

**ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO
FACULTAD DE ECONOMÍA
ESPECIALIZACIÓN EN ECONOMÍA**

**TALLER DE APLICACIÓN ECONÓMICA
“Estimación del costo de agotamiento del petróleo para Colombia”**

Q32 - Exhaustible Resources and Economic Development

**Asesor: Dr. Sc. Irma Baquero
Presentado por: Omar Alexander Muñoz Rodriguez**

**Bogotá D.C., Colombia
15 de julio de 2013**

Tabla de contenido

Resumen	3
Introducción	4
Revisión del estado del arte.....	8
Pregunta guía	13
Hipótesis.....	13
Objetivo general	13
Objetivos específicos.....	13
Metodología.....	14
Alcance	14
Modelo	14
Aplicación: modelo econométrico	17
Resultados.....	22
Análisis de resultados.....	24
Conclusiones y recomendaciones para futuros estudios.....	29
Referencias bibliográficas.....	31
Anexos	34

Resumen

Este trabajo busca analizar la política de extracción de petróleo en Colombia, para esto se basa en dos conceptos fundamentales de análisis, como lo son el costo de uso y el principio de Hotelling, y su aplicación en la estimación empírica del costo de agotamiento del petróleo para Colombia entre el 1985 y 2008, finalmente analiza los resultados y los contrasta con el monto de las regalías del recurso, encontrando que este no cubre el costo de uso, lo que permite tener un precio por debajo del óptimo.

Palabras claves: Costo de uso, principio de Hotelling, petróleo

Abstract

This document analyzes the politics of oil drilling in Colombia, based on two fundamental concepts of analysis, such as the User cost and the Hotelling principle, and their application in an empirical estimation of the user cost of oil for Colombia between 1985 and 2008, finally analyzes the results and contrasts them with the amount of the royalties, finding out that the amount of royalties is low, which allows a suboptimal price.

Keywords: User Cost, Hotelling principle, oil

Introducción

El desarrollo de las grandes economías mundiales ha sido apalancado en gran medida por recursos naturales, en particular los minerales han sido fuertemente demandados, ya sea por sus múltiples aplicaciones en los desarrollos humanos o por su alta eficiencia en la generación de energía, en especial en el caso del petróleo¹. Sin embargo, estos tienen características particulares que los han habituado a ser el foco de diferentes análisis a lo largo de muchos años, una de dichas características es el hecho de que sean finitos y no renovables, es decir, en términos económicos, con una oferta total limitada.

El petróleo es un aceite mineral compuesto de una amplia gama de hidrocarburos, y gracias a sus características es tal vez el más importante de los recursos no renovables. El crudo de petróleo no es una sustancia homogénea, de hecho se clasifica en "liviano", "mediano", "pesado" y "extrapesado", dicha clasificación está relacionada con la calidad del producto, calidad que a su vez afecta el precio. La explotación de petróleo va de los buenos yacimientos a los malos, aspecto que se relaciona con la explotación primaria, secundaria y terciaria (Figueroa, 2006).

Como se mencionó anteriormente, este recurso natural sufre los efectos de la escasez, que como lo explica Daly & Farley (2004, pág. 194), se refiere no solo a las bajas reservas actuales del recurso, sino también a la baja tasa de nuevos hallazgos y la poca o nula disponibilidad de productos sustitutos, por ejemplo, en el caso del petróleo, si se encontrasen nuevos pozos o si se crean alternativas o sustitutos para sus derivados, se puede aumentar la oferta y disminuir el efecto de la escasez. Esta escasez como lo demostró Hotelling (1931) tiene un efecto directo en el precio, de modo que a mayor escasez, mayor es el precio del recurso en el mercado.

Ahora bien, este tipo de recursos son bienes excluibles y rivales, es decir, es posible impedir que un agente haga uso de él, y al ser usado por un agente no puede ser usado por otro, respectivamente. Igualmente, el petróleo no genera dividendos mientras esté en el subsuelo, por lo que, el dueño debe tomar la decisión de explotarlo para obtener un beneficio del mismo. Entonces, si el dueño del recurso decide explotarlo "hoy" pierde la opción de hacerlo "mañana", y sí considera que puede ser a un precio mayor—por el

¹ Entre 1970-2000 se perforaron 135 pozos de petróleo por cada 1.000 km² en EE.UU., en el resto del mundo se perforaron de 7 a 8, pozos por cada 1.000 km² (Figueroa, 2006)

efecto de la escasez mencionado anteriormente, su decisión involucrará necesariamente un costo de oportunidad, que en la literatura se conoce como Costo de uso (o *User cost* como se le llama en inglés). Una de las definiciones formales del término es:

“Costo de uso es el costo de oportunidad de la no disponibilidad de recursos naturales en una fecha futura que resulta del uso del recurso hoy en lugar de mantenerlo en su estado natural” (Daly & Farley, 2004, pág. 187)

Adicionalmente se puede considerar el Costo de uso marginal como:

“El costo de uso marginal es el valor de una unidad adicional del recurso en su estado natural” (Tietenberg, 1996)

Como lo encontró Hotelling (1931) y lo explica Romero (1997) el costo de uso de un recurso no renovable se puede encontrar matemáticamente, buscando maximizar el valor presente neto del retorno de la extracción del recurso, para un tipo de descuento r y una acumulación continua de los intereses. Entonces:

$$VPN = \bar{q}P(t)e^{-rt} - c\bar{q}e^{-rt} \quad (1)$$

Derivando (1) respecto a t e igualando a cero, se tiene la siguiente condición de equilibrio:

$$\frac{dVPN}{dt} = \bar{q}e^{-rt}(P'(t) - rP(t) + rc)$$

$$P'(t) - rP(t) + rc = 0 \quad (2)$$

Y calculando la segunda derivada, se encuentran las condiciones de segundo orden, donde tendrá que cumplirse que esta es menor que cero:

$$\frac{d^2VPN}{dt^2} = P''(t) - rP'(t) < 0 \quad (3)$$

Para que (3) se cumpla se debe dar que *“el precio del recurso crezca con el paso del tiempo (i.e. $P'(t) > 0$), pero de una manera menos que proporcional (i.e. $P''(t) < 0$)”*.

Mientras que, si en la condición de equilibrio (2) se asume que los costos son nulos—para facilitar el análisis, se evidencia que *“conviene extraer el recurso cuando la tasa de cambio del precio del mismo $P'(t)/P(t)$ es inferior al tipo de interés”*, es decir, *“el recurso*

no renovable debe extraerse de forma que la tasa de variación de su precio coincida con el tipo de interés". Ahora bien, haciendo el análisis completo bajo el principio de Jevons, el valor marginal de no extraer (i.e. $P'(t)$) se iguala al coste marginal de no extraer (i.e. $rP(t) - rc$), entonces para que resulte beneficioso extraer el recurso el valor marginal de no extraer debe ser menor que el coste marginal de no extraer (i.e. $P'(t) < rP(t) - rc$), en caso contrario conviene no extraer el recurso (Romero, 1997).

La condición de equilibrio (2) suele expresarse se la siguiente manera:

$$\frac{P'(t)}{P(t) - c} = r \quad (4)$$

Dentro de esta expresión se evidencia el costo de uso en el término $P(t) - c$.

Teniendo en cuenta lo anterior, si las firmas son racionales y buscan maximizar sus beneficios (considerando una visión neoclásica) estas deberán considerar el costo de uso antes de tomar la decisión de extracción de un recurso no renovable. Ahora bien, en el caso de Colombia, los derechos de propiedad y de uso del sub-suelo y su contenido pertenecen al Estado (véase Art. 332 de la Constitución política de Colombia de 1991), así que este último es el que debe tomar la decisión racional de la extracción del petróleo para maximizar el bienestar de los colombianos, y para esto creó la Agencia Nacional de Hidrocarburos². Sin embargo, en los últimos años la política de extracción de crudo de Colombia parece solo reflejar la búsqueda de un crecimiento sostenido de la producción nacional (véase Figura 1), que ha llevado a tasas muy altas de crecimiento para el sector en los últimos 4 años (véase Tabla 1), logrando que esté tenga un gran peso en la economía nacional.

Tabla 1. Variación anual Producto Interno Bruto trimestral por ramas de actividad económica, a precios Constantes - Series Desestacionalizadas - III Trimestre de 2012, Cifras Revisadas a diciembre 20 de 2012, (Departamento Administrativo Nacional de Estadística - DANE, 2012)

Detalle	2008	2009	2010	2011
Explotación de minas y canteras	9,7	11,1	12,3	14,5
PRODUCTO INTERNO BRUTO	3,5	1,7	4,0	5,9

² Misión: "La ANH es la autoridad encargada de promover el aprovechamiento óptimo y sostenible de los recursos hidrocarburíferos del país, administrándolos integralmente y armonizando los intereses de la sociedad, el Estado y las empresas del sector.", (Agencia Nacional de Hidrocarburos, 2009).

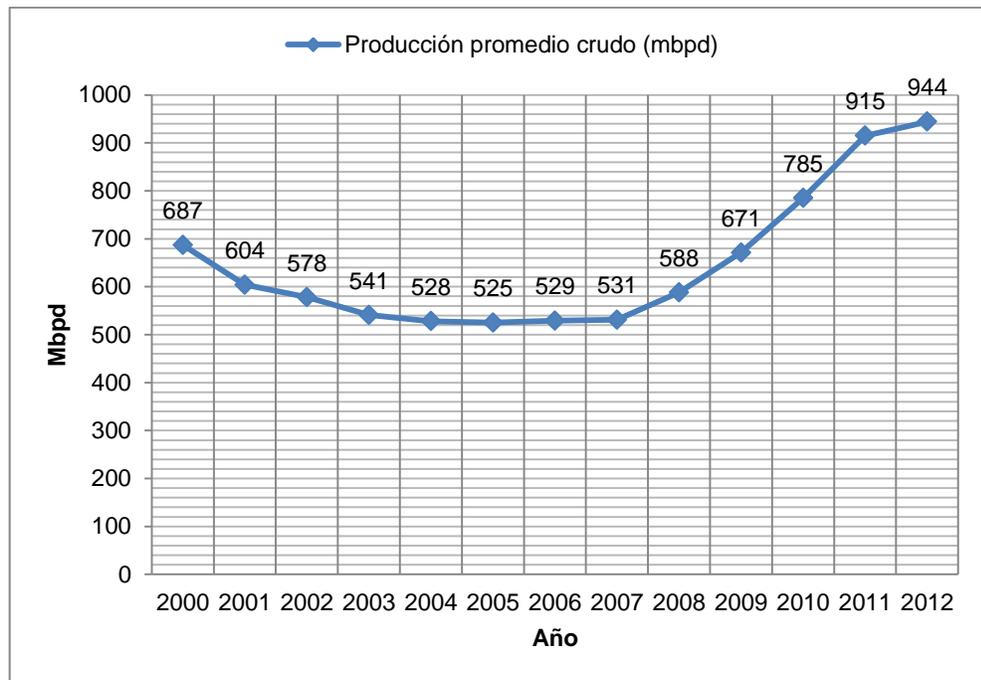


Figura 1. Producción promedio de Crudo (Mbpd) para Colombia, (Agencia Nacional de Hidrocarburos, 2013)

Es por eso que este trabajo busca estimar el costo de uso del petróleo para Colombia con el fin de dar lineamientos que permitan el análisis de la política gubernamental para el manejo de recursos mineros. Así que, en las siguientes secciones se abordará el tema en el siguiente orden: (1) una revisión del estado del arte de la literatura relevante para el manejo de estos recursos, (2) las hipótesis y los objetivos del estudio, (3) la metodología, (4) los resultados y (5) las conclusiones y recomendaciones para futuros estudios.

Revisión del estado del arte

Como lo explica Romero (1997) el nivel óptimo de extracción y consumo de un recurso no renovable está dado por el punto de equilibrio entre las funciones de Beneficios Marginales Sociales (BMS) y Costos Marginales Sociales (CMS), pero considerando que, como se expresó anteriormente, el uso del recurso hoy implica un costo en el futuro, que es llamado Costo de uso, el CMS debe ser igual al Costo Marginal de Extracción (CMEx) más el Costo de Uso Marginal (CMU), en donde el coste de extracción lo soporta la generación presente mientras que el coste de uso lo soportan las generaciones futuras. Así que, considerar los intereses de las generaciones futuras implica una pérdida de excedente a los consumidores de la generación presente, de ahí que, el análisis a considerar para la optimización del uso de un recurso no renovable debe ser intertemporal.

Teniendo en cuenta lo anterior, existen principalmente 2 reglas para la comprensión y el modelado de la asignación intertemporal de recursos no renovables, estas son el principio de Hotelling (1931) y el principio de Hartwick (1977).

Inicialmente lo planteado por Hotelling (1931) predice que aún si el Mercado es perfectamente competitivo el precio de mercado puede exceder el costo marginal gracias a la diferencia resultante de la renta adicional debido a la escasez del recurso. Esto implicó que, para casos como el del petróleo y demás recursos escasos no renovables, sea necesario hacer estimaciones con modelos dinámicos, ya que estos brindarán resultados más precisos al considerar los efectos mencionados.

Sin embargo a partir de dicha publicación, y considerando las múltiples variedades de recursos que cumplen con estas características, los académicos han explorado empíricamente tanto el modelo original como versiones con ajustes a diferentes aspectos de mercados particulares, entre ellos Hartwick (1977) quien definió que la producción no solo depende de la tasa de consumo del recurso (capital natural) sino que agregó el stock de capital disponible hecho por el hombre logrando demostrar que dada la condición de eficiencia local de Hotelling, una inversión agregada neta con valor de cero implicará consumo constante a través del tiempo, lo que finalmente se llamó el principio de Hartwick (Asheim & Buchholz, 2000).

El hallazgo de Hartwick implica que el capital natural puede ser sustituido por capital hecho por el hombre, lo que significaría que el consumo y agotamiento de un recurso natural no generaría daños a futuras generaciones. Por esto, se consideraron las políticas de inversión para llevar a dicha sostenibilidad dando lugar a las regalías, las cuales son un pago que recibe el Estado por la producción de recurso natural, más no por la exploración; teóricamente en un mercado competitivo las regalías por unidad producida del recurso natural deberían ser iguales al costo de uso marginal del mismo para cumplir con las condiciones de optimalidad (Daly & Farley, 2004, pág. 189).

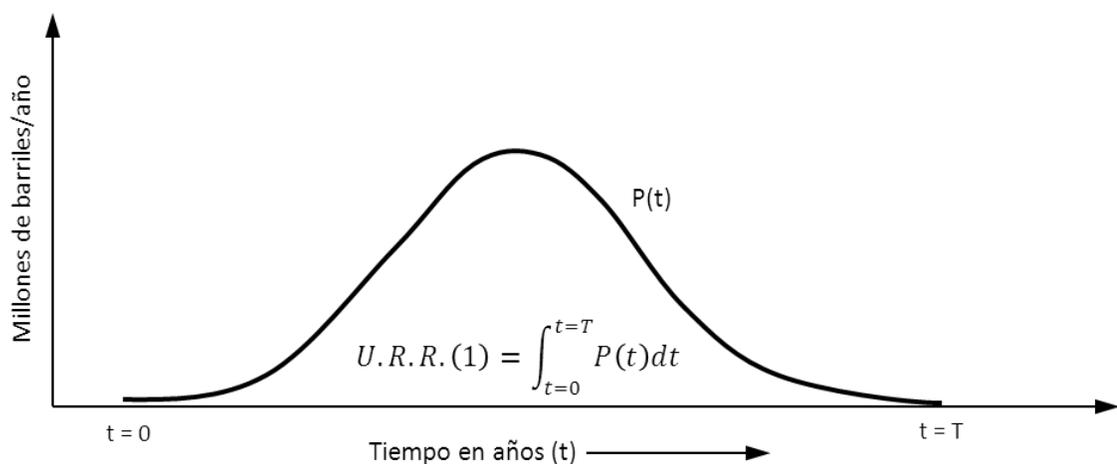
Así mismo, el principio de Hartwick dio lugar al concepto de sostenibilidad débil (*Weak sustainability* como se conoce en inglés) que se ha definido como el caso en el que no importa la “forma” en la que trascienda el capital ya que su valor se mantendrá constante (Hartwick & Olewiler, 1998); entonces, el capital natural se puede agotar pero éste pasará a ser otro tipo de capital (hecho por el hombre) y su valor se mantendrá para futuras generaciones. Sin embargo, algunos economistas son críticos respecto al principio de Hartwick y la sostenibilidad débil, ya que el supuesto del alto grado de sustituibilidad entre los recursos naturales y los recursos hechos por el hombre no es del todo aceptado.

En contraposición a lo anterior se ha usado la sostenibilidad fuerte (*Strong sustainability*), la cual argumenta que las diferentes clases de stocks de capital se deben mantener (no decrecer) en su “forma”, al menos en su nivel mínimo seguro (*Safe Minimum Standard*) (Perman, Ma, MacGilvary, & Common, 1999), por lo que los stocks de recursos naturales se deberían mantener en el tiempo.

El modelo de Hotelling ha sido explorado de diferentes maneras a lo largo del tiempo, gracias al interés en sus resultados tanto descriptivos como predictivos. De hecho, el propio Hotelling utilizó su modelo bajo el supuesto de un monopolio, encontrando que el principio del comportamiento del precio se cumplía, pero el ingreso marginal se volvía igual al precio de sustitución, otros autores han demostrado la relación entre la tasa de interés y las tasa de crecimiento, sin embargo todos dan cuenta de las dificultades de su aplicación y de sus supuestos (Miller & Upton, 1985).

Otra aproximación al agotamiento de recursos naturales, en especial para el petróleo, fue postulada por el geólogo King Hubbert (1956), quien argumentó que la tasa de producción del petróleo iba a crecer hasta llegar a un máximo de producción, para posteriormente

decrecer a la misma tasa a la que creció inicialmente. El modelo de Hubbert presenta una curva similar a la gaussiana (véase Figura 2), donde en la primera parte la tasa de extracción crece, hasta llegar al punto máximo o pico de producción, y finalmente empieza la etapa de agotamiento del recurso. Hubbert (1956) estimó acertadamente que en 1970 EE.UU. alcanzaría su valor máximo de producción, y posteriormente en 1974 utilizó su modelo para estimar que, de “seguir así” la producción mundial llegaría a su pico en 1995 y su horizonte final estaría alrededor de 2070, sin embargo las condiciones han cambiado y nuevas estimaciones apuntan a otros 20 años más, antes del agotamiento del crudo (Figuroa, 2006, pág. 82). Aunque las curvas de Hubbert no son de especial relevancia para este análisis, es importante entender que Hubbert coincidía en que los recursos no renovables no se agotarían completamente, ya que para Hubbert en el momento en el que extraer un barril de petróleo requiera de mayor energía de la que produce, el pozo será abandonado.



(1) U.R.R.= *Ultimate Recoverable Resources* (Recursos Recuperables hasta el Agotamiento del Mineral)

Figura 2. Curva Hubbert de producción de crudo de una zona geográfica determinada (Figuroa, 2006).

En Colombia, Franco, Gallo & Franco (2010) aplicaron el modelo de Hotelling considerando las reservas probadas de carbón térmico en Colombia y su función de demanda, el tiempo de agotamiento y su precio de comercialización. En dicho artículo además se publicó la Figura 3.

Donde en el cuadrante superior derecho muestra la trayectoria de precio del recurso a lo largo del tiempo, el cuadrante superior izquierdo muestra la demanda de recurso (se

evidencia de forma inversa: cuanto mayor sea el precio del recurso, menor será la cantidad demandada), el cuadrante inferior derecho permite transferir la medida del tiempo, y finalmente el cuadrante inferior izquierdo muestra la relación entre la cantidad demandada, el tiempo y la cantidad extraída acumulada. El área bajo la curva en este cuadrante muestra la extracción acumulada del recurso agotable (Franco, Gallo, & Franco, 2010).

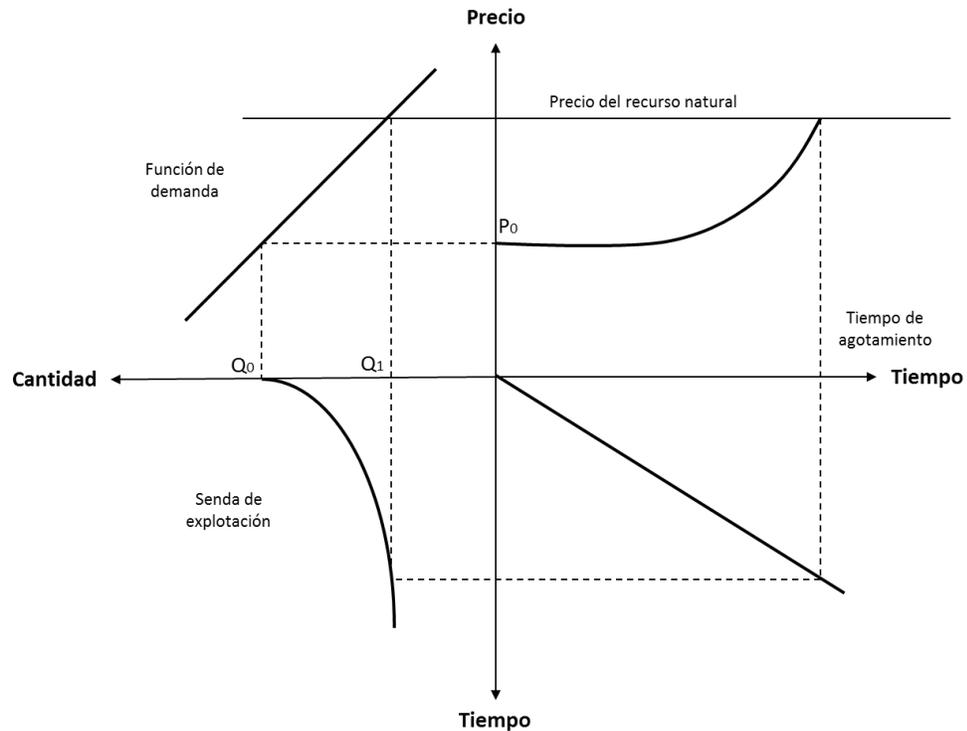


Figura 3. Solución de Hotelling (Fuente: Martínez y Roca, 2001), tomado de (Franco, Gallo, & Franco, 2010)

Además en la Figura 3 se puede ver que conforme aumenta el precio la cantidad demanda disminuye, y de seguir así llegara un momento donde la demanda sea igual a cero, sin embargo esto no llega a ocurrir en el tiempo de agotamiento ya que se presentan efectos de sustitución en los recursos.

Por otro lado, Montoya, Martínez, & Franco (2010) realizaron un análisis de la estructura del precio de la gasolina en Colombia entre los años 1999-2009 donde, entre otras, exponen los factores usados para fijar dicho precio y concluyen que este último es muy alto y no sigue la ecuación propuesta por el gobierno. De igual manera, argumentan que

los factores que más influyen en el precio final son el ingreso al productor afectado principalmente por el *West Texas Intermediate - WTI* y la Tasa Representativa del Mercado. Sin embargo en el artículo no consideran el efecto de la escasez ni de los planteamientos realizados por Hotelling, lo que podría explicar la diferencia.

Finalmente, Arciniegas (1995, pág. 150) formuló un modelo teórico para el caso del gas en Colombia donde incluye el precio, la cantidad, el costo de extracción y el costo del desarrollo que depende del número de perforaciones desarrolladas y acumuladas, logrando reducir los supuestos del modelo de Hotelling original, para luego utilizando los resultados de un modelo econométrico estimar el costo de agotamiento para los años comprendidos entre 1985 y 1994. Los resultados de Arciniegas evidenciaron que dado el aumento de las reservas de gas en ese momento el costo de uso es bajo, además en ese momento era más barato hallar el gas que utilizar un sustituto, por lo que el costo de uso no tendría gran relevancia.

No obstante, la literatura en Colombia no ha realizado un ejercicio empírico para el caso del petróleo, y dado el comportamiento de los últimos años (las bajas en las reservas y el aumento de la producción) la estimación del costo de uso puede ser de suma importancia para el análisis de la política de crudo.

Pregunta guía

Dado que el petróleo es un recurso natural no renovable ¿está Colombia agotando demasiado rápido el recurso?

Hipótesis

Para el caso colombiano, el precio del petróleo no refleja el costo de uso (el costo que el agotamiento del petróleo impone sobre las generaciones futuras), por lo que no está cubriendo los costos reales de la explotación del recurso

Objetivo general

Estimar el costo de agotamiento del petróleo para Colombia y usar este resultado para la evaluación de las políticas actuales de extracción del recurso.

Objetivos específicos

- Aportar al entendimiento del comportamiento del mercado para recursos no renovables
- Apropiar conceptos importantes para el análisis del uso de recursos no renovables, como Costo de uso y principio de Hotelling
- Proponer un marco de análisis para la extracción del petróleo en Colombia

Metodología

La metodología se apoyara en el modelo formulado por Arciniegas (1995), donde se realizó la formulación de un modelo teórico basado en el principio de Hotelling, pero con ajustes para el mercado del gas en Colombia. Seguido a esto se usó un modelo econométrico, en el cual se presentan los parámetros del modelo inicial, los cuales se usaron para la estimación final del costo de uso. Este modelo es aplicable al caso del petróleo, dadas las similitudes de condiciones tanto físicas como económicas de los dos recursos en Colombia.

Alcance

El alcance del estudio iniciará con datos desde el 1985 hasta el 2008, ya que estos son los que se encuentran disponibles y de fácil acceso para el autor, además se consideran suficientes estadísticamente para realizar el análisis propuesto.

Modelo

El modelo de Hotelling busca determinar los senderos óptimos de extracción de un recurso no renovable, para entenderlo se parte de la integración de la ecuación diferencial (2) que se mencionó anteriormente³, para luego poder expresar la regla de Hotelling de la siguiente manera:

$$P_t = (P_0 - c)e^{rt} + c \quad (5)$$

Donde P_0 es el precio del recurso el primer día de extracción, c son los costos de extracción, y r es la tasa de descuento.

El modelo de Hotelling como lo explica Arciniegas (1995) cuenta con supuestos muy fuertes, como lo son: (1) stock de reservas fijo, (2) costos de extracción constantes, (3)

³ Despejando $P'(t)$, separando variables e integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= r(P_t - c) \\ \int \frac{dP}{P_t - c} &= \int r dt \\ P_t - c &= \frac{1}{K} e^{rt} \end{aligned}$$

Para eliminar la constante de integración, se tiene $t=0$, obteniendo:

$$P_0 - c = \frac{1}{K} e^0 = \frac{1}{K}$$

mercado energético maduro y (4) pozos de calidad constante. Dichos supuestos dificultan la aplicación de este modelo, por este motivo, en este estudio se incluyeron las mismas variables utilizadas por Arciniegas (1995), con el fin de suavizar dichos supuestos y permitir un mayor acercamiento a la realidad.

Dicho esto, se pasó de un stock de mineral fijo a uno ilimitado (que depende las actividades de desarrollo de reservas, exploración), pero de cantidad decreciente. Igualmente se pasó de costos constantes a considerar una función de costos que depende de la cantidad producida en t y de las reservas, logrando así, eliminar los supuestos 1 y 2 mencionados anteriormente. Para el supuesto 3 relacionado con la madurez del mercado de crudo colombiano, se refiere a que en las etapas iniciales de extracción la demanda no reacciona de manera adecuada a la posibilidad de extracción, sin embargo el mercado colombiano ya tiene un desarrollo suficiente y con una demanda determinada.

Entonces, la función tecnológica del desarrollo de las reservas probadas disponibles es:

$$Y(t) = Y\{w(t), W(t), t\} \quad (6)$$

Dónde:

$Y(t)$ es el aumento en las reservas disponibles en el tiempo t , $w(t)$ es el esfuerzo de desarrollo en el tiempo t y $W(t)$ son los esfuerzos acumulados de desarrollo en el tiempo t .

Todo esto de tal manera que, la producción agota las reservas y los esfuerzos de desarrollo las incrementan, para que finalmente, el productor decida cuanto esfuerzo utiliza en desarrollar sus reservas y cuanto en producir, logrando que su decisión sea óptima si maximiza sus ingresos descontando sus costos, lo que se representa en la siguiente función:

$$\max G(q, w, R, W, t) \text{ donde } G = \int_0^T [pq(t) - c(q(t), R(t)) - F(w(t), W(t))] e^{-rt} dt$$

Dadas las siguientes restricciones

$$\dot{R} = -q + Y(w, W)$$

$$\dot{W} = w(t)$$

$$R_0 = R(0)$$

$$q(t), w(t) > 0$$

$$R, W > 0$$

Dónde:

p es el precio, q es la cantidad producida en t , c es el costo total de producción que depende de la cantidad producida y las reservas, y F es el costo de desarrollo que depende del número de perforaciones desarrolladas y acumuladas.

Dicha maximización es una optimización dinámica que se resuelve con la aplicación de control óptimo, dado que el agente maximizador tiene control sobre las variables de producción (q) y de los esfuerzos de desarrollo (w), de tal manera que al aumentar la producción disminuye las reservas, y al incrementar los esfuerzos de desarrollo aumenta las reservas. Dicho esto, la siguiente ecuación presenta el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H\{q, w, R, W, \mu, v\} \\ = [pq(t) - c(q(t), R(t)) - F(w(t), W(t))]e^{-rt} + \mu(-q + Y(w(t), W(t)) \\ + v(w(t))) \end{aligned}$$

Cuyas condiciones normales de primer orden son (véase Anexos – optimización dinámica):

$$P(t) - \frac{\partial c}{\partial q} = \mu e^{rt} \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \mu e^{rt} \frac{\partial Y}{\partial w} + v e^{rt} \quad (8)$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial W} \rightarrow v = \frac{\partial F}{\partial W} e^{-rt} - \mu \frac{\partial Y}{\partial W} \quad (9)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial R} \rightarrow \mu = \frac{\partial c}{\partial R} e^{-rt} \quad (10)$$

Aplicación: modelo econométrico

De acuerdo con los ajustes realizados al modelo en la sección anterior, se utilizarán los datos presentados en la Tabla 2.

Tabla 2. Variables su unidad de medida y su fuente

Variable	Nombre	Unidad de medida	Fuente
PT_t	Producción promedio de crudo para el año t	Miles de barriles promedio por día – kbpd	Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano – SIPG (Unidad de Planeación Minero Energética – UPME)
RR_t	Reservas remanentes de crudo para el año t	Millones de barriles – Mbbl	Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano – SIPG (Unidad de Planeación Minero Energética – UPME)
PF_t	Perforaciones realizadas en el año t	Unidades	Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano – SIPG (Unidad de Planeación Minero Energética – UPME)
PFC_t	Perforaciones acumuladas hasta el año t	Unidades	Propia: calculado con base en los datos del Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano – SIPG (Unidad de Planeación Minero Energética – UPME)
CD_t	Inversiones exploratorias para el año t	Millones de dólares	Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano – SIPG (Unidad de Planeación Minero Energética – UPME)
r_t	Tasa de interés	Porcentaje	Para el análisis se utilizó la tasa social de descuento oficial para Colombia del 12% definida por el Departamento Nacional de Planeación – DNP (Departamento Nacional de Planeación), igualmente fue tomada como referencia la tasa del 8,5% estimada por Rodríguez (2007) para realizar otra estimación.

Los datos utilizados se presentan en la Tabla 3 como un resumen de información estadística del sector.

Tabla 3. Información estadística del sector petrolero en Colombia

Año	PT (kbpd)	RR (Mbbl)	PF (Unidades)	CD (Millones US\$)*	CD (Millones US\$)**
1985	176,5	1243,7	39,0	643,2	465,7
1986	302,1	1696,4	32,0	344,3	340,5
1987	385,3	1907,3	54,0	384,2	290,0
1988	374,8	2051,6	66,0	540,2	343,0
1989	404,4	1984,3	52,0	484,1	284,4
1990	439,5	1990,7	46,0	477,5	278,4
1991	425,6	1884,6	32,0	465,5	302,9
1992	438,4	3231,9	29,0	1047,9	1100,1
1993	453,3	3156,4	17,0	949,8	958,0
1994	454,0	3139,0	17,0	578,8	628,6
1995	585,0	2951,9	10,0	849,6	807,6
1996	603,0	2798,0	10,0	769,6	961,1
1997	653,6	2577,2	12,0	1040,7	1193,8
1998	754,4	2477,8	17,0	1023,3	1610,8
1999	815,3	2289,2	14,0	414,8	625,6
2000	687,0	1971,9	16,0	282,7	288,9
2001	604,4	1842,2	14,0	807,1	787,3
2002	578,0	1631,7	10,0	496,5	676,1
2003	541,3	1542,4	28,0	463,0	486,1
2004	528,5	1477,6	21,0	472,9	372,0
2005	525,8	1453,2	35,0	597,4	398,0
2006	528,2	1509,7	56,0	820,7	562,6
2007	533,6	1358,2	70,0	941,3	718,0
2008	549,4	1669,0	99,0	996,9	996,9

* Precios corrientes

** Precios constantes a 2008

Entonces, como se explicó anteriormente el Costo de uso es una función de CD , que es el costo total de desarrollo, e Y que son las adiciones a las reservas probadas, ambas dependen de $w(t)$ y $W(t)$. De modo que, inicialmente se planteó utilizar las mismas funciones definidas por Arciniegas (1995) para la estimación, sin embargo estas presentaban multicolinealidad, por lo que se calculó la matriz de varianzas y covarianzas, para posteriormente descartar la variable de perforaciones (PF) a nivel en ambas ecuaciones, quedando de la siguiente manera:

$$\ln\left(\frac{Y}{PF}\right) = c + c_1 \ln(PF) + c_2 \ln(PFC) + et_1$$

$$\ln\left(\frac{CD}{PF}\right) = b + b_1 \ln(PF) + b_2 \ln(PFC) + et_2$$

La variable Y se construyó como la suma de la producción total del año t más el neto de las reservas remanentes en ese año con respecto al año anterior.

En el caso de los datos de PF se realizó los siguientes supuestos: (1) los esfuerzos realizados por pozo aportarán el mismo peso relativo para el aumento de las reservas y (2) los costos de desarrollo de cada pozo serán iguales. Esto gracias a la no disponibilidad de datos detallados para realizar un análisis más cercano a la realidad⁴.

Así que los resultados de esta estimación se presentan en la Tabla 4 y la Tabla 5.

$$\ln\left(\frac{Y}{PF}\right) = 6,217342 - 0,878105 \ln(PF)$$

Tabla 4. Resultados de la estimación de las adiciones de reservas probadas

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.217342	1.009266	6.160262	0.0000
LOGPF	-0.878105	0.117161	-7.494851	0.0000
LOGPFC	-0.066581	0.149307	-0.445933	0.6604
R-squared	0.738285	Mean dependent var	2.959613	
Adjusted R-squared	0.712113	S.D. dependent var	0.708097	
F-statistic	28.20949	Durbin-Watson stat	2.444189	
Prob(F-statistic)	0.000002			

Si bien el modelo en su conjunto presenta un buen ajuste ($R^2 = 0,73$ y $R^2_{ajus.} = 0,71$), el coeficiente de ajuste individual de la variable LOGPFC no es significativo y la probabilidad de que éste no sea diferente de cero es muy alta, lo que evidenciaría que el efecto del aprendizaje en el desarrollo de nuevas reservas no existe, por lo que se tomó como cero en el algoritmo para la determinación del costo de uso. Como se puede ver el estadístico Durbin-Watson está por encima de su valor crítico ($1,407 < 2,4441$) por lo que no hay evidencia estadística de que los términos de error estén positivamente autocorrelacionados. Igualmente se realizó el test de White cuyo resultado permitió

⁴ Para una medida más real se debería contar con datos del aporte por pozo al aumento de las reservas, así como el costo de la perforación de cada pozo.

concluir que no hay evidencia estadística de heterocedasticidad ($5.135875 < \text{JI-cuadrada (5)95\%} = 11,070$).

$$\ln\left(\frac{CD}{PF}\right) = 5,743285 - 1,265583 \ln(PF) + 0,250701 \ln(PFC)$$

Tabla 5. Resultados de la estimación del costo total de desarrollo

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.743285	1.029532	5.578542	0.0000
LOGPF	-1.265583	0.146056	-8.665030	0.0000
LOGPFC	0.250701	0.142002	1.765479	0.0920
R-squared	0.803785	Mean dependent var		3.056142
Adjusted R-squared	0.785098	S.D. dependent var		1.021740
F-statistic	43.01266	Durbin-Watson stat		1.193042
Prob(F-statistic)	0.000000			

La ecuación (2) presenta un buen ajuste tanto general ($R^2 = 0,73$ y $R^2_{ajus.} = 0,71$), como individual de las variables, a pesar de presentarse un caso similar al anterior con la variable LOGPFC (estadístico $t = 1,76$). En este caso el estadístico Durbin-Watson se encuentra en el intervalo de indecisión ($0,882 < 1.1930 < 1,407$) por lo que no se puede concluir en términos de autocorrelación. Adicionalmente se realizó el test de White cuyo resultado permitió concluir que no hay evidencia estadística de heterocedasticidad ($2.379361 < \text{JI-cuadrada (5)95\%} = 11,070$).

Usando estos resultados se puede calcular el costo de uso siguiendo este procedimiento (véase anexos - Algoritmo para la determinación práctica de U:

1. Calcular para cada periodo analizado las siguientes fórmulas

$$A(t) = F_2 - F_1 \frac{Y_2}{Y_1} e^{-rt}$$

$$B(t) = r + \frac{Y_2}{Y_1} e^{-rt}$$

Donde $F_1 = \partial F / \partial w$; $F_2 = \partial F / \partial W$; $Y_1 = \partial Y / \partial w$; $Y_2 = \partial Y / \partial W$; r es la tasa de descuento.

2. Luego se reemplazan estos valores calculando V_t para cada periodo analizado con la siguiente ecuación:

$$V_t = \frac{A(t) + V_{t-1}}{1 - B(t)}$$

Donde la condición inicial $V(0) = 0$

3. Finalmente se calcula el costo de uso con la expresión

$$U_t = \frac{\frac{\partial F}{\partial w} - V_t}{\frac{\partial Y}{\partial w}}$$

Resultados

Realizando el procedimiento mencionado anteriormente con ambas tasas sociales de descuento⁵ (véase Tabla 3), se obtuvieron los resultados presentados en la Tabla 6 y la Figura 4.

Tabla 6. Costo de agotamiento estimado

Año	Costo de agot. US\$/BEP* (TSD 12%)	Costo de agot. US\$/BEP* (TSD 8,5%)
1985	1,765701	1,753291
1986	2,134376	2,094301
1987	2,553325	2,466990
1988	3,029404	2,874300
1989	3,570403	3,319447
1990	4,185174	3,805948
1991	4,883778	4,337642
1992	5,677646	4,918728
1993	6,579769	5,553796
1994	7,604908	6,247858
1995	8,769839	7,006397
1996	10,093624	7,835401
1997	11,597926	8,741416
1998	13,307359	9,731596
1999	15,249897	10,813760
2000	17,457327	11,996454
2001	19,965770	13,289014
2002	22,816273	14,701649
2003	26,055481	16,245513
2004	29,736399	17,932795
2005	33,919261	19,776819
2006	38,672513	21,792146
2007	44,073935	23,994689
2008	50,211915	26,401841

*Precios constantes a 2008

⁵ Los datos obtenidos con la tasa del 8,5% se consideraron gracias a la presente preocupación por la reestimación oficial de la tasa social de descuento (Rodríguez, 2007), sin embargo las conclusiones se realizaron con base en el resultado utilizando la tasa del 12%, ya que esta es la oficial definida por Colombia

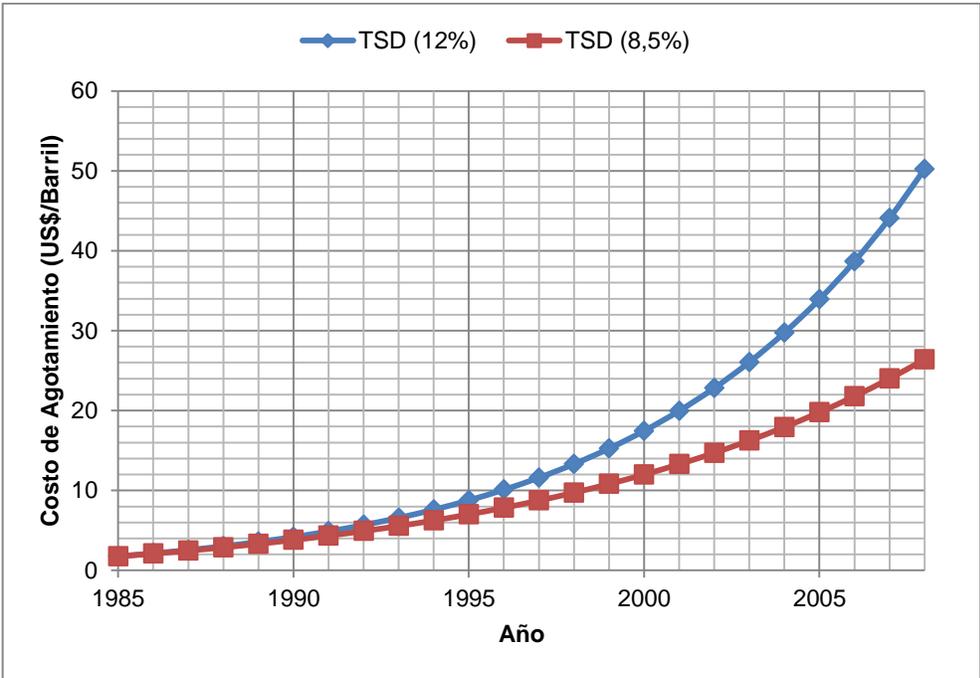


Figura 4. Costo de uso estimado

Análisis de resultados

Para el análisis de los resultados y la formulación de conclusiones se utilizaran 2 marcos de referencia, el primero con relación al comportamiento de la curva y sus posibles causas, y el segundo con relación al monto designado actualmente para las regalías petroleras.

Como se evidencia en la Figura 4 la curva de Costo de uso estimada presenta un comportamiento creciente. Dicho comportamiento se puede deber a la disminución de las reservas remanentes de los últimos años, y a la falta de hallazgos, es decir, un efecto mayor de la escasez. Igualmente este comportamiento puede estar relacionado a que los efectos del agotamiento superaron en el efecto de aprendizaje en los desarrollos, por lo que este crece a tasas mayores.

Por otra parte, como lo explica Hernández-Gamarra (2010) al dar una interpretación económica de lo expuesto en la sentencia C-567/95 de la Corte Constitucional donde se expone:

“Según el artículo 332 en concordancia con el artículo 360 de la constitución política estipula:

- a. Que el estado es propietario del subsuelo*
- b. Que este es el titular originario de las regalías*
- c. Que las regalías por la explotación de recursos naturales no renovables son una especie de contraprestación económica que hace parte del patrimonio del Estado (...)*

Las regalías son el pago por el derecho a explotar el recurso (no son un tributo). Esto implica que teóricamente el valor unitario de regalías por barril extraído del subsuelo es equivalente al costo de uso marginal, (Daly & Farley, 2004; Hotelling, 1931), y debe ser neto de los costos generados por la reparación de las externalidades ambientales (Hernández-Gamarra, 2010).

Hecho que concuerda con la visión de Romero (1997) y Daly & Farley (2004), que explica que el precio óptimo del petróleo está conformado por 3 costos marginales, el costo de extracción, el costo de uso y el costo marginal externo (véase ***¡Error! No se encuentra el***

origen de la referencia.), resultante del alto impacto ambiental negativo de la explotación.

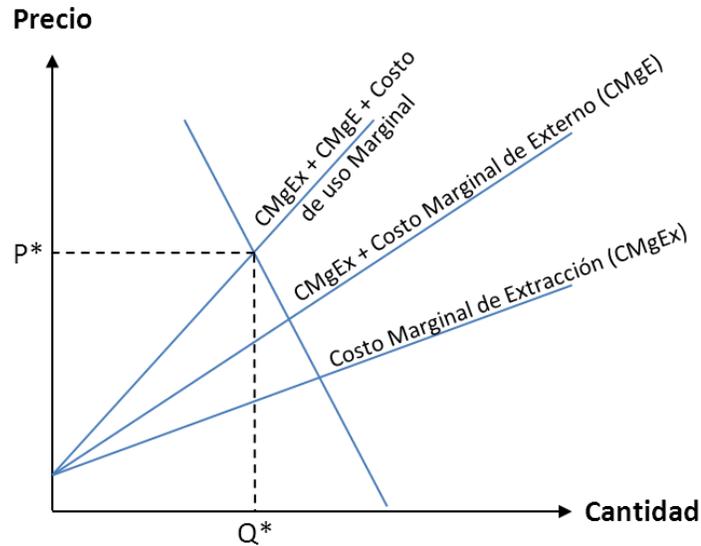


Figura 5. Cantidad óptima de extracción de combustibles fósiles en presencia de escasez y externalidades negativas. Traducido de (Daly & Farley, 2004)

Dicho esto, en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se puede contrastar el comportamiento del precio promedio por barril de referencia para Colombia y el costo de uso estimado, además en la Tabla 7 se puede ver la participación del costo de uso en el precio por barril.

Tabla 7. Participación del costo de uso en el precio por barril

Año	Precio (US\$/BEP)	Costo de agot. (US\$/BEP)	%
1985	20,27458783	1,765701	8,71%
1986	14,83480964	2,134376	14,39%
1987	14,34013006	2,553325	17,81%
1988	10,16020687	3,029404	29,82%
1989	11,74871737	3,570403	30,39%
1990	14,57680073	4,185174	28,71%
1991	13,66491583	4,883778	35,74%
1992	22,04701984	5,677646	25,75%
1993	19,1643272	6,579769	34,33%
1994	18,46385343	7,604908	41,19%
1995	17,10943667	8,769839	51,26%
1996	27,4743746	10,093624	36,74%
1997	22,94204087	11,597926	50,55%
1998	23,61124531	13,307359	56,36%
1999	30,16238949	15,249897	50,56%
2000	30,66024332	17,457327	56,94%
2001	24,38525072	19,965770	81,88%
2002	36,76764082	22,816273	62,06%
2003	32,54340404	26,055481	80,06%
2004	33,03528138	29,736399	90,01%
2005	37,97432876	33,919261	89,32%
2006	45,92718547	38,672513	84,20%
2007	57,20753685	44,073935	77,04%
2008	99	50,211915	50,72%

Precios constantes a 2008

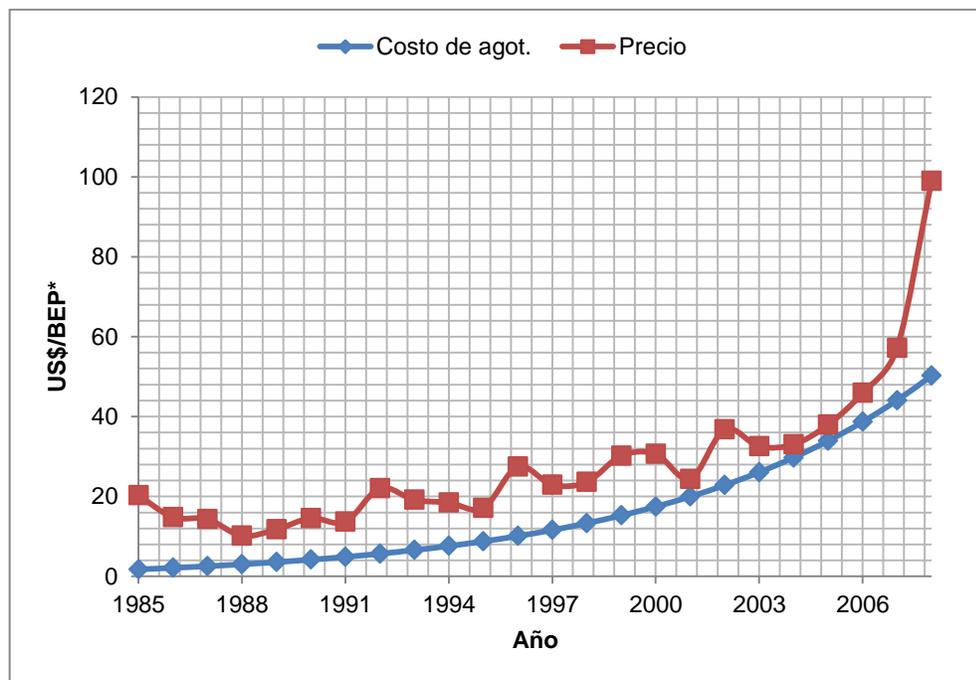


Figura 6. Precio promedio⁶ y costo de uso del petróleo para Colombia, precios constantes a 2008.

En la Figura 6 es de esperar que el comportamiento de estas dos variables sea similar, por los conceptos detrás de ellas, sin embargo la participación del costo de uso en el precio es en promedio del 49%, mientras que el monto designado por el Estado para las regalías en ningún caso supera el 25% (para nuevos descubrimientos, de acuerdo a la ley 756 de 2002).

Finalmente, como se evidencia en la Figura 7, el costo de uso varía según la tasa de interés—que para este caso es la tasa social de descuento, así que para facilitar el entendimiento de esta relación, se realizaron simulaciones con diferentes valores de la tasa, y los resultados se presentan en la Figura 7. Esto muestra que como se mencionó anteriormente que al aumentar la tasa, el dueño del recurso gana más extrayéndolo hoy que esperando a extraerlo en el futuro, por lo que aumentaría la producción actual, incrementando el costo de agotamiento de las generaciones futuras, dicho de otra forma, las generaciones actuales le dan una mayor prioridad a sus intereses que a los de las futuras generaciones.

⁶ Fuente: Series Numéricas (Ecopetrol S.A., 2011)

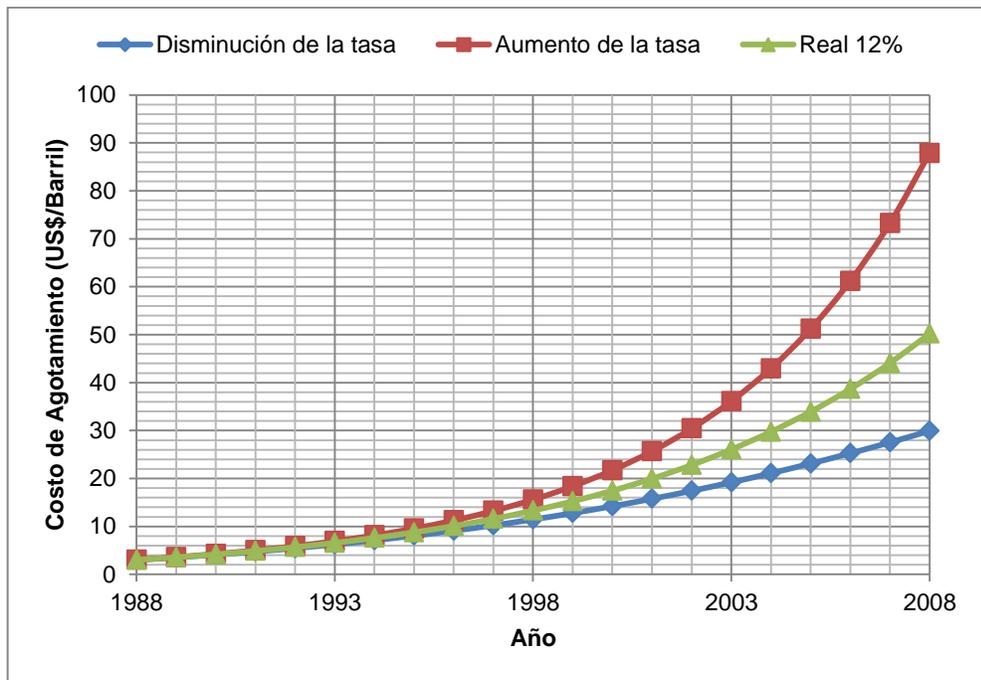


Figura 7. Simulación del costo de uso con cambios en la tasa social de descuento

Conclusiones y recomendaciones para futuros estudios

Como se mencionó anteriormente el porcentaje que actualmente se destina a regalías no supera el 25% del precio del barril, por lo que el valor de las regalías no subsana el costo del agotamiento de las generaciones futuras, debido a que el agente que toma la decisión de producción, en este caso la Agencia Nacional de Hidrocarburos, está considerando un costo para las generaciones futuras muy bajo. A esto se puede agregar que las regalías deben ser invertidas hoy para compensar a las futuras generaciones, y así convertir el capital natural en capital hecho por el hombre, logrando algún nivel de sostenibilidad, sin embargo la legislación hasta el 2011 solo utilizaba un 20% en proyectos de desarrollo (Figura 8), lo que confirma el mal uso que se le dio a las regalías en el periodo analizado. No obstante, en 2011 se realizó una reforma al Sistema General de Regalías, mejorando estas condiciones y con los objetivos de mejorar la equidad en la distribución, aumentar el impacto social de estos recursos a nivel regional, mayor eficiencia y transparencia en la administración del dinero de regalías y el incremento del ahorro público (Giraldo & Medellín, 2013).



Figura 8. El sistema de regalías antes de la reforma de 2012, tomado de Giraldo & Medellín (2013)

Anteriormente se notó que el precio del recurso debe incluir el costo de explotación, el costo externo y el costo de uso, sin embargo el costo de uso en los últimos 6 años se presenta muy cercano al precio, alrededor del 80%, por lo que se presentan indicios de que el precio es muy bajo, ya que el 20% restante podría no subsanar el costo de explotación y el costo externo, sin embargo es necesario realizar un estudio complementario para poder concluir en este aspecto. No obstante, es de notar que en

caso de presentarse este fenómeno, la tasa de producción actual estaría por encima de la tasa óptima.

Finalmente, Romero (1997, págs. 84-85) explica que *“Las políticas monetarias restrictivas, al conllevar altos tipos de interés, no son buenas amigas de los proteccionistas, ni de los intereses de las futuras generaciones, pues implican horizontes óptimos de agotamiento o extracción mucho más cortos. Sin embargo, esta conclusión procede de un análisis del tipo ceteris paribus. Así, los altos tipos de interés hacen por una parte incrementar las tasas de extracción pero por otra parte hacen disminuir el nivel de la inversión agregada, lo que a su vez genera una contracción de la demanda de recursos naturales, pues al fin y al cabo este tipo de recursos son insumos para la mayor parte de los procesos de inversión”*.

En cuanto a futuros estudios relacionados con el petróleo y su tasa de extracción, se sugiere realizar un análisis en el que se incluyan las externalidades ambientales negativas resultantes del proceso de explotación de crudo, ya que como lo mencionan Romero (1997) y Daly & Farley (2004), estas aumentan aún más el horizonte de extracción, puesto que en este análisis tendría un costo marginal social mayor, resultante de la suma del costo marginal de extracción, el costo de uso marginal y el costo de las externalidades (véase ***¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.***).

Referencias bibliográficas

- Agencia Nacional de Hidrocarburos. (24 de Junio de 2009). *Misión y Visión*. Recuperado el 4 de Marzo de 2013, de <http://www.anh.gov.co/es/index.php?id=12>
- Agencia Nacional de Hidrocarburos. (21 de Febrero de 2013). *Cifras y Estadísticas*. Recuperado el 4 de Marzo de 2013, de <http://www.anh.gov.co/es/index.php?id=8>
- Arciniegas, I. E. (Marzo de 1995). Análisis económico del Costo de Agotamiento para el Gas. *Desarrollo y Sociedad*(35), 143-162.
- Asheim, G., & Buchholz, W. (2000). The Hartwick rule: Myths and Facts. *Memorandum, Department of Economics, University of Oslo*(2000, 11), 1-30.
- Daly, H., & Farley, J. (2004). *Ecological economics: Principles and applications*. Connecticut: Island Press.
- Departamento Administrativo Nacional de Estadística - DANE. (10 de Julio de 2012). *Anexos estadísticos de Oferta - Precios Constantes Series Desestacionalizadas - III trimestre de 2012*. Recuperado el 19 de Febrero de 2013, de http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/boletines/pib/Anexos_oferta_constantes_desestacionalizadas_III_2012.xls
- Departamento Nacional de Planeación. (s.f.). *Pregunta 20*. Recuperado el 08 de Julio de 2013, de sitio web del Departamento Nacional de Planeación : <https://www.dnp.gov.co/PreguntasFrecuentes/InversionesyFinanzasP%C3%BAblicas.aspx>
- Ecopetrol S.A. (2011). *Series Numéricas*. Recuperado el 20 de Mayo de 2013, de Sitio web del libro "Ecopetrol, energía limpia para el futuro": http://www.ecopetrol.com.co/especiales/libro60anos/down/series_numericas.pdf
- Figuroa, E. (2006). *El Comportamiento Económico del Mercado del Petróleo*. España: Díaz de Santos.
- Franco, G., Gallo, A. F., & Franco, E. (2010). El Carbón Colombiano y el Modelo de Hotelling. *Revista Escuela de Ingeniería de Antioquia*, 67-74.

-
- Hartwick, J. M. (1977). Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources. *The American Economic Review*, 972-974.
- Hartwick, J. M., & Olewiler, N. (1998). *The Economics of Natural Resource Use* (2da ed.). Harlow: Addison-Wesley.
- Hernández-Gamarra, A. (Septiembre de 2010). *Artículos recientes*. Recuperado el 26 de Marzo de 2013, de Observatorio del Caribe Colombiano: http://www.ocaribe.org/caribe_articulosinfo.php?la=en&id_articulo=9
- Hotelling, H. (1931). The economics of exhaustible resources. *The Journal of Political Economy*(39(2)), 137-175.
- Hubbert, M. K. (1956). Nuclear energy and the fossil fuel. *Drilling and production practice*, 1-40.
- Miller, M. H., & Upton, C. W. (1985). A test of the Hotelling valuation principle. *The Journal of Political Economy*, 1-25. .
- Montoya, M., Martínez, A., & Franco, G. (2010). Análisis del Precio de la Gasolina en Colombia: Aproximación. *Revista Dyna*, 279-289.
- Perman, R., Ma, Y., MacGilvary, J., & Common, M. (1999). *Natural Resource and Environmental Economics* (2da ed.). Harlow: Longman.
- Rodríguez, R. (2007). Restimación de la tasa social de descuento en Colombia a partir del desarrollo de su mercado de capitales durante el período 1995 - 2005. *Revista Equidad y Desarrollo*(8), 55-81.
- Romero, C. (1997). *Economía de los recursos ambientales y naturales* (Segunda ed.). (Alianza, Ed.) España: Alianza Economía.
- Tietenberg, T. (1996). *Environmental and Natural Resource Economics*. New York: Harper Collins.
- Unidad de Planeación Minero Energética – UPME. (s.f.). *Estadísticas*. Recuperado el 2013 de Mayo de 20, de Sistema de Información de Petróleo y Gas colombiano –

SIPG: <http://www.sipg.gov.co/sipg/Home/Sectores/tabid/105/language/es-ES/Default.aspx>

Anexos

Optimización dinámica

$$\text{Max } \{q, w\} J(q, w, r, W, t) \quad (1)$$

$$J = \int_0^t [pq(t) - c(q(t), R(t)) - F(w(t), W(t))] e^{-rt} dt \quad (2)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\dot{R} = -q + Y(w, W) \quad (3)$$

$$\dot{W} = w(t) \quad (4)$$

Escribiendo el Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} H\{q, w, R, W, \mu, v\} \\ = [pq(t) - c(q(t), R(t)) - F(w(t), W(t))] e^{-rt} + \mu(-q + Y(w(t), W(t))) \\ + v(w(t)) \end{aligned}$$

Definiendo las condiciones de primer orden como:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} = \left[p - \frac{\partial c}{\partial q} \right] e^{-rt} - \mu = 0 \quad (5)$$

$$p - \frac{\partial c}{\partial q} = \mu e^{rt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial w} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial w} = \left[-\frac{\partial F}{\partial w} \right] e^{-rt} + \mu \frac{\partial Y}{\partial w} + v = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \mu e^{rt} \frac{\partial Y}{\partial w} + v e^{rt} \quad (8)$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial W}$$

$$\rightarrow \dot{v} = \frac{\partial F}{\partial W} e^{-rt} - \mu \frac{\partial Y}{\partial W} \quad (9)$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial R}$$

$$\rightarrow \dot{\mu} = \frac{\partial c}{\partial R} e^{-rt} \quad (10)$$

La ecuación (10) nos indica que μ es el valor presente de las reservas probadas. La ecuación (9) muestra que v es el valor presente del esfuerzo de desarrollo acumulado. Con las ecuaciones (6 y 10) se puede resolver el proceso de maximización para las variables de control.

En ese óptimo si μ es el valor presente de las reservas probadas y entonces el costo de agotamiento será:

$$U = \mu e^{rt}$$

Despejando (8), se tiene que el costo de uso $U = \mu e^{rt} = \frac{\frac{\partial F}{\partial w} - v e^{rt}}{\frac{\partial Y}{\partial w}} \quad (11)$

Por (11) se ve claramente que U es también el costo de generar una unidad adicional de reservas.

Algoritmo para la determinación práctica de U

$$U = \mu e^{rt} = \frac{\frac{\partial F}{\partial w} - v e^{rt}}{\frac{\partial Y}{\partial w}} \quad (1)$$

$$V = v e^{rt} \quad (2)$$

Derivando (2):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V} = \dot{v} e^{rt} + v r e^{rt} \quad (3)$$

Como se tiene en el Hamiltoniano:

$$\dot{v} = \frac{\partial F}{\partial W} e^{-rt} - \mu \frac{\partial Y}{\partial W} \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial F}{\partial W} e^{-rt} - \mu \frac{\partial Y}{\partial W} \right) e^{rt} + rV \quad (5)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial F}{\partial W} - \mu e^{rt} \frac{\partial Y}{\partial W} + rV \quad (6)$$

Reemplazando (1) en (6):

$$\dot{V} = \frac{\partial F}{\partial W} - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial W} - V}{\frac{\partial Y}{\partial W}} \right) e^{rt} \frac{\partial Y}{\partial W} + rV \quad (7)$$

Para facilitar el manejo se utilizaran las siguientes expresiones

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial w}; F_2 = \frac{\partial F}{\partial W}; Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial w}; Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial W}$$

Entonces:

$$\dot{V} = F_2 - \left(\frac{F_1 - V}{Y_1} \right) e^{rt} Y_2 + rV$$

$$\dot{V} = \frac{F_2 Y_1 - F_1 Y_2 e^{rt} + Y_2 V e^{rt} + Y_1 rV}{Y_1}$$

$$\dot{V} = V \left(\frac{Y_2 e^{rt} + Y_1 r}{Y_1} \right) + \left(\frac{F_2 Y_1 - F_1 Y_2 e^{rt}}{Y_1} \right)$$

Se definen las siguientes expresiones:

$$B(t) = \frac{Y_2 e^{rt} + Y_1 r}{Y_1} = r + \frac{Y_2}{Y_1} e^{rt}$$

$$A(t) = \frac{F_2 Y_1 - F_1 Y_2 e^{rt}}{Y_1} = F_2 - F_1 \frac{Y_2}{Y_1} e^{rt}$$

Entonces:

$$\dot{V} = A + BV$$

Representando la ecuación en términos discretos:

$$V_t - V_{t-1} = A_t + B_t V_t$$

Por tanto:

$$V_t = \frac{A(t) + V_{t-1}}{1 - B(t)}$$

Definiendo el costo de agotamiento como:

$$U_t = \frac{\frac{\partial F}{\partial w} - V_t}{\frac{\partial Y}{\partial w}}$$