SOBRE LA COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

Jairo Castrellón Torres

Trabajo de grado para optar el título de Matemático

Director
Ernesto Acosta Gempeler

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Programa de Matemáticas
Bogotá D.C., 2016 - 2

A mi hermano por guiarme en el camino,
a mis profesores por darme las herramientas,
a mi familia por el apoyo,
a mis amigos.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta la construcción detallada, además de los resultados más importantes sobre la cohomología de De Rham, junto a varias de sus aplicaciones más estudiadas en las últimas décadas en el área de la topología algebraica. La profundización en este tema, surge del estudio que se realizó de las formas diferenciales y de los espacios vectoriales en el curso de geometría diferencial durante el segundo semestre de 2015, así como también, de un interés particular en ahondar en los problemas que fueron objeto de estudio en áreas del análisis vectorial y el álgebra. La forma en que se construye la cohomología de De Rham en este documento es basada en el trabajo hecho en [1], realizandolo a un nivel mas detallado y brindando los ejemplos necesarios para que sea del completo entendimiento del lector.

El estudio de la cohomología en general, surge en la segunda mitad del siglo XX motivada por la busqueda de invariantes topológicos entre cadenas complejas de espacios vectoriales, es decir, de una colección de espacios vectoriales y aplicaciones lineales entre ellos, se construyen sucesiones a las que se denominarán cadenas complejas, que son el principal objeto de estudio de la cohomología, pues su finalidad es establecer funciones entre cadenas de este tipo, de tal manera que preserven sus características topológicas y así, poder hacer una caracterización algebraica de su topología. Es precisamente este, el trabajo que se realizará en el capítulo 3, dando de esta manera al lector, un panorama general de las propiedades de lo que se quiere construir en los capítulos posteriores.

Como una particularidad del estudio de tales invariantes topológicos, se construye toda la teoría sobre la cohomología de De Rham que, como se mencionó anteriormente, tiene el objetivo de establecer funciones que cumplan dichas propiedades de invarianza entre cadenas complejas, solo que esta vez, los espacios vectoriales sobre los que se trabajará tendrán como elementos aplicaciones lineales con características diferenciales particulares a las que se les denomina “formas diferenciales” y que serán estudiadas en detalle en el capítulo 4.

De ésta manera, se sigue realizando la construcción rigurosa de las cadenas complejas que estudia la cohomología de De Rham, que una vez teniendo bien definidos los elementos de los espacios vectoriales, se hará el estudio a profundidad de las aplicaciones lineales entre estos, de tal forma que satisfaga las condiciones y propiedades estudiadas en el capítulo 3. Ya habiendo definido los elementos sobre los cuales se está trabajando, se enuncia la cohomología de De Rham en el capítulo 5, junto con algunos de sus resultados más importantes en el área de la topología algebraica.

La cohomología de De Rham ha permitido realizar una clasificación de los espacios vectoriales de formas diferenciales en espacios vectoriales reales, mediante isomorfísmos entre sus grupos cohomológicos, de ahí la gran importancia del estudio de toda esta teoría. Algunas de las aplicaciones más reconocidas se dieron gracias a la sucesión de Mayer-Vietoris, que se fundamenta, una vez más, en toda la teoría vista en el capítulo 3. Esta sucesión se estudiará detalladamente en el capítulo 6, y algunas de sus aplicaciones se enunciarán en el capítulo 7, pero para tener una clara visualización de éstas, se puede ver en [1].

Capítulo 2

PRELIMINARES

En este capítulo se proporcionarán unos primeros resultados que serán de vital importancia para el claro desarrollo de los capítulos subsecuentes. Los resultados que se estudiarán en éste capítulo fueron el fundamento principal de este trabajo, y muchos de estos se abarcan en los cursos básicos de álgebra lineal y cálculo vectorial y fueron tomados de los textos [2], [3] y [4].

2.1. Nociones topológicas

El estudio que se realiza en el presente trabajo tendrá como objetos, espacios dotados de algunas carácterísticas particulares, y para ello, inicialmente es necesario abordar dichos espacios de una manera general, tal como se presenta en esta primera sección.

Definición 2.1 *El **espacio euclidiano** n-dimensional $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, es el conjunto de todas las n-túplas ordenadas $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ de números reales. Dichas n-tuplas son los **puntos** de $\mathbb{R}^n$.*

Sean $u_1, ..., u_n$, $n \geq 1$, las funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}^n$ por

$$u_1(\boldsymbol{a}) = a_1, ..., u_n(\boldsymbol{a}) = a_n,$$

Estas funciones son llamadas **funciones coordenadas** de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2 *Una **bola abierta** centrada en un punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ de tamaño ρ es el conjunto de la forma*

$$\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \rho\}, \tag{1}$$

donde $\rho > 0$ y d es la métrica definida por

$$d^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2.$$

Un conjunto V de $\mathbb{R}^n$ es una **vecindad** del punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una bola abierta centrada en $\boldsymbol{a}$ contenida en V.

Las vecindades satisfacen las siguientes propiedades

Lema 2.1 *Sean* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *y* U, V *subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$*,*

(a) Si U *es vecindad de* $\mathbf{a}$*, entonces* $\mathbf{a} \in U$*.*

(b) Si U *es una vecindad de* $\mathbf{a}$*, y V es un conjunto tal que* $U \subset V$*, entonces* V *es también una vecindad de* $\mathbf{a}$*.*

(c) Si U *y* V *son vecindades de* $\mathbf{a}$*,* $U \cap V$ *también lo es.*

(d) Si U *es una vecindad de* $\mathbf{a}$*, hay una vecindad* V *de* $\mathbf{a}$ *tal que* $V \subset U$ *y* V *es una vecindad de cada uno de sus puntos.*

Para verificar que las vecindades cumplen las propiedades anteriores basta con aplicar la definición en cada una. Una demostración mas detellada puede encontrarse en [3].

Definición 2.3 *Un* ***espacio topológico*** *es un conjunto* S *tal que, a cada elemento* $a \in S$*, se le asigna una colección de conjuntos que satisfacen las cuatro propiedades del lema anterior. Dichos conjuntos son las vecindades de* a*, y la colección de todas las vecindades definen una* ***topología*** *en* S*.*

Ejemplo 2.1 *El espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio topológico con las vecindades definidas como en la definición 2.2, esta topología es la* ***topología usual*** *de* $\mathbb{R}^n$*. Todo subconjunto* X *de* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio topológico al considerar las vecindades de* $\mathbf{a} \in X$*, como las intersecciones de las vecindades de* $a \in \mathbb{R}^n$ *con* X*. En particular,* S^1*, la esfera unitaria con centro en el origen, es un espacio topológico.*

Definición 2.4 *Sean* $\{S_i\}_{i=1}^n$ *una colección de espacios topológicos no vacíos. El producto cartesiano,*

$$\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$$

es el conjunto de n-túplas ordenadas $(a_1, a_2, ..., a_n)$*, con* $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, ..., a_n \in S_n$ *y puede dotarse de una topología , considerando las vecindades de* $\mathbf{a} \in \prod S_i$ *como* $\prod V_i$ *donde* V_j *es una vecindad de* a_j *en* S_j*. Esta topología es la* ***topología producto****.*

Ejemplo 2.2 *1) Se tienen dos topologías en* $\mathbb{R}^n$*; la usual y la producto. Se puede demostrar que toda vecindad de* $\mathbf{a}$ *con la topología usual, contiene una vecindad de* $\mathbf{a}$ *con la topología producto y viceversa. Esto quiere decir que ambas topologías son iguales.*

2) Si S_1 *es un intervalo en* $\mathbb{R}$*, y* S_2 *es una circunferencia, entonces* $S_1 \times S_2$ *es un cilindro, el cual, es un espacio topológico con la topología producto.*

3) El toro $T = S^1 \times S^1$ *es un espacio topológico con la topología producto.*

2.2. Espacios vectoriales

Algunas definiciones y resultados básicos sobre espacios vectoriales se enunciarán en esta sección, estos serán los objetos principales sobre los cuales se constituye la cohomología.

Se define ahora una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n))$ y $((a'_1, ..., a'_n), (b'_1, ..., b'_n))$ son equivalentes si y solo si $b_j - a_j = b'_j - a'_j$.

Definición 2.5 *Las clases de equivalencias de n-túplas ordenadas de puntos, se denominan* ***vectores****. Las componentes escalares de un vector, son las diferencias* $b_j - a_j$ *de las coordenadasde un par depuntos que lo representan. Dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes escalares correspondientes son iguales.*

Los vectores están determinados por sus componentes escalares, es decir, una n-tupla de números reales determina completamente un vector. Así, $\mathbb{R}^n$ representa, no solo un conjunto de puntos, sino también un conjunto de vectores. Una notación adecuada para los vectores es $[\boldsymbol{a}]$, puesto que se está trabajando con clases de equivalencias, sin embargo, cuando no haya lugar a dudas, se especificará como el vector $\boldsymbol{a}$.

A cada punto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ se le puede asociar el vector representado por la pareja $((0, ..., 0), (a_1, ..., a_n))$. Este vector es el **vector posición** de $\boldsymbol{a}$ y sus componentes escalares son las mismas coordenadas del punto $\boldsymbol{a}$.

Para cualesquiera par de vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ con componentes a_i, b_i respectivamente, con $i = 1, 2, ..., n$, y para cualquier escalar α, se definen las operaciones

- $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$,
- $\alpha\mathbf{a} = \alpha(a_1, ..., a_n) = (\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$,

adición vectorial y multiplicación por escalar, respectivamente. Un **espacio vectorial** V es un conjunto de vectores que, con las operaciones definidas como antes, es cerrado y cumple con las siguientes propiedades:

Sean $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores en V, y α, λ escalares, se tiene entonces,

- Propiedad conmutativa de la adición: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.
- Propiedad asociativa de la adición: $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$.
- Tiene elemento neutro para la adición: existe un vector $\boldsymbol{e} \in V$, tal que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}$.
- Tiene elemento opuesto para la adición: para todo vector $\boldsymbol{a} \in V$, existe $-\boldsymbol{a} \in V$ tal que $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}$.
- Propiedad asociativa de la multiplicación por escalar: $\alpha(\lambda\boldsymbol{a}) = (\alpha\lambda)\boldsymbol{a}$.

- Multiplicación por el neutro escalar: $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.
- Propiedad distributiva de la multiplicación por escalar sobre la adición de vectores: $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$.
- Propiedad distributiva de la multiplicación por escalar sobre la suma de escalares: $(\alpha + \lambda)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{a}$

Definición 2.6 *Para $n \geq 1$, sean $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ vectores de $\mathbb{R}^n$, y $c_1, ..., c_n$, escalares.*

- *La suma $c_1\,\boldsymbol{a}_1 + ... + c_n\,\boldsymbol{a}_n$ se llama la **combinación lineal** de los vectores $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ con coeficientes $c_1, ..., c_n$.*
- *Los vectores $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ son **linealmente independientes** si la única forma en que $c_1\,\boldsymbol{a}_1 + ... + c_n\,\boldsymbol{a}_n = 0$ es que $c_1 = ... = c_n = 0$.*
- *Vectores que no sean linealmente independientes son **linealmente dependientes**.*

2.3. Aplicaciones lineales

Todo el trabajo que se realiza en la cohomología (y en particular en la cohomología de De Rham), es tratar de encontrar aplicaciones lineales que preserven las características topológicas de los espacios, en esta sección, se hará una presentación definiendo y enunciando algunas de las propiedades más importantes de dichas aplicaciones.

Definición 2.7 *Dada una aplicación $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones de valor real $f_1, f_2, ..., f_m$ tales que*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = (f_1(\boldsymbol{p}), f_2(\boldsymbol{p}), ..., f_m(\boldsymbol{p}))$$

*Se llaman las **funciones coordenadas** de $\boldsymbol{F}$. y se escribe*

$$\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, ..., f_m)$$

La aplicación F es de clase C^k $(k \geq 1)$ si $f_1, f_2, ..., f_m$ son continuamente diferenciables, hasta su k-ésima derivada.

Ejemplo 2.3 *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(x, y, z) = (xy, yz, z^2)$. Entonces*

$$F(\boldsymbol{p}) = \big(x(\boldsymbol{p})y(\boldsymbol{p}), y(\boldsymbol{p})z(\boldsymbol{p}), z(\boldsymbol{p})^2\big)$$

Para todo $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.8 *Una aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice que es una **aplicación lineal** de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ si, para todos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vectores y todos α, λ escalares,*

$$F(\alpha\,\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) = \alpha(F(\boldsymbol{a})) + \lambda(F(\boldsymbol{b}))$$

El **Kernel** (o **Núcleo**) de la aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, denotado por $\operatorname{Ker} F$, es el conjunto

$$\operatorname{Ker} F = \{\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, F(\boldsymbol{a}) = 0\}.$$

El siguiente enunciado, resultará bastante útil, sobretodo para definir las aplicaciones sobre las cuales se trabajarán, aunque acá se plantea como una definición, sus condiciones son fácilmente verificables.

Definición 2.9 *El conjunto de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, con adición y multiplicación por escalar, definidos por,*

$$(F+G)(\boldsymbol{a}) = F(\boldsymbol{a}) + G(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \in V,$$

$$(cF)(\boldsymbol{a}) = F(c\boldsymbol{a}) \quad \boldsymbol{a} \in V, c \in \mathbb{R}$$

*es el espacio vectorial V^* sobre $\mathbb{R}$, este, es llamado el **espacio dual** de V.*

Se puede mostrar que si un espacio vectorial V tiene base $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, entonces su espacio dual V^* tiene una base $\{F_1, ..., F_n\}$ llamada la **base dual** de la base $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ de V definida por

$$F_j(\boldsymbol{v}_k) = \delta_{jk}$$

donde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j \neq k \end{cases}$$

Definición 2.10 *Una **categoría C** consiste en una colección de objetos y morfismos entre ellos, tal que la composición esta bien definida. Si $f_1 : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ y $g : \boldsymbol{C}_2 \to \boldsymbol{C}_3$, son morfismos, entonces, existe un morfismo $g \circ f : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_3$. Además, se asume que $id_{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ es un morfismo para cada objeto C de $\boldsymbol{C}$.*

Ejemplo 2.4

- *La categoría de conjuntos abiertos en espacios Euclidianos, donde los morfismos son aplicaciones de clase C^∞.*
- *La categoría de espacios vectoriales, donde los morfismos son aplicaciones lineales.*
- *La categoría de grupos abelianos, donde los morfismos son homomorfismos.*

Definición 2.11 *Un **funtor contravariante** $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{V}$ entre dos categorias, asigna a cada objeto C de $\boldsymbol{C}$, un elemento $F(C)$ de $\boldsymbol{V}$, y cada morfismo $f : C_1 \to C_2$ en $\boldsymbol{C}$ a un morfismo $F(f) : F(C_2) \to F(C_1)$ en $\boldsymbol{V}$, tal que*

(1) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

(2) $F(id_C) = id_{F(C)}$.

Así, los funtores son aplicaciones que preservan la estructura entre categorías. Más resultados sobre este tipo de aplicaciones se pueden encontrar en [5].

Ejemplo 2.5 *Sea A un espacio vectorial y $F(C) = \hom(C, A)$, las aplicaciones lineales que de C en A. Para $\phi : C_1 \to C_2$, $\hom(\phi, A) : \hom(C_2, A) \to \hom(C_1, A)$ esta dado por*

$$\hom(\phi, A)(\psi) = \psi \circ \phi.$$

Este es un funtor contravariante en la categoria de espacios vectoriales.

2.4. Diferenciación

Algunos resultados en la diferenciación, serán de gran utilidad a la hora de definir las aplicaciones lineales que se usarán en la cohomología de De Rham, en esta sección presentamos definiciones que permitiran contextualizar el trabajo posterior.

Definición 2.12 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **diferenciable** en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ si hay una aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \frac{|f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{h})|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

La aplicación λ se denota por $Df(\mathbf{a})$ y se llamará la **derivada** de f en a. Se puede verificar que la aplicación λ es única (vease teorema 2.1 en [1]).

Ejemplo 2.6 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \operatorname{sen} x$. Entonces $Df(a, b) = \lambda$ satisface que $\lambda(x, y) = (\cos a) \cdot x$. En efecto,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen}(a) - (\cos a) \cdot h|}{|(h, k)|} = 0.$$

Muchas veces, será conveniente considerar la matríz de $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con respecto a las bases usuales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Esta matríz $m \times n$ es cococida como la **matríz jacobiana** de f en a y denotada por $f'(a)$.
Nótese que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $f'(a)$ es una matríz 1×1 cuya única entrada es simplemente el número denotado por $f'(a)$ en el cálculo elemental.

Por la definición de $Df(a)$ dada anteriormente, se puede demostrar que cumple la regla de la cadena, es decir, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a, y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $f(a)$, entonces, la composición $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en a, y además,

$$D(f \circ g)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$

Algunas propiedades de la derivada aca definida, son:

(I) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función constante, ésto es, si para algún $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ se tiene $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{y}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$Df(a) = 0.$$

(II) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces

$$Df(a) = f.$$

(III) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si cada f_i, con $1 \leq i \leq m$ es diferenciable, y además,

$$Df(a) = (Df_1(a), ..., Df_m(a))$$

Así $f'(a)$ es la matríz $m \times n$ cuya i-ésima fila es $f_i'(a)$.

(IV) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $s(x, y)x + y$, entonces

$$Ds(a, b) = s.$$

(V) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $p(x, y) = x \cdot y$, entonces

$$Dp(a, b)(x, y) = bx + ay$$

Así $p'(a, b) = (b, a)$.

Para demostrar estas propiedades, será suficiente usando la definición dada anteriormente de la derivada por el límite, puede verse la prueba de esto en [6]. De lo anterior, se deduce que, si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son diferenciables en a, entonces

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$
$$D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces

$$D(f/g)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{[g(a)]^2}.$$

Definición 2.13 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^n$, el límite,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

*si existe, se denota por $D_i f(a)$ y se llama la i-ésima **derivada parcial** de f en a.*

Es importante notar que $D_i f(a)$ es la derivada ordinaria de cierta función, de hecho, si $g(x) = f(a_1, ..., x, ..., a_n)$, entonces $D_i f(a) = g'(a_i)$. Esto significa que $D_i f(a)$ es la pendiente de la linea tangente en $(a, f(a))$ a la curva obtenida intersectando la gráfica de f con el plano $x_j = a_i$, $j \neq i$.

Un resultado importante sobre las derivadas parciales, es que si $D_{i,j} f$ y $D_{j,i} f$ son continuas en un conjunto abierto que contiene a a, entonces

$$D_{i,j} f(a) = D_{j,i} f(a).$$

La función $D_{i,j} f$ es la **derivada parcial de segundo orden mixta** de f.

Nótese que $D_i f(x)$ representa la derivada parcial con respecto a la i-ésima componente de x, esto, se escribirá tambien como $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

2.5. Homotopía

Hasta ahora se han visto algunos resultados importantes con los que se trabajarán en lo que resta del trabajo. En esta sección se enunciarán algunas definiciones, que nos permitirá posteriormente, ver las aplicaciónes más relevantes de la cohomología de De Rham. En primera instancia, se dará la definición de homotopía, con algunas de sus características y propiedades para aplicaciones continuas arbitrarias entre espacios topológicos.

Definición 2.14 *Dos aplicaciones continuas $f_0 : X \to Y$ y $f_1 : X \to Y$, entre espacios topológicos, son* ***homotópicas****, si y sólo si, existe una aplicación continua*

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

tal que $F(x, v) = f_v(x)$ para $v = 0, 1$ y para todo $x \in X$.

En otras palabras, dos aplicaciones continuas f_0 y f_1 son homotópicas, si se puede encontrar una familia F de aplicaciones continuas $f_t : X \to Y$ $(0 \leq t \leq 1)$ dadas por $f_t(x) = F(x, t)$, cuya posición inicial sea f_0 y su posición final f_1.

En el caso que las aplicaciones sean homotópicas, se denotará por $f_0 \simeq f_1$, y F se llama una **homotopía** de f_0 a f_1. Se puede verificar que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Un resultado, que será de bastante utilidad, es el siguiente: Sean X, Y y Z espacios topológicos y sean $f_v : X \to Y$ y $g_v : Y \to X$ aplicaciones continuas con $v = 0, 1$. Si $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$ entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.
En efecto, dadas las homotopias F de f_0 a f_1 y G de g_0 a g_1, la homotopía H de $g_0 \circ f_0$ a $g_1 \circ f_1$ puede definirse por $H(x, t) = G(F(x, t), t)$.

Definición 2.15 *Una aplicación continua $f : X \to Y$ es una* ***equivalencia homotópica****, si existe una aplicación continua $g : Y \to X$, tal que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$. La aplicación g es la* ***inversa homotópica*** *de f.*

Dos espacios topológicos X y Y son **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ellos. X es **contraíble** cuando X es homotópicamente homológico a un espacio con un sólo punto. Esto es lo mismo que decir que id_X es homotópico a una aplicación constante.

Ejemplo 2.7 *Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ con la topología inducida por $\mathbb{R}^m$. Si para las aplicaciones continuas $f_v : X \to Y$, $v = 0, 1$, el segmento de línea en $\mathbb{R}^m$ de $f_0(x)$ a $f_1(x)$ está contenido en Y para todo $x \in X$, se define una homotopía $F : X \times [0,1] \to Y$ de f_0 a f_1, por*

$$F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$$

Dos resultados importantes en la homotopía, son los siguientes: Si U, V son conjuntos abiertos en espacios euclidianos, entonces

I. Cada aplicación continua $h : U \to V$ es homotópica a una aplicación de clase C^∞.

II. Si dos aplicaciones de clase C^∞ $f_v : U \to V$, $v = 0, 1$ son homotópicas, entonces existe una aplicación de clase C^∞ $F : U\mathbb{R} \to V$ con $F(x, v) = f_v(x)$ para $v = 0, 1$ y toda $x \in U$.

Para ver la demostración de estos resultados, vease [1].

2.6. Partición de la Unidad

Un resultado que será de vital importancia a la hora de ver algunas de las aplicaciones de la cohomología de De Rham, es la partición de la unidad, en esta sección vamos a enunciarlo, para tener claro de que se trata, pero su demostracion se puede encontrar en el teorema 3.11 en [6].

Teorema 2.1 (Partición de la unidad) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{O}$ un cubrimiento de A. Entonces existe una colección Φ de funciones φ de clase C^∞ definidas en un conjunto abierto que contiene a A, con las siguientes propiedades:*

(1) Para cada $x \in A$ se tiene que $0 \leq \varphi \leq 1$.

(2) Para cada $x \in A$ hay un conjunto abierto V que contiene a x tal que finitos $\varphi \in \Phi$ son 0 en V.

(3) Para cada $x \in A$ se tiene que

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1.$$

Por (2), para cada x esta suma es finita en algún conjunto abierto que contiene a x.

(4) Para cada $\varphi \in \Phi$ existe un conjunto abierto U en $\mathcal{O}$ tal que $\varphi = 0$ fuera de algún conjunto cerrado contenido en U.

Una colección Φ que satisface de (1) a (3) se llama una C^∞ **partición de la unidad** para A. Si además Φ satisface (4) es **subordinada** al cubrimiento $\mathcal{O}$.

Capítulo 3

CADENAS COMPLEJAS Y SU COHOMOLOGÍA

Una teoría general de la cohomología se presentará en este capítulo. Tomando espacios vectoriales y aplicaciones lineales entre ellos, se realizará la construcción de cadenas que permitan deducir propiedades importantes sobre los objetos que se trabajan. El objetivo principal es establecer aplicaciones que preserven las propiedades topológicas de los espacios sobre los cuales se trabajará, y de allí se obtendrá la noción general de cohomología. El trabajo hecho en este capítulo, servirá de guía para la construcción de la cohomología de De Rham.

3.1. Cadenas exactas

Para espacios vectoriales, se definirán cadenas exactas y se verán algunos resultados importantes que se deducen de las propiedades de las transformaciones lineales que definen dichas cadenas.

Definición 3.1 *Sean A, B y C, espacios vectoriales, y f, g transformaciones lineales. Una sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales,*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es ***exacta*** *cuando cumple que* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ *donde*

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) : a \in A\}$$

es la imágen de f y,

$$\operatorname{Ker} g = \{b \in B : g(b) = 0\}$$

es el núcleo de g.

Se puede observar que $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta, precisamente cuando f es sobreyectiva. Así mismo, $0 \longrightarrow B \xrightarrow{g} C$ es exacta cuando g es inyectiva. Aquí, 0 es el espacio vectorial unitario.

Definición 3.2 *Una sucesión $A^* = \{A^i, d^i\}$ de espacios vectoriales A^i y aplicaciones lineales d^i*

$$... \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \longrightarrow ... \tag{1}$$

*es una **cadena compleja**, si se cumple que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ para todo i.*

Una cadena compleja es exacta, si se tiene que

$$\operatorname{Im} d^{i-1} = \operatorname{Ker} d^i$$

para todo i.

Definición 3.3 *Una sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales es **exacta corta**, si es de la forma*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Esto es equivalente a requerir que f sea inyectiva, g sobreyectiva y que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

Definición 3.4 *La **suma directa** de los espacios vectoriales A y B es el espacio vectorial*

$$A \oplus B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \tag{3}$$

junto con las operaciones

- $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

Como observación, se puede verificar que si $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son bases de A y B respectivamente, entonces $\{(a_i, 0), (0, b_j)\}$ es una base de $A \oplus B$. En particular:

$$\dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B$$

Lema 3.1 *Sea*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Una sucesión exacta corta de espacios vectoriales. Si A y C son de dimensión finita, entonces B también lo es y además, $B \cong A \oplus C$.

Demostración: Sean $\{a_i\}$ y $\{c_j\}$ bases de A y C respectivamente. Por ser (2) una sucesión exacta corta, g es sobreyectiva, así, existe $b_j \in B$ con $g(b_j) = c_j$.

Veamos ahora que $\{f(a_i), b_j\}$ es una base de B. En efecto, para $b \in B$ ya que $\{c_j\}$ es base de C, tenemos que

$$g(b) = \sum_j \lambda_j c_j \tag{4}$$

y además

$$\begin{array}{ll} & g\left(b-\sum_j \lambda_j b_j\right) \\ = & \quad \langle \text{ linealidad de } g \ \rangle \\ & g(b)-g\left(\sum_j \lambda_j b_j\right) \\ = & \quad \langle \ g \text{ es sobreyectiva } \rangle \\ & \sum_j \lambda_j c_j - \sum_j \lambda_j c_j \\ = & \quad \langle \text{ Aritmética } \rangle \\ & 0 \end{array}$$

así, $b-\sum_j \lambda_j b_j \in \operatorname{Ker} g$.

Nuevamente, por ser (2) exacta corta, $\ker g = \operatorname{Im} f$, entonces existe $a=\sum \mu_i a_i \in A$ tal que

$$\begin{array}{ll} & b-\sum_j \lambda_j b_j \\ = & \quad \langle \ b-\sum \lambda_j b_j \in \operatorname{Im} f \ \rangle \\ & f(a) \\ = & \quad \langle \ \{a_i\} \text{ es base de } A \ \rangle \\ & f\left(\sum_i \mu_i a_i\right) \\ = & \quad \langle \ f \text{ es lineal } \rangle \\ & \sum_i \mu_i f(a_i). \end{array}$$

Así,

$$b=\sum_i \mu_i f\left(a_i\right)+\sum_j \lambda_j b_j. \tag{5}$$

Por lo anterior, cualquier $b \in B$ se puede escribir como combinación lineal de $\{b_j, f(a_i)\}$.

Veamos ahora, que $\{b_j, f(a_i)\}$ es linealmente independiente. Supongamos que $\sum_i \mu_i f\left(a_i\right)+\sum_j \lambda_j b_j=0$, se tiene entonces que

$$\begin{array}{ll} & \sum_i \mu_i f\left(a_i\right)+\sum_j \lambda_j b_j=0 \\ \Rightarrow & \quad \langle \text{ aplicando } g \ \rangle \\ & g\left(\sum_i \mu_i f\left(a_i\right)+\sum_j \lambda_j b_j\right)=g(0) \\ \equiv & \quad \langle \text{ Linealidad de } g \ \rangle \\ & \sum_i \mu_i g(f\left(a_i\right))+\sum_j \lambda_j g(b_j)=0 \\ \equiv & \quad \langle \ \operatorname{Ker} g=\operatorname{Im} f \Rightarrow \sum_i \mu_i g(f\left(a_i\right))=0 \ \rangle \\ & \sum_j \lambda_j g(b_j)=0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\equiv \quad & \langle\ g(b_j) = c_j\ \rangle \\
& \textstyle\sum_j \lambda_j c_j = 0 \\
\equiv \quad & \langle\ \{c_j\} \text{ es linealmente independiente } \rangle \\
& \lambda_j = 0 \qquad \text{para todo } \ j.
\end{aligned}
$$

Asi, se tiene que $\sum_i \mu_i f\,(a_i) = 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
& f\left(\textstyle\sum_i \mu_i a_i\right) = 0 \\
\equiv \quad & \langle\ f \text{ es inyectiva } \rangle \\
& \textstyle\sum_i \mu_i a_i = 0 \\
\equiv \quad & \langle\ \{a_i\} \text{ es linealmente independiente } \rangle \\
& \mu_i = 0 \qquad \text{para todo } \ i
\end{aligned}
$$

Entonces B es de dimensión finita.

Por último, la función $\Phi : B \to A \oplus C$ definida por

$$\Phi(b) = \left(\sum_i \mu_i a_i, \sum_j \lambda_j c_j\right),$$

donde los coeficientes están definidos por (5), es un isomorfísmo. **Q.E.D**

3.2. Espacio de cohomología

En la sección anterior se definieron las sucesiónes de cadenas de espacios vectoriales y algunas propiedades de las aplicaciones lineales que conformaban dichas cadenas. A continuación, con base en lo anterior, se definirán los espacios de cohomología, así como las aplicaciones lineales entre ellos, y se realizará un trabajo especial sobre estas aplicaciones, para de esta manera, formar la cadena homológica entre dichos espacios cohomológicos.

Definición 3.5 *Para una cadena compleja*

$$A^* = \{... \longrightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \longrightarrow ...\}$$

definimos el espacio vectorial $H^p(A^*)$ por

$$H^p(A^*) = \frac{\operatorname{Ker} d^p}{\operatorname{Im} d^{p-1}}. \tag{6}$$

*$H^p(A^*)$ es el **p-ésimo espacio cohomológico** de A^*.*

- Un elemento de A^p es **cerrado**, o **p-cíclo**, si pertenece a $\operatorname{Ker} d^p$.
- Un elementos de A^p es **exacto**, o **p-cota**, si pertenece a $\operatorname{Im} d^{p-1}$.

- Los elementos de $H^p(A^*)$ son **clases de cohomología**.

Definición 3.6 *Una* ***aplicación cadena*** $f : A^* \longrightarrow B^*$ *entre cadenas complejas, consiste en una familia* $f^p : A^p \longrightarrow B^p$ *de aplicaciones lineales, que satisfacen* $d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$.

Se pueden ilustrar dichas aplicaciones, por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "d_B^p"] & B^{p+1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd} \tag{7}$$

Lema 3.2 *Una aplicación cadena* $f : A^* \longrightarrow B^*$ *induce una aplicación lineal entre los espacios cohomológicos*

$$f^* : H^p(A^*) \longrightarrow H^p(B^*)$$

para todo p.

Demostración: Sea $[a] \in H^p(A^*)$, es decir,

$$[a] = a + \operatorname{Im} d_A^{p-1}$$

con $a \in \operatorname{Ker} d_A^p$. Definimos

$$f^*([a]) = [f^p(a)].$$

Veamos que f esta bien definida.

I) $f^p(a)$ debe pertenecer a $\operatorname{Ker} d_B^p$. En efecto,

$$\begin{array}{ll} & d_B^p(f^p(a)) \\ = & \quad \langle\ d_b^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p\ \rangle \\ & f^{p+1}(d_A^p(a)) \\ = & \quad \langle\ a \in \operatorname{Ker} d_A^p\ \rangle \\ & f^{p+1}(0) \\ = & \quad \langle\ f^{p+1} \text{ es lineal}\ \rangle \\ & 0 \end{array}$$

II) $[f^p(a)]$ debe ser independiente de la escogencia que se haga del representante de $[a]$.

$$
\begin{array}{cl}
 & [a_1] = [a_2] \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de clase de equivalencia } \rangle \\
 & a_1 - a_2 \in \operatorname{Im} d_A^{p-1} \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} d_A^{p-1} \rangle \\
 & a_1 - a_2 = d_A^{p-1}(x) \ \text{ para algún } \ x \in A^{p-1} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ evaluando } f \ \rangle \\
 & f^p(a_1 - a_2) = f^p(d_A^{p-1}(x)) \\
\equiv & \quad \langle \ f^p \circ d_A^{p-1} = d_B^{p-1} \circ f^{p-1} \ \rangle \\
 & f^p(a_1) - f^p(a_2) = d_B^{p-1}(f^{p-1}(x)) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} d_B^{p-1} \rangle \\
 & f^p(a_1) - f^p(a_2) \in \operatorname{Im} d_B^{p-1} \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de clase de equivalencia } \rangle \\
 & [f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]
\end{array}
$$

Q.E.D

Definición 3.7 *Una* ***sucesión exacta corta de cadenas complejas***

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

consiste en asignaciones cadena f y g tal que

$$0 \longrightarrow A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \longrightarrow 0$$

es exacta para cada p.

Lema 3.3 *Sea*

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de cadenas complejas. Entonces, la sucesión

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$

es exacta para todo p.

Demostración: Se tiene que probar que $\operatorname{Im} f^* = \operatorname{Ker} g^*$, además que f^* sea inyectiva y g^* sobreyectiva.

I) Se tiene que $\operatorname{Im} f^* \subseteq \operatorname{Ker} g^*$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
& [b] \in \operatorname{Im} f^* \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} \rangle \\
& [b] = f^*[a] \ \text{ para algún } \ [a] \in H^p(A^*) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } f^* \rangle \\
& [b] = [f^p(a)] \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ evaluando } g^* \rangle \\
& g^*[b] = g^*[f^p(a)] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } g^* \rangle \\
& g^*[b] = [g^p(f^p(a))] \\
\equiv \quad & \langle \ g^p \circ f^p = 0 \text{ por hipótesis } \rangle \\
& g^*[b] = [0] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \operatorname{Ker} \rangle \\
& [b] \in \operatorname{Ker} g^*.
\end{aligned}
$$

II) Se tiene que $\operatorname{Ker} g^* \subseteq \operatorname{Im} f^*$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
& [b] \in \operatorname{Ker} g^* \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \operatorname{Ker} \rangle \\
& g^*[b] = [0] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } g^* \rangle \\
& [g^p(b)] = [0] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de clase de equivalencia } \rangle \\
& [g^p(b)] \in \operatorname{Im} d_C^{p-1} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} \rangle \\
& g^p(b) = d_C^{p-1}(c) \\
\equiv \quad & \langle \ g^{p-1} \text{ es sobreyectiva: } c = g^{p-1}(b_1) \ \rangle \\
& g^p(b) = d_C^{p-1}(g^{p-1}(b_1)) \\
\equiv \quad & \langle \ d_C^{p-1} \circ g^{p-1} = g^p \circ d_B^{p-1} \rangle \\
& g^p(b) = g^p(d_B^{p-1}(b_1)) \\
\equiv \quad & \langle \ g^p \text{ es lineal } \rangle \\
& g^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \operatorname{Ker} \rangle \\
& b - d_B^{p-1}(b_1) \in \operatorname{Ker} g^p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\equiv \quad & \langle\ \operatorname{Ker} g^p = \operatorname{Im} f^p, \text{ definición de } \operatorname{Im}\ \rangle \\
& b - d_B^{p-1}(b_1) = f^p(a) \\
\Rightarrow \quad & \langle\ \text{Tomando clases}\ \rangle \\
& [b - d_B^{p-1}(b_1)] = [f^p(a)] \\
\equiv \quad & \langle\ \text{Definición de } f^*\ \rangle \\
& [b] = f^*[a] \\
\equiv \quad & \langle\ \text{Definición de } \operatorname{Im}\ \rangle \\
& [b] \in \operatorname{Im} f^*
\end{aligned}
$$

Así, por $I)$ y $II)$ se tiene que $\operatorname{Ker} g^* = \operatorname{Im} f^*$

III) g^* es sobreyectiva. En efecto, sea $[c] \in H^p(C)$, como g^p es sobreyectiva, existe $b \in B^p$ tal que $c = g^p(b)$, entonces $[c] = [g^p(b)] = g^*[b]$.

IV) f^* es inyectiva, pues, si $f^*[a_1] = f^*[a_2]$ se tiene que $[f^p(a_1)] = [f^p(a_2)]$, y como f^p es inyectiva, se tiene que $[a_1] = [a_2]$

Por I), II), III) y IV) el lema queda demostrado. **Q.E.D**

Definición 3.8 *Para una sucesión exacta corta de cadenas complejas*

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

$\partial^* : H^p(C^*) \longrightarrow H^p(A^*)$, *es una aplicación lineal definida por*

$$\partial^*([c]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c)))]. \tag{8}$$

Para ver más claramente como funciona la aplicación ∂^*, se tiene el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f^p"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"] \arrow[d, "g^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "d_B^p"] \arrow[d, "g^p"] & B^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "g^{p+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C^{p-1} \arrow[r, "d_C^{p-1}"] \arrow[uur, dash] & C^p \arrow[r, "d_C^p"] \arrow[uur, dash] & C^{p+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

Donde las flechas diagonales, representan la aplicación ∂^*.

Es preciso aclarar que la aplicación lineal ∂^* esta definida sobre los espacios de cohomología $H^p(C^*)$, sino que por efectos de practicidad en la visualización de esta aplicación, se ha dibujado en el diagrama, como si fuera una aplicación entre los espacios vectoriales.

Veamos que ∂^* esta bien definida, para esto, será necesario demostrar las siguientes afirmaciones:

I) Si $g^p(b) = c$ y $d^p_C(c) = 0$ entonces $d^p_B(b) \in \operatorname{Im} f^{p+1}$.

II) Si $f^{p+1}(a) = d^p_B(b)$ entonces $d^{p+1}_A(a) = 0$.

III) Si $g^p(b_1) = g^p(b_2) = c$ y $f^{p+1}(a) = d^p_B(b_1)$ entonces $[a] \in H^{p+1}(A^*)$.

Estas expresan que para cada $b \in (g^p)^{-1}(c)$ se tiene $d^p_B(b) \in \operatorname{Im} f^{p+1}$, la unicidad del $a \in A^{p+1}$ tal que $f^{p+1}(a) = d^p_B(b)$ es un (p+1)-cíclo. Finalmente que $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ es independiente de la escogencia de $b \in (g^p)^{-1}(c)$.

Demostración:

I) Se tiene, pues, por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{aligned} g^{p+1} d^p_B(b) &= d^p_C(g^p(b)) \\ &= d^p_C(c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y ya que $\operatorname{Ker} g^{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+1}$, se tiene que $d^p_B(b) \in \operatorname{Im} f^{p+1}$.

II) Se tiene que

$$\begin{aligned} f^{p+2} d^{p+1}_A(a) &= d^{p+1}_B(f^{p+1}(a)) \\ &= d^{p+1}_B(d^p_B) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y como f^{p+2} es inyectiva, $d^p_A(a) = 0$ se tiene.

III) Sea $b_1 - b_2 = f^p(a)$, entonces

$$\begin{aligned} d^p_B(b_1) - d^p_B(b_2) &= d^p_B(b_1 - b_2) \\ &= d^p_B(f^p(a)) \\ &= f^{p+1} d^p_A(a) \end{aligned}$$

y aplicando la imagen inversa de f^{p+1} a la igualdad $d^p_B(b_1) - d^p_B(b_2) = f^{p+1} d^p_A(a)$, tenemos

$$(f^{p+1})^{-1}(d^p_B(b_1)) = (f^{p+1})^{-1}(d^p_B(b_2)) + d^p_A(a)$$

con lo que $[a] \in H^{p+1}(A^*)$. **Q.E.D**

Ejemplo 3.1 *La siguiente es una sucesión exacta corta de cadenas complejas con $\partial^* \neq 0$:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dll, "\partial^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "Id"'] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\partial^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un isomorfísmo.

En efecto, ya que ∂^* es una aplicación lineal bien definida, veamos que es biyectiva.

I. ∂^* es inyectiva. Sean x y y tales que $\partial^*(x) = \partial^*(y)$, entonces

$$\begin{array}{cc} & \partial^*(x) = \partial^*(y) \\ \equiv & (Id)^{-1}[Id(Id^{-1}(x))] = (Id)^{-1}[Id(Id^{-1}(y))] \\ \equiv & (Id)^{-1}[Id(x)] = (Id)^{-1}[Id(y)] \\ \equiv & (Id)^{-1}(x) = (Id)^{-1}(y) \\ \equiv & x = y \end{array}$$

II. ∂^* es sobreyectiva, puesto que, para $x \in \mathbb{R}$

$$x = (Id)^{-1}[Id(Id^{-1}(x))]$$

3.3. Sucesiones homológicas

En este punto, ya se tienen las suficientes herramientas para llegar al teorema de la sucesión homológica exacta larga, en el cual, tomará vital importancia la manera en que se definió la aplicación ∂^*. Este teorema, y en particular, la aplicación ∂^* serán de gran utilidad en las aplicaciones a la cohomología de De Rham.

Lema 3.4 *La sucesión*

$$H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$$

es exacta para todo p.

Demostración: Veamos que $\operatorname{Im} g^* = \operatorname{Ker} \partial^*$

I) $\operatorname{Im} g^* \subseteq \operatorname{Ker} \partial^*$. En efecto,

$$\begin{array}{ll} & \partial^*(g^*([b])) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } g^* \ \rangle \\ & \partial^*([g^p(b)]) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \partial^* \ \rangle \\ & [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(g^p(b)))] \\ = & \quad \langle \ g^p \text{ es sobreyectiva } \rangle \\ & [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] \\ = & \quad \langle \ b \in \operatorname{Ker} d_B^p \ \rangle \\ & [(f^{p+1})^{-1}(0)] \\ = & \quad \langle \ f^{p+1} \text{ es inyectiva } \rangle \\ & [0] \end{array}$$

II) $\operatorname{Ker} \partial^* \subseteq \operatorname{Im} g^*$

$$
\begin{array}{ll}
& \partial^*[c] = 0 \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \partial^* \rangle \\
& (f^{p+1-1})(d_B^p((g^p)^{-1}(c))) \in \operatorname{Im} d_A^p \\
\equiv & \quad \langle\ b \in (g^p)^{-1}(c); \text{ definición de } \operatorname{Im} \rangle \\
& (f^{p+1})^{-1}(d_B^p) = d_A^p(a) \ \text{ para algún } \ a \in A^p \\
\equiv & \quad \langle \text{ evaluando } f^{p+1} \rangle \\
& d_B^p(b) = f^{p+1}(d_A^p(a)) \\
\equiv & \quad \langle\ \rangle \\
& d_B^p(b) - f^{p+1}(d_A^p(a)) = 0
\end{array}
$$

Entonces

$$
\begin{array}{ll}
& [c] \\
= & \quad \langle\ b \in (g^p)^{-1}(c) \rangle \\
& [g^p(b)] \\
= & \quad \langle\ g^p \circ f^p = 0 \rangle \\
& [g^p(b) - g^p(f^p(a))] \\
= & \quad \langle \text{ linealidad de } g^p \rangle \\
& g^p(b - f^p(a)) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } g^* \rangle \\
& g^*[b - f^p(a)]
\end{array}
$$

Esto siempre y cuando $b - f^p(a) \in \operatorname{Ker} d_B^p$. Pero en efecto, lo está,

$$
\begin{array}{ll}
& d_B^p(b - f^p(a)) \\
= & \quad \langle\ d_B^p \text{ es lineal } \rangle \\
& d_B^p(b) - d_B^p(f^p(a)) \\
= & \quad \langle\ d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_Z^p \rangle \\
& d_B^p(b) - f^{p+1}(d_A^p(a)) \\
= & \quad \langle\ \partial^*[c] = 0 \rangle \\
& 0
\end{array}
$$

Por $I)$ y $II)$ se tiene que $\operatorname{Im} g^* = \operatorname{Ker} \partial^*$. **Q.E.D**

Lema 3.5 *La sucesión*

$$H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*)$$

es exacta para todo p.

Demostración: Veamos que $\operatorname{Im} \partial^* = \operatorname{Ker} f^*$

I) Se tiene que $\operatorname{Im}\partial^* \subset \operatorname{Ker} f^*$. En efecto,

$$
\begin{array}{cl}
 & f^*(\partial^*[c]) \\
= & \quad \langle \text{ definicion de } \partial^* \rangle \\
 & f^*[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c)))] \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } f^* \rangle \\
 & [f^{p+1}(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c)))] \\
= & \quad \langle\ f \text{ inyectiva } \rangle \\
 & [d_B^p((g^p)^{-1}(c)] \\
= & \quad \langle\ b \in (g^p)^{-1}(c)\ \rangle \\
 & [d_B^p(b)] \\
= & \quad \langle\ d_B^p(b) \in \operatorname{Im} d_b^p\ \rangle \\
 & [0]
\end{array}
$$

II) $\operatorname{Ker} f^* \subset \operatorname{Im}\partial^*$. En efecto,

$$
\begin{array}{cl}
 & [a] \in \operatorname{Ker} f^* \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Ker} \rangle \\
 & f^*[a] = [0] \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } f^* \rangle \\
 & [f^{p+1}(a)] = [0] \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de clase de equivalencia } \rangle \\
 & f^{p+1}(a) \in \operatorname{Im} d_B^p \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} \rangle \\
 & f^{p+1}(a) = d_B^p(b) \ \text{ para algún } \ b^p \\
\equiv & \quad \langle \text{ Aplicando } (f^{p+1})^{-1} \ \rangle \\
 & a = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(g^p(b)))) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de } \partial^* \rangle \\
 & [a] = \partial^*[g^p(b)] \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} \ \rangle \\
 & [a] \in \operatorname{Im}\partial^*
\end{array}
$$

Por $I)$ y $II)$ se tiene que $\operatorname{Im}\partial^* = \operatorname{Ker} f^*$. **Q.E.D**

Los lemas 3.3, 3.4 y 3.5 demuestran el siguente teorema:

Teorema 3.1 (de la sucesión homológica exacta larga) *Sea*

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de cadenas complejas. Entonces la sucesión

$$\ldots \longrightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \longrightarrow \ldots$$

es exacta.

Definición 3.9 *Dos aplicaciones cadena $f, g : A^* \longrightarrow B^*$ son* ***cadenas homotópicas****, si existen aplicaciones lineales*

$$s : A^p \longrightarrow B^{p-1}$$

que satisfacen

$$d_B^{p-1} \circ s + s \circ d_A^p = f - g : A^p \longrightarrow B^p \tag{10}$$

En el siguiente diagrama se muestra de manera más clara estas cadenas homotópicas

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A^{p-1}"] \arrow[d, "f-g"'] & A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f-g"'] \arrow[dl, "s"'] & A^{p+1} \arrow[r, "d_A^{p+1}"] \arrow[d, "f-g"'] \arrow[dl, "s"'] & A^{p+2} \arrow[r] \arrow[d, "f-g"'] \arrow[dl, "s"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B^{p-1}"] & B^p \arrow[r, "d_B^p"] & B^{p+1} \arrow[r, "d_B^{p+1}"] & B^{p+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Las cadenas homotópicas de este estilo serán objeto de estudio en las aplicaciones que se describirán al final de este trabajo, una vez presentada la sucesión de Mayer-Vietoris. Sin embargo, otros resultados importantes, se pueden encontrar en [7].

Lema 3.6 *Para dos cadenas, y aplicaciones cadena homotópicas (vease sección 2.5) $f, g : A^* \longrightarrow B^*$ se tiene que*

$$f^* = g^* : H^p(A^*) \longrightarrow H^p(B^*).$$

Demostración: Sea $[a] \in H^p(A^*)$, entonces

$$\begin{array}{ll}
 & (f^* - g^*)([a]) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } f^* \text{ y } g^* \ \rangle \\
 & [f^p(a) - g^p(a)] \\
\equiv & \quad \langle \ f \text{ y } g \text{ son homotópicas } \rangle \\
 & [(d_B^{p-1} \circ s)(a) + (s \circ d_A^p)(a)] \\
\equiv & \quad \langle \ a \in \operatorname{Ker} d_A^p \ \rangle \\
 & [d_B^{p-1} s(a)] \\
\equiv & \quad \langle \ d_B^{p-1}(s(a)) \in \operatorname{Im} d_B^{p-1} \ \rangle \\
 & [0]
\end{array}$$

Así $f^* = g^*$. **Q.E.D**

Lema 3.7 *Si A^* y B^* son cadenas complejas, entonces*

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*).$$

Demostración: Esto se tiene debido a que

$$\mathrm{Ker}\, d^p_{A\oplus B} = \mathrm{Ker}\, d^p_A \oplus \mathrm{Ker}\, d^p_B$$

y también, se tiene que

$$\mathrm{Im}\, d^{p-1}_{A\oplus B} = \mathrm{Im}\, d^{p-1}_A \oplus \mathrm{Im}\, d^{p-1}_B$$

Q.E.D

Capítulo 4

ÁLGEBRA ALTERNANTE

A partir de este capítulo se empieza a construir los elementos sobre los cuales se construirá la cohomología de De Rham, se hará un estudio riguroso sobre aplicaciones lineales con propiedades particulares, y se definirá un producto exterior que permitirá construir las p-formas diferenciales, que serán los objetos sobre los cuales se hará enfasis a la hora de definir la cohomología de De Rham. En [1] y [7] se puede encontrar un estudio más detallado de estos espacios. En todo el capítulo, **V** denotará un espacio vectorial real de dimensión finita, y $\mathbf{V}^p$ el producto cartesiano de p copias de **V**.

4.1. p-Formas

En esta sección se brindarán algunas definiciones y características iniciales para la posterior construcción de las p-formas diferenciales. Resultados análogos a los que se plantean acá, se pueden encontrar en [4].

Definición 4.1 *Sea **V** un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. Una aplicación*

$$\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{V}^p = \underbrace{\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \times ... \times \boldsymbol{V}}_{p-veces} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*es **multilineal** si es lineal en cada factor.*

Esto es, una aplicación $\boldsymbol{\omega} : \mathbf{V}^p \to \mathbb{R}$ es multilineal si para todo $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_j, \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p \in \mathbf{V}^p$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., a\boldsymbol{\xi}_j + b\boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = a\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) + b\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p)$$

Definición 4.2 *Una aplicacion multilineal $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{V}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ es **alternante** si*

$$\omega(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = 0$$

cuando $\boldsymbol{\xi}_i$=$\boldsymbol{\xi}_j$, $i \neq j$.

Las aplicaciones multilineales que son alternantes son llamadas **p-formas**. El espacio vectorial de p-formas se denota por $\mathbf{Alt}^p(\mathbf{V})$.

Se puede mostrar que $\mathbf{Alt}^p(\mathbf{V}) = 0$ si $p > \dim V$. En efecto, sea $e_1, ..., e_n$ una base de $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p \in \mathbf{V}^p$ y sea $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Alt}^p(\mathbf{V})$, entonces

$$\begin{array}{cl} & \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\ = & \quad \langle\ e_1, ..., e_n \text{ es una base de } \mathbf{V}\ \rangle \\ & \boldsymbol{\omega}\left(\sum_i \lambda_{i,1} e_i, ..., \sum_i \lambda_{i,p} e_i\right) \\ = & \quad \langle\ \boldsymbol{\omega} \text{ es multilineal}\ \rangle \\ & \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_p} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_p}\, \boldsymbol{\omega}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) \\ = & \quad \langle \text{ tomando } I = (i_1, ..., i_p) \text{ y } \lambda_I = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p}\ \rangle \\ & \sum_I \lambda_I \boldsymbol{\omega}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}) \\ = & \quad \langle \text{ un } e_i \text{ debe repetirse: } p > n\ \rangle \\ & 0 \end{array}$$

Una función biyectiva de $\{1, ..., p\}$ en si mismo es una **permutación**. El conjunto de permutaciones es un grupo bajo la composición denotada por $S(p)$. La **transposición** (i, j) es la permutación definida por

$$(i,j)(k) = \begin{cases} k & si \quad i \neq k \neq j \\ i & si \quad k = j \\ j & si \quad k = i \end{cases}$$

No es dificil demostrar que toda permutación es composición de transposiciones. Si σ es una permutación y $\tau_1, ..., \tau_r$ son transposiciones tales que $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$, se define

$$Sign\, \sigma = (-1)^r.$$

Se demuestra sin dificultad que $Sign$ es un homomorfismo. En [8] se puede consultar con mayor detalle el estudio del grupo de permutaciones. Con estas nociones se puede ahora, enunciar el siguiente lema,

Lema 4.1 *Si* $\omega \in$ ***Alt***$^p(\boldsymbol{V})$ *y* $\sigma \in S(p)$*, entonces*

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = Sign(\sigma)\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi_1}, ..., \boldsymbol{\xi_p})$$

Demostración: Es suficiente con probar la fórmula cuando $\sigma = (i, j)$. Sea

$$\boldsymbol{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') = \omega(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}, ..., \boldsymbol{\xi}', ..., \boldsymbol{\xi}_p)$$

con $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\xi}'$ en las posiciones i y j respectivamente. Los restantes $\boldsymbol{\xi}_v \in \mathbf{V}$ son vectores arbitrarios pero fijos.

Por la definición, se tiene que $\boldsymbol{\omega}_{i,j} \in \mathbf{Alt}^2(\mathbf{V})$. Así,

$$\boldsymbol{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\xi}_j, \boldsymbol{\xi}_j + \boldsymbol{\xi}_i) = 0.$$

Por bilinealidad, se tiene que $\boldsymbol{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j) + \boldsymbol{\omega}_{i,j}(\boldsymbol{\xi}_j, \boldsymbol{\xi}_i) = 0.$ **Q.E.D**

Ejemplo 4.1 *Sea $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^p$ y $\boldsymbol{\xi}_i = (\boldsymbol{\xi}_{i1}, ..., \boldsymbol{\xi}_{ip})$. La función $\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{V}^p \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = \det((\boldsymbol{\xi}_{ij}))$$

es una p-forma. En efecto, es multilineal y alternante como se puede constatar por las propiedades del determinante (vease capítulo 5 en [9]).

Definición 4.3 *Un **(p,q)-corrimiento** de σ es una permutación de $\{1, 2, ..., p+q\}$ que satisface*

$$\sigma(1) < ... < \sigma(p)$$

y además

$$\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)$$

El conjunto de todas éstas permutaciones es denotado por $S(p,q)$.

Ejemplo 4.2 *Sea $\sigma : \{1, 2, ..., 8\} \to \{1, 2, ..., 8\}$ una permutación dada por*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

es un (3,5)-corrimiento, nótese que se cumple

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$$

y además

$$\sigma(4) < \sigma(5) < \sigma(6) < \sigma(7) < \sigma(8)$$

4.2. Producto exterior

Se introducirá a continuación una operación algebraica bien definida que permitirá realizar cálculos entre p-formas llamado el producto exterior.

Definición 4.4 *Para $\boldsymbol{\omega}_1 \in \boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$ y $\boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{Alt}^q(\boldsymbol{V})$, se define*

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}).$$

Ejemplo 4.3 *Una particularidad del producto exterior es el caso en que* $p = q = 1$*,*

$$\wedge : \boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{Alt}^q(\boldsymbol{V}) \longrightarrow \boldsymbol{Alt}^{p+q}(\boldsymbol{V})$$

y esta dado por

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1)\, \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_2) - \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_1)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_2).$$

Notese que $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$ es multilineal. En efecto, sean $\boldsymbol{\omega}_1 \in \mathbf{Alt}^p(\mathbf{V})$, $\boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbf{Alt}^q(\mathbf{V})$, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_j, \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q} \in \mathbf{V}^{p+q}$ con $1 \leq j \leq p$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene entonces que,

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., a\boldsymbol{\xi}_j + b\boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } \wedge \rangle \\
& \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., a\boldsymbol{\xi}_j + b\boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle\ \boldsymbol{\omega}_1 \text{ es multilineal } \rangle \\
& \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma) \left[a\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) + b\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p)\right] \\
& \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle \text{ Distributividad } \rangle \\
& \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma)[a\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
& + b\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p)] \\
= \quad & \langle \text{ Separando sumas } \rangle \\
& a \ \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
& + b \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{p+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } \wedge \rangle \\
& = a(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) + b(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\zeta}_j, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}).
\end{aligned}$$

Para el caso en que $p + 1 \leq j \leq p + q$, el resultado se tiene análogamente. Además se tiene el siguiente resultado,

Lema 4.2 *Si* $\boldsymbol{\omega}_1 \in \boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$ *y* $\boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{Alt}^q(\boldsymbol{V})$ *entonces* $(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) \in \boldsymbol{Alt}^{p+q}(\boldsymbol{V})$.

Demostración: Primero, veamos que para $\xi_1 = \xi_2$ se tiene que

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) = 0.$$

Sean

I) $S_{12} = \{\sigma \in S(p, q) : \sigma(1) = 1, \sigma(p + 1) = 2\}$

II) $S_{21} = \{\sigma \in S(p, q) : \sigma(1) = 2, \sigma(p + 1) = 1\}$

III) $S_0 = S(p,q) - (S_{12} \cup S_{21})$

Si $\sigma \in S_0$ se debe tener que

$$\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) = 0$$

o que

$$\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) = 0$$

puesto que $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)} = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}$ o $\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)} = \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+2)}$ por como se definió el conjunto $S(p,q)$. Componiendo $\tau \circ \sigma$, con $\tau = (1,2)$, tenemos una biyección $S_{12} \longrightarrow S_{21}$, puesto que solo se intercambiará la primera posición entre los conjuntos $\{\sigma(1), ..., \sigma(p)\}$ y $\{\sigma(p+1), ..., \sigma(p+q)\}$.
Además se tiene

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) \\
= \quad & \langle\ \sigma(1) = \tau\sigma(p+1) = 1 \wedge \sigma(p+1) = \tau\sigma(1) = 2\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{\sigma \in S_{12}} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \\
& - \textstyle\sum_{\sigma \in S_{12}} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\tau\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\tau\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\tau\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\tau\sigma(p+q)}) \\
= \quad & \langle\ \boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2\ \rangle \\
& 0
\end{aligned}$$

Mediante un procedimiento similar se obtiene el resultado en el caso $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i+1}$.
Q.E.D

Ahora, $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$ será alternante de acuerdo con el siguiente resultado

Lema 4.3 *Una aplicación multilineal $\boldsymbol{\omega}$ es alternante si $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_k) = 0$ para todas las k-túplas con $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i+1}$ para algún $1 \leq i \leq k-1$.*

Demostración: $S(k)$ es generado por las transposiciones $(i, i+1)$. por el argumento del lema 4.1 se tiene que

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_k) = -\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \boldsymbol{\xi}_i, ..., \boldsymbol{\xi}_k).$$

Y así, el lema 4.1 se tiene para todo $\sigma \in S(k)$, y por lo tanto $\boldsymbol{\omega}$ es alternante.
Q.E.D

Se puede mostrar, por la definición del producto exterior, que:

I. $(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}'_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}'_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$

II. $(\lambda\, \boldsymbol{\omega}_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = \lambda(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\lambda\, \boldsymbol{\omega}_2)$

III. $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}'_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}'_2$

para $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_1' \in \mathbf{Alt}^p(V)$ y $\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_2' \in \mathbf{Alt}^q(\mathbf{V})$.

En efecto, usando la definición,

$$\begin{aligned}
& ((\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_1') \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma)[(\omega_1 + \boldsymbol{\omega}_1')(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)})] \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma)[\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)})] \\
& + \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma) \left[\boldsymbol{\omega}_1'(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)})\right] \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1' \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}).
\end{aligned}$$

Y así queda demostrado I., análogamente, se demuestran las partes II. y III.

Lema 4.4 *Si* $\boldsymbol{\omega}_1 \in \boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$ *y* $\boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{Alt}^q(\boldsymbol{V})$ *entonces* $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = (-1)^{pq}\, \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_1$.

Demostración: Sea $\tau \in S(p+q)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\tau(1) = p+1, \tau(2) = p+2, \quad ... \quad , \tau(q) = p+q \\
&\tau(q+1) = 1, \tau(q+2) = 2, \quad ... \quad , \tau(p+q) = p.
\end{aligned}$$

Se tiene que $Sign(\tau) = (-1)^{pq}$. La composición con τ define una biyección

$$\begin{array}{ccc}
S(p,q) & \longrightarrow & S(q,p) \\
\sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau
\end{array}$$

pues se puede ver que

$$\begin{array}{rrcl}
& \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(q)}) & = & \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \\
\text{y} & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(q+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+q)}) & = & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)})
\end{array}$$

Por consiguiente, se puede ver que

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_1)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(q)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(q+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma\tau)\, \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(q)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(q+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+q)}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& (-1)^{pq} \textstyle\sum_{\sigma \in S(p,q)} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}) \\
= & \quad \langle\ \rangle \\
& (-1)^{pq} (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}).
\end{aligned}$$

Q.E.D

Lema 4.5 *Si* $\boldsymbol{\omega}_1 \in \boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{Alt}^q(\boldsymbol{V})$ *y* $\boldsymbol{\omega}_3 \in \boldsymbol{Alt}^r(\boldsymbol{V})$ *entonces*

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3) = (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \boldsymbol{\omega}_3 .$$

Demostración: Sea $S(p,q,r) \subset S(p+q+r)$, y consiste en las permutaciones σ con

$$\begin{aligned} \sigma(1) < \ & \ldots \ < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < \ & \ldots \ < \sigma(p+q) \\ \sigma(p+q+1) < \ & \ldots \ < \sigma(p+q+r). \end{aligned}$$

Sean también, los subconjuntos $S(\overline{p},q,r)$ y $S(p,q,\overline{r})$ de $S(p,q,r)$ dados por

- $\sigma \in S(\overline{p},q,r) \Longleftrightarrow \sigma$ es la identidad en $\{1,...,p\}$ y $\sigma \in S(p,q,r)$,
- $\sigma \in S(p,q,\overline{r}) \Longleftrightarrow \sigma$ es la identidad en $\{p+q+1,...,p+q+r\}$ y $\sigma \in S(p,q,r)$.

Es fácil demostrar que las funciones

$$\begin{aligned} S(p,q+r) \times S(p,q,r) &\longrightarrow S(p,q,r) \\ (\sigma,\tau) &\longmapsto \sigma \circ \tau \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned} S(p+q,r) \times S(p,q,\overline{r}) &\longrightarrow S(p,q,r) \\ (\sigma,\tau) &\longmapsto \sigma \circ \tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Son biyecciones. Con esas notaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} & [\boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3)]\,(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{p+q+r}) \\ = \quad & \langle \ \rangle \\ & \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma)\,\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)},...,\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3)(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)},...,\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q+r)}) \\ = \quad & \langle \ \rangle \\ & \textstyle\sum_\sigma Sign(\sigma) \sum_\tau Sign(\tau)[\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)},...,\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}) \\ & \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+1)},...,\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+q)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+q+1)},...,\boldsymbol{\xi}_{\sigma\tau(p+q+r)})] \\ = \quad & \langle \ \rangle \\ & \textstyle\sum_u Sign(u)[\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{u(1)},...,\boldsymbol{\xi}_{u(p)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{u(p+1)},...,\boldsymbol{\xi}_{u(p+q)}) \\ & \cdot \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\xi}_{u(p+q+1)},...,\boldsymbol{\xi}_{u(p+q+r)})]. \end{aligned}$$

Donde $\sigma \in S(p,q+r)$, $\tau \in S(\overline{p},q,r)$ y $u \in S(p,q,r)$.
La última igualdad se tiene de (2). Análogamente se usa con (3) el mismo procedimiento para realizar el cálculo respectivo con $[\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2] \wedge \boldsymbol{\omega}_3$ y obtener el resultado.
Q.E.D

Definición 4.5 I) *Una $\mathbb{R}$-**álgebra graduada** A, consiste en una sucesión de espacios vectoriales A_k, $k = 0, 1, ...$, y asignaciones bilineales $\mu : A_k \times A_l \longrightarrow A_{k+l}$ que son asociativas.*

II) *El álgebra A es llamada **anticonmutativa**, si $\mu(a, b) = (-1)^{kl}\mu(b, a)$, para $a \in A_k$ y $b \in A_l$.*

III) *El álgebra A_* es llamada **conexa** si existe un elemento unidad **1**$\in A_0$ y si $\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow A_0$, dado por $\epsilon(r) = r\cdot\mathbf{1}$, es un isomorfismo.*

$\mathbf{Alt}^*(\mathbf{V})$ es llamado el exterior o el álgebra alternante asociada a $\mathbf{V}$.

Lema 4.6 *Para 1-formas, $\boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{\omega}_p \in \boldsymbol{Alt}^1(\boldsymbol{V})$,*

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge ... \wedge \boldsymbol{\omega}_p)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_p) \\ \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_1) & \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}_1) & \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}_2) & \cdots & \boldsymbol{\omega}_p(\boldsymbol{\xi}_p) \end{pmatrix}$$

Demostración: Se hará inducción sobre p.

I. En el caso $p = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \\ = & \quad \langle\ \rangle \\ & \textstyle\sum_{\sigma \in S(1,2)} Sign(\sigma)\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(2)}) \\ = & \quad \langle\ \rangle \\ & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_2) - \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_2) \cdot \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_1) \\ = & \quad \langle\ \rangle \\ & \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_2) \\ \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_1) & \boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\xi}_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Y se tiene el resultado para este caso.

II. Supongamos que el lema se tiene en el caso $p - 1$.

III. De acuerdo a la definición 4.5 tenemos que

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge ... \wedge \boldsymbol{\omega}_p)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = \\ = & \textstyle\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1}\, \boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\xi}_j) \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge ... \wedge \boldsymbol{\omega}_p)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{j-1}, \boldsymbol{\xi}_{j+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \end{aligned}$$

Ya que se supone el resultado para $p - 1$, el lema se tiene, expandiendo el determinante de

$$(\boldsymbol{\omega}_2 \wedge ... \wedge \boldsymbol{\omega}_p)(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{j-1}, \boldsymbol{\xi}_{j+1}, ..., \boldsymbol{\xi}_p)$$

una fila. **Q.E.D**

Teorema 4.1 *Sean $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$ base para* ***V*** *y $\boldsymbol{\epsilon}_1, ..., \boldsymbol{\epsilon}_n$ la base dual de $\boldsymbol{Alt}^1(\boldsymbol{V})$. Entonces*

$$\{\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(p)}\}_{\sigma \in S(p,n-p)}$$

es una base de $\boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$.

Demostración: Ya que $\boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{e}_j) = 0$ cuando $i \neq j$, y $\boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{e}_i) = 1$. Lema 4.6, da

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{\epsilon}_{i_p} = \begin{cases} 0 & si \quad \{i_1, ..., i_p\} \neq \{j_1, ..., j_p\} \\ \\ Sign(\sigma) & si \quad \{i_1, ..., i_p\} = \{j_1, ..., j_p\} \end{cases} \tag{3}$$

donde σ es la permutación $\sigma(i_k) = j_k$. Por la definición de producto exterior y la igualdad anterior, tenemos

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{e}_{\sigma(p)})\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(p)}$$

para cualquier p-forma alternante. Así, $\boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(p)}$ genera el espacio vectorial $\mathbf{Alt}^p(\mathbf{V})$. La independencia lineal se tiene por (3), ya que la relación

$$\sum_{\sigma \in S(p,n-p)} \lambda_\sigma \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \boldsymbol{\epsilon}_{\sigma(p)} = 0$$

con $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$, evaluada en $(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{e}_{\sigma(p)})$ da que $\lambda_\sigma = 0$. **Q.E.D**

Ejemplo 4.4 *Sea $x_i : \boldsymbol{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, la proyección i-ésima de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Se representará a $dx_i(\boldsymbol{\xi})$ como la derivada direccional usual, en la dirección del vector $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, de la función x_i. dx_i le asignará a cada componente i de su respectiva derivada evaluada en la componente i del vector $\boldsymbol{\xi}$. Con lo que*

$$dx_1 \wedge ... \wedge dx_p$$

para algún $p \geq 2$, es una base de $\boldsymbol{Alt}^p(\boldsymbol{V})$. En efecto, el ejemplo 4.6 muestra que los dx_i coinciden con los ϵ_i definidos acá.

4.3. p-Formas diferenciales

Una vez hecha la construcción de las p-formas y habiendo definido el producto entre ellos, se realizará un trabajo especial con aquellas que son de clase C^∞. El espacio vectorial de estas p-formas, serán los que nos permitirán definir la cohomología de De Rham. En esta sección **U** denotará un conjunto abirto de $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ la base estandar y $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ la base dual de $\mathbf{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.6 *Una p-forma diferencial en* ***U*** *es una aplicación $\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ de clase C^∞.*

En otras palabras, se dice que una aplicación $\boldsymbol{\omega}$, es una p-forma diferencial, si ésta es multilineal, alternante, y diferenciablemente continua. El espacio vectorial de todas estas p-formas diferenciales, se denotará por $\boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$.

Nótese también, que si $p = 0$ entonces $\mathbf{Alt}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, y así, $\boldsymbol{\Omega}^0(\mathbf{U})$ resulta ser el espacio vectorial de todas las funciones de clase C^∞ de valor real definidas en **U**, es decir, $\Omega^0(\mathbf{U}) = C^\infty(\mathbf{U}, \mathbb{R})$.

Ejemplo 4.5

- *La función $f : \boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y, z) = xy^2 + z^3$$

es una 0-forma diferencial.

- *Una 1-forma diferencial definida en **U** es una expresión del tipo*

$$\boldsymbol{\omega} = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + ... + f_n dx_n.$$

Donde $f_i : \boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables con valores reales, y dx_i son como en el ejemplo 4.4. La función

$$\boldsymbol{\omega} = zy^2 dx + xz^3 dy + xy^4 dz$$

es una 1-forma diferencial.

Se tiene que $\epsilon_I = \epsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon_{i_p}$, donde I recorre toda las sucesiones con $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$, es una base para $\mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$. Así, cada $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ se puede escribir en la forma $\boldsymbol{\omega}(x) = \sum_I (x)\epsilon_I$ con una función de valor real y clase C^∞ en $x \in \mathbf{U}$.
Nótese que, en la segunda parte del ejemplo 4.5 dx, dy y dz son bases de $\mathbf{Alt}^1(\mathbb{R}^3)$.

Definición 4.7 *La **derivada usual** de una función de clase C^∞, $\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{U} \longrightarrow \boldsymbol{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$, denotada por $D\,\boldsymbol{\omega}$ (y su valor en $\boldsymbol{x}$ se denota por $D_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\omega}$), es la aplicación lineal*

$$D_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$$

definida por

$$D_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\omega}(e_j) = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\epsilon_I, \tag{4}$$

con $j = 1, ..., n$.

La función $\boldsymbol{x} \longmapsto D_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\omega}$ es una aplicación de clase C^∞ de **U** al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.8 *El **diferencial exterior** $d : \mathbf{\Omega}^p(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p+1}(\boldsymbol{U})$ es el operador lineal definido por*

$$d_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{i-1},\boldsymbol{\xi}_{i+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \tag{5}$$

siendo x cualquier elemento de $\boldsymbol{U}$.

El diferencial exterior de una p-forma $\boldsymbol{\omega}$ es una (p+1)-forma, esto es, $d_x\,\boldsymbol{\omega} \in$ **Alt**$^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i+1}$, entonces se tiene que

$$\begin{array}{cl}
 & d_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{\xi}_{j+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } d \ \rangle \\
 & \sum_{i+1}^{p+1}(-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{i-1},\boldsymbol{\xi}_{i+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
= & \quad \langle \text{ Desarrollo de la suma } \rangle \\
 & \sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\hat{\boldsymbol{\xi}}_i,...,\boldsymbol{\xi}_{j-1},\boldsymbol{\xi}_{j+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
 & +(-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\hat{\boldsymbol{\xi}}_i,\boldsymbol{\xi}_{i+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
 & +(-1)^{i}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_{i+1})(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_i,\widehat{\boldsymbol{\xi}_{i+1}},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
 & +\sum_{i+2}^{p+1}(-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{j-1},\boldsymbol{\xi}_{j+1},...,\hat{\boldsymbol{\xi}}_i,...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
= & \quad \langle \ D_x(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\xi}_i) \text{ es una p-forma y } \boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i+1} \ \rangle \\
 & (-1)^{i-1}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_i)(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_{i-1},\boldsymbol{\xi}_{i+1},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
 & +(-1)^{i}D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}_{i+1})(\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_{i+2},...,\boldsymbol{\xi}_{p+1}) \\
= & \quad \langle \ \boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_{i+1} \ \rangle \\
 & 0
\end{array}$$

Y el lema 4.3, muestra así, que d es una (p+1)-forma.

Ejemplo 4.6 *Sea $x_i : \boldsymbol{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, la proyección i-ésima de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Entonces, por (4) $dx_i \in \mathbf{\Omega}^1(\boldsymbol{U})$ será*

$$\begin{array}{cl}
 & dx_i(\boldsymbol{\xi}) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } d \ \rangle \\
 & Dx_i(\boldsymbol{\xi}) \\
= & \quad \langle \text{ Calculando la derivada } D \ \rangle \\
 & \frac{\partial x_i}{\partial x_i}\epsilon_i(\boldsymbol{\xi}) \\
= & \quad \langle \ \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1 \ \rangle \\
 & \epsilon_i(\boldsymbol{\xi})
\end{array}$$

En general, para $f \in \mathbf{\Omega}^0(\boldsymbol{U})$, se tiene por (4) nuevamente, que si $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1,...,\zeta_n)$

$$
\begin{aligned}
& D_x f(\boldsymbol{\zeta}) \\
= & \quad \langle\ \boldsymbol{\zeta} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i\ \rangle \\
& D_x f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i) \\
= & \quad \langle\ D_x f \text{ es lineal } \rangle \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} \zeta_i D_x f(e_i) \\
= & \quad \langle\ \text{Por (4)}\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\
= & \quad \langle\ \zeta_i = \epsilon_i(\boldsymbol{\zeta})\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\epsilon_i(\boldsymbol{\zeta}).
\end{aligned}
$$

Observese que por (5), $d_x f(\boldsymbol{\zeta}) = D_x f(\boldsymbol{\zeta})$, es decir

$$
df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\epsilon_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.
$$

Algunas propiedades que cumplen las p-formas diferenciales, se enunciarán en los siguientes lemas.

Lema 4.7 *Si $\boldsymbol{\omega}(x) = f(x)\epsilon_I$ entonces $d_x\,\boldsymbol{\omega} = d_x f \wedge \epsilon_I$.*

Demostración: Se tiene que

$$
\begin{aligned}
& D_x\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\zeta}) \\
= & \quad \langle\ \text{Por (4)}\ \rangle \\
& (D_x f(\boldsymbol{\zeta}))\epsilon_I \\
= & \quad \langle\ \text{Definicion de } D\ \rangle \\
& \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}\zeta_1 + ... + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\zeta_n\right)\epsilon_I \\
= & \quad \langle\ \text{Ejemplo 4.5}\ \rangle \\
& d_x f(\boldsymbol{\zeta})\epsilon_I
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
& d_x\,\boldsymbol{\omega}(\xi_1, ..., \xi_{p+1}) \\
= & \quad \langle\ \text{Definición de } d\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1} D_x\,\boldsymbol{\omega}(\xi_k)(\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_{p+1}) \\
= & \quad \langle\ \text{Resultado anterior}\ \rangle \\
& \textstyle\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1} d_x f(\xi_k)\epsilon_I(\xi_1, ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_{p+1}) \\
= & \quad \langle\ \text{Definición de } \wedge\ \rangle \\
& [d_x f \wedge \epsilon_I](\xi_1, ..., \xi_{p+1}).
\end{aligned}
$$

Q.E.D

Se puede ver, que para $\epsilon_I \in \mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ por las propiedades del producto exterior, se tiene que

$$\epsilon_k \wedge \epsilon_I = \begin{cases} 0 & si \quad k \in I \\ \\ (-1)^r \epsilon_J & si \quad k \notin I \end{cases}$$

donde r es tal que $i_r < k < i_{r+1}$, debido a que ϵ_k se moverá r posiciones para preservar el orden de los indices, y $J = (i_1, ..., i_r, k, ..., i_p)$.
El siguiente resultado, será de vital importancia en el estudio de la cohomología de De Rham, pues describirá como se comportarán las composiciones de aplicaciones entre espacios de p-formas diferenciales, que es el principal objeto de estudio, tal como se vió en el capítulo 3.

Lema 4.8 *Para $p \geq 0$ la composición de aplicaciones descritas por la cadena*

$$d \circ d : \mathbf{\Omega}^p(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p+1}(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p+2}(\boldsymbol{U})$$

es idénticamente cero.

Demostración: Se mostrará sin pérdida de generalidad para $\boldsymbol{\omega} = f\epsilon_I$ que $d^2(\boldsymbol{\omega}) = 0$. Entonces,

$$\begin{array}{ll} & d\,\boldsymbol{\omega} \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega} \text{ } \rangle \\ & df \wedge \epsilon_I \\ = & \quad \langle \text{ Lema 4.7 } \rangle \\ & \frac{\partial f}{\partial x_1}\epsilon_1 \wedge \epsilon_I + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\epsilon_n \wedge \epsilon_I \end{array}$$

se obtiene entonces lo siguiente

$$\begin{array}{ll} & d^2\,\boldsymbol{\omega} \\ = & \quad \langle \text{ Aplicando } d \text{ } \rangle \\ & \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\epsilon_i \wedge (\epsilon_j \wedge \epsilon_I) \\ = & \quad \langle \text{ } \epsilon_i \wedge \epsilon_i = 0 \text{ y } \epsilon_i \wedge \epsilon_j = -\epsilon_j \wedge \epsilon_i \text{ } \rangle \\ & \sum_{i<j}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_I \\ = & \quad \langle \text{ } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ } \rangle \\ & 0 \end{array}$$

Q.E.D

Ejemplo 4.7 *Para la 1-forma del ejemplo 4.5,*

$$\boldsymbol{\omega} = zy^2 dx + xz^3 dy + xy^4 dz$$

se tiene que

$$\begin{aligned} d\,\boldsymbol{\omega} &= (z^3 dy \wedge dx) + (y^4 dz \wedge dx) + (2zy dx \wedge dy) + (4xy^3 dz \wedge dy) \\ &\quad +(y^2 dx \wedge dz) + (3xz^2 dy \wedge dz) \\ &= (2zy - z^3)(dx \wedge dy) + (y^2 - y^4)(dx \wedge dz) + (3xz^2 - 4xy^3)(dy \wedge dz) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando d *de nuevo,*

$$\begin{aligned} d^2\,\boldsymbol{\omega} &= (2y - 3z^2)(dx \wedge dy \wedge dz) + (2y - 4y^3)(dx \wedge dz \wedge dy) \\ &\quad +(3z^2 - 4y^3)(dy \wedge dz \wedge dx) \\ &= (2y - 3z^2)(dx \wedge dy \wedge dz) + (4y^3 - 2y)(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &\quad +(3z^2 - 4y^3)(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= (2y - 3z^2 + 4y^3 - 2y + 3z^2 - 4y^3)(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como lo afirma el lema 4.8.

Es análogamente verificable, que algunas de las propiedades que se tienen para las p-formas en $\mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ se tienen también para las p-formas diferenciales en $\boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ para todo $p \geq 0$. Esto, debido a como se definieron las p-formas diferenciales en esta sección. Algunas de dichas propiedades son:

- El producto exterior en $\mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ induce un producto exterior en $\boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ definido por
$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)(x) = \boldsymbol{\omega}_1(x) \wedge \boldsymbol{\omega}_2(x).$$
- El producto exterior de una p-forma diferencial y una q-forma diferencial, es una (p+q)-forma diferencial, así, se tiene la aplicación bilineal
$$\wedge : \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U}) \times \boldsymbol{\Omega}^q(\mathbf{U}) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^{p+q}(\mathbf{U}).$$
- Para una función $f \in C^\infty(\mathbf{U}, \mathbb{R})$, se tiene que
$$(f\,\boldsymbol{\omega}_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = f(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge f\,\boldsymbol{\omega}_2\,.$$

Esto expresa, precisamente, la bilinealidad del producto en $\mathbf{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$. También, se puede notar que para $f \in \boldsymbol{\Omega}^0(\mathbf{U})$ y $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$, se tiene que $f \wedge \boldsymbol{\omega} = f\,\boldsymbol{\omega}$.

Veamos ahora, algunos resultados importantes de la aplicación d sobre el producto exterior $\wedge$.

Lema 4.9 *Para* $\boldsymbol{\omega}_1 \in \boldsymbol{\Omega}^p(\boldsymbol{U})$ *y* $\boldsymbol{\omega}_2 \in \boldsymbol{\Omega}^q(\boldsymbol{U})$,

$$d(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) = d\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + (-1)^p\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2\,.$$

Nótese que el diferencial exterior, por la forma en que se definió, sobre el producto exterior, se comporta de manera símilar a la derivada usual sobre el producto.

Demostración: Es suficiente mostrar la fórmula cuando $\boldsymbol{\omega}_1 = f\epsilon_I$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = g\epsilon_J$ con $f, g \in \mathbf{\Omega}^0(\mathbf{U})$. Así,

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = fg\epsilon_I \wedge \epsilon_J,$$

y ya que $d\,\boldsymbol{\omega}_1 = df \wedge \epsilon_I$, $d\,\boldsymbol{\omega}_2 = dg \wedge \epsilon_J$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) &= d(fg) \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= ((df)g + fdg) \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= (df)g \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J + fdg \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= df \wedge \epsilon_I \wedge g\epsilon_J + (-1)^p f\epsilon_I \wedge dg \wedge \epsilon_J \\ &= d\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + (-1)^p\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2\,. \end{aligned}$$

Q.E.D

Capítulo 5

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

Hasta este capítulo, se ha construido los elementos y espacios vectoriales sobre los que se definirá la cohomología de De Rham, en éste capítulo se construirán además las aplicaciones lineales entre dichos espacios vectoriales. Una vez teniendo ésto, se podrán conformar las cadenas complejas de la misma forma en que se trabajaron en el capítulo 3, y asi, definir de esta manera su cohomología.

5.1. Complejo de De Rham

En resumen, de lo visto anteriormente, será de gran utilidad el hecho de haber introducido un álgebra anticonmutativa $\mathbf{\Omega}^p(\mathbf{U})$ con un diferencial, de tal manera que, $d : \mathbf{\Omega}^p(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p+1}(\mathbf{U})$, $d \circ d = 0$ y siendo d derivación, esto es, que satisface la fórmula dada en el lema 4.9. Así, se dice que $(\mathbf{\Omega}^p(\mathbf{U}), d)$ es un álgebra diferencial graduada, y se llamará el **complejo de De Rham de U**.

Teorema 5.1 *Existe un único operador lineal* $d : \mathbf{\Omega}^p(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p+1}(\boldsymbol{U})$*,* $p = 0, 1, 2...$*, tal que*

I. *Si* $f \in \mathbf{\Omega}^0(\boldsymbol{U})$*, entonces* $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\epsilon_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\epsilon_n$

II. $d \circ d = 0$

III. *Si* $\boldsymbol{\omega}_1 \in \mathbf{\Omega}^p(\boldsymbol{U})$ *y* $\boldsymbol{\omega}_2 \in \mathbf{\Omega}^q(\boldsymbol{U})$ *entonces* $d(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) = d\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + (-1)^p\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2$

Demostración: Ya se tiene definido el operador d que satisface dichas propiedades, se quiere ver ahora, que este operador es único. Sea d' un operador que satisface I, II, y III. Se mostrará que d' es precisamente, el diferencial exterior.
La primera propiedad dice que $d = d'$ en $\mathbf{\Omega}^0(\mathbf{U})$, puesto que, para $f \in \mathbf{\Omega}^0(\mathbf{U})$

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\epsilon_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\epsilon_n = df.$$

En particular, $d'x_i = dx_i$, para la i-ésima proyección $x_i : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sigue del ejemplo 4.5 que $d'x_i = \epsilon_i$ es la función constante. Como $d' \circ d' = 0$ se tiene que $d'\epsilon_i = 0$, y por III, se tiene que $d'\epsilon_I = d'(d'x_I) = 0$.
Sea $\boldsymbol{\omega} = f\epsilon_I = f \wedge \epsilon_I$, $f \in C^\infty(\mathbf{U}, \mathbf{R})$.Entonces

$$
\begin{aligned}
& d'\boldsymbol{\omega} \\
= & \quad \langle \text{ Por III } \rangle \\
& d'f \wedge \epsilon_I + f \wedge d'\epsilon_I \\
= & \quad \langle\ d'x_i = \epsilon_i; d' \circ d' = 0\ \rangle \\
& d'f \wedge \epsilon_I \\
= & \quad \langle\ d = d' \text{ en } \boldsymbol{\Omega}^0\ \rangle \\
& df \wedge \epsilon_I \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad de } d\ \rangle \\
& d\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Ya que cada p-forma diferencial es combinación lineal de p-formas especiales en las que d y d' coinciden, se tiene que $d = d'$ en todo $\boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$.

Ejemplo 5.1 *Para un conjunto abierto $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{R}^3$, $d : \boldsymbol{\Omega}^1(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{U})$ está dado por*

$$
\begin{aligned}
& d(f_1\epsilon_1 + f_2\epsilon_2 + f_3\epsilon_3) \\
= & \quad \langle\ d \text{ es lineal por propiedad III } \rangle \\
& df_1 \wedge \epsilon_1 + df_2 \wedge \epsilon_2 + df_3 \wedge \epsilon_3 \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\
& \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\epsilon_1 + \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\epsilon_2 + \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\epsilon_3\right) \wedge \epsilon_1 \\
& + \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\epsilon_1 + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\epsilon_2 + \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\epsilon_3\right) \wedge \epsilon_2 \\
& + \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}\epsilon_1 + \tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}\epsilon_2 + \tfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\epsilon_3\right) \wedge \epsilon_3 \\
= & \quad \langle\ \epsilon \wedge \epsilon = 0; \epsilon \wedge \epsilon' = -\epsilon' \wedge \epsilon\ \rangle \\
& \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\epsilon_2 \wedge \epsilon_3 \\
& + \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\epsilon_1 \wedge \epsilon_3.
\end{aligned}
$$

Definición 5.1 *El p-ésimo **grupo cohomológico de De Rham** es el espacio vectorial cociente*

$$
H^p(\boldsymbol{U}) = \frac{\operatorname{Ker}(d : \boldsymbol{\Omega}^p(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^{p+1}(\boldsymbol{U}))}{\operatorname{Im}(d : \boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^p(\boldsymbol{U}))}. \tag{1}
$$

En particular $H^p(\mathbf{U}) = 0$ para $p < 0$, y $H^0(\mathbf{U})$ es el núcleo de

$$
d : C^\infty(\mathbf{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^1(\mathbf{U}),
$$

Que no es otro espacio que el de aplicaciones $f \in C^\infty(\mathbf{U}, \mathbb{R})$ con derivadas parciales nulas. Este es precisamente el espacio de aplicaciones localmente constantes.

La definición dada anteriormente, esta completamente relacionada con la que se da en el capítulo 3 (definición 3.5), en la que se define el espacio cohomológico como el espacio cociente entre el núcleo y la imágen de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. En esta oportunidad, la definición que se da, se refiere al grupo cohomológico de De Rham como el espacio cociente entre el núcleo y la imágen de la aplicación d (derivada exterior) entre espacios vectoriales de p-formas diferenciales.

Los elementos $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ tales que $d\,\boldsymbol{\omega} = 0$ serán llamados **p-formas cerradas** y los elementos $\boldsymbol{\omega} \in \operatorname{Im} d = d(\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})) \subset \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ se llamarán **p-formas exactas**. Así, el grupo cohomológico de De Rham, mide si una p-forma cerrada es una p-forma exacta. La circunstancia en que toda forma cerrada es exacta se cumple cuando $H^p(\mathbf{U}) = 0$.

Nótese que, por la manera en que se ha definido d, toda p-forma exacta, es una p-forma cerrada. En efecto, sea $\boldsymbol{\omega} \in d(\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})) \subset \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$, entonces existe una p-forma $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})$ tal que $d\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega}$. Entonces $d\,\boldsymbol{\omega} = d(d\boldsymbol{\alpha}) = 0$ ya que $d \circ d = 0$. La clase de cohomología $[\boldsymbol{\omega}]$ de una p-forma cerrada $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{U})$ está dada explicitamente por

$$[\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\omega} + d\,\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U}) \in H^p(\mathbf{U}),$$

y $[\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{\omega}']$ si y sólo si $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'$ es exacta. En efecto,

$$\begin{aligned}
& [\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{\omega}'] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Propiedad de las clases de equivalencia } \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} \in [\boldsymbol{\omega}'] \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de clase de equivalencia } \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + v \ \text{ para algún } \ v \in d(\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})) \\
\equiv \quad & \langle \ \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}' = v \ \text{ para algún } \ v \in d(\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})) \\
\equiv \quad & \langle \ v \in d(\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U})) \ \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}' \in d\,\boldsymbol{\Omega}^{p-1}(\mathbf{U}) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de exacta } \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}' \ \text{ es exacta.}
\end{aligned}$$

Definición 5.2 *Definimos un producto bilineal, asociativo y anticonmutativo entre clases de cohomología*

$$\wedge : H^p(\boldsymbol{U}) \times H^q(\boldsymbol{U}) \longrightarrow H^{p+q}(\boldsymbol{U}) \tag{2}$$

por $[\boldsymbol{\omega}_1] \wedge [\boldsymbol{\omega}_2] = [\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2]$.

Este producto está bien definido ya que,

$$
\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_1 + d\eta_1) \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 + d\eta_2) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } \wedge \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + d\eta_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2 \\
= \quad & \langle\ \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_{\in} \operatorname{Ker} d \Rightarrow d\,\boldsymbol{\omega}_1 = d\,\boldsymbol{\omega}_2 = 0 \ \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + d\eta_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\eta_2 + d\eta_1 \wedge d\eta_2 \\
& +(-1)^p \eta_1 \wedge d\,\boldsymbol{\omega}_2 + (-1)^p d\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \eta_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge d\eta_2 \\
& + d\eta_1 \wedge d\eta_2 + (-1)^p \eta_1 \wedge d(d\eta_2) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } d \text{ sobre } \wedge \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + d(\eta_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + (-1)^p\, \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \eta_2 + \eta_1 \wedge d\eta_2)
\end{aligned}
$$

Así el producto exterior entre elementos de $[\boldsymbol{\omega}_1]$ y $[\boldsymbol{\omega}_2]$, es un elemento de $[\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2]$, se tiene entonces, que el producto entre clases de cohomología, esta bien definido.

5.2. Aplicaciones entre espacios de cohomología

Ya habiendo definido el grupo cohomológico de De Rham, en esta sección se hará un estudio más profundo sobre las aplicaciones entre éstos. Todo esto para construir cadenas (como las trabajadas en el capítulo 3) entre espacios vectoriales de clases de p-formas diferenciales.

Sea $\phi : \mathbf{U}_1 \longrightarrow \mathbf{U}_2$ una función entre conjuntos abiertos $\mathbf{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ de clase C^∞, se quiere construir un funtor contravariante (vease definición 2.11) tal que la aplicación lineal

$$H^p(\phi) : H^p(\mathbf{U}_2) \longrightarrow H^p(\mathbf{U}_1)$$

cumpla que

$$H^p(\phi_1 \circ \phi_2) = H^p(\phi_1) \circ H^p(\phi_2), \qquad H^p(id) = id. \tag{3}$$

Para esto, se va a definir un funtor contravariante sobre los espacios $\boldsymbol{\Omega}^p$.

Definición 5.3 *El morfismo inducido*

$$\boldsymbol{\Omega}^p(\phi) : \boldsymbol{\Omega}^p(\boldsymbol{U}_2) \longrightarrow \boldsymbol{\Omega}^p(\boldsymbol{U}_1),$$

esta definido por

1. $\boldsymbol{\Omega}^p(\phi)(\boldsymbol{\omega})_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) = \boldsymbol{\omega}_{\phi(x)}(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_1), ..., D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_p))$
2. $\boldsymbol{\Omega}^0(\phi)(\boldsymbol{\omega})_x = \boldsymbol{\omega}_{\phi(x)}$

En adelante, cuando no haya lugar a dudas entre $\boldsymbol{\Omega}^p(\phi)$ y $\boldsymbol{\Omega}^0(\phi)$, por practicidad en la escritura, se denotará la aplicación como ϕ^*.

Veamos que ϕ^* satisface las condiciones de funtor contravariante dadas en la definición 2.11. En efecto, usando regla de la cadena,

$$D_x(\psi \circ \phi) = D_{\phi(x)}(\psi) \circ D_x(\phi)$$

Para $\phi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$, se tiene que

$$\begin{aligned}
& (\psi \circ \phi)^*(\boldsymbol{\omega})_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } * \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_{\psi(\phi(x))}(D_x(\psi \circ \phi)(\boldsymbol{\xi}_1), ..., D_x(\psi \circ \phi)(\boldsymbol{\xi}_p)) \\
= \quad & \langle \text{ regla de la cadena } \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_{\psi(\phi(x))}(D_{\phi(x)}\psi(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_1)), ..., D_{\phi(x)}\psi(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_p)) \\
= \quad & \langle \text{ definición de } * \rangle \\
& \psi^*(\boldsymbol{\omega})_{\phi(x)}(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_1), .., D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_p)) \\
= \quad & \langle \text{ definición de } * \rangle \\
& \phi^*(\psi^*(\boldsymbol{\omega})_{\phi(x)})_x(\boldsymbol{\xi}_1, .., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de composición entre } * \rangle \\
& (\phi^* \circ \psi^*)(\boldsymbol{\omega})_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p)
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene la primera condición de los funtores contravariantes. Además,

$$\begin{aligned}
& \phi^*(id_{\mathbf{U}})(\boldsymbol{\omega})_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } * \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_{id_{\mathbf{U}}(x)}(D_x id_{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_1), ..., D_x id_{\mathbf{U}}(\boldsymbol{\xi}_p)) \\
= \quad & \langle \text{ La derivada de la idéntica es la idéntica } \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_p)
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2 *Para la 1-forma constante $\epsilon_i \in \boldsymbol{\Omega}^q(U_2)$, sea $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\begin{aligned}
& \phi^*(\epsilon_j)_x(\boldsymbol{\zeta}) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } * \rangle \\
& (\epsilon_j)_{\phi(x)}(D_x\phi(\boldsymbol{\zeta})) \\
= \quad & \langle\ \epsilon_j \text{ es constante } \rangle \\
& \epsilon_j(D_x\phi(\boldsymbol{\zeta})) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de derivada } \rangle \\
& \epsilon_i\left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}\zeta_i\right) e_k\right) \\
= \quad & \langle\ \epsilon_j(e_k) = \delta_{ik} \ \rangle \\
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\zeta_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
= & \langle\ \epsilon_i(\boldsymbol{\zeta}) = \zeta_i\ \rangle \\
 & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \epsilon_i(\boldsymbol{\zeta}) \\
= & \langle\ \text{Definición de } d\ \rangle \\
 & d\phi_i(\boldsymbol{\zeta})
\end{array}
$$

Teorema 5.2 *Con la definición 5.3, el operador lineal ϕ^* satisface las siguientes tres condiciones*

(I) $\phi^*(\omega \wedge \tau)_x = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$

(II) $\phi^*(f) = f \circ \phi$ *si* $f \in \mathbf{\Omega}^0(U_2)$

(III) $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Demostración: Sea $x \in U_1$ y sean $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}$ vectores en $\mathbb{R}^n$.

(I) Se tiene entonces que

$$
\begin{array}{ll}
 & \phi^*(\omega \wedge \tau)_x(\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_{p+q}) \\
= & \langle\ \text{Definición de } *\ \rangle \\
 & (\omega \wedge \tau)_{\phi(x)}(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_1), ..., D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_{p+q})) \\
= & \langle\ \text{Definición de } \wedge\ \rangle \\
 & \sum sign(\sigma)[\boldsymbol{\omega}_{\phi(x)} \left(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}), ..., D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)})\right) \\
 & \qquad \cdot \tau_{\phi(x)} \left(D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}), ..., D_x\phi(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)})\right)] \\
= & \langle\ \text{Definición de } *\ \rangle \\
 & \sum sign(\sigma)\phi^*(\boldsymbol{\omega})_x \left(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p)}\right) \cdot \phi^*(\tau)_x \left(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}\right) \\
= & \langle\ \text{Definición de } \wedge\ \rangle \\
 & (\phi^*(\boldsymbol{\omega})_x \wedge \phi^*(\tau)_x) \left(\boldsymbol{\xi}_{\sigma(1)}, ..., \boldsymbol{\xi}_{\sigma(p+q)}\right)
\end{array}
$$

Queda entonces demostrada la parte (I), cuando $p, q > 0$. La demostración para $p = q = 0$, es análoga a la anterior.

(II) Se tiene por la definición de ϕ^* de grado 0.

(III) Se mostrará primero, que $d\phi^*(f) = \phi^*(df)$ cuando $f \in \mathbf{\Omega}^0(U_2)$. Se tiene, por el ejemplo 4.5, que

$$
df = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \wedge \epsilon_k,
$$

cuando ϵ_k es considerado como un elemento en $\mathbf{\Omega}^1(U_2)$ con valor constante ϵ_k. Por (I) y (II), se tiene que

$$
\begin{array}{cl}
& \phi^*(df) \\
= & \quad \langle\ \phi^* \text{ es lineal propiedad I}\ \rangle \\
& \sum_{k=1}^m \phi^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \wedge \phi^*(\epsilon_k) \\
= & \quad \langle\ \text{Ejemplo 5.2}\ \rangle \\
& \sum_{k=1}^m \phi^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}\epsilon_i\right) \\
= & \quad \langle\ \text{propiedad II}\ \rangle \\
& \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi\right)\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}\right)\epsilon_i \\
= & \quad \langle\ \text{Agrupando sumas}\ \rangle \\
& \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi\right)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}\right)\epsilon_I \\
= & \quad \langle\ \text{Regla de la cadena}\ \rangle \\
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f\circ\phi)}{\partial x_i}\epsilon_i \\
= & \quad \langle\ \text{Definición de } d\ \rangle \\
& d(f \circ \phi) \\
= & \quad \langle\ \text{Propiedad II}\ \rangle \\
& d(\phi^*(f)).
\end{array}
$$

En el caso en que $\boldsymbol{\omega} = f\epsilon_I = f \wedge \epsilon_I$,

$$
\begin{array}{cl}
& \phi^*(d\,\boldsymbol{\omega}) \\
= & \quad \langle\ d(f \wedge \epsilon_I) = df \wedge \epsilon_I\ \ \rangle \\
& \phi^*(df \wedge \epsilon_I) \\
= & \quad \langle\ \text{Propiedad I}\ \rangle \\
& \phi^*(df) \wedge \phi^*(\epsilon_I) \\
= & \quad \langle\ \text{Caso anterior}\ \rangle \\
& d(\phi^*(f)) \wedge \phi^*(\epsilon_I) \\
= & \quad \langle\ d\phi^*(\epsilon_I) = 0\ \rangle \\
& d(\phi^*(f) \wedge \phi^*(\epsilon_I)) \\
= & \quad \langle\ \text{Propiedad I}\ \rangle \\
& d(\phi^*(f \wedge \epsilon_I)) \\
= & \quad \langle\ \boldsymbol{\omega} = f\epsilon_I\ \rangle \\
& d(\phi^*(\boldsymbol{\omega})).
\end{array}
$$

Así, se tiene que,

$$\begin{array}{rl} & d\phi^*(\epsilon_I) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \epsilon_I \ \rangle \\ & d(\phi^*(\epsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon_{i_p}) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\ & d(\phi^*(\epsilon_{i_1}) \wedge ... \wedge \phi^*(\epsilon_{i_p})) \\ = & \quad \langle \text{ Ejemplo 5.2 } \rangle \\ & d(d\phi_{i_1} \wedge ... \wedge d\phi_{i_p}) \\ = & \quad \langle \ d \circ d = 0 \ \rangle \\ & 0. \end{array}$$

Q.E.D

Como se vio anteriormente, $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, es base para $\mathbf{\Omega}^p$, en adelante se usará esa notación, en véz de la p-forma constante $\epsilon_I = \epsilon_{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon_{i_p}$.
Así, una p-forma arbitraria, se escribirá como

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \sum f_I(x) dx_I.$$

Ejemplo 5.3 (I) *Se considerará la aplicación $\boldsymbol{\gamma} : (a, b) \to U$, una curva suave en U, tal que $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, y sea*

$$\boldsymbol{\omega} = f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n$$

una 1-forma sobre U. Se tiene entonces que

$$\begin{array}{rl} & \boldsymbol{\gamma}^*(\boldsymbol{\omega}) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega} \ \rangle \\ & \boldsymbol{\gamma}^*(f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\ & \boldsymbol{\gamma}^*(f_1) \wedge \boldsymbol{\gamma}^*(dx_1) + ... + \boldsymbol{\gamma}^*(f_n) \wedge \boldsymbol{\gamma}^*(dx_n) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad III } \rangle \\ & \boldsymbol{\gamma}^*(f_1) d(\gamma^*(x_1)) + ... + \boldsymbol{\gamma}^*(f_n) d(\gamma^*(x_n)) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad II } \rangle \\ & (f_1 \circ \boldsymbol{\gamma}) d(x_1 \circ \boldsymbol{\gamma}) + ... + (f_n \circ \boldsymbol{\gamma}) d(x_1 \circ \boldsymbol{\gamma}) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } x_i \ \rangle \\ & (f_1 \circ \boldsymbol{\gamma}) d\gamma_1 + ... + (f_n \circ \boldsymbol{\gamma}) d\gamma_n \\ = & \quad \langle \ d\gamma_j = \gamma_j' dt \ \rangle \\ & (f_1 \circ \boldsymbol{\gamma}) \gamma_1' dt + ... + (f_n \circ \boldsymbol{\gamma}) \gamma_n' dt \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
= & \quad \langle \text{ factorización } \rangle \\
& ((f_1 \circ \boldsymbol{\gamma})\gamma_1' + ... + (f_n \circ \boldsymbol{\gamma})\gamma_n')dt \\
= & \quad \langle \text{ Definición de producto escalar } \rangle \\
& \langle f \circ \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle dt.
\end{aligned}
$$

(II) *Sea $\phi : U_1 \to U_2$ una aplicación de clase C^∞ entre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Entonces se tiene, por el teorema 5.2, que*

$$
\begin{aligned}
& \phi^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_n) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\
& \phi^*(dx_1) \wedge ... \wedge \phi^*(dx_n) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad III } \rangle \\
& d\phi^*(x_1) \wedge ... \wedge d\phi^*(x_n) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad II } \rangle \\
& d(x_1 \circ \phi) \wedge ... \wedge d(x_n \circ \phi) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } x_i \text{ } \rangle \\
& d\phi_1 \wedge ... \wedge d\phi_n \\
= & \quad \langle \text{ Lema 4.6 } \rangle \\
& \det(D_x\phi)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5.4 *Si $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ está dada por $\phi(\boldsymbol{x}, t) = \psi(t)\boldsymbol{x}$, donde $\psi(t)$ es una función de clase C^∞, de valor real. Entonces, por el ejemplo 5.2, se tiene que*

$$
\begin{aligned}
& \phi^*(dx_i) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad III } \rangle \\
& d(\phi^*(x_i)) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad II } \rangle \\
& d(x_i \circ \phi) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } x_i \text{ } \rangle \\
& d\phi_i \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } \phi \text{ } \rangle \\
& d(\psi x_i) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } d \text{ } \rangle \\
& x_i\psi' dt + \psi dx_i.
\end{aligned}
$$

Estamos ahora preparados para definir un funtor contravariante sobre H^p. Sea $\phi : U_1 \to U_2$ una función de clase C^∞. Podemos definir la aplicación lineal

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \longrightarrow H^p(U_1)$$

por

$$H^p(\phi)[w] = [\phi^*(\boldsymbol{\omega})].$$

Hay que recordar que los elementos en H^p son clases de equivalencia, por lo que hay que verificar que esta definición no depende de la escogencia del representante. En efecto, si $v \in \boldsymbol{\Omega}^{p-1}(U_1)$ y $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(U_1)$

$$\begin{array}{ll} & \phi^*(\boldsymbol{\omega} + dv) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\ & \phi^*(\boldsymbol{\omega}) + \phi^*(dv) \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad III } \rangle \\ & \phi^*(\boldsymbol{\omega}) + d\phi^*(v) \end{array}$$

Y por lo tanto, $[\phi^*(\boldsymbol{\omega} + dv)] = [\phi^*(\boldsymbol{\omega})]$. Además,

$$\begin{array}{ll} & H^{p+q}(\phi)([\boldsymbol{\omega}_1] \wedge [\boldsymbol{\omega}_2]) \\ = & \quad \langle \text{ Producto exterior de clases } \rangle \\ & H^{p+q}(\phi)([\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2]) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \phi^* \ \rangle \\ & [\phi^*(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2)] \\ = & \quad \langle \text{ Propiedad I } \rangle \\ & [\phi^*(\boldsymbol{\omega}_1) \wedge \phi^*(\boldsymbol{\omega}_2)] \\ = & \quad \langle \text{ Producto exterior de clases } \rangle \\ & [\phi^*(\boldsymbol{\omega}_1)] \wedge [\phi^*(\boldsymbol{\omega}_2)] \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } \phi^* \ \rangle \\ & (H^p(\phi)[\boldsymbol{\omega}_1]) \wedge (H^q(\phi)[\boldsymbol{\omega}_2]) \end{array}$$

5.3. Lema de Poincaré (primera noción)

En esta sección, se enunciará y demostrará una primera noción del lema de Poincaré. Mas adelante, en el capitulo 6, se verá otra forma de este lema, un poco más general. Este lema es de vital importancia en el desarrollo de la topología algebraica, de allí sus varias aplicaciones. Para esta primera noción, se tienen que definir los conjuntos estrellados.

Definición 5.4 *Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es* ***estrellado*** *(o que tiene forma de estrella) con respecto al punto $x_0 \in U$, si el segmento*

$$\{tx_0 + (1-t)x : t \in [0,1]\}$$

está contenido completamente en U para todo $x \in U$

Ejemplo 5.5
- *Cualquier línea o plano en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto estrellado y también lo será cualquier subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.*
- *Una línea o un plano sin un punto, NO es un conjunto estrellado.*
- *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto*

$$B = \{ta : a \in A, t \in [0,1]\}$$

que se obtiene al conectar todos los puntos en A al origen, es un conjunto estrellado.

Teorema 5.3 (Lema de Poincaré) *Si U es un conjunto abierto y estrellado, entonces $H^p(U) = 0$ para $p > 0$, y $H^0(U) = \mathbb{R}$.*

Demostración: Se puede suponer que U es un conjunto estrellado con respecto al origen $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y queremos construir un operador lineal

$$S_p : \mathbf{\Omega}^p(U) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p-1}(U)$$

tal que $d \circ S_p + S_{p-1} \circ d = id$ cuando $p > 0$ y $S_1 \circ d = id - e$, donde $e(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(0)$ para $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{\Omega}^0(U)$. Nótese que un operador de este estilo se mencionó en la definición 3.9. La existencia de tal operador implica inmediatamente el teorema, ya que de éste se tiene que $d(S_p(\boldsymbol{\omega})) = \boldsymbol{\omega}$ para una p-forma cerrada, $p > 0$, de donde $[\boldsymbol{\omega}] = 0$. Si $p = 0$, se tiene que $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}(0) = S_1(d\boldsymbol{\omega}) = 0$ al ser $\boldsymbol{\omega}$ cerrada y por lo tanto $\boldsymbol{\omega}$ debe ser constante.

El siguiente es el procedimiento para construir S_p. Cada $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{\Omega}^p(U \times \mathbb{R})$ se puede escribir como

$$\boldsymbol{\omega} = \sum f_I(x,t)dx_I + \sum g_J(x,t)dt \wedge dx_J,$$

donde $I = (i_1, ..., i_p)$ y $J = (j_1, ..., j_{p-1})$. Entonces

$$\begin{array}{cl}
 & d\boldsymbol{\omega} \\
= & \langle \text{ Definición de } d \text{ y de } \boldsymbol{\omega} \ \rangle \\
 & \sum_{I,i} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x,t)dx_i \wedge dx_I + \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I \\
 & + \sum_{J,i} \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dx_i \wedge dt \wedge dx_J + \sum_J \frac{\partial g_J}{\partial t}(x,t)dt \wedge dt \wedge dx_J \\
= & \langle \ dt \wedge dt = 0;\ dx_i \wedge dt = -dt \wedge dx_i \ \rangle \\
 & \sum_{I,i} \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x,t)dx_i \wedge dx_I + \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)dt \wedge dx_I \\
 & - \sum_{J,i} \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dt \wedge dx_i \wedge dx_J
\end{array}$$

Definimos ahora el operador $\hat{S} : \mathbf{\Omega}^p(U \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p-1}(U)$ por

$$\hat{S}_p(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{J,i} \left(\int_0^1 g_J(x,t)dt \right) dx_J$$

Entonces

$$\hat{S}_{p+1}(d\boldsymbol{\omega}) = \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)dt \right) dx_I - \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dt \right) dx_i \wedge dx_J.$$

Y

$$\begin{aligned} d(\hat{S}_p(d\boldsymbol{\omega})) &= d\left(\sum_J \left(\int_0^1 g_J(x,t)dt \right) dx_J \right) \\ &= \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dt \right) dx_i \wedge dx_J. \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene,

$$\begin{aligned} d(\hat{S}_p(d\boldsymbol{\omega})) + \hat{S}_{p+1}(d\boldsymbol{\omega}) &= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)dt \right) dx_I && (4) \\ &= \sum_I f_I(x,1)dx_I - \sum_I f_I(x,0)dx_I. && (5) \end{aligned}$$

Ahora, sea $\phi : U \times \mathbb{R} \to U$, tal que, $\phi(x,t) = \psi(t)x$, donde $\psi(t)$ es una función de valor real de clase C^∞, tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \\ 1 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

y en otro caso se tendrá que $0 \leq \psi(t) \leq 1$. La existencia de ψ se puede consultar en [1]. Observese que para tal función $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$. Se define ahora,

$$S_p(\boldsymbol{\omega}) = \hat{S}_p(\phi^*(\boldsymbol{\omega})).$$

El diagrama de los operadores para esta demostración es el siguiente

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & \mathbf{\Omega}^{p+1}(U) \arrow[r, "S_{p+1}"] \arrow[d, "\phi^*"] & \mathbf{\Omega}^{p}(U) \arrow[r, "S_p"] \arrow[d, "\phi^*"] & \mathbf{\Omega}^{p-1}(U) \arrow[r, "S_{p-1}"] \arrow[d, "\phi^*"] & \ldots \\ \ldots & \mathbf{\Omega}^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \arrow[l] \arrow[ur, "\hat{S}_{p+1}"] & \mathbf{\Omega}^{p}(U \times \mathbb{R}) \arrow[l, "d"'] \arrow[ur, "\hat{S}_p"] & \mathbf{\Omega}^{p-1}(U \times \mathbb{R}) \arrow[l, "d"'] & \ldots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Supongase que $\boldsymbol{\omega} = \sum h_I(x)dx_I$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} & \phi^*(\boldsymbol{\omega}) \\ = \quad & \langle \text{ Definición de } \phi^* \rangle \\ & \textstyle\sum_I \phi^*(h_I(x)dx_I) \\ = \quad & \langle \text{ Propiedad II, Teorema 5.2 } \rangle \\ & \textstyle\sum_I (h_I \circ \phi)(x,t)\phi^*(dx_I) \\ = \quad & \langle \text{ Definición de } * \rangle \\ & \textstyle\sum_I h_I(\psi(t)x)(d\psi(t)x_{i_1} + \psi(t)dx_{i_1}) \wedge \ldots \\ & \ldots \wedge (d\psi(t)x_{i_p} + \psi(t)dx_{i_p}) \end{aligned}$$

Usando (5) y (6) con $\phi^*(\boldsymbol{\omega})$ en lugar de $\boldsymbol{\omega}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
& d(S_p(\boldsymbol{\omega})) + S_{p+1}(d\,\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } S \ \rangle \\
& d(\hat{S}_p(\phi^*(\boldsymbol{\omega}))) + \hat{S}_{p+1}(\phi^*(d\,\boldsymbol{\omega})) \\
= \quad & \langle\ \phi^* d = d\phi^* \ \rangle \\
& d(\hat{S}_p(\phi^*(\boldsymbol{\omega}))) + \hat{S}_{p+1}(d(\phi^*(\boldsymbol{\omega}))) \\
= \quad & \langle \text{ Por (5) y (6) } \rangle \\
& \textstyle\sum_I h_I(\psi(1)x)\psi(1)^p dx_I \\
& -\textstyle\sum_I h_I(\psi(0)x)\psi(0)^p dx_I \\
= \quad & \langle\ \psi(1) = 1; \psi(0) = 0 \ \rangle \\
& \textstyle\sum_I h_I(x) dx_I \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega} \ \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

En resumen $S_p : \boldsymbol{\Omega}^p(U) \to \boldsymbol{\Omega}^{p-1}(U)$ es un operador tal que

$$d(S_p(\boldsymbol{\omega})) + S_{p+1}(d\,\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}$$

para $p > 0$, y $d(S_p(\boldsymbol{\omega})) + S_{p+1}(d\,\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}(x) - \boldsymbol{\omega}(0)$ para $p = 0$, por lo que queda demostrado el lema de Poincaré. **Q.E.D**

Capítulo 6

LA SUCESIÓN DE MAYER-VIETORIS

En éste capítulo se introducirá una técnica de mucha utilidad para el cálculo de la cohomología de De Rham conocida como la sucesión de Mayer-Vietoris. Ésta consiste en trasladar todo el trabajo realizado sobre cadenas exactas en el capítulo tres, a los espacios cohomológicos H^p. Será de vital importancia tener en cuenta algunos resultados vistos anteriormente, como el lema de Poincaré y los funtores contravariantes.
Para hacer el estudio de la sucesión, se comenzará definiendo algunas aplicaciones lineales útiles para el desarrollo de los teoremas de los que se harán uso.
En este capitulo, como antes, U_1 y U_2 serán conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y su unión será $U = U_1 \cup U_2$.

Para $v = 1, 2$ se definirán las aplicaciones

$$i_v : U_v \to U \quad y \quad j_v : U_1 \cap U_2 \to U_v$$

como las correspondientes inclusiones. Para verlo de manera mas clara, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U_1 \arrow[dr, "i_1"] & \\
U_1 \cap U_2 \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & & U_1 \cup U_2 \\
 & U_2 \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Estas inclusiones definen las aplicaciones $I^p : \mathbf{\Omega}^p(U) \to \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2)$ y $J^P : \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2) \to \mathbf{\Omega}^p(U_1 \cap U_2)$ dadas por

$$I^p(\boldsymbol{\omega}) = (i_1^*(\boldsymbol{\omega}), i_2^*(\boldsymbol{\omega})) \quad y \quad J^p(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = j_1^*(\boldsymbol{\omega}_1) - j_2^*(\boldsymbol{\omega}_2)$$

respectivamente, donde i^* y j^* son los funtores contravariantes correspondientes a i

y j. Es decir, visto en un diagrama, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{\Omega}^p(U_1) \arrow[dl, "j_1^*"'] & \\
\mathbf{\Omega}^p(U_1 \cap U_2) & \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2) \arrow[l, "J^p"'] & \mathbf{\Omega}^p(U_1 \cup U_2) \arrow[l, "I^p"'] \arrow[ul, "i_i^*"'] \arrow[dl, "i_2^*"] \\
 & \mathbf{\Omega}^p(U_2) \arrow[ul, "j_1^*"] &
\end{tikzcd}$$

Estos functores contravariantes en los espacios $\mathbf{\Omega}^p$, por ser inclusiones, y por lo visto en el capítulo 5, estan bien definidos. Teniendo ésto claro, ya se puede enunciar el primer teorema:

Teorema 6.1 *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathbf{\Omega}^p(U) \xrightarrow{I^p} \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2) \xrightarrow{J^p} \mathbf{\Omega}^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

es exacta.

Demostración: Para una aplicación $\phi : V \to W$ de clase C^∞ y una p-forma $\boldsymbol{\omega} = \sum f_I dx_I \in \mathbf{\Omega}^p(W)$, se tiene, por lo visto en el capítulo 5, que

$$\phi^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_I (f_I \circ \phi) d\phi_{i_1} \wedge ... \wedge d\phi_{i_p}.$$

En particular, si ϕ es una inclusión de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\phi_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, entonces

$$d\phi_{i_1} \wedge ... \wedge d\phi_{i_p} = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}.$$

Y así,

$$\phi^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum_I (f_I \circ \phi) dx_I. \tag{2}$$

Esto se usará en el caso en que $\phi = i_v, j_v, v = 1, 2$.
Para ver que (1) es exacta, como se vió en el capítulo 3, se tiene que ver que I^p es inyectiva, J^p sobreyectiva, y que $\operatorname{Im} I^p = \operatorname{Ker} J^p$.
Para ver que I^p es inyectiva, comprobemos que $I^p(\boldsymbol{\omega}) = 0$ implica que $\boldsymbol{\omega} = 0$. Si $I^p(\boldsymbol{\omega}) = 0$, entonces, $i_1^*(\boldsymbol{\omega}) = 0 = i_2^*(\boldsymbol{\omega})$, y por (2),

$$
\begin{aligned}
& I^p(\boldsymbol{\omega}) = 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } I^p \rangle \\
& (i_1^*(\boldsymbol{\omega}), i_2^*(\boldsymbol{\omega})) = (0,0) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Igualdad en suma directa } \rangle \\
& i_1^*(\boldsymbol{\omega}) = 0 \;\; \wedge \;\; i_2^*(\boldsymbol{\omega}) = 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ por (2) } \rangle \\
& \textstyle\sum_I (f_I \circ i_1) dx_I = 0 \;\; \wedge \;\; \sum_I (f_I \circ i_2) dx_I = 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Coeficientes de formas nulas } \rangle \\
& f_I \circ i_1 = 0 \;\; \wedge \;\; f_I \circ i_2 = 0 \;\text{ Para todo }\; I \\
\equiv \quad & \langle\; U = U_1 \cup U_2 \;\rangle \\
& f_I = 0 \;\text{ para todo }\; I \\
\equiv \quad & \langle \text{ Coeficientes nulos de formas nulas } \rangle \\
& \textstyle\sum_I f_I dx_I = 0 \\
\equiv \quad & \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega} \rangle \\
& \boldsymbol{\omega} = 0
\end{aligned}
$$

$\operatorname{Im} I^p \subseteq \operatorname{Ker} J^p$. En efecto, sea $j : U_1 \cap U_2 \to U$ la inclusión de $U_1 \cap U_2$ en U, observese que $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2 = j$. Entonces

$$
\begin{aligned}
& J^p \circ I^p(\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle \text{ Composición de funciones } \rangle \\
& J^p(I^p(\boldsymbol{\omega})) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } I^p \rangle \\
& J^p(i_1^*(\boldsymbol{\omega}), i_2^*(\boldsymbol{\omega})) \\
= \quad & \langle \text{ Definición de } J^p \rangle \\
& j_1^* i_1^*(\boldsymbol{\omega}) - j_2^* i_2^*(\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle\; i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2 = j \;\rangle \\
& j^*(\boldsymbol{\omega}) - j^*(\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle \text{ resta de iguales } \rangle \\
& 0
\end{aligned}
$$

con lo que $\operatorname{Im} I^p \subseteq \operatorname{Ker} J^p$. $\operatorname{Ker} J^p \subseteq \operatorname{Im} I^p$. En efecto, sean

$$
\boldsymbol{\omega}_1 = \sum f_I dx_I, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \sum g_I dx_I.
$$

p-formas diferenciales en U_1 y U_2, respectivamente. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \in \operatorname{Ker} J^p \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Ker} \rangle \\
& J^p(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = 0 \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } J^p \rangle \\
& j_1^*(\boldsymbol{\omega}_1) = j_2^*(\boldsymbol{\omega}_2) \\
\equiv & \quad \langle \text{ por (2) } \rangle \\
& f_I \circ j_1 = g_I \circ j_2 \;\text{ para todo }\; I \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } j_1 \text{ y } j_2 \rangle \\
& f_I(x) = g_I(x) \;\text{ para todo }\; I \;\text{ y para todo }\; x \in U_1 \cap U_2
\end{aligned}$$

Definiendo ahora las funciones $h_I : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^∞ por

$$h_I = \begin{cases} f_I(x) & x \in U_1 \\ \\ g_I(x) & x \in U_2. \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
& (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = I^p \left(\textstyle\sum_I h_I dx_I \right) \\
\equiv & \quad \langle \text{ Definición de } \operatorname{Im} \rangle \\
& (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \in \operatorname{Im} I^p,
\end{aligned}$$

y así, $\operatorname{Ker} J^p \subseteq \operatorname{Im} I^p$. Por lo que se tiene que $\operatorname{Ker} J^p = \operatorname{Im} I^p$.
Queda ahora ver que J^p es sobreyectiva. Para ésto, se usará la partición de la unidad $\{p_1, p_2\}$ (vease capítulo 2, sección 2.5) con soporte en $\{U_1, U_2\}$, las funciones

$$p_v : U \longrightarrow [0,1], \quad v = 1, 2$$

son de clase C^∞ tales que $\mathbf{supp}_U(p_v) \subset U_v$, y $p_1(x) + p_2(x) = 1$ para todo $x \in U$.
Usamos $\{p_1, p_2\}$ para extender $f : U_1 \cap \mathbf{U}_2 \to \mathbb{R}$ a U_1 y a U_2 de la siguiente manera:
Como $\mathbf{supp}_U(p_1) \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2$ se pueden definir funciones

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x)p_1(x) & si \quad\quad x \in U_1 \cap U_2 \\ \\ 0 & si \quad x \in U_2 - \mathbf{supp}_U(p_1). \end{cases}$$

y

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)p_2(x) & si \quad\quad x \in U_1 \cap U_2 \\ \\ 0 & si \quad x \in U_1 \cap U_2 - \mathbf{supp}_U(p_2). \end{cases}$$

Nótese que $f_1 \circ j_1 - f_2 \circ j_2 = f$ porque $p_1(x) + p_2(x) = 1$.

Para una forma diferencial $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}^p(U_1 \cap U_2)$, $\boldsymbol{\omega} = \sum f_I dx_I$, se puede aplicar lo anterior a cada una de las funciones $f_I : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$. Esto produce las funciones

$f_{I,v} : U_v \to \mathbb{R}$, y así, las formas diferenciales $\boldsymbol{\omega}_v = \sum f_{I,v} dx_I \in \mathbf{\Omega}^p(U_v)$. Con ésta escogencia, $J^p(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\omega}$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
& J^p(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } J^p \rangle \\
& j_1^*(\boldsymbol{\omega}_1) - j_2^*(\boldsymbol{\omega}_2) \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega}_1 \text{ y } \boldsymbol{\omega}_2 \rangle \\
& j_1^* \left(\textstyle\sum_I (f_1)_I dx_I\right) - j_2^* \left(\textstyle\sum_I (f_2)_I dx_I\right) \\
= & \quad \langle \text{ Propiedades de } * \rangle \\
& \textstyle\sum_I ((f_1)_I \circ j_1) dx_I - \sum_I ((f_2)_I \circ j_2) dx_I \\
= & \quad \langle \text{ Suma de formas diferenciales } \rangle \\
& \textstyle\sum (((f_1)_I \circ j_1) - ((f_2)_I \circ j_2)) dx_I \\
= & \quad \langle \text{ Propiedad de } (f_v)_I \rangle \\
& \textstyle\sum_I f_I dx_I \\
= & \quad \langle \text{ Definición de } \boldsymbol{\omega} \rangle \\
& \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Q.E.D

Debido a como se definieron las aplicaciones cadena en el capítulo 3 (definición 3.6), es claro que las aplicaciones $I^p : \mathbf{\Omega}^p(U) \to \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2)$ y $J^P : \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2) \to \mathbf{\Omega}^p(U_1 \cap U_2)$, lo son, con lo que la cadena dada en el teorema 6.1 es una sucesión de cadenas exactas. Así, por teorema 3.1, se puede obtener una sucesión de cadenas exactas largas de espacios vectoriales de cohomologías. Finalmente, el lema 3.7 se puede adaptar a los espacios cohomológicos, de tal manera que

$$H^q(\mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2)) = H^q(\mathbf{\Omega}^p(U_1)) \oplus H^q(\mathbf{\Omega}^p(U_2)).$$

Así, se ha probado entonces el teorema de Mayer-Vietoris,

Teorema 6.2 (de Mayer-Vietoris) *Sean U_1 y U_2 conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $U = U_1 \cup U_2$. Existe una sucesión exacta de espacios vectoriales de cohomología*

$$\ldots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \ldots$$

Acá, $I^*([\boldsymbol{\omega}]) = (i_1^*[\boldsymbol{\omega}], i_2^*[\boldsymbol{\omega}])$ y $J^*([\boldsymbol{\omega}_1], [\boldsymbol{\omega}_2]) = j_1^*[\boldsymbol{\omega}_1] - j_2^*[\boldsymbol{\omega}_2]$ en la notación del teorema 6.1.

Nótese que por el lema 3.7 y por el hecho de que $I^p : \mathbf{\Omega}^p(U_1 \cup U_2) \to \mathbf{\Omega}^p(U_1) \oplus \mathbf{\Omega}^p(U_2)$ es un isomorfismo, da entonces que

$$I^* : H^p(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

es un isomorfismo.

El siguiente ejemplo, es una de las aplicaciones que tiene el teorema de Mayer-Vietoris para calcular el espacio cohomológico de un conjunto. En el siguiente capítulo se darán mas aplicaciones.

Ejemplo 6.1 *El espacio vectorial cohomológico de De Rham del plano perforado* $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Sean

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^2 - \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \\ U_2 &= \mathbb{R}^2 - \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, x_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Nótese que U_1 es todo el plano $\mathbb{R}^2$ sin el eje no negativo de las abcisas, mientras que U_2 es todo el plano, sin el eje no positivo de las abcisas.

Estos conjuntos son estrellados (vease definición 5.4) por lo que $H^p(U_1) = H^p(U_2) = 0$ para $p > 0$ y $H^0(U_1) = H^0(U_2) = \mathbb{R}$. Su intersección,

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 - \mathbb{R} = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_-$$

es la unión disjunta de los semiplanos $x_2 > 0$ y $x_2 < 0$. Así, por ser una unión, se permite usar la observación anterior, y por el lema de Poincaré (lema 5.3), se tiene

$$H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p > 0 \\ \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & si \quad p = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Además, de la sucesión de Mayer Vietoris se tiene que la cadena

$$\ldots \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*}$$

$$H^{p+1}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{I^*} H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2) \longrightarrow \ldots$$

es exacta. Ahora, para $p > 0$,

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \longrightarrow 0$$

es exacta, por ser ∂^* un isomorfismo, y $H^q(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = 0$ para $q \geq 2$ de acuerdo con (3). Si $p = 0$, se tiene la sucesión exacta,

$$H^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0}$$

$$H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{I^1} H^1(U_1) \oplus H^1(U_2).$$

Ya que $H^{-1}(U) = 0$ para todo conjunto abierto, se tiene que I^0 es inyectiva. Tambiém, como $H^1(U_v) = 0$, ∂^* es sobreyectiva, y así, la sucesión anterior es exacta y puese reducirse a

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \to 0.$$

de donde, por (3), se tiene que

$$H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

y también

$$H^0(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Sin embargo, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es conexo, y así, $H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{R}$, y por ser I^0 inyectiva, se tiene que $\operatorname{Im} I^0 \cong \mathbb{R}$. Por ser la cadena anterior exacta, $\operatorname{Ker} J^0 \cong \mathbb{R}$, así, J^0 tiene rango 1. Además $\operatorname{Im} J^0 \cong \mathbb{R}$ y una vez más, por ser exacta,

$$\partial : H^0(U_1 \cap U_2)/\operatorname{Im} J^0 \overset{\cong}{\to} H^1(\mathbb{R} - \{0\}).$$

Entonces, como $H^0(U_1 \cap U_2)/\operatorname{Im} J^0 \cong \mathbb{R}$, se ha mostrado que,

$$H^p(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \begin{cases} 0 & si \quad p \geq 2 \\ \mathbb{R} & si \quad p = 1 \\ \mathbb{R} & si \quad p = 0. \end{cases}$$

Queda así calculado el espacio cohomológico para el plano perforado $\mathbb{R} - \{0\}$, más adelante se verá el caso en que no solo se quite un punto del plano, sino un conjunto de puntos.

Capítulo 7

APLICACIONES DE LA COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

Hasta acá, el trabajo que se ha hecho, ha tenido el fin de construir el espacio cohomológico de De Rham con mucho detalle, deduciendo asi, resultados importantes en la geometría topológica. El objetivo ahora de esta sección, será poner en practica los resultados hasta acá vistos, aunque para esto, será adecuado, brindar algunos resultados, de gran importancia también, como son los de homotopía en la cohomología de De Rham. Algunos de estos resultados, estarán relacionados con los que se vieron en la sección 2.4 de este trabajo. Para los que no se haga una descripción explicita de su demostración, éstas pueden encontrarse en [1], [10], o en [11].[12]
Un primer resultado de homotopía que será de importancia por lo que este implica, es el siguiente,

Teorema 7.1 *Si $f, g : U \to V$ son aplicaciones de clase C^∞, tal que $f \simeq g$ (f homotópico a g), entonces las aplicaciones cadena inducidas*

$$f^*, g^* : \mathbf{\Omega}^*(V) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^*(U)$$

Son cadenas homotópicas (vease definición 3.9).

Demostración: La idea es determinar la aplicación S que satisface la condición vista en la definición 3.9. Para ésto, como se vio en el capítulo 4, cada p-forma en $U \times \mathbb{R}$, se puede escribir como,

$$\boldsymbol{\omega} = \sum f_I(\boldsymbol{x}, t)dx_I + \sum g_J(\boldsymbol{x}, t)dt \wedge dx_J$$

Si $\phi : U \to U \times \mathbb{R}$ es la inclusión $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, 0)$, entonces, tal como se hizo en la demostración del lema de Poincaré,

$$\begin{aligned} \phi_0^*(\boldsymbol{\omega}) &= \sum f_I(\boldsymbol{x}, 0)d\phi_I \\ &= \sum f_I(\boldsymbol{x}, 0)dx_I. \end{aligned}$$

ya que $\phi_0^*(dt) = d(t \circ \phi_0) = d0 = 0$. Análogamente, para $\phi_1(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, 1)$ se tiene que

$$\phi_1^*(\boldsymbol{\omega}) = \sum f_I(\boldsymbol{x}, 1)dx_I$$

ya que $\phi_1^*(dt) = d(t \circ \phi_1) = d1 = 0$. En la demostración del lema de Poincaré se definió la aplicación

$$\hat{S}_p : \mathbf{\Omega}^p(U \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^{p-1}(U)$$

con la propiedad

$$(d \circ \hat{S}_p + \hat{S}_{p+1} \circ d)(\boldsymbol{\omega}) = \phi_1^*(\boldsymbol{\omega}) - \phi_0^*(\boldsymbol{\omega}). \tag{1}$$

Considerando la composición $U \xrightarrow{\phi_v} U \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} V$, donde F es una homotopía suave, o de clase C^∞ (vease sección 2.4) entre f y g. Entonces se tiene que $F \circ \phi_0 = f$ y $F \circ \phi_1 = g$. Se define

$$S_p : \mathbf{\Omega}^p(V) \longrightarrow \mathbf{\Omega}^p(U)$$

y se tiene que,

$$\begin{aligned}
& d(\hat{S}_p(F^*(\boldsymbol{\omega}))) + \hat{S}_{p+1}(dF^*(\boldsymbol{\omega})) \\
= \quad & \langle\ S_p = \hat{S}_p \circ F^*\ \rangle \\
& \phi_1^* F^*(\boldsymbol{\omega}) - \phi_0^* F^*(\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle\ \text{Propiedad II en Teorema 5.2}\ \rangle \\
& (F \circ \phi_1)^*(\boldsymbol{\omega}) - (F \circ \phi_0)^*(\boldsymbol{\omega}) \\
= \quad & \langle\ \text{Definición de } f^* \text{ y } g^*\ \rangle \\
& g^*(\boldsymbol{\omega}) - f^*(\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

Como en la definición 3.9. Además, $\hat{S}_{p+1}(dF^*(\boldsymbol{\omega})) = \hat{S}_{p+1}(F^*(d\,\boldsymbol{\omega})) = S_{p+1}(d\,\boldsymbol{\omega})$, ya que F^* es una aplicación cadena. **Q.E.D**

De la misma manera que en el teorema anterior, por el lema 3.6 se pueden establecer las aplicaciones

$$f^* = g^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U).$$

Para una aplicación continua $\phi : U \to V$ se puede encontrar una aplicación $f : U \to V$ de clase C^∞, tal que $\phi \simeq f$. Por los resultados vistos en la sección 2.4, y por lo anterior, se ve que $f^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U)$ es independiente de la escogencia de f. Así, se puede definir

$$\phi^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U)$$

tomando $\phi^* = f^*$, donde $f : U \to V$ es una función de clase C^∞ homotópica a ϕ.

Nótese también el "traslado"que se ha hecho de toda la teoría vista en el capítulo 3 y los conocimientos de topología, a la cohomología de De Rham. Pues el trabajo que se ha hecho hasta este momento (capítulos 5, 6 y 7) ha sido el de aterrizar todos los resultados vistos en el capítulo 3, a la teoría de De Rham. Nótese que la homotopía nos permite desarrollar toda una teoría de chohomología sobre espacios cuyos elementos tienen propiedades de diferenciabilidad (continuamente diferenciables), de esta misma manera se puede también llevar a cabo todo este trabajo, con aplicaciones cuya unica condición sea la continuidad.

Ahora se proporcionarán algunos resultados que son consecuencia de lo anterior y que serán importantes para un trabajo posterior.

Teorema 7.2 *Para $p \in \mathbb{Z}$ y conjuntos abiertos U, V, W de espacios Euclidianos, se tiene que*

(I) *Si $\phi_0, \phi_1 : U \to V$ son aplicaciones continuas homotópicas, entonces*

$$\phi_0^* = \phi_1^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(U).$$

(II) *Si $\phi : U \to V$ y $\psi : V \to W$ son continuas, entonces*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : H^p(W) \longrightarrow H^p(U).$$

(III) *Si la aplicación continua $\phi : U \to V$ es una equivalencia homotópica (definición 2.15), entonces*

$$\phi^* : H^p(V) \longrightarrow H^p(V)$$

es un isomorfismo.

(IV) *Un homeomorfismo $h : U \to V$ induce isomorfismos $h^* : H^p(V) \to H^p(U)$ para todo p.*

La demostración de estas proposiciones, son consecuencia de la observación y teorema anteriores, para una demostración más precisa, vease el teorema 6.8 en [1], o en [12].

Otro resultado importante de lo anterior, es una segunda noción, un poco más general, del lema de Poincaré,

Lema 7.1 (Lema de Poincaré, segunda noción) *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto contraíble, entonces $H^p(U) = 0$ cuando $p > 0$ y $H^0(U) = \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $F : U \times [0, 1] \to U$ es una homotopía de $f_0 = id_U$ a una aplicación constante f_1 con valor $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Para $\boldsymbol{x} \in U$, $F(\boldsymbol{x}, t)$ define una curva continua en U, que conecta $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}_0$. Así U es arco-conexo, y $H^0(U) = \mathbb{R}$. Si $p > 0$ entonces $f_1^* : \boldsymbol{\Omega}^p(U) \to \boldsymbol{\Omega}^p(U)$ es la aplicación cero. Así, por (I) en la proposición 1, se tiene que

$$id_{H^p(U)} = f_0^* = f_1^* = 0$$

por lo que $H^p(U) = 0$. **Q.E.D**

Ahora, ya se tienen las herramientas necesarias para estudiar algunas de las aplicaciones de la cohomología de De Rham. Una primera aplicación, permite establecer isomorfismos entre espacios de cohomologías. En lo que sigue, $\mathbb{R}^n$ se entenderá como el subespacio $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{R} \cdot 1$ denota el subespacio unidimensional que consiste en las funciones constantes en $\mathbb{R}$.

Teorema 7.3 *Sea A un subconjunto cerrado arbitrario de $\mathbb{R}$, con $A \neq \mathbb{R}^n$ entonces se tienen los isomorfismos*

I) $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - A)$, *para* $p \geq 1$.

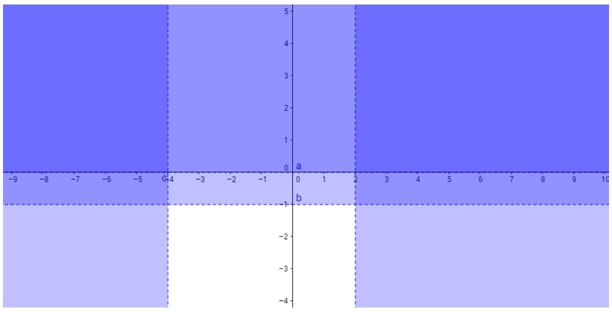
II) $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1$.

III) $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong \mathbb{R}$.

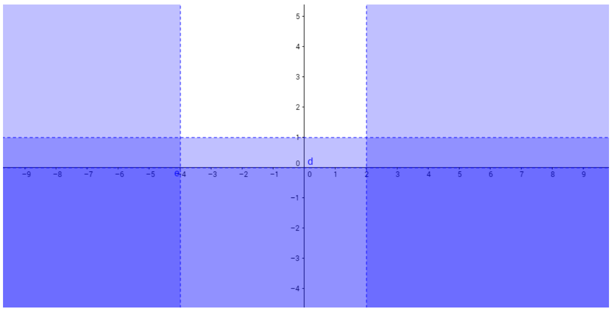
Demostración: Consideremos los siguientes subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n - A) \times (-1, \infty) \\ U_2 &= \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n - A) \times (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Para ver más claramente estos conjuntos, se consideran como subconjuntos de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $A = [-4, 2]$ entonces una ilustración para el conjunto U_1 es



y para U_2,



Así, $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$ y $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times (-1, 1)$. Sea $\phi : U_1 \to U_1$ la aplicación que suma 1 a la coordenada $n + 1$. Para $\boldsymbol{x} \in U_1$, U_1 contiene el segmento de línea que va de $\boldsymbol{x}$ a $\phi(\boldsymbol{x})$, y de $\phi(\boldsymbol{x})$ a un punto fijo en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Como en el ejemplo 2.7 se tienen homotopías $id_{U_1} \simeq \phi$ y $\phi \simeq c$ donde c es una aplicación constante. Esto implica que U_1 es contraible y análogamente, U_2 también lo es, así, $H^p(U_v)$, $v = 1, 2$, es como se describe en el lema 7.1.

Sea ahora,γ la proyección de $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times (-1, 1)$ sobre $\mathbb{R}^n - A$ e i la inclusión de $\mathbb{R}^n - A$ en $U_1 \cap U_2$. Entonces, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - A$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\gamma \circ i)(\boldsymbol{x}) &= \gamma(i(\boldsymbol{x})) \\ &= \gamma(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

de donde $\gamma \circ i = id_{\mathbb{R}^n - A}$. Esto implica que $\gamma \circ i \simeq id_{\mathbb{R}^n - A}$. Además $i \circ \gamma \simeq id_{U_1 \cap U_2}$. Así, la composición $i \circ \gamma$ es homotópica a $id_{\mathbb{R}^n - A}$.
Se tiene entonces que i y γ son equivalencias homotópicas, y por (III) en la proposición 1, se concluye que

$$\gamma^* : H^p(\mathbb{R}^n - A) \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2)$$

es un isomorfismo para cada p. Por el teorema de Mayer-Vietoris (Teorema 6.2) se tienen los isomorfismos

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A)$$

para cada $p \geq 1$, y así, $\partial^* \circ \gamma^*$ es el isomorfismo buscado en la parte I)de la proposición.

Ahora se considera la sucesión exacta

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^n - A) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^n - A) \to 0 \quad (2)$$

Un elemento de $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ está dado por una pareja de funciones constantes en U_1 y U_2 con valores a_1 y a_2 respectivamente. Su imagen bajo J^* es, por el teorema 5.2, la función constante con valor $a_1 - a_2$ en $U_1 \cap U_2$. Así, se tiene que

$$\operatorname{Ker} \partial^* = \operatorname{Im} J^* = \mathbb{R} \cdot 1.$$

Nótese que la primera igualdad se tiene ya que (2) es exacta, mientras que la segunda se tiene, por como se definió J^*. Así, se tienen los isomorfismos

$$\begin{aligned} H^0(U_1 \cap U_2)/\operatorname{Im} J^* &\simeq H^1(\mathbb{R}^n - A) \\ H^0(U_1 \cap U_2)/\mathbb{R} \cdot 1 &\simeq H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \end{aligned}$$

El primer isomorfismo se tiene por algebra, y el segundo se obtiene del isomorfismo γ^* que secumple para todo p, en particular $p = 0$, y así, se tiene la parte II).

Por último, $\operatorname{Ker} J^* = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \cdot 1, a_1 = a_2\}$, con lo que

$$\dim(\operatorname{Ker} J^*) = 1$$

y a su vez, por ser (2) exacta

$$\dim(\operatorname{Im}(I^*)) = \dim(\operatorname{Ker}(J^*)) = 1$$

se tiene entonces que $H^0(\mathbb{R}^n - A) \simeq \mathbb{R}$. **Q.E.D**

Así mismo, se tienen los siguientes isomorfismos, que se concluyen de la proposición anterior,

Teorema 7.4 *Para $n \geq 2$ se tienen los isomorfismos*

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0, n-1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

La demostración de esta proposición se obtiene haciendo inducción sobre n. Nótese que el caso $n = 2$ es precisamente el ejemplo 6.1, el caso general, sigue de la proposición 2.

Teorema 7.5 *Sean $A \neq \mathbb{R}^n$ y $B \neq \mathbb{R}^n$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$. Si A y B son homeomorfos, entonces*

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n - B).$$

Demostración: Haciendo inducción en la proposición 2, se tienen los isomorfismos

$$\begin{aligned} H^{p+m}(\mathbb{R}^{n+m} - A) &\simeq H^p(\mathbb{R}^n - A) \quad (p > 0) \\ H^m(\mathbb{R}^{n+m} - A) &\simeq H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \end{aligned}$$

para todo $m \geq 1$. Analogamente, se tiene para B. Corolario 7.7 en [1], demuestra que $\mathbb{R}^{2n} - A$ y $\mathbb{R}^{2n} - B$ son homeomorfos. La invarianza topológica ((IV) en proposición 1) muestra que tienen un isomorfismo en el espacio cohomológico de De Rham. Se tiene así los isomorfismos

$$H^p(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - A) \simeq H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} - B) \simeq H^p(\mathbb{R}^n - B)$$

para $p > 0$, y así,

$$H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \simeq H^n(\mathbb{R}^{2n} - A) \simeq H^n(\mathbb{R}^{2n} - B) \simeq H^0(\mathbb{R}^n - B)/\mathbb{R} \cdot 1.$$

Q.E.D

Éstos isomorfismos que se han construido, permiten hacer el cálculo de homeomorfismo entre espacios topológicos. Para el siguiente ejemplo, sean

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

y

$$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}.$$

Ejemplo 7.1 *Un* ***nudo*** *en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ que es homeomorfo a S^1.*

El correspondiente complemento del nudo es el conjunto abierto $U = \mathbb{R}^3 - \Sigma$. Entonces se verá que

$$H^p(U) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad 0 \leq p \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De acuerdo a la proposición 4, es suficiente con mostrar esto para el "nudo trivial"

$$S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Primero, se calculará

$$H^p(\mathbb{R}^2 - S^1) = H^p(\hat{D}^2) \oplus H^p(\mathbb{R}^2 - D^2).$$

Acá $\hat{D}^2$ es estrellado, cuando $\mathbb{R}^2 - D^2$ es difeomorfo a $\mathbb{R} - \{0\}$. Usando el lema de Poincaré (teorema 5.3) y ejemplo 6.1 se tiene que el resultado anterior tiene dimensión 2 para $p = 0$, dimensión 1 para $p = 1$, y dimensión 0 para $p \geq 2$.

Una última aplicación de la cohomología de De Rham será enunciada a continuación, aunque es conveniente decir, que hay muchas aplicaciones más, las que aca se muestran, pretender proporcionar herramientas para encontrar isomorfismos entre espacios de cohomología, construyendo así cadenas de espacios y aplicaciones lineales.

Ejemplo 7.2 *Se puede calcular la cohomología de $\mathbb{R}^n$ con m hoyos, es decir, la cohomología de*

$$V = \mathbb{R}^n - \left(\bigcup_{j=1}^{m} K_j \right).$$

Los hoyos K_j en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos compactos disjuntos con cota Σ_j, homeomorfa a S^{n-1}. Se tiene que

$$H^p(V) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad p = 0 \\ \mathbb{R}^m & si \quad p = n-1 \\ 0 & \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Haciendo inducción sobre m se tiene este resultado.

Más resultados y aplicaciones importantes se pueden obtener del estudio de la cohomología de De Rham, sobre todo, bajo el concepto de variedades, que con lo presentado en este trabajo, no serán muy dificiles de estudiar. Para una introducción al estudio de las variedades se pueden consultar [13], [14] y para ver las aplicaciones en la cohomología de De Rham, un rápido estudio se presenta en [15] y [7].

Bibliografía

[1] Ib H Madsen and Jxrgen Tornehave. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1997.

[2] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1964.

[3] George F Simmons. *Introduction to topology and modern analysis*. Tokyo, 1963.

[4] Hsiung Chuan-Chih. *A first course in differential geometry*. 1981.

[5] Grzegorz Bancerek. Miscellaneous facts about functors. *J. form. math*, 13, 2001.

[6] Michael Spivak. *Calculus on manifolds*, volume 1. WA Benjamin New York, 1965.

[7] Raoul Bott and Loring W Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.

[9] Gilbert Strang. Introduction to linear algebra. 2011.

[10] Glen E Bredon. *Topology and geometry*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] Edwin H Spanier. *Algebraic topology*, volume 55. Springer Science & Business Media, 1994.

[12] Pekka Pankka. Introduction to de rham cohomology. consultado el 10 octubre 2016 a urlusers.jyu.fi/ pekpankk/deRham2013/deRham2013.pdf, 2013. [En línea].

[13] Manfredo P Do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.

[14] Welington De Melo. Topologia das variedades. consultado el 28 septiembre 2016 a urlw3.impa.br/ demelo/topologiadiferencial2011/Topologia/20das/20Variedades.pdf, 2016. [En línea].

[15] Dulcinea Chamizo Llorente, Fernando; Raboso Paniagua. Apuntes de clase geometría diferencial. consultado el 15 Mayo 2016 a https://www.uam.es/otros/openmat/cursos/geodif/sections/geomivS22.pdf. [En línea].