Ambiente visual para el aprendizaje de los conceptos básicos asociados a la recurrencia

David Guillermo Galvis Espitia, Henry Monroy Tavera
david.galvis@mail.escuelaing,edu.co, henry.monroy@mail.escuelaing.edu.co
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito,
Bogotá D.C - Colombia
2016

ABSTRACT

This project has been developed in order to show students the importance of visualizing patterns and how recurrence contributes to the solution of problems of the algorithmic nature, since not all educational entities teach concepts associated with recurrence and Students have little knowledge about this subject.

To change this teaching paradigm, this article develops a visual environment where students can interact with a recurrence exercises basic series. The environment works graphically, interactively and dynamically in order to help in the development of skills in this topic.

Key words: recurrence, iteration, sequence, fractal.

RESUMEN

Este proyecto ha sido elaborado con el fin de mostrar a los estudiantes la importancia que tiene la visualización de patrones y cómo la recurrencia contribuye en la solución de problemas de naturaleza algorítmica, ya que no todas las entidades educativas enseñan conceptos asociados a la recurrencia y los estudiantes presentan escaso conocimiento acerca de este tema.

Para cambiar este paradigma, el presente artículo desarrolla un ambiente visual donde los alumnos pueden interactuar con una serie de ejercicios básicos de recurrencia que han sido plasmados de manera gráfica, interactiva y dinámica para que sirvan de ayuda en el desarrollo de habilidades en este campo.

Palabras Clave: recurrencia, iteración, secuencia, fractal.

I. INTRODUCCIÓN

Según la profesora Jo Boaler, de la Universidad de Stanford, algunos de los factores que hacen que la enseñanza de las matemáticas falle, están relacionados con que los estudiantes tengan que memorizar muchos elementos, no tengan tiempo suficiente para resolver una variedad de operaciones en sus exámenes, y la desconexión del cálculo y la recurrencia de los problemas cotidianos (Torres, 2016).

En la misma línea, el británico Conrad Wolfram, asegura que *"las matemáticas del colegio están muy desconectadas de las matemáticas que sirven para solucionar problemas en el mundo real"* (Torres, 2016).

En el área de la informática también se observan algunos de estos problemas. Por ejemplo, se tiene que los estudiantes tienen una escasa idea de la importancia de la recurrencia para solucionar diferentes tipos de problemas. Además, el modelo tradicional de enseñanza no logra, en muchos casos, mantener el interés por parte del estudiante en este campo.

El presente artículo busca hacer un aporte en la metodología de enseñanza mediante el desarrollo de un ambiente que integre herramientas tecnológicas para solucionar problemas relacionados con la recurrencia. De esta manera se busca, en una primera etapa, inducir a los estudiantes a la experimentación, para que en un futuro, puedan aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas de naturaleza de tipo algorítmica.

En el ambiente visual que se ha desarrollado, la clave está en que se da mayor protagonismo al alumno a través de la experimentación y se disminuye drásticamente la metodología tradicional de aprendizaje.

A raíz de todo esto se plantean varios interrogantes: ¿Qué se puede aportar para cambiar este tipo de metodología? ¿Cuáles herramientas tecnológicas podrían ayudar para que los estudiantes se interesen por aprender sobre recurrencia y al mismo tiempo se pueda mostrar de forma clara el comportamiento de varios fenómenos? ¿Cómo hacer para que a la hora de resolver problemas con tendencia recurrente, los estudiantes no opten por mecanizar el proceso sino que desarrollen habilidades de investigación y experimentación y puedan presentar una solución única e innovadora?

Las respuestas a estos interrogantes serán desarrolladas en el presente documento que está dividido de la siguiente manera: la primera parte es ésta introducción; la segunda trata un breve estado del arte donde se exponen algunos conceptos y problemáticas de la materia; en la tercera parte se expone la metodología; en la cuarta, se desarrolla la propuesta del ambiente de aprendizaje y finalmente se encuentran las conclusiones.

II. ESTADO DEL ARTE

La recursividad es una técnica muy empleada en la programación informática y consiste en que una función se llame a sí misma (Rodríguez, 2009).

El concepto de recursión aparece en varias situaciones de la vida cotidiana, aunque en muchas se desconoce la presencia de este concepto, por ejemplo, sacar fotocopias de fotocopias, tomar una fotografía a otra fotografía (Vallejo, s.f) o el caso de espejos que hacen que la imagen sea replicada al infinito, una dentro de otra, hasta que deja de verse, pero no por eso deja de existir. De esta manera, la recursividad tiene como característica principal la sensación de algo que es contínuo y que por tanto no puede ser delimitado en el espacio o el tiempo porque se sigue replicando y multiplicando de manera lógica y matemática (Definición ABC, 2016).

En matemáticas, existen numerosas funciones que tienen carácter recursivo. Una función que contiene sentencias entre las que se encuentran al menos una que llama a la propia función, se dice que es recursiva (Ramírez & Estrada, s.f).

La recurrencia, como herramienta de la programación, está profundamente anclada en la teoría de la computación y entre los principales usos de ésta técnica están la definición de estructuras de datos dinámicos tales como listas y árboles (Wikipedia, 2016), en donde estas estructuras se llaman a sí mismas. Al mismo tiempo, se puede utilizar la recursividad como una alternativa a la iteración. Una solución recursiva es normalmente menos eficiente, en términos de tiempo de computadora, que una solución iterativa debido a las operaciones auxiliares que llevan consigo las llamadas suplementarias a las funciones (Ramírez & Estrada, s.f), como el uso del Stack del ordenador para guardar temporalmente los cálculos de las llamadas que ha hecho la función recurrente. Sin embargo, en muchas circunstancias el uso de la recursión permite a los programadores especificar las soluciones más lógicas, naturales, elegantes y sencillas, que serían, en caso contrario, difícil de resolver (Ramírez & Estrada, s.f).

Cabe agregar que la recurrencia también se presenta en la geometría fractal. La palabra fractal, referida a conjuntos matemáticos, apareció por primera vez en el año 1977 cuando Benoit Mandelbrot la utilizó para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades (Reyes, s.f):

- Se caracterizan por presentar detalles a cualquier escala, es decir, siempre que se mire más de cerca habrá un nuevo detalle (Carena, 2013).
- Son autosemejantes, es decir, que están formados por partes que son semejantes al conjunto total (Reyes, s.f).
- Está definida de forma recursiva (Caballero, s.f), o lo que es lo mismo, se construyen a partir de una instrucción que se repite permanentemente.

Los fractales se definen de la siguiente manera:

- Se parte de una figura inicial (semilla)

- Se aplican unas reglas de transformación generando nuevas figuras a partir de la inicial
- A cada una de las nuevas figuras se le aplica de nuevo las reglas de transformación, y así hasta el infinito

Para ver el concepto de la autosemejanza a mayor detalle, a continuación se muestra una serie de fractales clásicos como la curva e isla de Koch, el triángulo y la alfombra de Sierpinski.

1. La curva de koch
   Según Romero (2007), la curva de Koch es una de las más sencillas figuras fractales y una de las primeras. Fue inventada por el matemático sueco Helge von Koch en 1906.

   Su construcción es como sigue: Se toma un segmento, se divide en tres partes iguales, se reemplaza la parte central por dos partes de igual longitud haciendo un ángulo de π/3 radianes (60 grados). Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da 16 segmentos pequeños. Y así sucesivamente, sin nunca parar (Romero, 2007).

   La figura 1 representa las cinco primeras iteraciones de la construcción.

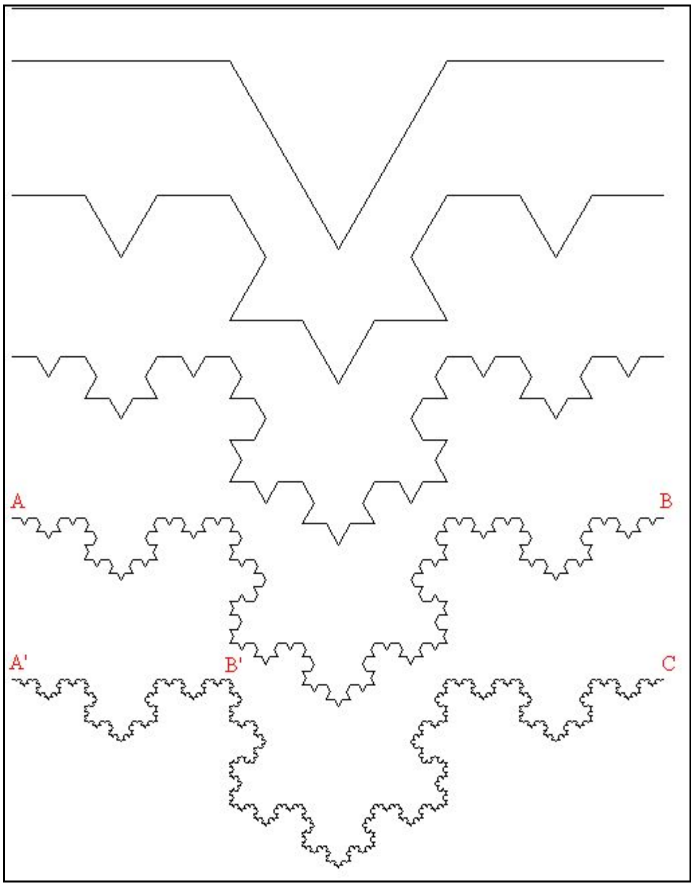

Figura 1.[Imagen de M.Romero Schmidtke] (2004). Fundación para el Software Libre. *Enciclopedia Libre Universal en Español*

2. La isla de Koch

Si se unen tres líneas, formando un triángulo equilátero y se aplican las reglas mencionadas anteriormente, se obtiene la isla de Koch o "el copo de nieve", como también es conocido este fractal.

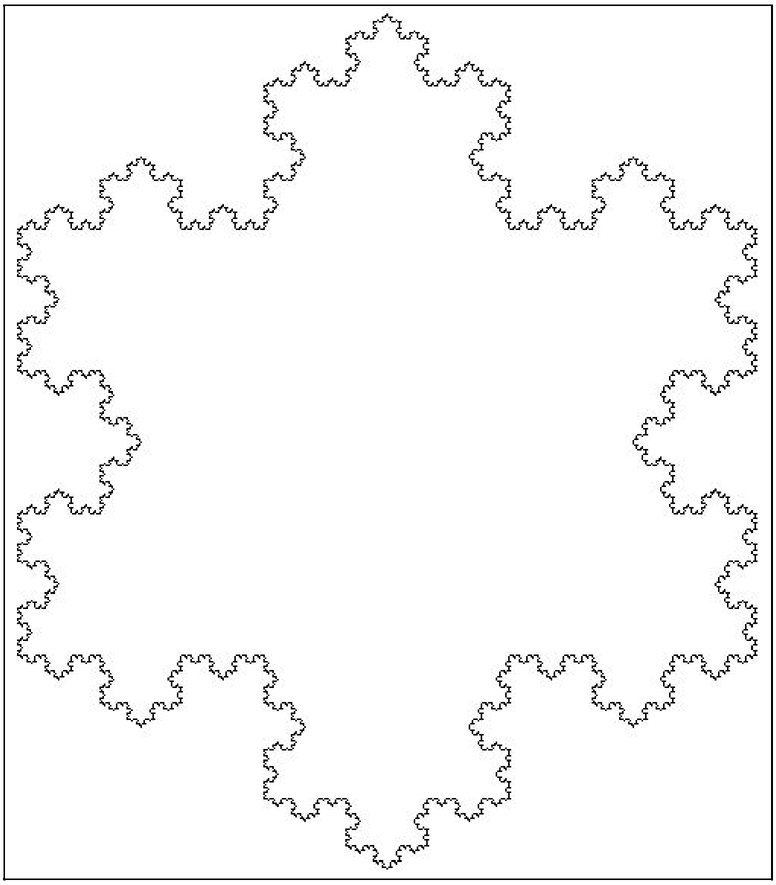

Figura 2. [Imagen de M.Romero Schmidtke] (2004). Fundación para el Software Libre. *Enciclopedia Libre Universal en Español*

3. El triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1962), construyó este triángulo en 1919.

A continuación, Aranda (s.f) describe los pasos para construir dicho fractal: se parte de un triángulo equilátero, uniendo los puntos medios de cada lado y se elimina el triángulo interior resultante. De igual modo, se procede con cada uno de los triángulos que quedan en la figura, continuando indefinidamente.

La figura 3 representa las seis primeras iteraciones de la construcción.

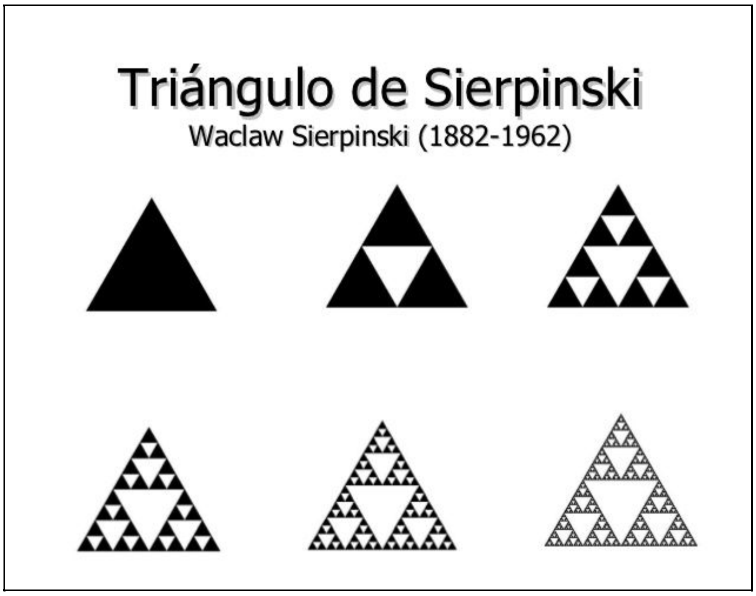

Figura 3. [Imagen de Velasco, Carlos]. (2007). Teoría del caos, geometría fractal y aplicaciones (p.19). *Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Colombia.* Recuperado de: http://es.slideshare.net/pervys/conferenciafractales

4. La alfombra de Sierpinski
   Este fractal fue publicado en 1916 por el matemático de origen polaco Waclaw Sierpinski (Sierpinski en Rodríguez, Crespo y Jiménez, 2015).

   La construcción de este fractal se define de forma recursiva, siguiendo los siguientes pasos: Primero, se tiene un cuadrado y se divide en nueve cuadrados iguales, eliminando el de la mitad. Se vuelve aplicar el paso anterior a los ocho cuadrados restantes.

En la figura 4 se puede observar las primeras cinco iteraciones.

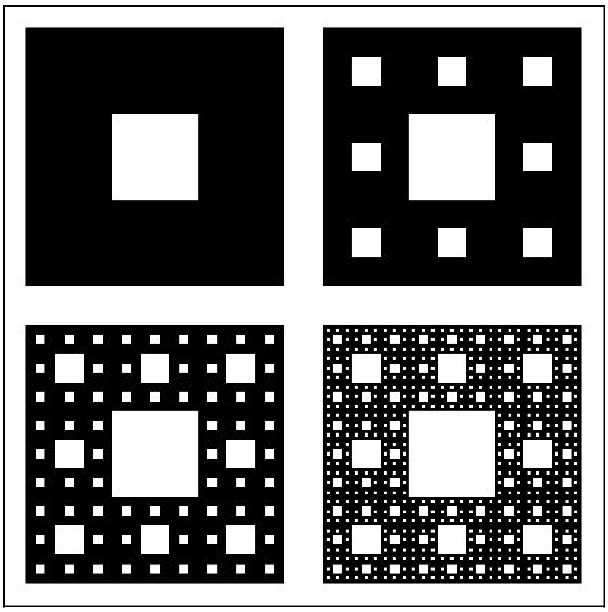

Figura 4. [Imagen de Rodríguez et al]. (2015). Proyecto Alfombra de Sierpinski, (p.3). *Universidad de Almería, España.*

En la actualidad, sin embargo, el material didáctico para el aprendizaje de la recurrencia es nulo, ya que no se cuenta con herramientas en las que los estudiantes puedan experimentar y visualizar el comportamiento matemático que presentan los ejercicios que están analizando. Además, se tiene precisamente que la principal dificultad que tienen los estudiantes a la hora de enfrentar problemas relacionados con la recurrencia es la abstracción.

En este proceso de investigación, se han buscado nuevas formas de representación del conocimiento de matemáticas para el aprendizaje a partir de la creación de un software que permite inventar y adaptar propuestas que promueven la didáctica y el ejercitamiento de solución de problemas recurrentes.

Lo que se ha observado es que el desarrollo de esta competencia ha evolucionado a través de la exposición del estudiante con diversos problemas de esta naturaleza, o sea, aprenden mediante el planteamiento de problemas que les permite captar patrones y así plantear soluciones.

De esta manera, se presenta una serie de ejercicios con un alto nivel visual, donde los estudiantes pueden interactuar con ellos y aprender de una manera más lúdica los conceptos básicos relacionados con la recurrencia.

Para ello, en este artículo se da continuidad a la primera parte de este proyecto que fue desarrollada por los estudiantes Carlos Jerson Angulo y Diego Yesid Callejas, Ingenieros de Sistemas, de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

III. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este proyecto inicialmente se llevó a cabo una recopilación de información sobre los diferentes métodos de enseñanza y ejercicios de recurrencia que se encuentran en diferentes materiales guía.

Luego se escogieron algunos problemas de naturaleza fractal, problemas clásicos de recurrencia lineal, ejercicios de identificación de patrones y de interacción con secuencias numéricas, que sirvieron de guía para la construcción del ambiente en Wolfram Mathematica, un programa de álgebra computacional utilizado en muchos campos científicos.

El ambiente se construyó en módulos y tiene la particularidad de que permite proponer problemas cada vez diferentes, buscando que el estudiante tenga cada vez mayor protagonismo a través de la experimentación y además obtenga una retroalimentación con la solución correspondiente.

De esta manera, los módulos son alimentados con más ejercicios de igual o mayor alcance visual. El ambiente se describe a continuación.

IV. PROPUESTA

El ambiente se compone por tres módulos que han sido definidos de tal manera que los aprendices puedan llevar un proceso de estudio de manera escalonada, es decir, que vayan desarrollando habilidades de abstracción progresivamente y al final, tengan la capacidad de solucionar de una forma más sencilla y rápida dichos problemas.

El primer módulo es el de aprendizaje, donde se introduce al estudiante a este contexto mediante ejemplos y analogías. En esta sección los estudiantes podrán encontrar la relación que presenta la recurrencia con nuestro entorno (Ej. fractales).

Figura 5. Sección del libro interactivo donde se introduce al usuario sobre algunos conceptos de recurrencia.

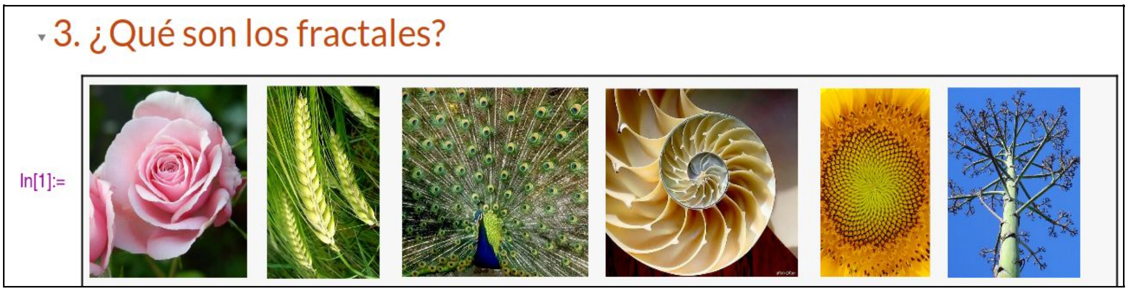

Figura 6. Sección que expone varios fenómenos naturales que tienen naturaleza recurrente, en otras palabras, son denominados como fractales. Se da una breve explicación de lo que son y cómo se generan.

El segundo módulo se relaciona con la experimentación y conjetura de diferentes ejercicios, donde el estudiante tiene la posibilidad de observar el comportamiento de cada uno y así mismo asociarlo con lo que manifiesta la teoría.

Este módulo presenta los ejercicios no solamente de forma visual sino también con un componente dinámico que permite interactuar y observar diferentes situaciones que serían imposibles de encontrar en un libro o plasmados en un tablero de salón de clase al tratarse de manera instantánea.

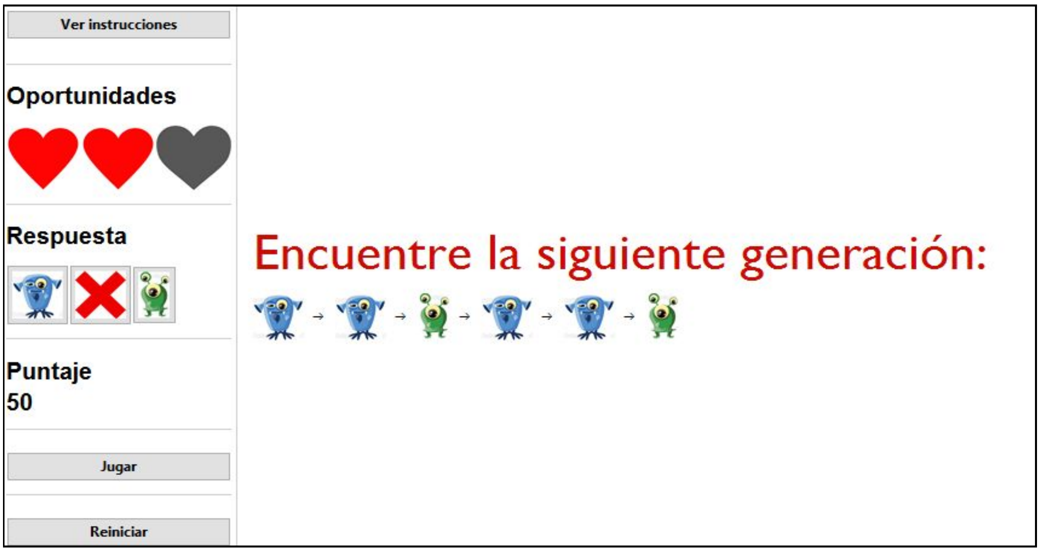

Figura 7. Ejemplo de iteración donde se busca que el usuario, a través de una secuencia de bacterias generadas automáticamente por el módulo, encuentre la siguiente generación de las mismas.

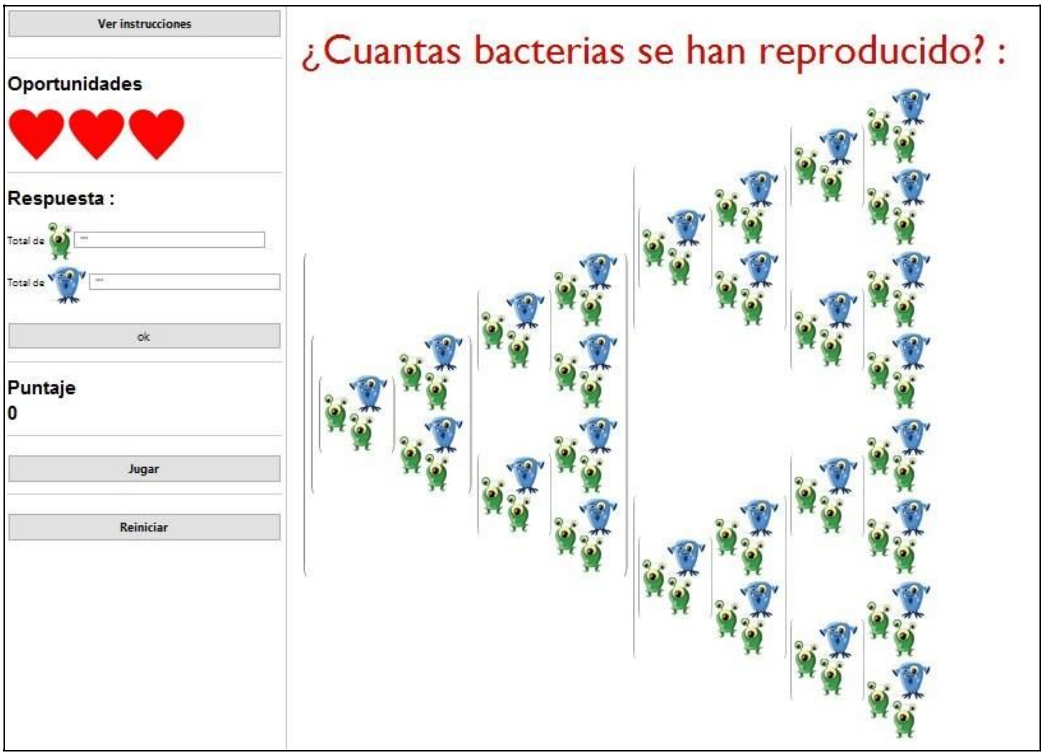

Figura 8. En este módulo el estudiante debe encontrar el total de bacterias (o una en específico), sin necesidad de contarlas, solamente identificando el patrón con las que han sido creadas.

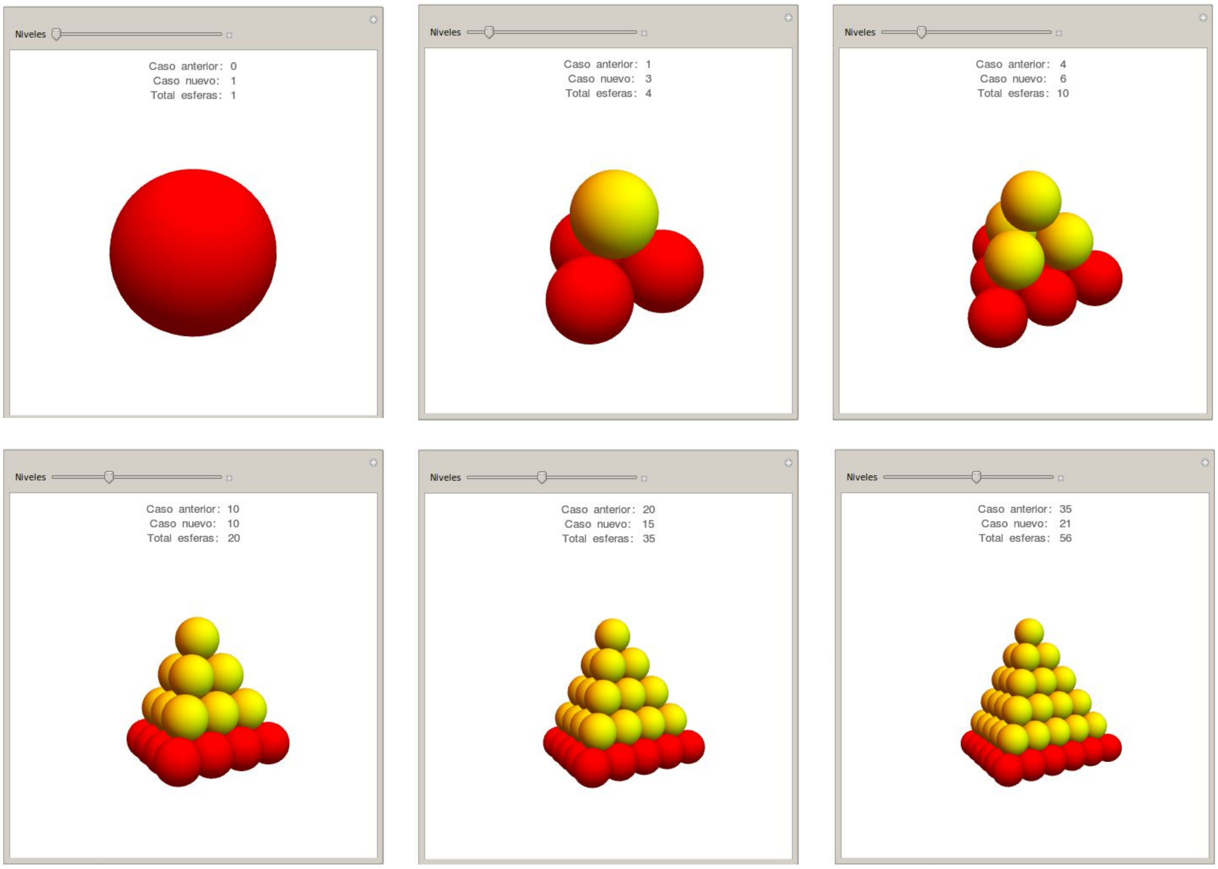

Figura 9. Este módulo muestra al usuario de forma gráfica y dinámica, el comportamiento de los números triangulares a medida que se va iterando. Recursivamente también muestra la cantidad de esferas que se van generando mientras se itera. La pirámide amarilla representa el caso n-1 y la capa roja, la nueva situación, es decir, el caso n, que sumándolos, da el total de términos calculados.

El último módulo es el de evaluación, donde los estudiantes ponen a prueba las habilidades adquiridas.

Este módulo, permite al docente no sólo evaluar el desarrollo de sus alumnos sino que también posibilita a los estudiantes ver el progreso que han tenido y seguir autoevaluando sus conocimientos a medida que enfrenten los anteriores módulos. Aquí se muestran diferentes tipos de ejercicios como los visuales y las calculadoras recurrentes, que proponen problemas diferentes y retroalimentan dando la solución correspondiente.

El módulo busca en particular, que los estudiantes olviden la costumbre de mecanizar el proceso y tengan que pensar en un modelo que sirva para hallar la solución al problema.

Es importante mencionar además, que la forma en que este módulo califica las habilidades de los estudiantes está expresado en modo de juego, es decir, a medida que el estudiante va enfrentando problemas y acertando en el resultado, obtiene más puntaje.

Los usuarios cuentan con tres oportunidades y el juego finaliza cuando éstas se agotan. El objetivo es que solucionen gran cantidad de problemas y obtengan puntos; esto hace más sencilla la labor del docente y además, incita al estudiante a retarse cada vez más en este campo.

Al final, se busca que el estudiante pueda abstraer los ejercicios y los defina en un lenguaje formal.

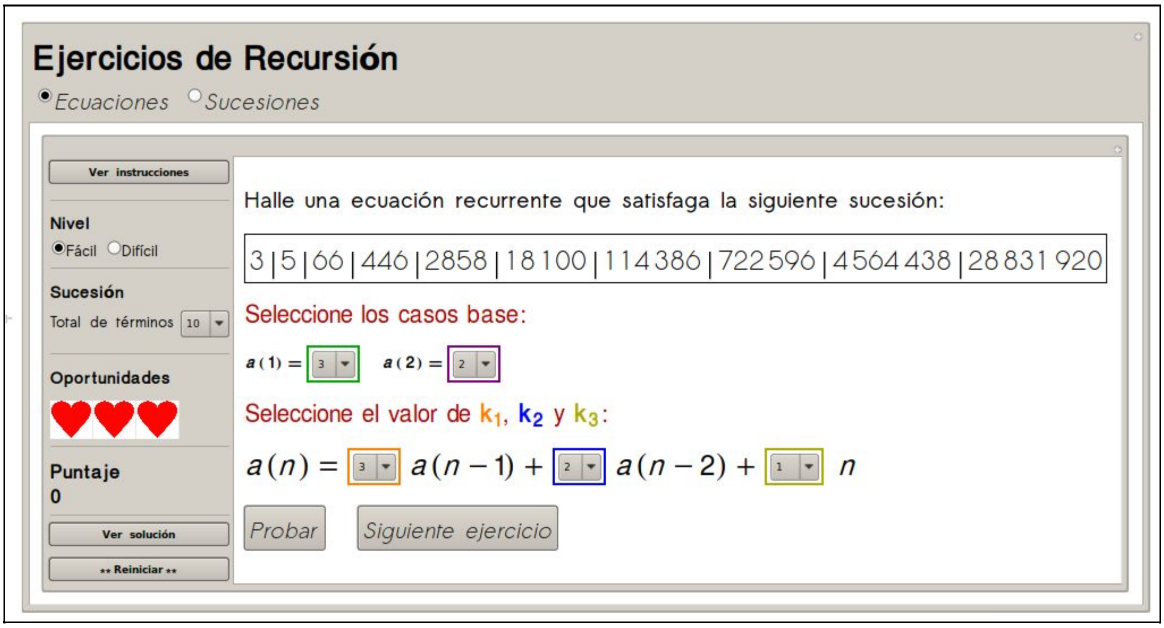

Figura 10. Dada una secuencia numérica, el estudiante debe en primer lugar, identificar el patrón de la misma. Después, debe encontrar los casos base y por último hallar el valor de los coeficientes k_1, k_2 y k_3, términos que harán que la ecuación satisfaga la sucesión.

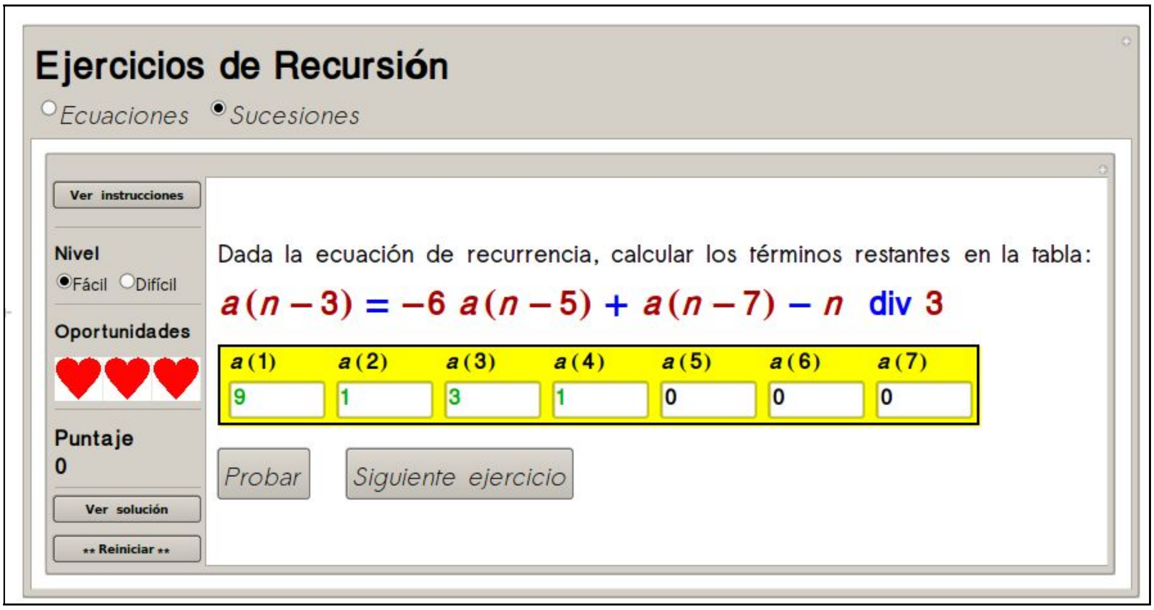

Figura 11. Este caso es lo contrario al presentado en la Figura 10. Dada una ecuación de recurrencia, el estudiante debe hallar la sucesión que ésta genera. Los casos base son dados automáticamente por el módulo y el estudiante, apoyándose en ellos, debe buscar los demás términos hasta completar la tabla.

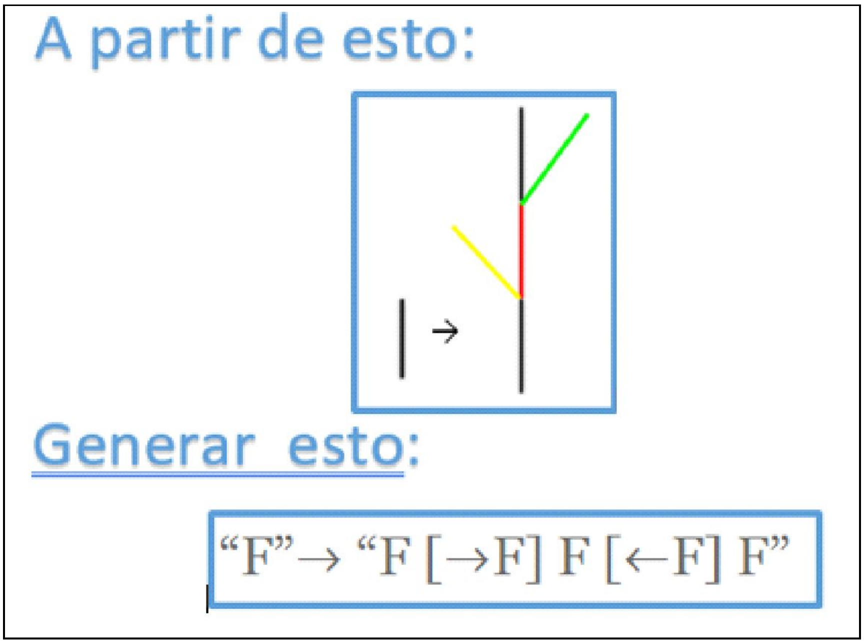

Figura 12. Este módulo se enfoca en los fractales en forma de árboles, en donde el estudiante puede especificar con un lenguaje formal, las reglas con las que ha sido creado el mismo.

V. CONCLUSIONES

Conrad Wolfram manifiesta que "si no se cambia la manera de dar las clases, las matemáticas seguirán siendo aburridas y poco efectivas" (Torres, 2016).

La tecnología, por su parte, tiene cada vez un peso más importante no solamente en la sociedad, sino en las altas disciplinas como la Inteligencia Artificial y el Data Science que requieren un alto dominio de métodos recurrentes para la solución de problemas.

En este sentido, se hace necesario trabajar en la dirección de repensar las metodologías de aprendizaje de los estudiantes enfocándose especialmente en la utilidad y el impacto que puede tener la aplicación de ésta técnica.

La herramienta desarrollada en el presente documento busca hacer un aporte en este sentido permitiendo que la misma pueda ser utilizada por docentes y estudiantes de diferentes carreras e incluso diferentes niveles y modalidades educativas (colegios, institutos técnicos y tecnológicos).

En los colegios puede ser primordial para introducir a los alumnos en este campo desde temprana edad y conseguir que se "enganchen" con las matemáticas, en este caso, con los temas de la recurrencia, ofreciendo un método nuevo y personalizado donde los estudiantes puedan pensar creativamente y dirigir sus esfuerzos de investigación hacia un objetivo claro.

REFERENCIAS

- TORRES, A (25 de abril, 2016). Los alumnos que huían de las matemáticas. *El País.* Sitio web: http://economia.elpais.com/economia/2016/04/24/actualidad/1461527206_970734.html

- RODRÍGUEZ H, DANIEL (29 de julio, 2009). ¿Qué es la recursividad? ¿Qué es la recursividad? ¿Qué es la recursividad?... *Libertad digital Internet*. Sitio web: http://www.libertaddigital.com/internet/que-es-la-recursividad-que-es-la-recursividad-que-es-la-recursividad-1276366373/

- Definición ABC (2007-2016). *Diccionario Web*. Recuperado de: http://www.definicionabc.com/comunicacion/recursividad.php

- VALLEJO, OSCAR (s.f). Tema VII: Recursividad. *Universidad Nacional del Nordeste, Argentina.* [diapositivas de Powerpoint]. Sitio web: http://exa.unne.edu.ar/informatica/programacion1/public_html/archivos/recursividad_1.pdf

- Recursión, ciencias de computación. (1 de diciembre, 2016). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 15 de diciembre, 2016. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Recursi%C3%B3n_(ciencias_de_computaci%C3%B3n)

- RAMIREZ, MAYKEL Y ESTRADA, ALEJANDRO (s.f). Recursividad. *Colegio Universitario Francisco de Miranda, Venezuela.* Sitio web: https://es.scribd.com/doc/23026343/RECURSIVIDAD

- REYES, MIGUEL (s.f). Fractales. *Universidad Politécnica de Madrid.* Sitio web: https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionMadrid2009/fractales.pdf

- CABALLERO, RAFAEL (s.f). Caos y fractales. *Universidad Complutense Madrid, España.* [diapositivas de PowerPoint]. Sitio web: http://gpd.sip.ucm.es/rafa/docencia/md/fractales/fractal.pdf

- CARENA, MARILINA (11 de octubre, 2013). Fractales: la belleza de la matemática de la naturaleza. *Universidad Nacional del Litoral, Argentina.* Sitio web: http://www.unl.edu.ar/noticias/leer/14930/Fractales_la_belleza_de_la_matematica_de_la_naturaleza.html#.WFXPcXUrLDF

- APAZA, GAVINO Y QUISPE (2015). Aplicación de la relación de recurrencia a fractales y la geometría una combinación productiva. [Trabajo de investigación]. *Universidad tecnológica del Perú, Perú.* Recuperado de: http://documents.mx/documents/trabajo-final-de-discretas.html

- ROMERO, M. (2007). Copo de nieve de Koch. *Enciclopedia Libre Universal en Español.* Sitio web: http://enciclopedia.us.es/index.php/Copo_de_nieve_de_Koch
- ARANDA, ERNESTO. (s.f). Fractales. *Universidad de Castilla-La Mancha, España.* Recuperado de: http://matematicas.uclm.es/estalmat/sites/matematicas.uclm.es.estalmat/files/files/fractales.pdf
- RODRIGUEZ, CRESPO Y JIMÉNEZ. (2015). Proyecto Alfombra de Sierpinski. *Universidad de Almería, España.* Recuperado de: http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n122.pdf