición 6. Para $D \subseteq \mathbb{R}^n$. La *ecuación de Laplace* es la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

A una función $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ solución de la ecuación de Laplace se la llama *armónica.* Al operador $\nabla^2 : C^2(D) \longrightarrow C(D)$ definido por la formula[1]

[1]Probablemente la notación sale como una nemotecnia que surge a partir del operador gradiente $\nabla : C^1(D) \longrightarrow C(D; \mathbb{R}^n), u \longmapsto (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ y el operador divergencia $\nabla \cdot = \text{div} : C^1(D; \mathbb{R}^n) \longrightarrow C(D), (u_1, \cdots, u_n) \longmapsto \partial u_1/\partial x_1 + \cdots + \partial u_n/\partial x_n$. Note que para $u \in C^2(D)$, $\text{div}(\nabla u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$. Otra notación usual es $\Delta = \nabla^2$.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

se le conoce como el *Laplaciano.*

Dado un subconjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con interior no nulo y con frontera ∂D, $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $F(z, u) = 0$ una EDP en el interior de D, D°, ¿existe una función continua $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su restricción a D°, $u|_{D^\circ}$ es solución de la EDP y además su restricción a ∂D, $u|_{\partial D}$ coincide con la función f?, ¿puede darse condiciones necesarias para que la solución (si la hay) sea única? Esta clase de problemas son conocidos como problemas de Dirichlet y son fundamentales a la hora de encontrar funciones que describan comportamientos físicos de la realidad. Por ejemplo, para la ecuación de difusión ([4] *pág. 2.*) para un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ lo suficientemente adecuado un problema de Dirichlet puede modelar una función que describa la temperatura T en cada punto del conjunto D para un periodo de tiempo adecuado $[a, b]$, conociendo su temperatura en su frontera ∂D, T_0 en el mismo periodo de tiempo $[a, b]$. Más aún, para algunas condiciones adecuadas de D y de T_0 puede demostrarse que la solución es única.

1.2. Análisis Complejo

A partir de ahora, todo el contenido desarrollado en la subsección anterior será llevado a cabo en subconjuntos de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ el plano complejo por lo tanto nos referiremos a las variables de la sección anterior por $x_1 = x$ y $x_2 = y$. Se manejará una notación estándar de la variable compleja y se asume que el lector entiende algunas de las propiedades algebraicas más importantes de $\mathbb{C}$ como cuerpo. Recuerde que un *dominio* es un subconjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo y que si $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ entonces $f = u + iv$ donde $u = \mathrm{Re}f$ y $v = \mathrm{Im}f$ es la descomposición canónica de f en su parte real e imaginaria.

Teorema 1. *Sea D un dominio y $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función a valor complejo. Entonces f es analítica en D si y sólo si $u, v \in C^1(D)$ y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Demostración. Ver [3], pág. 47 □

Corolario. *Si D es un dominio, $f = u + iv$ es analítica y $u, v \in C^2(D)$ entonces u y v son funciones armónicas.*

Demostración. Ver [3], pág. 55 □

Nota. La condición de que $u, v \in C^2(D)$ es redundante, uno de los resultados más importantes de la variable compleja afirma que una función analítica es de hecho infinitas veces diferenciables lo cual implica que las componentes de f, u y v son infinitas veces diferenciables.

Definición 7. Sea D un dominio y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica, una función armónica $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *armónica conjugada de u* si la función $f = u + iv$ es analítica en D.

Definición 8. Un dominio S se dice *en forma de estrella respecto a* $s_0 \in S$ si para todo $s \in S$ el segmento que une a los puntos s y s_0 está contenido en S. Un dominio S se dice *en forma de estrella* si es en forma de estrella respecto a algún punto de S.

Note que el semiplano superior $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ y el circulo unidad $\{|z| < 1\}$ son ambos dominios en forma de estrella (de hecho, convexos).

Teorema 2. *Toda función armónica u definida en un dominio en forma de estrella D tiene una función armónica conjugada v en D.*

Demostración. Ver [3], pág. 83 □

Definición 9. Sea D un dominio, $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $z_0 \in D$ y $\rho > 0$ tal que el disco $\{|z - z_0| < \rho\} \subseteq D$. Se define el *valor promedio de h en la circunferencia* $\{|z - z_0| = r\}$ como el valor

$$A_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta, \qquad 0 < r < \rho$$

Teorema 3. *Sea u una función armónica en un dominio D, $z_0 \in D$ y $\rho > 0$ tal que $\{|z - z_0| < \rho\} \subseteq D$, entonces*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta = A_{z_0}(r), \qquad 0 < r < \rho.$$

Demostración. Ver [3], pág. 85 □

Lo que dice el teorema anterior es que para una función armónica u el promedio de u sobre el borde del círculo $\{|z - z_0| \leq r\}$ es igual al valor de u en su centro. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 10. Sea D un dominio y $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se dice que h tiene la *propiedad del valor medio en D* si dado $z \in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que el disco de radio ε centrado en z, está contenido en D y

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h\left(z + re^{i\theta}\right) d\theta = A_z(r), \qquad 0 < r < \varepsilon.$$

Es decir que el valor promedio sobre todas las circunferencias de radio $r < \varepsilon$ centradas en z coinciden con el valor de la función en el centro del círculo.

Teorema 4 (Principio del máximo estricto). *Sea D un dominio y $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con la propiedad del valor medio en D. Si $h \leq M$ en D y existe $z_0 \in D$ tal que $h(z_0) = M$, entonces h es constante.*

Demostración. Sea $U = \{z \in D : h(z) = M\}$ y $V = \{z \in D : h(z) < M\}$ entonces $D = U \sqcup V$ (unión disjunta). Sea $w \in U$, ya que h tiene la propiedad del valor medio en D y $h(w) = M$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[h(w) - h\left(w + re^{i\theta}\right)\right] d\theta, \qquad 0 < r < \varepsilon.$$

Ya que el integrando $h(w) - h\left(w + re^{i\theta}\right)$ es no negativo y continuo para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ entonces $h(w) - h\left(w + re^{i\theta}\right) = 0$ para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y todo $0 < r < \varepsilon$, *i.e.* $h(z) = h(w) = M$ para todo $z \in \{|z - w| < \varepsilon\}$ y por lo tanto $\{|z - w| < \varepsilon\} \subseteq U$ de donde se sigue que U es abierto.

De la misma forma, ya que h es continua se sigue que el conjunto $V = h^{-1}(-\infty, M)$ es abierto y ya que D es conexo, entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$. Finalmente como $z_0 \in U$ entonces se sigue que $V = \emptyset$ y por lo tanto $D = U = \{z \in D : h(z) = M\}$ y h es constante. □

Teorema 5 (Principio del máximo). *Sea D un dominio acotado y $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con la propiedad del valor medio en D que se extiende continuamente a la frontera ∂D de D. Si $m \leq h \leq M$ en ∂D entonces $m \leq h \leq M$ en D.*

Demostración. Ya que D es un dominio acotado, entonces $\overline{D} = D \sqcup \partial D$ es un conjunto compacto, por el teorema de Weierstrass de valores extremos h alcanza su máximo y mínimo en $\overline{D}$. *i.e.* existen $z_0, z_1 \in \overline{D}$ tales que $h(z_0) = m$ y $h(z_1) = M$. Si $z_1 \in D$ entonces por el principio del máximo estricto h es constante en D y ya que h se extiende continuamente a ∂D se sigue que h es constante en $\overline{D}$, luego $h(z) = M$ para todo $z \in \overline{D}$. En cualquier caso $M = h(z_1) \geq h(z)$ para todo $z \in D$. De forma completamente análoga $m \leq h(z)$ para todo $z \in D$. □

Teorema 6. *Suponga que D es un dominio y $h : [a, b] \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua. Si para cada $t \in [a, b]$ fijo la función $h(t, \cdot)$ es analítica entonces la función $H : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por.*

$$H(z) = \int_a^b h(t, z)dt, \qquad z \in D,$$

es analítica en D.

Demostración. Ver [3], pág. 121 □

2. El problema de Dirichlet

Como se mencionó en la primera sección el problema de Dirichlet puede ser planteado para cualquier EDP, el planteamiento inicial de este problema se remonta al siglo XIX cuando el matemático Lejeune Dirichlet aportaría una solución al problema planteado por George Green quién estudiaba el potencial eléctrico en una superficie con un valor prescrito en la frontera. Este modelado es solo un caso particular de la *ecuación de difusión*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0.$$

La teoría posterior para esta ecuación y de forma más general del problema de Dirichlet sería desarrollada por numerosos matemáticos como Fourier, Hilbert o Riemann. Para nuestro estudio se considera un caso particular de la ecuación de difusión que surge cuando la variación de u a lo largo de la variable t es nula, esto sucede por ejemplo cuando en un sistema la función u converge cuando $t \to \infty$. Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Laplace, en honor al matemático Pierre-Simon Laplace que sería el primero en estudiar sus propiedades.

En lo que concierne a este documento se busca resolver el problema de Dirichlet variando el dominio de la solución para la ecuación de Laplace y a través de una función preescrita en la frontera del dominio. En concreto, dados un dominio D con frontera y una función $f : \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ queremos encontrar una función $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\nabla^2 u = 0$ en D y $u = f$ en ∂D.

2.1. En el disco unitario

En primer lugar solucionaremos el problema de Dirichlet en el disco unitario $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Nuevamente recordemos que este consiste en encontrar una función $u : \{|z| \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica y $u|_{|z|=1}$ coincide con una función preestablecida f. La solución del problema de Dirichlet en el disco unidad nos proporcionará resultados que serán útiles a la hora de resolver este problema en el semiplano superior.

El desarrollo de la solución al problema de Dirichlet (en general para la ecuación de difusión) siempre ha tenido una estrecha relación con el desarrollo de las series de Fourier, presentamos algunos resultados sobre series de Fourier que serán necesarios a la hora de desarrollar la solución al problema en el disco.

Definición 11. Para una función integrable $f : \partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definimos la *serie de Fourier* de la función f como la suma formal

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

donde los coeficientes c_k, calculados por la expresión

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

son llamados los *coeficientes de Fourier* de la función f.[2]

A pesar de que la suma formal siempre converge para cada θ fijo[3], no se tiene que necesariamente el valor al que converge la serie coincide con el valor de f en θ. El siguiente resultado nos brinda algunas condiciones suficientes para que la serie de Fourier converja y además de manera uniforme.

Teorema 7. *Sea $g \in C^2((-\pi, \pi))$. Si $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ es definida por $f(e^{i\theta}) = g(\theta)$. Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{-\pi\leq\theta\leq\pi} \left| f(e^{i\theta}) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta} \right| = 0.$$

Demostración. Ver [3], pág. 191 $\square$

Corolario. *Sea $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Existe un polinomio trigonométrico que aproxima uniformemente a f. i.e. Dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico*

$$p(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta}$$

tal que

$$|f(e^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| < \varepsilon, \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

[2] En la solución al problema de Dirichlet para el disco se da una motivación de porque se escogen estos coeficientes.

[3] $\left|\sum_N^M c_k e^{ik\theta}\right|^2 = \sum_N^M c_k^2 \leq |f|^2$ para todo $N, M \in \mathbb{Z}$ (la desigualdad es llamada *Desigualdad de Bessel)*, se deduce por lo tanto que la sucesión de sumas parciales converge.

Demostración. Considere $f = u + iv$ para u y v sean $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ funciones dos veces diferenciables en terminos de θ tales que

$$|u(e^{i\theta}) - \tilde{u}(e^{i\theta})| < \varepsilon/4$$
$$|v(e^{i\theta}) - \tilde{v}(e^{i\theta})| < \varepsilon/4,$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$. Para $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ sean p y q polinomios trigonométricos tales que

$$|\tilde{u}(e^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| < \varepsilon/4$$

$$|\tilde{v}(e^{i\theta}) - q(e^{i\theta})| < \varepsilon/4,$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$. Finalmente

$$|f(e^{i\theta}) - (p+q)(e^{i\theta})| \leq |u(e^{i\theta}) - \tilde{u}(e^{i\theta})| + |\tilde{u}(e^{i\theta}) - p(e^{i\theta})| + |v(e^{i\theta}) - \tilde{v}(e^{i\theta})| + |\tilde{v}(e^{i\theta}) - q(e^{i\theta})| < \varepsilon$$

para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, donde $p + q$ es un polinomio trigonométrico. □

Teorema 8. *Sea $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Existe una única función armónica $u : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{z \to z_0} u(z) = f(z_0)$$

para todo $z_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Demostración. **(Existencia)** Atacaremos el problema de Dirichlet para una función f a valor complejo y su extension u una función armónica en el sentido complejo (*i.e.* sus funciones componentes son armónicas).

Primero supongamos que para $k \in \mathbb{Z}$ la función preestablecida es el monomio

$$f(e^{i\theta}) = e^{ik\theta} = z^k, \qquad z = e^{i\theta} \in \{|z| = 1\}.$$

Una extensión factible es la función $u : \{|z| \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$u(re^{i\theta}) = r^{|k|}e^{ik\theta}, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Dicha función es armónica ya que si $k \geq 0$ entonces

$$r^{|k|}e^{ik\theta} = r^k e^{ik\theta} = z^k, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$$

que es analítica y por lo tanto armónica. Mientras que si $k < 0$ entonces

$$r^{|k|}e^{ik\theta} = r^{-k}e^{ik\theta} = \overline{z^{-k}},$$

que es el conjugado de una función analítica y por lo tanto es armónica. Esta función efectivamente es una extensión armónica de f. Ahora bien, si consideramos el polinomio

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\theta},$$

se obtiene por linealidad que la función $u : \{|z| \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k r^{|k|} e^{ik\theta},$$

es la solución al problema de dirichlet para f. De esta expresión podemos extraer los coeficientes c_k en terminos de la función preestablecida f, para ello multiplicamos por $e^{im\theta}$ en la expresión para f, es decir

$$e^{-im\theta}f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i(k-m)\theta},$$

de donde se obtiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}f(e^{i\theta})d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i(k-m)\theta}d\theta = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)\theta}d\theta \overset{(i)}{=} 2\pi c_m.$$

(i) Acá se ha usado una propiedad de ortogonalidad donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } k = m \\ 0, & \text{si } k \neq m \end{cases}.$$

Finalmente sustituyendo en la formula para u obtenemos

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-N}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-im\varphi} f(e^{i\varphi})d\varphi \right) r^{|k|}e^{ik\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N} r^{|k|}e^{-ik\theta}e^{im\varphi} \right) d\varphi.$$

Esto motiva una forma para la extensión de una función armónica. Para ello considere la función

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta}.$$

Esta función es llamada el *Kernel de Poisson* para el círculo unidad. Esta función converge uniformemente en $\{|z| \leq \rho\}$ para todo $\rho < 1$ ya que en este caso $|r^{|k|}e^{ik\theta}| \leq \rho^{|k|}$ en $\{|z| \leq \rho\}$ donde la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|}$ es convergente y por la prueba M de Weierstrass se obtiene la convergencia uniforme de las sumas parciales de $P_r(\theta)$. Con esto en mente, considere ahora una función a valor real f definida en $\partial\mathbb{D}$. Definimos la *Integral de Poisson* de la función f como la función

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} P_r(\theta - \varphi)d\varphi \overset{(ii)}{=} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \frac{f\left(e^{i(\theta-t)}\right)}{2\pi} P_r(t)dt \overset{(iii)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\left(e^{i(\theta-\varphi)}\right)}{2\pi} P_r(\varphi)d\varphi, \qquad re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

((ii) Se ha hecho el cambio de variable $t = \theta - \varphi$. (iii) Para f periodica con periodo 2π, $\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.)

Se puede hacer un cálculo explicito del Kernel de Poisson dividiendo la suma en dos, para ello note que

$$P_r(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\theta} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \overset{(iv)}{+} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{z}^j.$$

((iv) $\overline{z^{-j}} = \overline{z}^j$) Ahora, notando que las dos expresiones corresponden a series geometricas se tiene que para $|z| < 1$

$$P_r(\theta) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{(1-\overline{z})(1-z)}{(1-\overline{z})(1-z)} + \frac{z(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})} + \frac{\overline{z}(1-z)}{(1-\overline{z})(1-z)}$$

$$= \frac{1 - z - \overline{z} + |z|^2 + z - |z|^2 + \overline{z} - |z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

donde ya que $|1-z|^2 = 1 - (z+\overline{z}) + |z|^2 = 1 - 2r\cos(\theta) + r^2$ para $z = re^{i\theta}$ entonces

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

Otra forma importante del kernel de Poisson es la siguiente

$$P_r(\theta) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} = 1 + \left(\frac{z}{1-z} + \overline{\frac{z}{1-z}}\right) = 1 + 2\ \mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

de acá se deduce que la función $P_r(\theta)$ es armónica (en términos de z) real en $\mathbb{D}$ al ser la parte real de una función analítica. Ahora bien, si en la expresión para u reemplazamos $P_r(\theta)$ por la última expresión obtenida se tiene que

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} P_r(\theta-\varphi)d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\right) d\varphi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right) d\varphi = \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi.$$

Ya que la función $g : [-\pi, \pi] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(\varphi, z) = \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right),$$

depende analíticamente de z entonces se tiene que la integral

$$G(z) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi, z)d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi,$$

es análitica en $\mathbb{D}$, luego u es armónica en $\mathbb{D}$ al ser la parte real de una función analítica. Por último analicemos el caso en que f es una función continua a valor complejo. Como se puede intuir definimos la extensión de f como la función u dada por la expresión ya trabajada

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} P_r(\theta-\varphi)d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{i\varphi})}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi.$$

Para probar que la función u es armónica, descomponemos $f = v + iw$ en su forma canónica entonces

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v(e^{i\varphi})}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi + i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{w(e^{i\varphi})}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi$$

$$= \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v(e^{i\varphi})}{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi + i\ \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{w(e^{i\varphi})}{2\pi}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi,$$

donde la primera y segunda integral dependen analíticamente de z y por lo tanto al tomar sus partes reales se resuelve que estas dos funciones son armónicas y por lo tanto lo es la función u. Miremos ahora, que la función así definida coincide con f en la frontera de D.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ ya que toda función continua puede ser aproximada uniformemente por polínomios trigonometricos, se tiene que existe un polinomío trigonométrico $g(e^{i\theta}) = \sum a_k e^{ik\theta}$ tal que

$$\left|f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

entonces si v está definida por

$$v(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\varphi})}{2\pi} P_r(\theta-\varphi)d\varphi,$$

se tiene que

$$|u(z)-v(z)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(e^{i\varphi})-g(e^{i\varphi})\right) P_r(\theta-\varphi)d\varphi\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})-g(e^{i\varphi})| P_r(\theta-\varphi)d\varphi$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\varphi)d\varphi = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, si $z_0 \in \{|z|=1\}$ y ya que $\lim_{z\to z_0} v(z) = f(z_0)$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $|z-z_0| < \delta$ entonces

$$|v(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si $|z| < 1$ y $|z-z_0| < \delta$,

$$|u(z)-f(z_0)| \leq |u(z)-v(z)| + |v(z)-f(z_0)| < \varepsilon,$$

de donde

$$\lim_{z\to z_0} u(z) = f(z_0).$$

Note que si f es a valor real, entonces la definición de la función u muestra que la extensión armónica es a valor real y por lo tanto el problema de Dirichlet ha sido solucionado en el disco unidad.

(Unicidad) Para determinar la unicidad de la solución al problema de Dirichlet aprovecharemos que nuestro dominio es acotado y por lo tanto cumple las hipótesis del principio del máximo (teorema 5). Más precisamente, suponga que u y v son funciones armónicas que satisfacen el problema de Dirichlet $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 u =$ en $\mathbb{D}$ y $u = f = v$ en $\partial\mathbb{D}$, entonces la función $w := u - v$ es solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0, & \text{en } \mathbb{D} \\ w = 0, & \text{en } \partial\mathbb{D} \end{cases}.$$

Es decir que w es una función armónica en $\mathbb{D}$ tal que

$$\min_{z\in\partial\mathbb{D}} w(z) = 0 = \max_{z\in\partial\mathbb{D}} w(z).$$

Por el principio del máximo se tiene que

$$\min_{z\in\mathbb{D}} w(z) = 0 = \max_{z\in\mathbb{D}} w(z).$$

y por lo tanto $w \equiv 0$ en $\mathbb{D}$. Así $u(z) = v(z)$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. □

Como se mencionó anteriormente, la solución al problema de Dirichlet en el disco unidad nos brinda herramientas poderosas a la hora de resolver el problema de Dirichlet en el semiplano. El siguiente resultado muestra que el problema de Dirichlet es resoluble en cualquier disco contenido en el plano.

Lema 1. *Sea $U = \{|z-z_0| \leq r\} \subseteq \mathbb{C}$ un disco cerrado arbitrario del plano complejo y $h : \partial U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua entonces existe una única función $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{U^\circ}$ es armónica y $u|_{\partial U} = h$.*

Demostración. Considere $\phi : U \longrightarrow \mathbb{D}$ definida por

$$\phi(z) = \frac{z+z_0}{r},$$

la tranformación de Möbius que transforma U en el círculo unidad $\mathbb{D}$ conformemente. Entonces $h\circ\phi^{-1} : \partial\mathbb{D} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función continua sobre $\partial\mathbb{D}$. Ya que el problema de Dirichlet tiene una única solución para el disco unidad, entonces existe una única función $u_0 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_0|_{\mathbb{D}^\circ}$ es armónica y $u_0|_{\partial\mathbb{D}} = h\circ\phi^{-1}$. Entonces $u = u_0 \circ \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u(z) = u_0(\phi(z)) = h\left(\phi^{-1}(\phi(z))\right) = h(z)$ para todo $z \in \partial U$ (ya que $\phi(\partial U) = \partial\mathbb{D}$), luego $u|_{\partial U} = h$.Ya que $u|_{U^\circ}$ es una traslación y dilatacion de la función $u_0|_{\mathbb{D}^\circ}$ la cual es armónica se sigue que $u|_{U^\circ}$ es armónica. □

Una caracterización importante de las funciones armónicas es que el ser armónica es equivalente a cumplir la propiedad del valor medio. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema 9. *Sea D un dominio y $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si h tiene la propiedad del valor medio en D entonces h es armónica.*

Demostración. Sea $z_0 \in D$ y $r > 0$ tal que el disco $U = \{|z - z_0| \leq r\} \subseteq D$ por el lema anterior existe una función continua $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{U^\circ}$ es armónica y $u|_{\partial U} = h|_{\partial U}$. *i.e.* $h(z) - u(z) = 0$ para todo $z \in \partial U$. Ya que $h - u$ es entonces una función con la propiedad del valor medio (teorema 3) en U tal que $|h - u| = 0$ en ∂U entonces por el principio del máximo $h - u = 0$ en U y finalmente $h = u$ en U se sigue entonces que h es armónica en U°. Ya que esto se cumple para todo disco cerrado contenido en D se sigue que h es armónica en D. □

Este resultado junto al teorema 3 demuestran que efectivamente el conjunto de las funciones armónicas y de aquellas que cumplen la propiedad del valor medio son el mismo.

2.2. En el semiplano superior

Como se mencionó anteriormente el segundo subconjunto del plano sobre el cual vamos a resolver el problema de Dirichlet es el semiplano superior $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ para ello desarrollaremos algunos cuantos resultados y posteriormente se llegará a la solución.

Teorema 10 (Principio de Unicidad). *Sea D un dominio y $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analíticas. Si $f(z) = g(z)$ para todo z perteneciendo a algún subconjunto de D con al menos un punto límite, entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$.*

Demostración. Ver [3], pág. 156 □

Teorema 11 (Liouville). *Sea f una función analítica en todo el plano complejo. Si f es acotada entonces f es constante.*

Demostración. Ver [3], pág. 118 □

Teorema 12 (Principio de Reflexión de Schwarz). *Sea D un dominio simétrico respecto al eje real. Sea $D^+ = D \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$ y $f : D^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que*

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Im} f(z) = 0,$$

para todo $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$. Entonces f se extiende analíticamente en D y la función extendida cumple la identidad

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}, \qquad z \in D.$$

Demostración.

Caso real: Suponga que $u : D^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica tal que $\lim_{z \to z_0} u(z) = 0$ para todo $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$. Si $D^- = D \cap \{\text{Im}z < 0\}$ entonces $D = D^+ \sqcup D^- \sqcup (D \cap \mathbb{R})$ definimos la extensión de u, $\tilde{u}$ por la formula

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z), & \text{si } z \in D^+ \\ -u(\overline{z}), & \text{si } z \in D^- \\ 0, & \text{si } z \in D \cap \mathbb{R} \end{cases} .$$

$\tilde{u}$ resulta continua ya que si $z \in D^-$ entonces $\overline{z} \in D^+$ y por lo tanto $-u$ es continua en $\overline{z}$. Adicionalmente, si $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ entonces por la hipótesis de que $u(z) \to 0$ cuando $z \to z_0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in D^+$ y $|z - z_0| < \delta$ entonces $|u(z)| < \varepsilon$. Sea $z \in D^-$ tal que $|z - z_0| < \delta$ entonces $\overline{z} \in D^+$ y es tal que $|\overline{z} - z_0| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0| < \delta$ entonces $|\tilde{u}(z)| = | - u(\overline{z})| = |u(\overline{z})| < \varepsilon$ lo que prueba que $\tilde{u}$ es continua en $D \cap \mathbb{R}$.

Para probar que $\tilde{u}$ es armónica demostraremos que $\tilde{u}$ tiene la propiedad del valor medio. Consideramos tres casos:

- Si $z_0 \in D^+$ entonces u es armónica y ya está.
- Si $z_0 \in D^-$ entonces $\overline{z_0} \in D^+$ y ya que u es armónica entonces se sigue que $-u$ es armónica, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{|z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq D^-$ y

$$\tilde{u}(z_0) = -u(\overline{z_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -u\left(\overline{z_0} + re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -u\left(\overline{z_0 + re^{-i\theta}}\right) d\theta$$

$$\overset{(i)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -u\left(\overline{z_0 + re^{i\theta}}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta, \qquad 0 < r < \varepsilon.$$

  Así, $\tilde{u}$ tiene la propiedad del valor medio en z_0.

  (i) Para calcular la integral se hace el cambio de variable $\beta = -\theta$ y posteriormente $\alpha = \beta + 2\pi$.

- Si $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$ y $r > 0$ es tal que $\{|z - z_0| < r\} \subseteq D$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \tilde{u}\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \tilde{u}\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -u\left(\overline{z_0 + re^{i\theta}}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} u\left(z_0 + re^{-i\theta}\right) d\theta$$

$$\overset{(ii)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta = 0 = \tilde{u}(z_0)$$

  de donde $\tilde{u}$ tiene la propiedad del valor medio en z_0.

  (ii) Considere el cambio de variable $\beta = 2\pi - \theta$.

En cualquier caso $\tilde{u}$ tiene la propiedad del valor medio y por lo tanto es armónica.

Caso complejo: Considere $f = u + iv : D^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con v tal que $v(z) \to 0$ cuando $z \to z_0$ para todo $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$. Por el corolario del teorema 1 se tiene que u y v son armónicas y por lo tanto por el caso anterior se puede extender "armónicamente" la función v a una función $\tilde{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $z_0 \in D \cap \mathbb{R}$ y $r > 0$ tal que $D_r = \{|z - z_0| < r\} \subseteq D$ entonces la función $\tilde{v}$ tiene una función armónica conjugada w y la función $g = -w + i\tilde{v} = i(\tilde{v} + iw)$ es analítica en D_r, más aún la función g es una extensión de f en D_r ya que en $D^+ \cap D_r$ se tiene que $\tilde{v} = v$ y $f = u + iv, g = -w + iv$ son analíticas, luego $f - g = u + w$

es analítica y a valor real por lo tanto constante, luego $g = f + C$ con C una constante real. Note a su vez que g coincide con f en $\mathbb{R} \cap D$ y por lo tanto $-w = u + C$ de donde $u + w = -C$, sin embargo ya que $u + w = f - g = C$ entonces se obtiene que $C = 0$ y por lo tanto $f = g$ en D_r.

Ahora bien, considere la función $h : D_r \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \overline{g(\overline{z})}.$$

Esta función también es analítica ya que si $w \in D_r$ entonces

$$\frac{h(w + \Delta w) - h(w)}{\Delta w} = \frac{\overline{g(\overline{w + \Delta w})} - \overline{g(\overline{w})}}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta w}\overline{g(\overline{w} + \overline{\Delta w}) - g(\overline{w})} = \overline{\frac{1}{\overline{\Delta w}}\left(g(\overline{w} + \overline{\Delta w}) - g(\overline{w})\right)}$$

$$= \overline{\frac{1}{s}\left(g(\overline{w} + s) - g(\overline{w})\right)},$$

de donde usando la continuidad de la función conjugado se obtiene que

$$h'(w) = \overline{g'(\overline{w})}.$$

Además, ya que g es analítica en D_r se sigue que h es una función analítica en D_r. Finalmente, ya que h y g son analíticas y coinciden en $D_r \cap \mathbb{R}$ (un conjunto con puntos límites) entonces por el principio de unicidad $h = g$ en D_r y por lo tanto h es una extensión de f que cumple la identidad $h(z) = \overline{h(\overline{z})}$. $\square$

Para resolver el problema de Dirichlet en el semiplano superior $\{\mathrm{Im} z \geq 0\}$, primero nos preguntamos bajo que condiciones sobre la función preescrita f el problema tendría solución, esto motiva la siguiente definición.

Definición 12. Una función $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada una *función escalonada* si existen n puntos distintos de $\mathbb{R}$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tal que la restricción de s a cada subintervalo (x_i, x_{i+1}), $s_{(x_i,x_{i+1})}$ es constante para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Afirmamos que si la función preescrita f es una función escalonada, entonces existe una única solución acotada u al problema de Dirichlet. La solución se basa en las propiedades de la función arg definida en la rama $-\pi/2 < \arg < 3\pi/2$.

Teorema 13. *Suponga que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada con discontinuidades en $x_1, \ldots, x_n$, entonces existe una única función acotada $u : \{\mathrm{Im} z \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $\{\mathrm{Im} z \geq 0\} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $u|_{\mathrm{Im} z > 0}$ es una función armónica y $u|_{\mathrm{Im} z = 0} = f$. Más aún, existen constantes únicamente determinadas $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ tales que*

$$u(z) = a_1 \arg(z - x_1) + a_2 \arg(z - x_2) + \cdots + a_n \arg(z - x_n) + a_{n+1},$$

y donde $-\pi/2 < \arg < 3\pi/2$.

Demostración.

(Unicidad) Primero se verá la unicidad de la solución dado que esta sea acotada. Para ello suponga que u_0 y u_1 son soluciones del problema de Dirichlet, *i.e.* u_0 y u_1 son funciones acotadas tales que $u_0|_{\mathrm{Im} z > 0}$ y $u_1|_{\mathrm{Im} z > 0}$ son funciones armónicas y $u_0|_{\mathrm{Im} z = 0} = f = u_1|_{\mathrm{Im} z = 0}$. Entonces en el dominio en forma de estrella $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ $u := u_1 - u_0$ es una función armónica y por lo tanto tiene una función armónica conjugada v, luego la función $F = -v + iu$ es analítica en $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ y tal que $u(z) \to 0$ cuando

$z \to z_0$ para todo $z_0 \in \mathbb{R}$, por el Principio de Reflexión de Schwarz la función F puede ser extendida a una función entera $\tilde{F}$ (*i.e.* analítica en $\mathbb{C}$). Ya que la función $\mathrm{Im}F = u$ es acotada se sigue por la propiedad de reflexión de $\tilde{F}$ que la función $\mathrm{Im}\tilde{F}$ es acotada en $\mathbb{C}$, luego la función $\exp(i\tilde{F}) = \exp(-\mathrm{Im}\tilde{F})\exp(i\mathrm{Re}\tilde{F})$ es una función entera y acotada. Por el Teorema de Liouville $\exp(i\tilde{F})$ es constante y por lo tanto lo es la función $\tilde{F}$ así como su parte imaginaria $\mathrm{Im}\tilde{F}$ y al ser esta una extensión de u se sigue que esta es constante y al tomar el valor 0 en $\{\mathrm{Im}z = 0\}$ se tiene que $u_1 - u_0 = u = 0$ en $\{\mathrm{Im}z \geq 0\}$.

(Existencia) Fijemos la rama de la función argumento por aquella entre $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esta función es armónica en $\{\mathrm{Im}z > 0\}$ ya que corresponde a la parte imaginaria de la rama de la función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{ix \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Más aún esta función es continua en $\{\mathrm{Im}z \geq 0\} \setminus \{0\}$ ya que el conjunto donde la rama no es continua es únicamente el conjunto $\{ix \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$. Por lo tanto cualquier combinación lineal $a_1 \arg(z - x_1) + a_2 \arg(z - x_2) + \cdots + a_n \arg(z - x_n) + a_{n+1}$ es una función armónica en $\{\mathrm{Im}z > 0\}$ y continua en $\{\mathrm{Im}z \geq 0\} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Veámos que existe una elección de constantes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ tales que la función $u(z) = a_1 \arg(z - x_1) + a_2 \arg(z - x_2) + \cdots + a_n \arg(z - x_n) + a_{n+1}$ restringida a $\mathbb{R}$ coincide con la función f. En efecto, sea I_k el k-ésimo $(1 \leq k \leq n+1)$ subintervalo en $\mathbb{R}$ donde la función f es constante y llame f_k al valor de f en dicho subintervalo. Note que para $k \geq j$

$$\arg(z - x_j) = 0, \qquad z \in I_k,$$

ya que en dicho caso $z - x_j > 0$, mientras que para $k < j$

$$\arg(z - x_j) = \pi, \qquad z \in I_k,$$

ya que en ese caso $z - x_j < 0$. Por lo tanto para que la función u tome el valor f_k en el intervalo I_k es necesario y suficiente que las constantes $a_1, \ldots, a_{n+1}$ cumplan las identidades

$$\pi(a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n) + a_{n+1} = u(z) = f_k, \qquad 1 \leq k \leq n$$

y

$$a_{n+1} = f_{n+1},$$

las cuales salen del hecho de que si $z \in I_k$ $(1 \leq k \leq n)$ entonces

$$u(z) = a_1 \arg(z - x_1) + a_2 \arg(z - x_2) + \cdots + a_k \arg(z - x_k) + \cdots + a_n \arg(z - x_n) + a_{n+1}$$

$$= 0a_1 + 0a_2 + \cdots + \pi a_k + \cdots + \pi a_n + a_{n+1}.$$

Mientras que si $z \in I_{n+1}$ entonces

$$u(z) = a_{n+1}.$$

Así la función u es la única función que cumple el problema de Dirichlet para la función f en el semiplano superior y sus coeficientes están únicamente determinadas. □

Corolario. *Sean $-\pi/2 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 3\pi/2$ y $P_j := e^{i\theta_j}$ los correspondientes puntos en la circunferencia unitaria $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$. Sea $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cada arco de circunferencia $\widehat{P_i}$ entre dos puntos P_i, P_{i+1} consecutivos f es constante. Entonces existe una única función armónica definida en $\mathbb{D} := \{|z| \leq 1\}$ tal que $u|_{\mathbb{D}^\circ} = u|_{|z|<1}$ es armónica y $u|_{\partial\mathbb{D}} = u|_{|z|=1} = f$.*

Demostración. Considere la transformación biyectiva de Möbius $\mu : \{\mathrm{Im} z \geq 0\} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}} \setminus \{-i\}$ definida por

$$\mu(z) = \frac{i-z}{1-iz}, \qquad z \in \{\mathrm{Im} z \geq 0\}.$$

Dicho propiamente, realmente esta función es la restricción de una transformación de Möbius ya que $-i$ no tiene preimagen ($\mu(\infty) = -i$, pero μ no está definida en ∞) sin embargo es tal que $\mu(\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D} \setminus \{-i\}$, para ver esto note que para $x \in \mathbb{R}$

$$|\mu(x)| = \left|\frac{i-x}{1-ix}\right| = \left|\frac{i-x}{i+x}\right| = \frac{\left|\,\overline{-(i+x)}\,\right|}{|i+x|} = 1$$

mientras que al ser una transformación de Möbius envía circunferencias en circunferencias[4]. Ahora bien, la función inversa de μ, μ^{-1} transforma los puntos $P_i \in \partial\mathbb{D}$ en puntos $p_i \in \mathbb{R}$ y los arcos $\widehat{P_i}$ en intervalos I_i (donde además $I_1 = (-\infty, p_1]$ y $I_n = [p_n, \infty)$), así, ya que el problema de Dirichlet es soluble en el semiplano superior existe una única solución u función armónica en $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ y tal que $u|_{\mathrm{Im} z=0} = f \circ \mu$. Finalmente aplicando la transformación μ, obtenemos que $u \circ \mu^{-1}$ es la solución al problema de Dirichlet del corolario. En efecto: ya que μ^{-1} es analítica y u armónica, se sigue que $u \circ \mu^{-1}$ es armónica y a valor real, por otro lado, si $z \in \partial\mathbb{D}$ entonces $(u \circ \mu^{-1})(z) = u(\mu^{-1}(z)) = (f \circ \mu)(\mu^{-1}(z)) = f(\mu(\mu^{-1}(z))) = f(z)$ de donde $(u \circ \mu^{-1})|_{\partial\mathbb{D}} = f$.

Por último, para verificar la unicidad suponga que v es otra función que es solución al problema de Dirichlet, entonces $v \circ \mu : \{\mathrm{Im} z \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la solución al problema de Dirichlet para el semiplano complejo, por la unicidad del problema del semiplano, se tiene que $v \circ \mu = u$ y finalmente $v = u \circ \mu^{-1}$. ☐

La aplicación de los problemas de Dirichlet tienen un interés fundamental en la física, en dichos contextos a veces es util que la solución de un problema de Dirichlet tome sus valores dentro de los posibles valores de la función preescrita. Esto significa que si f es la función preescrita en la frontera de un dominio U y u es la solución al problema de Dirichlet, entonces se busca que la solución sea tal que

$$\min_{x \in \partial U} f(x) \leq u(z) \leq \max_{x \in \partial U} f(x).$$

Note que para dominios acotados el principio del máximo (teorema 5) ya asegura este hecho, sin embargo, ya que nuestro dominio no es acotado entonces se procede de forma distinta. Los siguientes resultados aseguran que este acotamiento es posible para las funciones escalonadas como en el teorema anterior.

Teorema 14. *Si $f \geq 0$ es una función escalonada no identicamente nula, entonces la solución al problema de Dirichlet del teorema anterior es estrictamente positiva en* $\{\mathrm{Im} z > 0\}$.

Demostración. Para $h > 0$ definimos el operador $\tau_h : \mathbb{R}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ como aquel que traslada una función definida en $\mathbb{C}$ a valor real h unidades en el eje x. *i.e.*

$$\tau_h(u)(x, y) := u(x-h, y).$$

Con esto en mente podemos ver que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función indicadora de un intervalo $[a, a+h]$ entonces la función

$$u_{a,h}(z) = \frac{1}{\pi}\left(\tau_h(\arg(z-a)) - \arg(z-a)\right).$$

Definida en $\{\mathrm{Im} z \geq 0\}$ es una solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior. En efecto, note que cualquier traslación de una función armónica es armónica y por lo tanto $\tau_h(\arg)$ es armónica y por

[4]Dicho en el sentido complejo, suponiendo una recta como una circunferencia centrada en ∞.

lo tanto lo es u. Por otro lado si $z \in \mathbb{R}$ entonces para $z < a$ se tiene que $z - a < 0$, $z - a - h < 0$ y por lo tanto

$$\tau_h(\arg(z-a)) - \arg(z-a) = \pi - \pi = 0.$$

Si $a \leq z \leq a + h$ entonces $0 \leq z - a$ mientras que $z - a - h \leq 0$, luego

$$\tau_h(\arg(z-a)) - \arg(z-a) = \pi.$$

Por último, si $a + h < z$ entonces $0 < h < z - a$ y $0 < z - a - h$ de donde

$$\tau_h(\arg(z-a)) - \arg(z-a) = 0 - 0 = 0.$$

En cualquiera de los tres casos se tiene que $u|_{\text{Im}z=0} = f$ y por lo tanto u es solución del problema de Dirichlet (la única ya que u es acotada).

Note que esta solución es estrictamente positiva en $\{\text{Im}z > 0\}$, para ver esto escribimos

$$\tau_h(\arg(z-a)) = \arg(x - a - h, y),$$

donde $y > 0$, por lo que el argumento del punto $(x - a - h, y)$ es mayor que el argumento de $(x - a, y)$, ya que corresponde a un punto con misma ordenada positiva y menor abscisa, luego

$$u_{a,h}(z) = \frac{1}{\pi}\left(\tau_h(\arg(z-a)) - \arg(z-a)\right) > 0.$$

Ahora bien, note que si f es una función escalonada no negativa y no nula con puntos de salto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y con valores constantes f_k en el k-ésimo subintervalo entonces

$$f = f_1\chi_{(-\infty,x_1)} + f_2\chi_{(x_1,x_1+\Delta x_1)} + f_3\chi_{(x_2,x_2+\Delta x_2)} + \cdots + f_n\chi_{(x_{n-1},x_{n-1}+\Delta x_{n-1})} + f_{n+1}\chi_{(x_n,\infty)},$$

donde χ_A es la función indicadora del conjunto A y donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$. Por lo tanto la función $u : \{\text{Im}z \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(z) = \frac{f_1}{\pi}\arg(z - x_1) + f_2 u_{x_1,\Delta x_1}(z) + f_3 u_{x_2,\Delta x_2}(z) + \cdots + f_n u_{x_{n-1},\Delta x_{n-1}}(z) + \frac{f_{n+1}}{\pi}\arg(x_n - z),$$

es una función armónica en $\{\text{Im}z > 0\}$ que coincide con f en $\{\text{Im}z = 0\}$ y que además es estrictamente positiva en $\{\text{Im}z > 0\}$ ya que cada sumando lo es. Luego u es la solución al problema de Dirichlet y además es una función estrictamente positiva en $\{\text{Im}z > 0\}$. □

Teorema 15. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada y u es la solución del problema de Dirichlet en el semiplano brindada en el teorema 13, entonces u comprende valores entre el mínimo y el máximo de f. i.e.*

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq u(z) \leq \max_{x\in\mathbb{R}} f(x), \qquad \text{Im}z > 0.$$

Demostración. Suponga que f no es constante y que u es la solución del problema de Dirichlet en el semiplano superior para la función preescrita f. Sean

$$m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) \quad \text{y} \quad M = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

Entonces $f - m$ y $M - f$ son funciones no negativas no identicamente nulas. Ya que $u - m$ y $M - u$ son funciones armónicas en $\{\text{Im}z > 0\}$ que coinciden con $f - m$ y $M - f$ en $\mathbb{R}$ respectivamente entonces por

la unicidad del problema de Dirichlet se tiene que estas funciones coinciden con las hipótesis del teorema anterior y por lo tanto
$$0 < u - m \quad \text{y} \quad 0 < M - u,$$
de donde se obtiene que
$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) < u(z) < \max_{x\in\mathbb{R}} f(x), \qquad \mathrm{Im} z > 0.$$
Por otro lado, si f es constante, a valor constante C se obtiene que la solución al problema de Dirichlet en el semiplano es $u(z) = C$ para todo $z \in \{\mathrm{Im} z \geq 0\}$ y así
$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = u(z) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x), \qquad \mathrm{Im} z > 0.$$
En cualquier caso se cumple el teorema. □

Como último paso para resolver el problema de Dirichlet en el semiplano complejo trataremos el caso general en el que f, la función preescrita en el borde es una función continua salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen. Para ello se seguirá una estrategia muy similar a como se hizo con el problema de Dirichlet en el disco unidad, para ello consideraremos una función de núcleo (kernel) que nos servirá como un "regularizador" para la función prescrita en el borde f. Estas funciones toman un papel importante a la hora de solucionar problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace o su equivalente no homogéneo, la ecuación de Poisson y su teoría y cálculo es muy importante para el análisis de estas ecuaciones.

Definición 13. Sea para cada $t > 0$, $C_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por
$$C_t(s) := \frac{t}{\pi} \frac{1}{s^2 + t^2}.$$
Esta función es llamada el *Kernel de Poisson* para el disco unidad.

Teorema 16. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen. Entonces existe una función escalonada que aproxima uniformemente a f. i.e. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada τ tal que*
$$|f(x) - \tau(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Consideraremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo compacto, ya que la función f es uniformemente continua en $[a, b]$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ son tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Considere una partición de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tal que $x_{i+1} - x_i < \delta$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$ y sea $\tau : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función escalonada definida por
$$\tau(x) = f(x_0)\chi_{[x_0,x_1]}(x) + f(x_1)\chi_{[x_1,x_2]}(x) + \cdots + f(x_{n-1})\chi_{[x_{n-1},x_n]}(x).$$
Se tiene entonces que si $x \in [a, b]$ entonces existe $i = 0, \ldots, n-1$ tal que $x_i \leq x < x_{i+1}$, luego $|x - x_i| < \delta$ y se cumple que
$$|f(x) - \tau(x)| = |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$$
por la continuidad uniforme de f.

Ahora bien, consideremos el caso general en que f es una función continua salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dichas discontinuidades. Ya que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen, se tiene que existen $l, L \in \mathbb{R}, y_0 < y_1$ y $y_{m+1} > y_m$ tales que si $x \leq y_0$ o $x \geq y_{m+1}$ entonces

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

o

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

respectivamente. Sea $\tau_i : [y_i, y_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, m$ una función escalonada que aproxime uniformemente a $f|_{[y_i, y_{i+1}]}$. Resulta que si definimos $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función escalonada dada por

$$\tau(x) = l\chi_{(-\infty,x_0]}(x) + \tau_0(x) + \tau_1(x) + \cdots + \tau_n(x) + \tau_{n+1}(x) + L\chi_{[m+1,\infty)}(x)$$

entonces la función τ aproxima uniformemente a f. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ para algún $i = 0, \ldots, m$ se tiene que $|f(x) - \tau(x)| = |f(x) - \tau_i(x)| < \varepsilon$. Mientras que si $x \leq x_0$ o $x \geq x_{m+1}$ entonces

$$|f(x) - \tau(x)| = |f(x) - l\chi_{(-\infty,x_0]}| = |f(x) - l| < \varepsilon$$

o

$$|f(x) - \tau(x)| = |f(x) - L\chi_{[m+1,\infty)}(x)| = |f(x) - L| < \varepsilon$$

respectivamente, de donde se obtiene la aproximación uniforme.

□

Teorema 17. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen. Entonces la función $\tilde{f} : \{\mathrm{Im} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{f}(x + iy) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x - s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - s)^2 + y^2} f(s)ds$$

es una función armónica en $\{\mathrm{Im} z > 0\}$ tal que

$$\lim_{z\to z_0} \tilde{f}(z) = f(z_0)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Considere varios casos

Caso 1: Considere $f = \chi_{[a,a+h]}$ una función indicadora de un intervalo compacto, por el desarrollo del teorema 13 se tiene que si llamamos $\theta(z) = \arg(z)$ entonces

$$u(x, y) = \frac{\theta(x - a - h, y) - \theta(x - a, y)}{\pi}$$

es solución al problema de Dirichlet para la función f. Si definimos

$$G(x, y) := -\frac{1}{\pi} \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y),$$

entonces por el teorema fundamental del cálculo

$$u(x, y) = \frac{\theta(x - a - h, y) - \theta(x - a, y)}{\pi} = \int_{x-a-h}^{x-a} G(s, y)ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, y)f(s)ds.$$

Ya que $\theta(z) = \mathrm{Im} \ln z$ entonces se puede hacer el cálculo explicito de la función G, para ello, tenemos que

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im} \ln z}{\partial x} = \mathrm{Im}\frac{\partial \ln z}{\partial x} \overset{(i)}{=} \mathrm{Im}\frac{\partial \ln z}{\partial z} = \mathrm{Im}\frac{1}{z} = \mathrm{Im}\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

(i) Acá se ha usado el hecho de que si g es una función analítica entonces $\frac{\partial g}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}$. Finalmente del análisis anterior se concluye que

$$G(x,y) = C_y(x),$$

$$\tilde{f}(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)f(s)ds = u(x,y)$$

y por lo tanto $\tilde{f}$ es armónica y "coincide" con f en $\mathbb{R}$.

Caso 2: Suponga que f es una función escalonada con discontinuidades en $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, entonces ya hemos visto que

$$f = f_1\chi_{(-\infty,x_1)} + f_2\chi_{(x_1,x_1+\Delta x_1)} + f_3\chi_{(x_2,x_2+\Delta x_2)} + \cdots + f_n\chi_{(x_{n-1},x_{n-1}+\Delta x_{n-1})} + f_{n+1}\chi_{(x_n,\infty)}$$

donde f_k es el valor de f en el k-ésimo subintervalo, nuevamente como se mencionó anteriormente por el teorema 13 se tiene que la función

$$u(z) = \frac{f_1}{\pi}\arg(z-x_1) + f_2 u_{x_1,\Delta x_1}(z) + f_3 u_{x_2,\Delta x_2}(z) + \cdots + f_n u_{x_{n-1},\Delta x_{n-1}}(z) + \frac{f_{n+1}}{\pi}\arg(x_n - z)$$

es solución al problema de Dirichlet para f donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ y donde

$$u_{x_i,\Delta_{x_i}} = \frac{1}{\pi}(\theta(x+\Delta_{x_i}, y) - \theta(x,y)).$$

Finalmente por la definición de f se tiene entonces que

$$\tilde{f}(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)f(s)ds$$

$$= f_1\int_{-\infty}^{x_1} C_y(x-s)ds + \sum_{i=1}^{n} f_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_y(x-s)ds + f_{n+1}\int_{x_n}^{\infty} C_y(x-s)ds$$

de donde por el primer caso, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} C_y(x-s)ds = \sum_{i=1}^{n} f_{i+1}u_{x_i,\Delta_{x_i}}(z)$$

mientras que a partir de los siguientes cálculos

$$f_1\int_{-\infty}^{x_1} C_y(x-s)ds = f_1 \lim_{b\to-\infty}\int_b^{x_1} C_y(x-s)ds = f_1 \lim_{b\to-\infty}\int_{x-x_1}^{x-b} G(s,y)ds$$

$$= f_1 \lim_{b\to-\infty}\frac{\theta(x-x_1,y)-\theta(x-b,y)}{\pi} = \frac{f_1}{\pi}\theta(x-x_1,y) = \frac{f_1}{\pi}\arg(z-x_1)$$

y

$$f_{n+1}\int_{x_n}^{\infty} C_y(x-s)ds = f_{n+1}\lim_{b\to\infty}\int_{x_n}^{b} C_y(x-s)ds = f_{n+1}\lim_{b\to\infty}\int_{x_n-x}^{b-x} G(s,y)ds$$

$$f_{n+1}\lim_{b\to\infty}\frac{\theta(x_n-x,y)-\theta(b-x,y)}{\pi} = \frac{f_{n+1}}{\pi}\arg(x_n-z).$$

Se obtiene que

$$\tilde{f}(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)f(s)ds = u(x+iy) = u(z).$$

Caso 3: Como último caso considere a la función f contina salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen. Note que para $z = x+iy$ con $y > 0$ y para $s \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathrm{Im}\frac{1}{s-z} = \mathrm{Im}\frac{1}{s-x-iy} = \mathrm{Im}\frac{s-x+iy}{(s-x-iy)(s-x+iy)} = \mathrm{Im}\frac{s-x+iy}{(x-s)^2+y^2} = \frac{y}{(x-s)^2+y^2}$$

de donde se sigue que el Kernel de Poisson para el semiplano desplazado corresponde a

$$C_y(x-s) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-s)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\frac{1}{s-z},$$

es una función armónica (en términos de $z = x+iy$) en $\{\mathrm{Im}z > 0\}$ para cada $s \in \mathbb{R}$ fijo al ser la parte imaginaria de una función analítica en $\{\mathrm{Im}z > 0\}$. Utilizando la formula anterior y por las propiedades de la integral se obtiene que

$$\tilde{f}(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{if(s)}{\pi(s-z)}ds = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{if(s)}{\pi(s-z)}ds, \qquad x+iy \in \{\mathrm{Im}z > 0\}.$$

Donde ya que la función

$$\frac{if(s)}{\pi(s-z)}, \qquad z \in \{\mathrm{Im}z > 0\}$$

depende analíticamente de z, se sigue por el teorema 6 que la función $\tilde{f}$ es armónica y a valor real en $\{\mathrm{Im}z > 0\}$ al ser la parte imaginaria de una función analítica. Veámos ahora que la función $\tilde{f}$ coincide con f en la frontera de $\{\mathrm{Im}z > 0\}$, $\mathbb{R}$. En efecto: Ya que por el teorema anterior toda función continua salvo un número finito de discontinuidades de salto y tal que los límites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existen puede ser aproximada uniformemente por funciones escalonadas, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada g tal que

$$|f(s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Luego para

$$\tilde{g}(x+iy) := \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)g(s)ds, \qquad x+iy \in \{\mathrm{Im}z > 0\}.$$

Se tiene que

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{g}(z)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)(f(s)-g(s))ds\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)|f(s)-g(s)|ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty} C_y(x-s)ds = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad z \in \{\mathrm{Im}z > 0\}.$$

Así, si $z_0 \in \mathbb{R}$, ya que por el caso 2

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = f(z_0)$$

se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $\mathrm{Im}z > 0$ y $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$|g(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente para Im$z > 0$ y $|z - z_0| < \delta$ se tiene que

$$|\tilde{f}(z) - f(z_0)| \leq |\tilde{f}(z) - \tilde{g}(z)| + |g(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De donde se concluye finalmente que $\tilde{f}$ es una extensión armónica de f a valor real, resolviendo el problema de Dirichlet para el semiplano superior $\{\text{Im} z > 0\}$

$\square$

3. Conclusiones

En este trabajo se pudo evidenciar como las herramientas proporcionadas por el análisis complejo son útiles al resolver problemas en otras ramas de las matemáticas como lo puede ser las ecuaciones diferenciales parciales. Recíprocamente también se comprobó que el resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales, o siendo más preciso cierto tipo de problemas iniciales puede conducir a resultados importantes dentro del análisis complejo o la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales. Como trabajo futuro se propone el resolver problemas de Dirichlet para distintas ecuaciones diferenciales parciales o para distintos subconjuntos del plano complejo de aquellos que se trabajaron en este texto.

4. Bibliografía

[1] J. Rauch, *The Dirichlet Problem in a Half Space and Corners*. Math 555. Applied Complex Analysis, Fall 2013., Jeffrey Rauch's Course Materials (2013).

[2] J. Rauch, *The Dirichlet Problem in the Disk*. Math 555. Applied Complex Analysis, Fall 2013., Jeffrey Rauch's Course Materials (2013).

[3] T. Gamelin. *Complex Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer (New York), (2001).

[4] J. Fernández, *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, (2015).

[5] J. Mena. *Análisis Matemático Avanzado*. Departamento de Análisis Matemático Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/handle/10481/75871, (2020).