

**ALGUNAS  
CONSECUENCIAS DEL  
LEMA DE SCHWARZ**

Juan Felipe Osorio Ramírez

A mi familia, profesores y cada una de las personas que le ha  
aportado a mi formación como persona.

*Los matemáticos no estudian objetos,  
sino las relaciones entre objetos.*

HENRY POINCARÉ

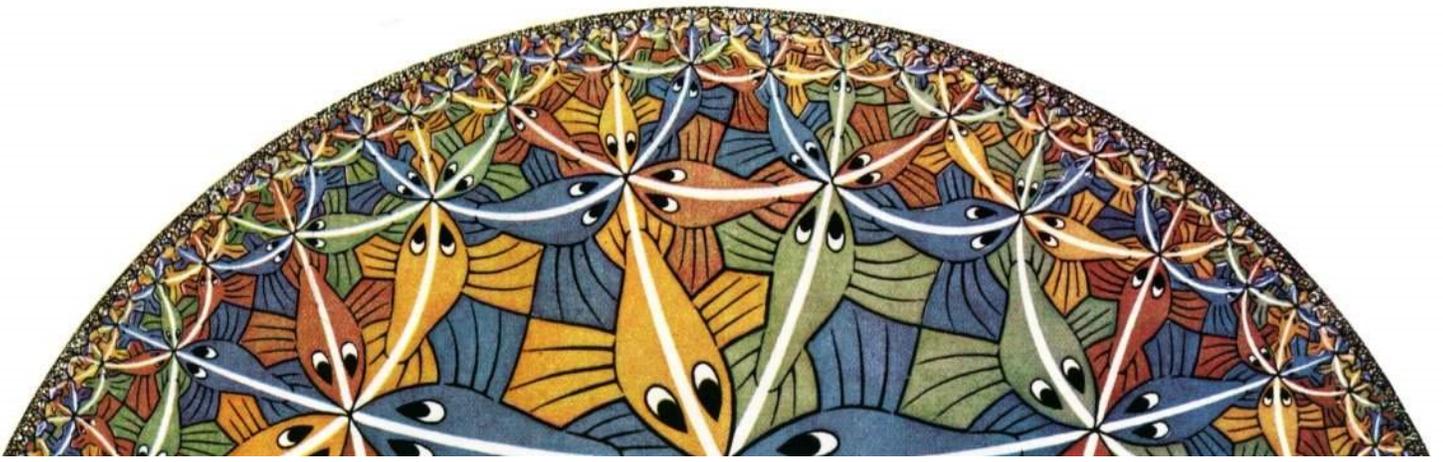
TRABAJO DIRIGIDO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DIRIGIDO POR: PHD. JULIÁN ANDRÉS AGREDO ECHEVERRY

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

ANÁLISIS COMPLEJO

MAYO DE 2018



## Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b> .....	<b>6</b>
1.1	Motivación	6
1.2	Algunas propiedades de funciones holomorfas de variable compleja	7
<b>2</b>	<b>Lema de Schwarz</b> .....	<b>9</b>
2.1	Resultados preliminares	9
2.2	Lema de Schwarz	11
<b>3</b>	<b>Automorfismos del disco unidad</b> .....	<b>12</b>
<b>3.1</b>	<b>Sobre los automorfismos de <math>\Delta</math> según sus puntos fijos</b>	<b>24</b>
3.1.1	Introducción .....	24
3.1.2	Puntos fijos de los automorfismos de $\Delta$ .....	25
3.1.3	Algunas simulaciones con <b>Wolfram Mathematica</b> ® .....	32



# 1. Introducción

## 1.1 Motivación

Se estudian algunas relaciones que existen entre la variable compleja y la geometría hiperbólica. El Lema de Schwarz motivará gran parte de la discusión y su generalización tendrá que ver con el hecho de que una clase de transformaciones de Möbius constituirán las isometrías de dominios con una métrica particular que se definirá más adelante.

Una consecuencia del Teorema del Mapeo de Riemann nos dice que todo dominio no vacío simplemente conexo en  $\hat{\mathbb{C}}$  es *conformemente equivalente* a algunos de los siguientes dominios:

$$\hat{\mathbb{C}}, \quad \mathbb{C}, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

donde la relación de equivalencia "ser conformemente equivalente" denotada por  $\mathcal{C}$  está definida por

$$D_1 \mathcal{C} D_2 \leftrightarrow \text{Existe un mapeo conforme } f : D_1 \Rightarrow D_2.$$

Luego la importancia de estudiar el disco resulta ser de gran vitalidad ya que la mayoría de resultados en la variable compleja se formulan en dominios simplemente conexos que en cierto sentido son equivalentes a estudiar el disco como se acabó de ver.

## 1.2 Algunas propiedades de funciones holomorfas de variable compleja

Un conjunto abierto y conexo del plano complejo será llamado un dominio de  $\mathbb{C}$ . El disco de radio  $r$  y centrado en  $z_0$  será denotado por  $\Delta_r(z_0)$ .

Si  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $D$  es abierto, diremos que  $f$  es **holomorfa** en  $z_0 \in D$  si el cociente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tiene un límite en  $\mathbb{C}$  cuando  $z$  tiende a  $z_0$ . Además se dirá que  $f$  es holomorfa en  $D$  si  $f$  es holomorfa para todo  $z_0 \in D$

Cuando el límite existe, este es llamado la **derivada** de  $f$  en  $z_0$  y es denotado por  $f'(z_0)$ .

El conjunto de todas las funciones holomorfas en  $D$  que toma valores en el conjunto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  será denotado por  $Hol(D, \Omega)$ . Simplemente se usará  $Hol(D)$  para denotar al conjunto  $Hol(D, D)$ .

Si  $f$  y  $g$  están  $Hol(D)$ , entonces  $\Phi = f \circ g$  está también en  $Hol(D)$ , donde  $\circ$  denota la composición de funciones, i.e.,  $\Phi(z) = f(g(z))$ .

Una propiedad fundamental de las funciones holomorfas es la **Fórmula Integral de Cauchy**: Si  $f \in Hol(D, \mathbb{C})$ , entonces para cada curva cerrada  $\gamma \in D$  y cada  $z \in D \setminus \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{si } z \text{ está dentro de } \gamma \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aquí adoptamos la notación  $\frac{d^n f}{dz^n}(z)$ , para la  $n$ -ésima derivada de  $f$  en el punto  $z \in D$ .

Tenemos que si  $f \in Hol(D, \mathbb{C})$  entonces para cada  $z_0 \in D$  existe un disco  $\Delta_r(z_0) \subset D$  tal que  $f$  admite una extensión en serie de potencias alrededor de  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \Delta_r(z_0)$$

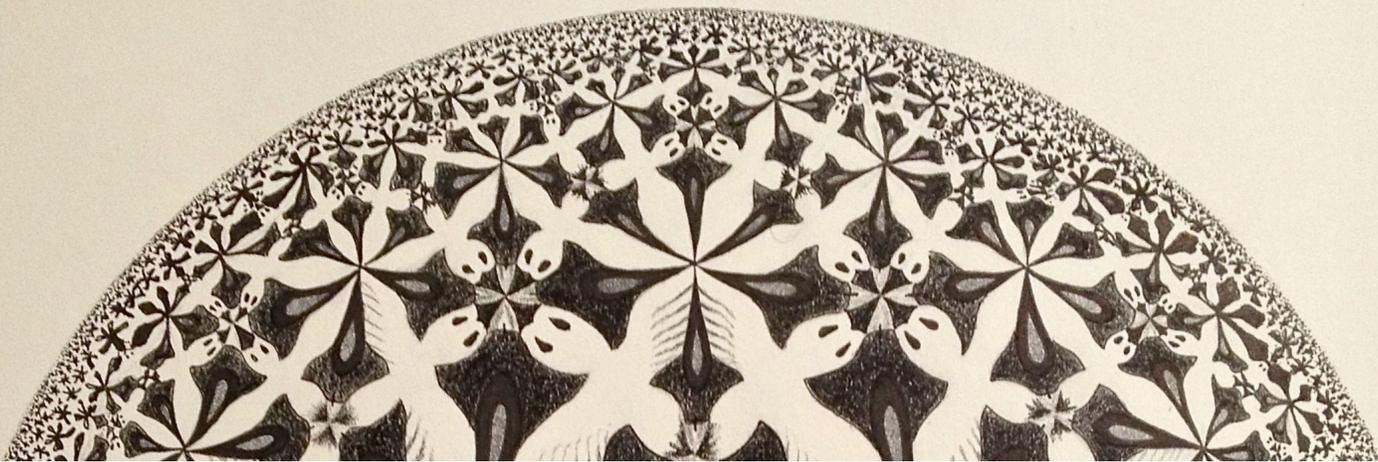
donde

$$a_0 = f(z_0), \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0).$$

Finalmente, existe un resultado conocido como el **principio de continuación analítica** que enunciaremos así y que será utilizado más adelante:

Sea  $D$  un dominio en  $\mathbb{C}$ , y sean  $f$  y  $g$  funciones definidas sobre  $D$  para las cuales existen expansiones en serie para cada punto de  $D$ . Si  $f$  y  $g$  coinciden en un sucesión de puntos distintos en  $D$  con un punto límite en  $D$ , o si tienen expansión en serie idéntica en un solo punto de  $D$ , entonces  $f \equiv g$  (en  $D$ ).

Para consultar las demostraciones de todos los resultados anteriores, así como otras propiedades de las funciones holomorfas ver [1].



## 2. Lema de Schwarz

### 2.1 Resultados preliminares

Para demostrar el lema de Schwarz primero enunciaremos un resultado muy importante de la variable compleja que nos habla de los valores máximos que puede alcanzar el módulo de las funciones analíticas.

**Teorema 2.1.1 — Principio del módulo máximo.** Si una función  $f$  es holomorfa y no constante en un dominio dado  $D$ , entonces  $|f|$  no alcanza su máximo en  $D$ . Esto es, que no existe  $z_0 \in D$  tal que  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  para todo  $z \in D$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|f|$  tiene un máximo local en  $z_0 \in D$ , entonces existe  $\Delta_R(z_0) \subset D$  tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in \Delta_R(z_0)$$

Sea  $r \in (0, R)$  y sea  $C_r$  la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $r$ , recorrida una sola vez en sentido antihorario. Se cumple que  $C_r \subset \Delta_R(z_0)$ , luego:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in C_r$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia  $C_r$  se obtiene:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ahora sabiendo que  $|z - z_0| = r \quad \forall z \in C_r$ , y que la longitud de arco  $C_r$  es  $2\pi r$ , se obtiene que,

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z)|}{r} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z_0)|}{r} |dz| = \frac{|f(z_0)|}{2\pi r} \int_{C_r} |dz| = |f(z_0)|$$

De donde  $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{|f(z)|}{r} |dz|$ . Así,

$$0 = \frac{1}{2\pi r} \left( \int_{C_r} |f(z_0)| |dz| - \int_{C_r} |f(z)| |dz| \right) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} (|f(z_0)| - |f(z)|) |dz|$$

Parametrizando la circunferencia  $C_r$  con la función  $z(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$ , y calculando la última integral de la anterior igualdad, donde  $|dz| = |z'(t)| dt = r dt$ , se obtiene

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{it})|) dt$$

Pero esta integral es de una función real, continua y no negativa ya que  $z_0$  es máximo local. La cuál es 0, luego el integrando tiene que ser nulo y se deduce que  $|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in C_r$ .

Haciendo variar  $r \in (0, R)$  se deduce que

$$|f(z)| = |f(z_0)| \quad \forall z \in \Delta_R(z_0)$$

Y como el módulo de  $f$  es constante en  $\Delta_R(z_0)$ , entonces  $f$  es constante en este disco. Y por el principio de continuación analítica  $f$  es constante en  $D$ . ■

## 2.2 Lema de Schwarz

**Teorema 2.2.1 — Lema de Schwarz.** Sea  $f \in Hol(\Delta)$  tal que  $f(0) = 0$ . Entonces

1.  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \Delta$
2.  $|f'(0)| \leq 1$

Más aún, si existe  $z_0 \in \Delta$ ,  $z_0 \neq 0$  tal que se tiene la igualdad en (1), o se tiene la igualdad en (2), entonces  $f$  es una rotación i.e.,  $f(z) = e^{i\alpha}z$ , para algún  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

*Demostración.* Usando la expansión en serie de potencias de  $f$  alrededor de 0, podemos escribir  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)^n$  cuyo radio de convergencia es  $R > 1$ . Entonces la función definida por,

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z & \text{si } 0 < |z| < 1 \\ a_1 = f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

satisface que

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}, \quad |z| < 1$$

y es holomorfa en  $\Delta$ . Ahora para cualquier  $r$  tal que  $0 < r < 1$  y cualquier  $z$  con  $|z| = r$ , tenemos que

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

luego por el principio del módulo máximo, se tiene la misma desigualdad para  $|z| < r$ . Por lo tanto  $|g(z)| \leq 1$  para todo  $|z| < 1$ , o equivalentemente,

$$|f(z)| \leq |z|$$

para todo  $|z| < 1$  y  $|f'(0)| \leq 1$ . Y si  $|g(c)| = 1$  para algún  $c$  con  $|c| < 1$ , entonces por el principio del módulo máximo,  $g$  es constante. ■

Este lema implica que una función holomorfa del disco unidad en el disco unidad que fija el origen, mantiene las distancias fijas al origen o las contrae.



### 3. Automorfismos del disco unidad

El término automorfismo se refiere a un isomorfismo de un objeto matemático en él mismo. Para nosotros el término estará delimitado en un contexto en especial, que es el siguiente:

**Definición 3.0.1** Un **automorfismo del disco unidad** es una función holomorfa  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  y además es biyectiva. El conjunto de todos los automorfismos del disco unidad se denotará por  $Aut(\Delta)$ .

**Nota.**  $(Aut(\Delta), \circ)$  es un grupo con el elemento identidad  $id_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Delta$  definido por  $id_{\Delta}(z) = z$ .

**Proposición 3.0.1** Toda transformación  $m_a : \Delta \rightarrow \Delta$ ,  $m_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$  es un automorfismo de  $\Delta$ , y cada automorfismo  $h$  de  $\Delta$  es de la forma  $h := r_{\phi} \circ m_a$ , donde  $r_{\phi}(z) = e^{i\phi}z$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \Delta$  y considere la transformación de Möbius en el disco unidad definida por,

$$m_a(z) := \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

Luego se tiene que:

$$1 - |m_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 + \bar{a}z|^2} > 0$$

Pero esta desigualdad implica que  $|m_a(z)| < 1$ , siempre que  $z \in \Delta$  y  $a$  es un punto arbitrario pero fijo

en  $\Delta$ . Luego,  $m_a(\Delta) \subseteq \Delta$  y  $m_a \in Hol(\Delta)$ . Y ya que  $(m_a)^{-1} = m_{-a}$ , luego esta también pertenece a  $Hol(\Delta)$ , y tenemos que  $m_a \in Aut(\Delta)$ . Ahora, sea  $h$  un elemento arbitrario de  $Aut(\Delta)$ . Veamos que,

$$h := \lambda m_a$$

donde  $|\lambda| = 1$ .

Primero, si  $h(0) = b \in \Delta$ , entonces  $m_{-b}(b) = 0$ , y

$$g : m_{-b} \circ h$$

satisface las condiciones del Lemma de Schwarz, i.e.,  $g \in Hol(\Delta)$  y  $g(0) = 0$ . Entonces  $|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \Delta$ .

Por otro lado  $g^{-1} = h^{-1} \circ m_b$  también pertenece a  $Hol(\Delta)$ , y  $g^{-1}(0) = 0$ . Por lo tanto,  $|g^{-1}(w)| \leq |w| \quad w \in \Delta$ . Substituyendo  $w = g(z)$  obtenemos que  $|g(z)| \geq |z|$ , entonces, de hecho  $|g(z)| = |z|$ .

Consecuentemente  $g(z) = e^{i\phi}z$  para algún  $\phi \in [0, 2\pi]$ , y

$$h(z) = m_b((g(z))) = \frac{e^{i\phi}z + b}{1 + e^{i\phi}z\bar{b}} = e^{i\phi} \frac{z + e^{-i\phi}b}{1 + ze^{-i\phi}\bar{b}}$$

Si llamamos  $a = e^{-i\phi}$  y  $\lambda = e^{-i\phi}b$  tenemos nuestro resultado. ■

**Proposición 3.0.2** Si  $g \in Aut(\Delta)$  tal que  $g(0)=0$ , entonces  $g$  es una rotación.

*Demostración.* Apliquemos el lema de Schwarz a  $g$  y su inversa. Como  $g(0) = 0$  y  $|g| < 1$ , luego por el lema de Schwarz,  $|g(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \Delta$ . Si hacemos lo mismo con  $g^{-1}$  obtendremos que  $|g^{-1}(w)| \leq |w|$  para todo  $w \in \Delta$ , pero  $w = g(z)$  y se obtiene que  $|z| \leq |g(z)|$  para todo  $z \in \Delta$ . De lo anterior,  $|g(z)| = |z|$ , y por ende  $g(z)/z$  tiene módulo constante 1, i.e.,  $g(z) = e^{i\alpha}z$  para algún  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . ■

Finalmente, se da un paso gigante al probar el siguiente resultado que se conoce como el lema de Pick y que da una conexión con la geometría hiperbólica.

**Teorema 3.0.3 — Lema de Pick.** Si  $F \in Hol(\Delta)$ . Entonces para todo par  $z$  y  $w$  en  $\Delta$  se tiene que:

$$|m_{-F(w)}(F(z))| \leq |m_{-w}(z)|.$$

Si la igualdad se verifica en la desigualdad anterior entonces  $F$  es un automorfismo de  $\Delta$ .

**Nota:** Si además suponemos  $F(0) = 0$ , entonces tenemos las hipótesis del Lema de Schwarz, i.e., este Lema es una generalización del Lema de Schwarz.

*Demostración.* Fijemos  $w_0 \in \Delta$  y considere el mapeo  $G = m_{-F(w)} \circ F \circ m_w$ . Luego  $G \in Hol(D)$  y  $G(0) = 0$ . Entonces por el Lema de Schwarz tenemos que

$$|G(z)| \leq |z|, \quad |z| \in \Delta$$

Ahora, reemplazando  $z$  por  $m_{-w}(z)$  obtenemos la desigualdad requerida. Finalmente, si tenemos que la igualdad se cumple para algún par de puntos  $z \neq w$ , entonces  $|G(m_{-w}(z))| = |m_{-w}(z)|$ . Y de nuevo usando el Lema de Schwarz,  $G(z) = e^{i\phi}z$  para algún  $\phi \in [0, 2\pi]$  y para todo  $z \in \Delta$ . Por lo tanto  $G \in \Delta$ , y así  $F = m_{F(w)} \circ G \circ m_{-w}$ . ■

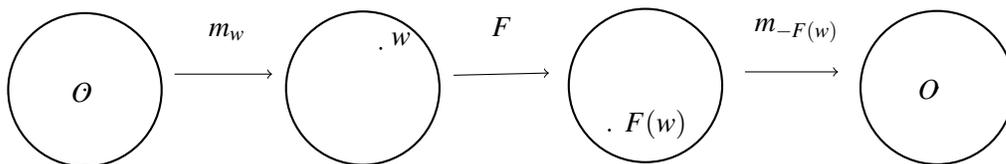


Figura. 3.1 – Función  $G$  usada en la demostración del Lema de Pick.

**Corolario 3.0.4** Sea  $F \in Hol(\Delta, \mathbb{C})$ . Entonces  $F$  aplica  $\Delta$  en su adherencia  $\overline{\Delta}$  si y solo si se satisface que:

$$|F'(z)| \leq \frac{1 - |F(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

*Demostración.* Supongamos que se satisface la condición, entonces  $1 - |F(z)|^2 \geq 0$  y  $|F(z)| \leq 1$ . Por otro lado, si  $|F(z)| = 1$  para algún  $z \in \Delta$ , entonces  $F$  es constante y la condición se satisface trivialmente. Entonces podemos asumir que  $|F(z)| < 1$  para todo  $z \in \Delta$ . Así que usando el Lema de Pick, tenemos que

$$\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| \leq \left| \frac{1 - F(z)\overline{F(w)}}{1 - z\overline{w}} \right|$$

y si hacemos  $w \rightarrow z$  obtenemos que:

$$\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} \right| \rightarrow |F'(z)| \quad \text{y} \quad \left| \frac{1 - F(z)\overline{F(w)}}{1 - z\overline{w}} \right| \rightarrow \frac{1 - |F(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

■

**Nota.** Según Shoikhet<sup>1</sup> en [2] usar la distancia euclideana en el disco es inapropiado para el desarrollo de la teoría y por ende la métrica pseudo-hiperbólica definida por

$$d : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad d(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| \quad \text{donde } z, w \in \mathbb{C}$$

resulta ser conveniente debido a que esta servirá para expresar la longitud hiperbólica en el capítulo 4 y además esta induce la topología Euclideana.

Nótese que al definir esta métrica en  $\Delta$  se tiene que el Lema de Pick se puede reinterpretar como una **propiedad de contracción los mapeos holomorfos**  $F \in Hol(\Delta)$  en este espacio métrico así:

$$\boxed{\text{Si } F \in Hol(\Delta) \text{ entonces } d(F(z), F(w)) \leq d(z, w), \quad z, w \in \Delta}$$

Más aún,  $F \in Aut(\Delta)$  si y solo si  $d(F(z), F(w)) = d(z, w)$  ( $F$  es isometría).

Ahora revisaremos algunas propiedades geométricas del grupo  $Aut(\Delta)$ .

Sea  $\Gamma$  un círculo ortogonal a  $\partial\Delta$  (frontera de  $\Delta$ ) tal que  $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ . Si  $c$  es el centro de  $\Gamma$ , entonces  $|c| \geq 1$ , y  $\sqrt{|c|^2 - 1}$  es el radio de  $\Gamma$ , situación que se contempla en la Figura ??.2:

Luego el círculo  $\Gamma$  satisface la ecuación:

<sup>1</sup>Véase la referencia [2] Cap 1, pag.13,14. "From the point of view of geometric function theory on the unit disk, the Euclidean distance on the disk is inappropriate" D. Shoikhet.

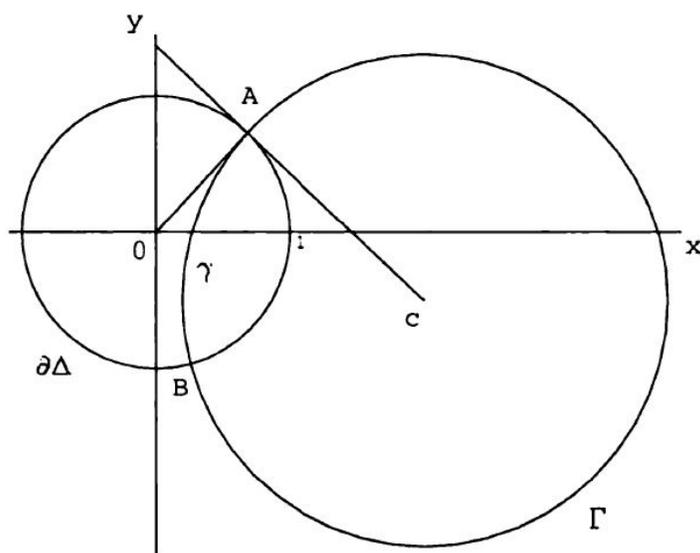


Figura. 3.2 – Un círculo ortogonal a  $\partial\Delta$  y su imagen bajo un automorfismo.

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - c| = \sqrt{|c|^2 - 1} \right\} = \{ z \in \mathbb{C} : |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{c}) + 1 = 0 \}$$

Considere el conjunto  $\gamma = \Gamma \cap \Delta$  (arco de  $\Gamma$  dentro de  $\Delta$  con sus puntos al final A y B), y nos preguntamos: ¿Cuál es la imagen de  $\gamma$  bajo  $F \in \operatorname{Aut}(\Delta)$ ?

**Proposición 3.0.5** Si  $\Gamma$  es ortogonal al círculo  $\partial\Delta$  y  $\gamma = \Gamma \cap \Delta$ , entonces para cada  $F \in \operatorname{Aut}(\Delta)$  la imagen  $F(\gamma)$  de  $\gamma$  es una intersección de  $\Delta$  con algún otro círculo ortogonal a  $\partial\Delta$ , o es un diámetro de  $\Delta$ .

*Demostración.* Sea  $F \in \operatorname{Aut}(\Delta)$ .

- i. Si  $F$  es una rotación de  $\Delta$ , i.e.,  $F(z) = e^{i\varphi}z$  para algún  $\varphi \in [0, 2\pi]$  y  $z \in \Delta$  entonces por la forma en que se definió  $\Gamma$  obtenemos que:

$$F(\gamma) \cap \Delta = \{ w \in \mathbb{C} : |w|^2 - 2\operatorname{Re}(w\bar{c}_1) + 1 = 0 \}$$

donde  $w = e^{i\varphi}z$ , y  $c_1 = e^{i\varphi}c$ . De donde se obtiene que la imagen de  $\gamma$  bajo  $F$  es la intersección de  $\Delta$  con otro círculo ortogonal a  $\partial\Delta$ .

- ii. Si  $F$  es una transformación  $m_a$  con  $a \in \Delta$ , tenemos que para  $w \in m_a(\gamma) \cap \Delta$  se satisface que:

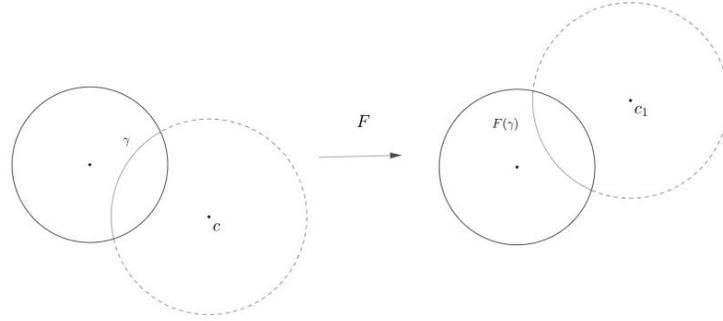


Figura. 3.3 –  $F$  es una rotación de ángulo  $\varphi$ .

$$|m_{-a}(w) - c|^2 = |c|^2 - 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{w-a}{1-\bar{a}w} - c \right|^2 = |c|^2 - 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \right|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \bar{c} \right) + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|w-a|^2 + |1-\bar{a}w|^2 - 2\operatorname{Re} \left( \frac{w-a}{1-\bar{a}w} |1-\bar{a}w|^2 \bar{c} \right) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|w-a|^2 + |1-\bar{a}w|^2 - 2\operatorname{Re}((w-a)(1-\bar{a}\bar{w})\bar{c}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}(w\bar{a}) + |a|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(a\bar{w}) + |\bar{a}w|^2 - 2\operatorname{Re}((w-a)(1-\bar{a}\bar{w})\bar{c}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$|w|^2 + 1 + |a|^2(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w}) - 2\operatorname{Re}((w-a)(1-\bar{a}\bar{w})\bar{c}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(|w|^2 + 1)(|a|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w}) - 2\operatorname{Re}((w-a)(1-\bar{a}\bar{w})\bar{c}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(|w|^2 + 1)(|a|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{a}) + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w} + (|w|^2 + 1)c\bar{a} + (w-a)(\bar{c} - \bar{a}\bar{w}\bar{c})) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \text{Donde definimos } \zeta := |a|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{a}) + 1 \\
&\quad (|w|^2 + 1)\zeta - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w} + |w|^2c\bar{a} + c\bar{a} + w\bar{c} - a|w|^2\bar{c} - a\bar{c} + a^2\bar{w}\bar{c}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(|w|^2c\bar{a} - |w|^2\bar{c}a + c\bar{a} - \bar{c}a + w\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{c} + a^2\bar{w}\bar{c}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(|w|^2c\bar{a} - |w|^2\bar{c}a) - 2\operatorname{Re}(c\bar{a} - \bar{c}a) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{c} + a^2\bar{w}\bar{c}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + a\bar{w} + w\bar{c} + a^2\bar{w}\bar{c}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{a} + w\bar{a} + w\bar{c} + \bar{a}^2w\bar{c}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w(2\bar{a} + \bar{c} + \bar{a}^2c)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{Donde definimos } \mu := c + \bar{c}a^2 + 2a \\
&\quad \zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{\mu}) = 0
\end{aligned}$$

Donde nos quedamos con la condición,

$$\zeta(|w|^2 + 1) - 2\operatorname{Re}(w\bar{\mu}) = 0 \tag{3.1}$$

con  $\zeta = 1 + 2\operatorname{Re}(c\bar{a}) + |a|^2$  y  $\mu = c + \bar{c}a^2 + 2a$ . Si  $\zeta \neq 0$  entonces en la anterior igualdad obtenemos que

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}(w\bar{c}_2) + 1 = 0$$

donde  $c_2 = \mu/\zeta$ . Por lo que  $m_a(\gamma) \cap \Delta$  es una intersección de  $\Delta$  con un círculo ortogonal a  $\partial\Delta$ .

Sí  $\zeta = 1 + 2\operatorname{Re}(c\bar{a}) + |a|^2 = 0$ , entonces por la manera como se definió  $\Gamma$  tenemos que  $-a \in \gamma \cap \Delta$  pues  $1 - 2\operatorname{Re}(c(-\bar{a})) + |-a|^2 = 0$  y  $|-a| < 1$ . Por lo tanto  $m_a(-a) = 0 \in m_a(\gamma) \cap \Delta$ .

Y tenemos de nuevo por 3.1 que

$$\operatorname{Re}(w\bar{\mu}) = 0 \quad (3.2)$$

Nótese que si  $w = x + iy$  y  $\mu = a + ib$ , la ecuación 3.2 se puede reescribir como

$$ax + by = 0$$

La cuál representa una *línea recta que pasa por 0*, así  $m_a(\gamma) \cap \Delta$  es un diámetro de  $\Delta$ .

Como en los dos casos se tiene lo que afirma el teorema, este queda demostrado. ■

Este resultado se puede resumir en que cada automorfismo de  $\Delta$  preserva la clase de subconjuntos de  $\Delta$  que consiste en todos los diámetros de  $\Delta$  y todos los arcos de círculos los cuales son ortogonales a  $\partial\Delta$ .

Otra propiedad de la imagen de los automorfismos es la siguiente:

**Proposición 3.0.6** Las imágenes de discos concéntricos  $\Delta_r = \{z \in \Delta : |z| < r\}$  donde  $r \in (0, 1)$ , bajo transformaciones  $m_a$  con  $a \in \Delta$ , son discos en  $\Delta$  centrados en

$$c = c(r) = \frac{1 - r^2}{1 - r^2|a|^2}a$$

y de radio

$$d = d(r) = \frac{1 - |a|^2}{1 - r^2|a|^2}r.$$

*Demostración.* Sea  $\Omega_r(a) := m_a(\Delta_r)$ . Entonces  $\Delta_r = m_{-a}(\Omega_r(a))$ . De esta manera,  $\Omega_r(a) = \{w \in \Delta : |m_{-a}(w)| < r\}$

$$\begin{aligned} \Omega_r(a) &= \{w \in \Delta : |m_{-a}(w)| < r\} \\ &= \left\{ w \in \Delta : \left| \frac{w - a}{1 - \bar{a}w} \right| < r \right\} \\ &= \left\{ w \in \Delta : \left| w - \frac{1 - |a|^2}{1 - r^2|a|^2} \right| < \frac{1 - r^2}{1 - r^2|a|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

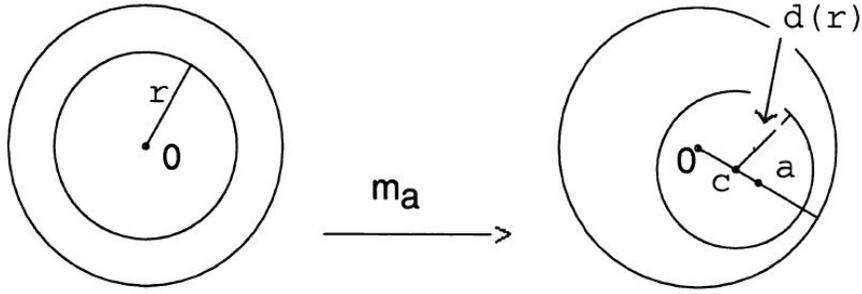


Figura. 3.4 – Imagen de  $\Delta_r$  bajo un automorfismo del disco.

Donde 3.3 se tiene por la siguiente equivalencia de desigualdades,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \right| < r \\
 \Leftrightarrow & \left| \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \right|^2 < r^2 \\
 \Leftrightarrow & |w-a|^2 < r^2 |1-\bar{a}w|^2 \\
 \Leftrightarrow & |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 < r^2(1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 |w|^2) \\
 \Leftrightarrow & |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 < r^2 - 2\operatorname{Re}(r^2 \bar{a}w) + r^2 |a|^2 |w|^2 \\
 \Leftrightarrow & |w|^2 (1 - r^2 |a|^2) - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w(1 - r^2)) + |a|^2 < r^2 \\
 \Leftrightarrow & |w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2} \bar{a}\right) < \frac{r^2 - |a|^2}{1-r^2|a|^2} \\
 \Leftrightarrow & |w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2} \bar{a}\right) + \frac{|a|^2(1-r^2)^2}{(1-r^2|a|^2)^2} < \frac{r^2 - |a|^2}{1-r^2|a|^2} + \frac{|a|^2(1-r^2)^2}{(1-r^2|a|^2)^2} \\
 \Leftrightarrow & \left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2} a \right|^2 < \frac{r^2 - |a|^2}{1-r^2|a|^2} + \frac{|a|^2(1-r^2)^2}{(1-r^2|a|^2)^2}
 \end{aligned}$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \frac{(r^2 - |a|^2)(1-r^2|a|^2) + |a|^2(1-r^2)^2}{(1-r^2|a|^2)^2}$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \frac{r^2 - r^4|a|^2 - |a|^2 + r^2|a|^4 + |a|^2 - 2r^2|a|^2 + r^4|a|^2}{(1-r^2|a|^2)^2}$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \frac{r^2 + r^2|a|^4 - 2r^2|a|^2}{(1-r^2|a|^2)^2}$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \frac{(1-2|a|^2 + |a|^4)r^2}{(1-r^2|a|^2)^2}$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \frac{(1-|a|^2)^2}{(1-r^2|a|^2)^2}r^2$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right|^2 < \left( \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r \right)^2$$

⇔

$$\left| w - \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \right| < \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r$$

■

**Nota.** Por el Lema de Pick y la proposición anterior tenemos una descripción del comportamiento de las funciones  $f \in Hol(\Delta)$  en los dominios  $\Omega_r(a)$ ,  $r \in (0, 1)$  y  $a \in \Delta$ . Ya que si  $F \in Hol(\Delta)$  entonces

$$F(\Omega_r(a)) \subseteq \Omega_r(F(a))$$

es decir,  $F$  mapea el disco  $\Omega_r(a)$  con centro en  $c(r)$  y radio  $d(r)$ , en el disco  $\Omega_r(F(a))$  con centro  $c_1(r) = \frac{1-r^2}{1-r^2|F(a)|^2}F(a)$  y radio  $d(r)$ , lo cuál se debe explícitamente a que

$$\left| \frac{F(w) - F(a)}{1 - \overline{F(a)}F(w)} \right| < \left| \frac{w - a}{1 - \bar{a}w} \right| < r.$$

De hecho, los números  $c(r)$  y  $d(r)$  también dependen de  $a \in \Delta$ . En particular si  $a$  se acerca a  $\partial\Delta$

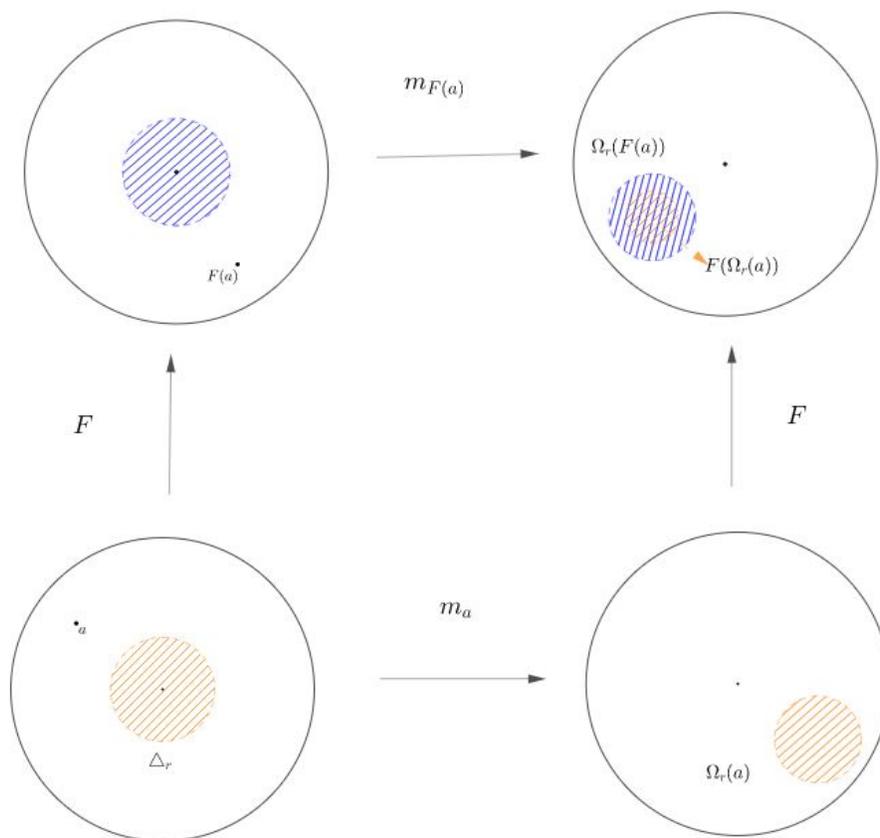


Figura. 3.5 – Comportamiento de los mapeos holomorfos del disco.

entonces para un  $r \in (0, 1)$  fijo, el punto  $c(r)$  se acerca a  $\partial\Delta$  y  $d(r) \Rightarrow 0$ . Todo lo anterior ya que,

$$\lim_{|a| \rightarrow 1} c(r) = a \quad \text{y} \quad \lim_{|a| \rightarrow 1} d(r) = 0$$

Finalmente, para abordar el comportamiento en la frontera que se mencionó, se verificará lo siguiente:

**Proposición 3.0.7** Para  $a \in \overline{\Delta}$  y  $K \geq 1 - |a|^2$  definimos el conjunto

$$D(a, K) = \left\{ w \in \Delta : \frac{|1 - w\bar{a}|^2}{1 - |w|^2} < K \right\}.$$

- i. Si  $a \in \Delta$  y  $r \in (0, 1)$  los conjuntos  $\Omega_r(a)$  y  $D(a, K)$  con  $K = (1 - |a|^2)(1 - r^2)^{-1}$  coinciden.
- ii. Si  $a \in \partial\Delta$  entonces para cada  $K > 0$  el conjunto  $D(a, K)$  es un disco centrado en  $a/(1 + K) \in \Delta$  de radio  $K/(K + 1) < 1$ .

*Demostración.* i. Sea  $w \in D(a, K)$  luego satisface que,

$$\begin{aligned}
& |1 - w\bar{a}|^2 < \frac{1 - |a|^2}{1 - r^2} (1 - |w|^2) \\
& \Leftrightarrow \\
& 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |w|^2|a|^2 < \frac{1 - |w|^2 - |a|^2 + |a|^2|w|^2}{1 - r^2} \\
& \Leftrightarrow \\
& (1 - r^2)(1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |w|^2|a|^2) < 1 - |w|^2 - |a|^2 + |a|^2|w|^2 \\
& \Leftrightarrow \\
& 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |w|^2|a|^2 - r^2 + 2\operatorname{Re}(r^2\bar{a}w) - r^2|w|^2|a|^2 < 1 - |w|^2 - |a|^2 + |a|^2|w|^2 \\
& \Leftrightarrow \\
& |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 < r^2(1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |w|^2|a|^2) \\
& \Leftrightarrow \\
& \frac{|w - a|^2}{|1 - \bar{a}w|^2} < r^2 \\
& \Leftrightarrow \\
& \frac{|w - a|}{|1 - \bar{a}w|} < r
\end{aligned}$$

De esta manera  $w \in \Omega_r(a)$ .

ii. Sea  $K > 0$ . Como  $K < K + 1$  tenemos que  $\frac{K}{K+1} < 1$ . Ahora, si  $a \in \partial\Delta$  luego  $|a| = 1$ .

Sea  $w \in D(a, K)$ . Luego  $w$  satisface que:

$$\begin{aligned}
& |1 - w\bar{a}|^2 < K(1 - |w|^2) \\
& \Leftrightarrow \\
& 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |w|^2|a|^2 < K(1 - |w|^2) \\
& \Leftrightarrow \\
& |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 < K - K|w|^2 \\
& \Leftrightarrow \\
& |w|^2(K + 1) - 2\operatorname{Re}(\bar{a}w) + |a|^2 < K|a|^2
\end{aligned}$$

⇔

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w\frac{\bar{a}}{K+1}\right) + \frac{|a|^2}{K+1} < \frac{K|a|^2}{K+1}$$

⇔

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w\frac{\bar{a}}{K+1}\right) < \frac{K|a|^2}{K+1} - \frac{|a|^2}{K+1}$$

⇔

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w\frac{\bar{a}}{K+1}\right) < \frac{K(K+1)|a|^2 - |a|^2(K+1)}{(K+1)^2}$$

⇔

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w\frac{\bar{a}}{K+1}\right) < \frac{K(K+1)|a|^2 - |a|^2(K+1) + |a|^2 - |a|^2}{(K+1)^2}$$

⇔

$$|w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(w\frac{\bar{a}}{K+1}\right) + \frac{|a|^2}{(K+1)^2} < \frac{K(K+1)|a|^2 - |a|^2(K+1) + |a|^2}{(K+1)^2}$$

⇔

$$\left|w - \frac{a}{K+1}\right|^2 < \frac{K(K+1)|a|^2 - |a|^2(K+1) + |a|^2}{(K+1)^2}$$

⇔

$$\left|w - \frac{a}{K+1}\right|^2 < \frac{K^2 + K - K - 1 + 1}{(K+1)^2}$$

⇔

$$\left|w - \frac{a}{K+1}\right|^2 < \frac{K^2}{(K+1)^2}$$

⇔

$$\left|w - \frac{a}{K+1}\right| < \frac{K}{K+1}$$

Por lo que  $w$  pertenece al disco centrado en  $\frac{a}{K+1}$  de radio  $\frac{K}{K+1}$ .

■

### 3.1 Sobre los automorfismos de $\triangle$ según sus puntos fijos

#### 3.1.1 Introducción

El lema de Pick-Schwarz implica que si  $\zeta \in \triangle$  es un punto fijo de  $F \in \operatorname{Hol}(D)$  entonces  $F$  deja la bola pseudo-hiperbólica  $\Omega_r(\zeta)$  invariante.

En otras palabras, para cada  $r \in (0, 1)$

$$F(\Omega_r(\zeta)) \subseteq \Omega_r(\zeta) \quad (3.4)$$

donde

$$\Omega_r(\zeta) = \left\{ z \in \Delta : \left| \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z} \right| < r \right\} = \left\{ z \in \Delta : \frac{|1 - z\bar{\zeta}|^2}{1 - |z|^2} < K \right\}$$

donde  $K = (1 - |a|^2)(1 - r^2)^{-1}$ . Este resultado se demostró en la proposición 3.0.7

Una consecuencia adicional del lema de Pick-Schwarz es que:

Si  $\zeta \in \Delta$  es un punto fijo de  $F$ , entonces

$$|F'(\zeta)| \leq 1 \quad (3.5)$$

Más aún, la igualdad en 3.4 y en 3.5 se tiene si y solo si  $F$  es un automorfismo de  $\Delta$ .

### 3.1.2 Puntos fijos de los automorfismos de $\Delta$

Sabemos que si  $F \in \text{Aut}(\Delta)$  entonces se puede representar de la siguiente forma:

$$F(z) = e^{i\varphi} m_{-a}(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (3.6)$$

para algún  $a \in \Delta$  y  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Entonces, para tal  $F$ , la ecuación  $F(z) = z$  es equivalente a la ecuación cuadrática

$$\bar{a}z^2 + (e^{i\varphi} - 1)z - e^{i\varphi}a = 0 \quad (3.7)$$

o,

$$a\bar{z}^2 + (e^{-i\varphi} - 1)\bar{z} - e^{-i\varphi}\bar{a} = 0 \quad (3.8)$$

Analicemos la situación ahora respecto al punto  $a$ :

i. Si  $a = 0$ . De 3.7 tenemos que,

$$F(z) = e^{i\varphi}z$$

i.e.,  $F$  es una rotación alrededor del origen y tiene como **único punto fijo**  $z = 0$  en  $\Delta$  siempre que  $\varphi \neq 0$ . Y tendremos que si  $\varphi = 0$  entonces  $F(z) = z$  y tendrá **infinitos puntos fijos** en  $\Delta$ .

ii. Si pensamos en el contrarecíproco de i., podemos afirmar que si  $F$  no es la identidad y no es una rotación alrededor del origen entonces  $a \neq 0$ , y  $z = 0$  no es una raíz de 3.8. Luego en esta ecuación podemos multiplicar por  $-e^{i\varphi}/\bar{z}^2$ , y obtenemos:

$$\bar{a} \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^2 + (e^{i\varphi} - 1) \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - e^{i\varphi}a = 0$$

Por lo tanto  $z \neq 0$  es una raíz de 3.7 si y solo si  $1/\bar{z}$  es una raíz de 3.7.

Consecuéntemente, 3.7 tiene máximo una solución dentro de  $\Delta$ . Además, si asumimos que 3.7 tiene una solución unimodular, entonces es única o la segunda solución también tiene módulo 1.

De la discusión anterior tenemos que  $F \in \text{Aut}(\Delta)$  se tienen las tres opciones de acuerdo en donde se sitúan sus puntos fijos en  $\Delta$ :

- (i)  $F$  tiene un solo punto fijo en  $\Delta$ .
- (ii)  $F$  tiene un solo punto fijo en  $\partial\Delta$  y ningún punto fijo en  $\Delta$ .
- (iii)  $F$  tiene dos puntos fijos diferentes en  $\partial\Delta$ .

**Definición 3.1.1** Los automorfismos de  $\Delta$  se clasificarán de acuerdo a sus puntos fijos así:

$F$  se llamará **elíptico** si satisface (i).

$F$  se llamará **parabólico** si satisface (ii).

$F$  se llamará **hiperbólico** si satisface (iii).

### Automorfismos elípticos

Aplicando la proposición 3.0.2 se puede ver que un automorfismo elíptico  $F$  de  $\Delta$  tiene la forma:

$$F = m_\zeta \circ r_\varphi \circ m_{-\zeta}$$

donde  $\zeta \in \Delta$  es la solución de  $F(z) = z$  y  $r_\varphi$  es una rotación alrededor del origen. Y por la proposición 3.0.6,  $F$  resulta ser una rotación alrededor de  $\zeta$ .

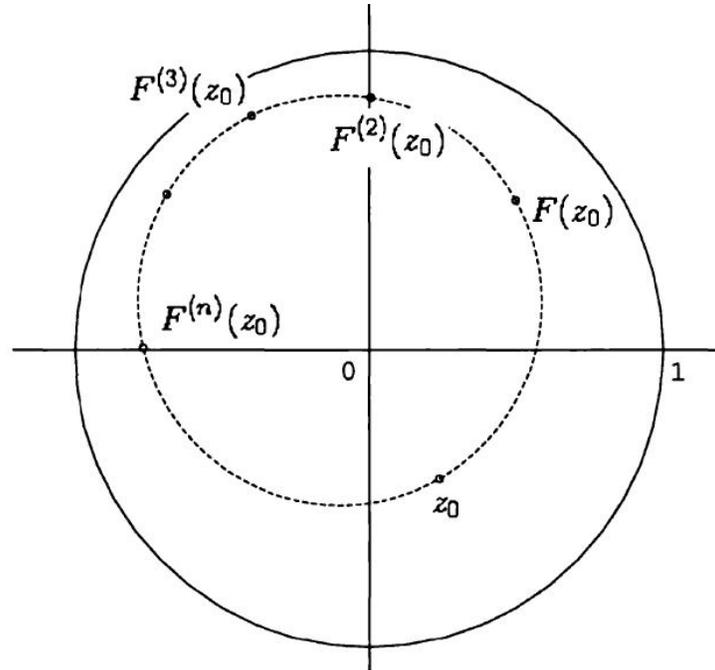


Figura. 3.6 – Automorfismo elíptico.

**Automorfismos hiperbólicos**

Sea  $F$  definida por 3.6 tiene dos puntos fijos diferentes en  $\partial\Delta$ , digamos  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  con  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ .

**Proposición 3.1.1** El número

$$\lambda := \frac{1 - \bar{a}\zeta_2}{1 - \bar{a}\zeta_1} = \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{a}}{\bar{\zeta}_1 - \bar{a}} \cdot \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \tag{3.9}$$

es real mayor que cero y además  $|\lambda| \neq 1$ .

*Demostración.* Como  $\zeta_j = F(\zeta_j)$  para cada  $j \in \{1, 2\}$ , tenemos que

$$1 - \bar{a}\zeta_j = e^{i\varphi} \frac{\bar{\zeta}_j - a}{\zeta_j} \tag{3.10}$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{1 - \bar{a}\zeta_2}{1 - \bar{a}\zeta_1} = \frac{\bar{\zeta}_2 - a}{\bar{\zeta}_1 - a} \cdot \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\bar{\zeta}_2 - a}{\bar{\zeta}_1 - a} \cdot \frac{\bar{\zeta}_1}{\bar{\zeta}_2}$$

Al comparar la última expresión para  $\lambda$  y 3.9 tenemos que  $\lambda = \bar{\lambda}$  y así  $\lambda$  es un número real.

Ahora, es claro que  $\lambda \neq 1$ , ya que  $a \neq 0$  y  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ . Y también se tiene que  $\lambda \neq -1$ , ya que si suponemos que  $\lambda = -1$  luego por 3.9 tendríamos que:

$$-1 = \frac{1 - \bar{a}\zeta_2}{1 - \bar{a}\zeta_1}$$

de donde

$$|\zeta_1 + \zeta_2| = \frac{2}{|\bar{a}|} > 2 = |\zeta_1| + |\zeta_2| \quad (3.11)$$

pués  $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$  y  $|a| > 1$ . Pero 3.11 es absurdo.

Luego concluimos que  $|\lambda| \neq 1$ .

Por un argumento similar al anterior, si suponemos que  $\lambda = -H$  donde  $H > 0$ , entonces

$$|H\zeta_1 + \zeta_2| = \frac{1+H}{|\bar{a}|} > 1+H = |H\zeta_1| + |\zeta_2|$$

lo cuál resulta ser absurdo de nuevo y así  $\lambda$  tiene que ser mayor que cero. ■

Otro resultado que será útil para analizar el comportamiento de los automorfismos hiperbólicos es el siguiente:

**Proposición 3.1.2** Si  $F \in \text{Aut}(\Delta)$ ,  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  satisfacen la ecuación 3.7 entonces para todo  $z \in \Delta \setminus \{\zeta_2\}$  la siguiente relación se cumple:

$$\frac{F(z) - F(\zeta_1)}{F(z) - F(\zeta_2)} = \frac{1 - \bar{a}\zeta_2}{1 - \bar{a}\zeta_1} \cdot \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

*Demostración.* Por como se define  $F$  tenemos que:

$$\frac{F(z) - F(\zeta_1)}{F(z) - F(\zeta_2)} = \frac{e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} - e^{i\varphi} \frac{\zeta_1-a}{1-\bar{a}\zeta_1}}{e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} - e^{i\varphi} \frac{\zeta_2-a}{1-\bar{a}\zeta_2}}$$

Y realizando los respectivos cálculos en el lado derecho de la anterior ecuación se obtiene el resultado. ■

Ahora introducimos la transformación  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$L(z) = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2},$$

luego, por la anterior proposición, obtenemos que

$$L(F(z)) = \frac{F(z) - F(\zeta_1)}{F(z) - F(\zeta_2)} = \frac{1 - \bar{a}\zeta_2}{1 - \bar{a}\zeta_1} \cdot \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} = \lambda L(z),$$

y consecuentemente:

$$F(z) = L^{-1}(\lambda L(z)) \tag{3.12}$$

**Proposición 3.1.3** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$  Se cumple que:

$$F^{(n)}(z) = L^{-1}(\lambda^n L(z))$$

donde la expresión  $F^{(n)}$  hace referencia al iterado  $n$ -ésimo de la función  $F$  consigo misma, i.e.,

$$F^{(n)}(z) = (F \underbrace{\circ \cdots \circ}_n F)(z).$$

*Demostración.* El caso base se tiene con la relación 3.12. Suponemos que se cumple la relación para un  $n > 1$ , y ya que

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(z) &= F\left(F^{(n)}(z)\right) \\ &= F\left(L^{-1}(\lambda^n L(z))\right) \\ &= L^{-1}\left(\lambda L\left(L^{-1}(\lambda^n L(z))\right)\right) \\ &= L^{-1}\left(\lambda^{n+1} L(z)\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

luego por el principio de inducción matemática, se tiene el resultado. ■

Entonces para cada  $z \in \Delta$  tenemos los siguientes casos ,

- i. Si  $|\lambda| < 1$  entonces la sucesión  $\{F^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $\zeta_1 = L^{-1}(0)$ .
- ii. Si  $|\lambda| > 1$  entonces la sucesión  $\{F^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$  converge a  $\zeta_2$ .

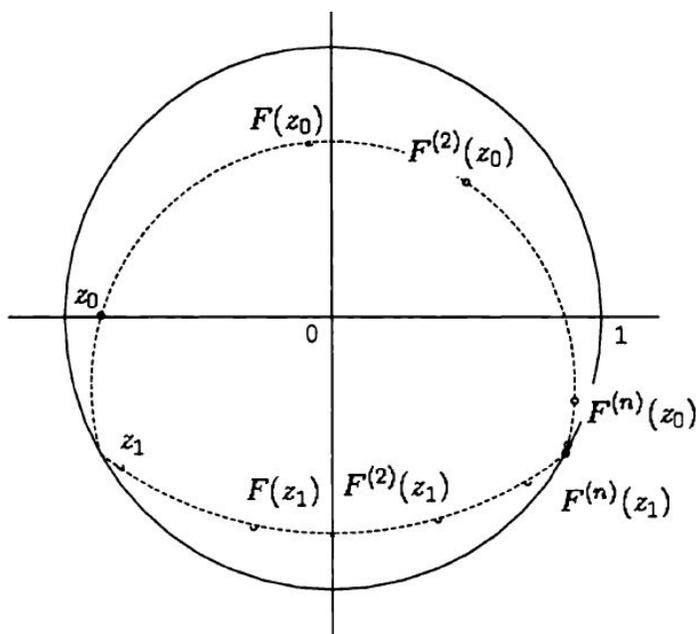


Figura. 3.7 – Automorfismo hiperbólico.

### Automorfismos parabólicos

Sea  $F \in \text{Aut}(\Delta)$  tal que tiene un único punto fijo  $\zeta \in \partial\Delta$ . En este caso  $\zeta$  es un cero de orden 2 de la ecuación 3.7 y tenemos que:

$$2\zeta = \frac{1 - e^{i\varphi}}{\bar{a}}$$

Y ya que  $|\zeta| = 1$  y  $|a| < 1$  tenemos que  $e^{i\varphi}$  no puede ser -1. Y por cálculos directos se puede verificar:

### Proposición 3.1.4

$$\frac{\zeta}{F(z) - \zeta} = \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{z - \zeta}$$

*Demostración.* Como  $F(z) = e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  y  $a = \frac{1-e^{-i\varphi}}{2\zeta}$  tenemos que:

$$\frac{\zeta}{F(z) - \zeta} = \frac{\zeta}{e^{i\varphi} \left[ \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right] - \zeta} = \frac{\zeta}{e^{i\varphi} \left[ \frac{z - \frac{1-e^{-i\varphi}}{2\zeta}}{1 - \frac{1-e^{-i\varphi}}{2\zeta}z} \right] - \zeta}$$

Al desarrollar este último factor y agrupar convenientemente se obtiene el resultado. ■

Además podemos probar por inducción que:

**Proposición 3.1.5**

$$\frac{\zeta}{F^{(n)}(z) - \zeta} = n \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{z - \zeta}$$

para todo  $z \in \Delta$  y  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

*Demostración.* El caso base se probó en la proposición 3.1.4. Ahora, supongamos que la relación se cumple para  $n > 1$ , y ya que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{F^{(n+1)} - \zeta} &= \frac{\zeta}{F(F^{(n)}(z)) - \zeta} \\ &= \frac{\zeta}{F(w) - \zeta} \quad , \text{ donde } w = F^{(n)}(z) \\ &= \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{w - \zeta} \\ &= \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{F^{(n)}(z) - \zeta} \\ &= \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + n \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{z - \zeta} \quad , \text{ usando la hipótesis inductiva} \\ &= (n+1) \frac{e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} + 1} + \frac{\zeta}{z - \zeta}. \end{aligned}$$

En conclusión, por el principio de inducción matemática se tiene el resultado. ■

Donde la última igualdad implica que  $F^{(n)}(z)$  converge a  $\zeta \in \partial\Delta$  cuando  $n$  tiende a infinito como se aprecia en la Figura 3.8.

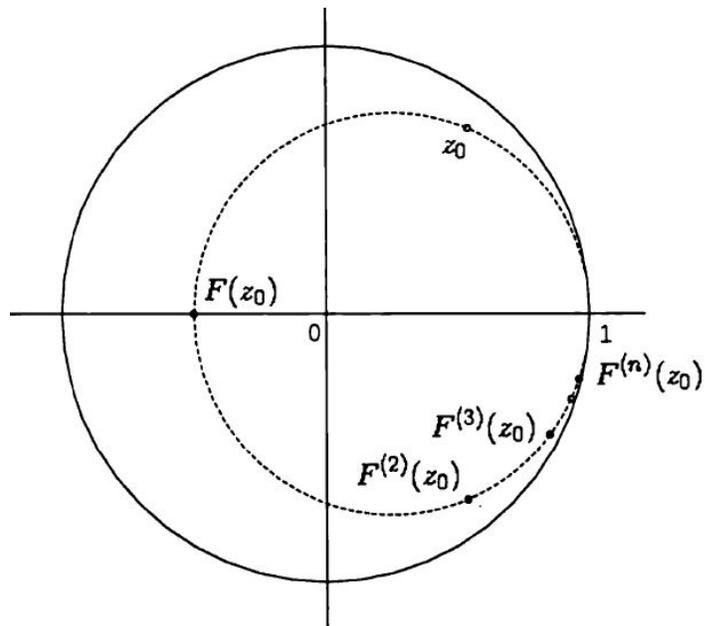


Figura. 3.8 – Automorfismo parabólico.

### 3.1.3 Algunas simulaciones con Wolfram Mathematica<sup>®</sup>

# Automorfismos del disco unidad

## Elípticos

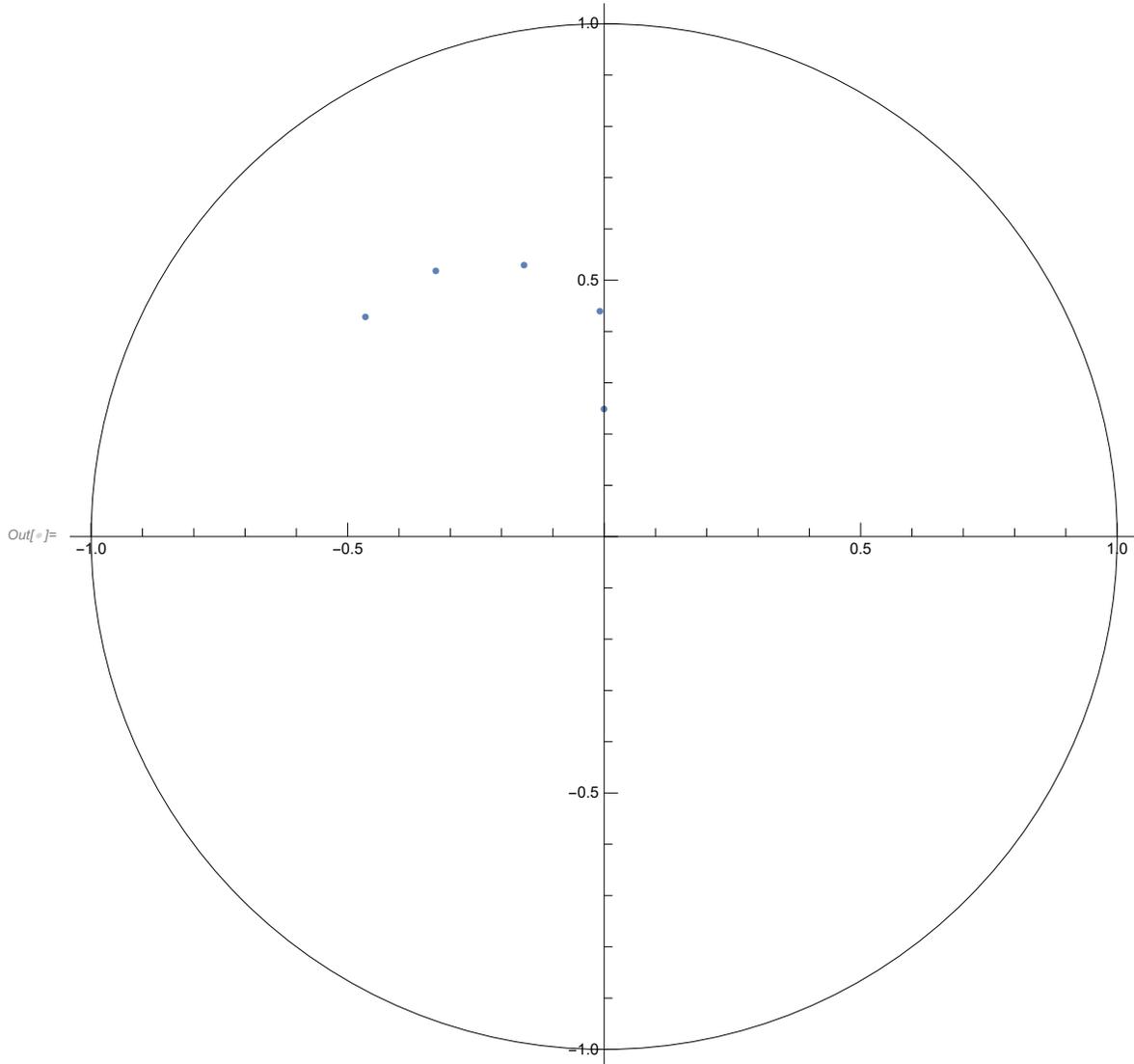
Un primer intento para definir el automorfismo elíptico cuyo punto fijo es  $\frac{1}{2}i e^{\frac{i\pi}{4}}$ , sería el definir las tres funciones que lo definen, pero la complejidad del cálculo se hace enorme.

```
a := I Exp[I Pi / 4] / 2;  
ma[z_] := (z + a) / (1 + Conjugate[a] z);  
R[z_] := (Exp[I Pi / 5] z);  
mminusa[z_] := (z + (-a)) / (1 + Conjugate[-a] z);  
o[k_] := ma[R[mminusa[k]]];
```

Luego, se hace el cálculo a mano de lo que sería la composición de las tres funciones con una rotación  $e^{\frac{i\pi}{5}}$ , y el punto fijo de la transformación será  $a$ . Finalmente se llamará al automorfismo elíptico por “oh”.

```
in[*]:= a := I Exp[I Pi / 4] / 2;  
modsquareda := (Abs[a]) ^ 2;  
conjugatea := Conjugate[a]  
oh[z_] := ((Exp[I Pi / 5]) * (z - a) + a - modsquareda * z) /  
((Exp[-I Pi / 5]) * (Conjugate[z] - conjugatea) * z + 1 - a * Conjugate[z]);  
in[*]:= doh = NestList[oh, I / 4, 4];  
realPartsa = Re[doh];  
imPartsa = Im[doh];  
datAa = Thread[{realPartsa, imPartsa}];
```

```
In[ ]:= Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1], Axes -> True],
  ListPlot[datAa, PlotMarkers -> {Automatic, 6}]]
```



## Hiperbólicos

### Caso: $0 < \lambda < 1$

Para poder definir el automorfismo hiperbólico "Q" cuyos puntos fijos serán 1 y  $-1$ , se define la función L, su inversa Linv, en este caso con  $0 < \lambda < 1$ , e iteraremos 7 veces con los puntos  $\frac{1}{2}i e^{\frac{i\pi}{4}}$  y  $\frac{1}{2}i e^{\frac{3\pi}{4}}$ . De aquí se espera que la sucesión de los iterados tiendan al número 1.

```
In[ ]:= L[z_] := (z - (1 + 0 I)) / (z - (-1 + I 0));
  Linv[w_] := InverseFunction[L][w]
  lambda = 0.5;
  Q[z_] := Linv[lambda (L[z])];
```

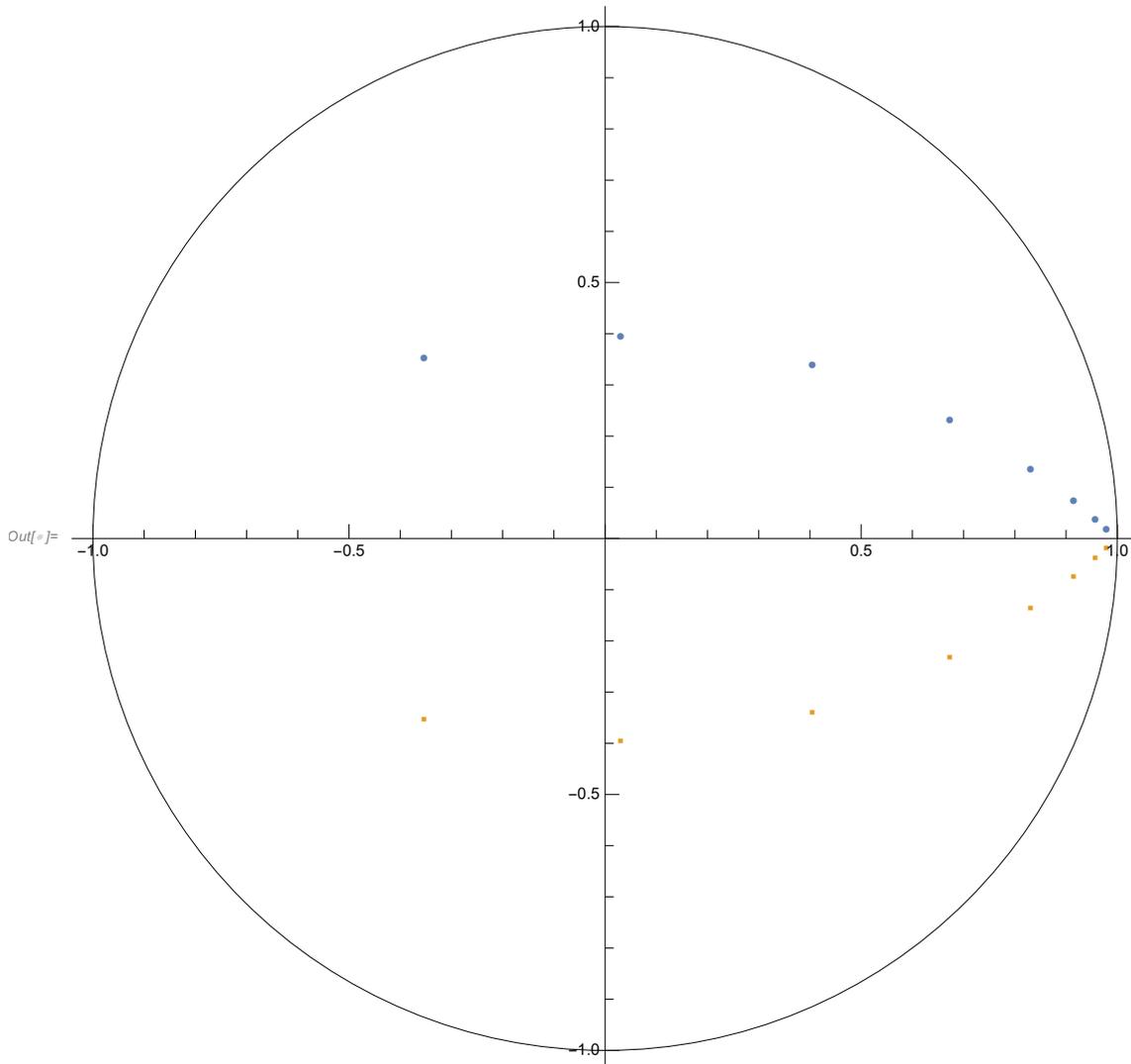
```

In[ ]:= d = NestList[Q, I Exp[I Pi / 4] / 2, 7];
      realPartsd = Re[d];
      imPartsd = Im[d];
      datAd = Thread[{realPartsd, imPartsd}];

In[ ]:= e = NestList[Q, I Exp[I 3 Pi / 4] / 2, 7];
      realPartse = Re[e];
      imPartse = Im[e];
      datAe = Thread[{realPartse, imPartse}];

In[ ]:= Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1], Axes -> True],
      ListPlot[{datAd, datAe}, PlotMarkers -> {Automatic, 6}]]

```



### Caso: $\lambda > 1$

Al igual que en el caso anterior, se define la función  $L$ , su inversa  $L_{inv}$ , en este caso con  $\lambda > 1$ , e iteraremos 7 veces con los puntos  $\frac{1}{2}i e^{\frac{i\pi}{4}}$  y  $\frac{1}{2}i e^{\frac{i3\pi}{4}}$ . De aquí se espera que la sucesión de los iterados tiendan al número  $-1$ .

```

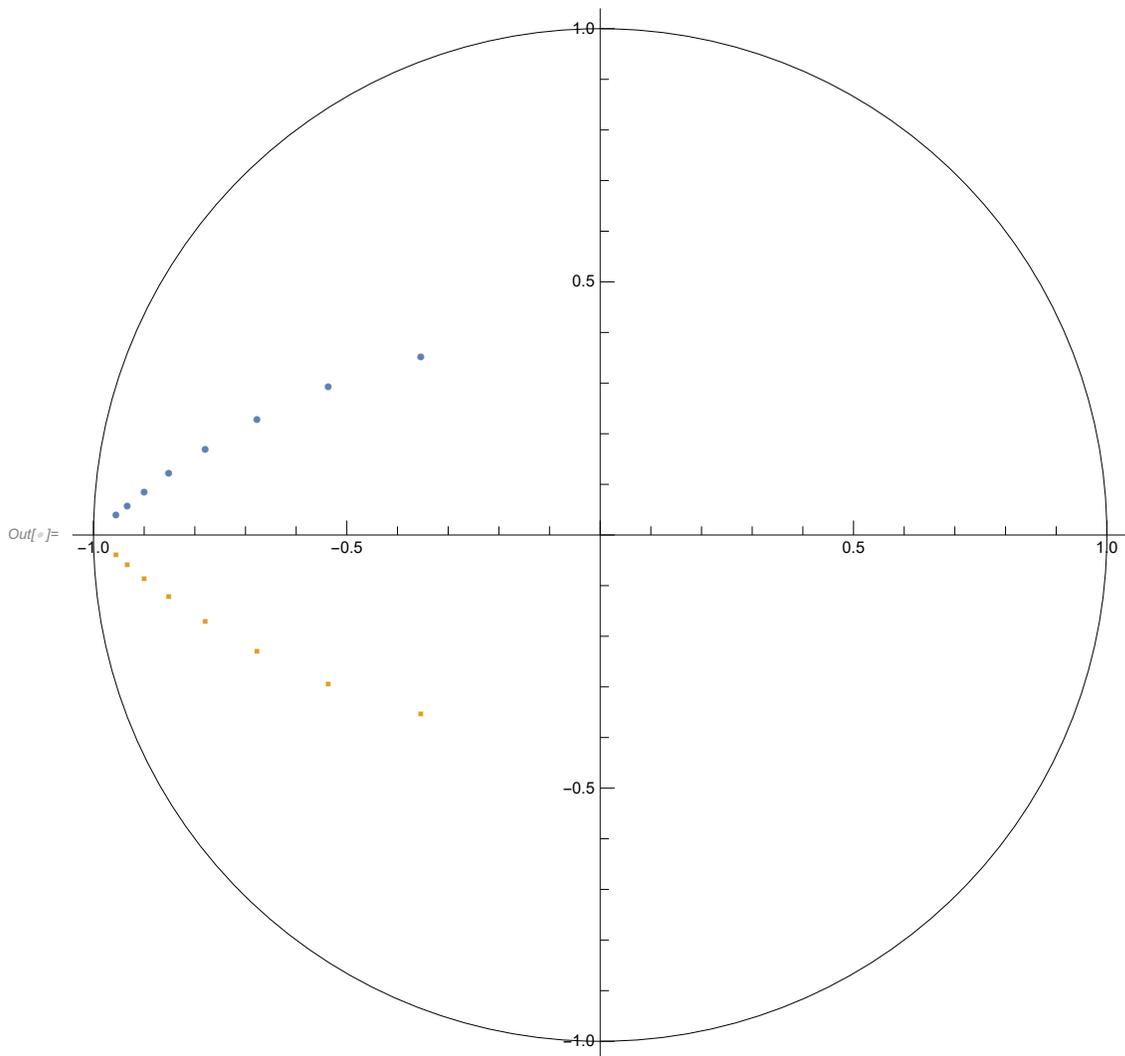
In[ ]:= L[z_] := (z - (1 + 0 I)) / (z - (-1 + I 0));
Lin[v_] := InverseFunction[L][w]
lambda = 1.5;
Q[z_] := Lin[lambda (L[z])];

In[ ]:= d = NestList[Q, I Exp[I Pi / 4] / 2, 7];
realPartsd = Re[d];
imPartsd = Im[d];
datAd = Thread[{realPartsd, imPartsd}];

In[ ]:= e = NestList[Q, I Exp[I 3 Pi / 4] / 2, 7];
realPartse = Re[e];
imPartse = Im[e];
datAe = Thread[{realPartse, imPartse}];

In[ ]:= Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1], Axes -> True],
ListPlot[{datAd, datAe}, PlotMarkers -> {Automatic, 6}]]

```



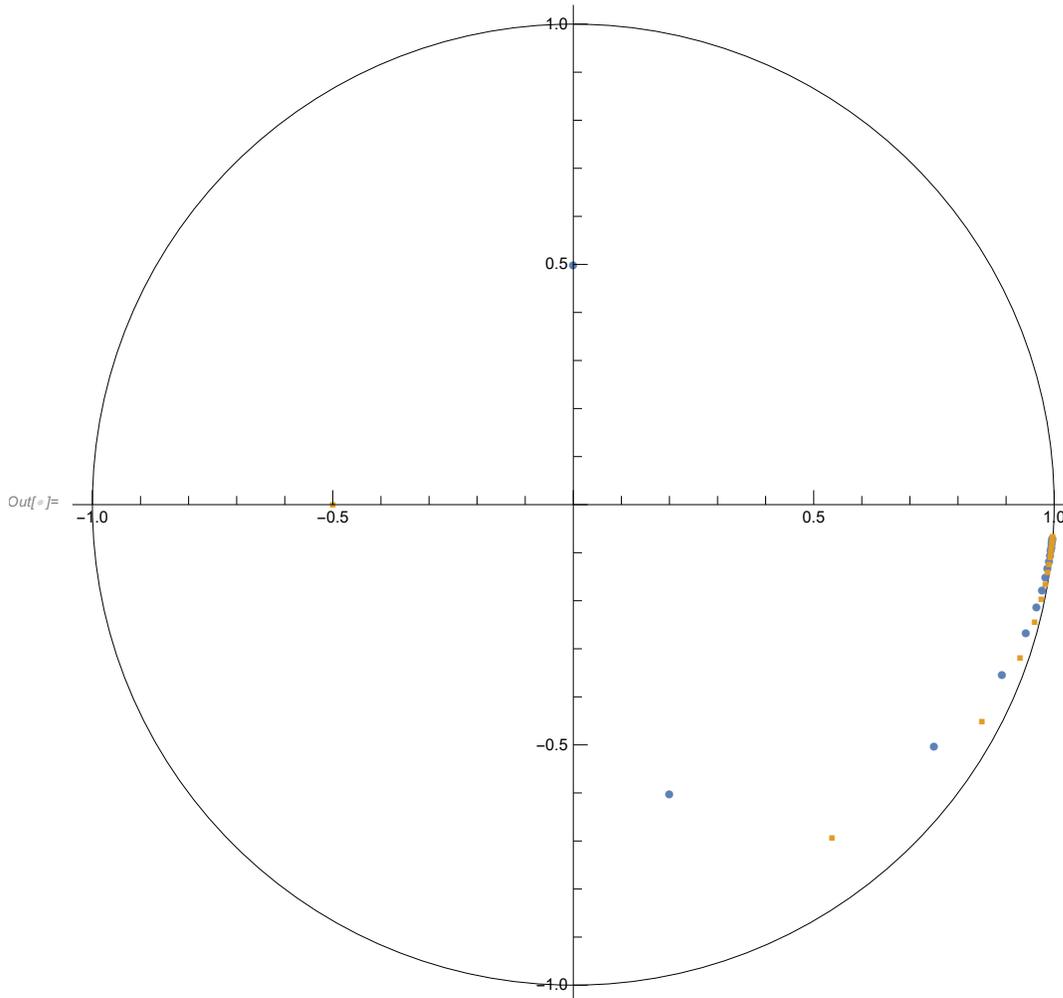
## Parabólicos

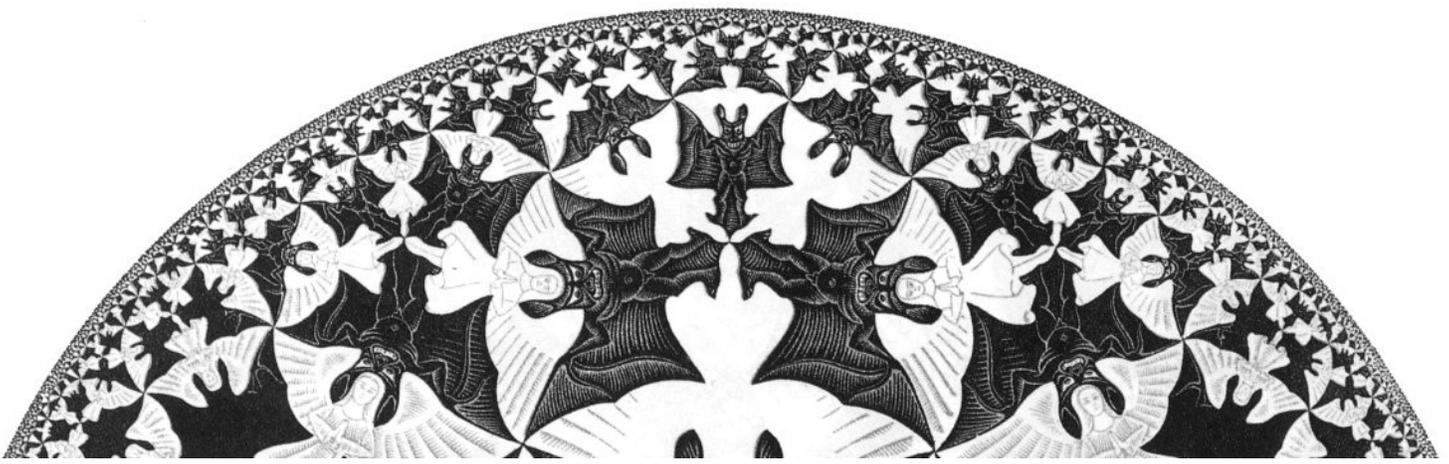
Para definir un automorfismo parabólico cuyo único punto fijo será 1, en este caso definiremos la función  $F$  e iteraremos usando los puntos  $\frac{i}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ . Se espera que la sucesión de iterados tienda al punto 1.

```

In[ ]:= F[n_, z_] := 1 / (n * ((I - 1) / (I + 1)) + (1) / (z - 1)) + 1
In[ ]:= nVals := {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15};
In[ ]:= h := Thread[F[nVals, I/2]];
      realPartsh := Re[h];
      imPartsh := Im[h];
      datAh = Thread[{realPartsh, imPartsh}];
In[ ]:= g := Thread[F[nVals, -0.5]];
      realPartsg := Re[g];
      imPartsg := Im[g];
      datAg = Thread[{realPartsg, imPartsg}];
In[ ]:= Show[Graphics[Circle[{0, 0}, 1], Axes -> True],
      ListPlot[{datAh, datAg}, PlotMarkers -> {Automatic, 7}]]

```





## Bibliografía

- [1] Rodríguez, Rubí E., Irwin Kra, and Jane P. Gilman. Complex analysis: in the spirit of Lipman Bers. Vol. 245. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Shoikhet, David. Semigroups in geometrical function theory. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Gamelin, Theodore. Complex analysis. Springer Science & Business Media, 2003.