

**Ambiente visual para el aprendizaje de los conceptos
básicos asociados a la factorización y el algebra**

Presentado por:

Juan Felipe Ortiz Niño

Director:

Raúl Alfredo Chaparro Aguilar

Escuela Colombiana de Ingeniería

Ingeniería de Sistemas

Bogotá 2018

INTRODUCCION

El Álgebra es una rama de la matemática que emplea números, letras y signos para hacer referencia a las distintas operaciones aritméticas que se realizan. El origen de la palabra álgebra proviene del árabe y significa restauración o reconocimiento de igual forma tiene su significado en el latín y es reducción, aunque no son término idénticos significan lo mismo, en este proyecto se quiere realizar una wiki que permita la conjetura de temas algebraicos por medio de un vistazo a sus orígenes en las civilizaciones más antiguas donde se remontan sus primeras apariciones.

Se entiende por factorización a la expresión algebraica utilizada para encontrar dos o más factores, teniendo en cuenta que cuyo producto debe ser igual a la expresión dada. Este sistema es considerado como la inversa de la multiplicación, ya que el fin vendría siendo prácticamente el mismo que es hallar el producto de dos o más factores del ejercicio propuesto.

Una vez conocida parte de sus aplicaciones se puede entrever la importancia que el estudio del algebra y de un método de este como la factorización tiene hoy en día, en especial en las carreras de Ingeniería, teniendo esto en mente, al analizar los métodos de enseñanza ocupados para impartir asignaturas relacionadas al tema se puede evidenciar que, en la mayoría de los casos, no va más allá de emplear un libro guía y resolver ejercicios para afianzar conocimientos, cabe aclarar que no se quiere contrariar en ningún momento esta forma de enseñar, simplemente se quiere hacer ver que se puede mejorar y esto es a lo que apunta este proyecto, a hacer más interactivo el aprendizaje de estos dos temas, con ejercicios dinámicos, con aplicaciones en el mundo real y con una base conceptual que le permita al estudiante experimentar de una forma diferente y visual.

Para poder abarcar una experiencia dinámica con estos temas se desarrollaron dos módulos donde para cada módulo se utilizaron tecnologías diferentes experimentando cuál de estas presentaba una mejor experiencia para el usuario, como la factorización es un método proveniente del algebra donde la experimentación con ejercicios es necesaria para el aprendizaje se optó por utilizar “Wolfram Mathematica” para prever una mejor experiencia de usuario.

INFORMACION GENERAL DEL PROYECTO

Nombre del proyecto:

Ambiente visual para el aprendizaje de los conceptos básicos asociados a la trigonometría.

Director del proyecto:

Raúl Alfredo Chaparro Aguilar.

Estudiantes:

Juan Felipe Ortiz Niño

Grupo de Investigación:

Escenarios de aprendizaje y diseño y construcción de software educativo.

Línea de Investigación:

Informática, Educación y Conocimiento.

Duración:

2 Semestres.

JUSTIFICACION

Los temas Matemáticos lastimosamente a veces son mal interpretados por los estudiantes más jóvenes de nuestra sociedad, los niños, y estos los traducen normalmente y sin intención en problemas pasajeros que no tienen ningún valor para la aplicación, Colombia está entre los diez países que tienen más alumnos con bajo rendimiento escolar en matemáticas, lectura y ciencia. Así lo reveló el informe publicado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Generalmente para la conceptualización de los temas de matemática se traduce a problemas clásicos que aparecen en los libros, situación que no permite la experimentación y la conjetura. Creemos que el bajo rendimiento en para matemáticas, lectura y ciencia es por el sistema viejo y tradicional que Colombia emplea ya que para estos temas es muy importante que el estudiante cuente con un laboratorio en el cual puedan encontrar los principios a través de situaciones dinámicas y motivadoras basadas en ambientes que permitan la experimentación, conjetura y la auto-regulación del aprendizaje.

Con esto en mente se determinó que la experimentación e interacción del estudiante con el objeto de estudio es importante para darle un significado más profundo y realmente apropiarse de los conceptos estudiados, lastimosamente los instrumentos tradicionales para el aprendizaje de las matemáticas, más exactamente el aprendizaje del algebra en el caso de este proyecto, no facilitan esto y para ello se busca ofrecer un complemento a dichos instrumentos por medio de la tecnología.

Comprendemos que un mayor aprovechamiento de herramientas en fin de desarrollar una mejor comprensión de temas que por sí solos no generan una alta motivación por parte de los usuarios, generando poco interés hacia estos, el uso de la tecnología llega a aumentar la motivación, contando con una lúdica más interactiva enfatizada en afianzar el conocimiento por medio de interacciones de temas concretos y muy relacionados hacia el mundo real.

OBJETIVOS

Objetivo General

Diseñar y construir un software, con una interfaz de alto componente visual, basado en una metáfora lúdica que permita la interacción fácil y motivante para la experimentación y conjetura, de conceptos sobre el estudio de la FACTORIZACIÓN y su DEMOSTRACIÓN geométrica, además de crear una Wiki sobre la historia del Algebra y el aporte de las civilizaciones en este tema .

Objetivos Específicos

- Estudiar las principales técnicas de solución de problemas relacionados la solución de sistemas de FACTORIZACIÓN, asociadas al algebra geométrica.
- Estudiar las diferentes civilizaciones que presentaron el uso del algebra en sus cotidianidad y de una u otra manera aportaron al Algebra como rama en las Matemáticas.
- Diseñar un ambiente de software, basado en una interfaz con alto componente visual, que permita una fácil interacción.
- Estudiar, el lenguaje apropiado, o la combinación de lenguajes para el desarrollo del proyecto.

MARCO TEORICO Y ESTADO DEL ARTE

El experimentar más allá del “aula” con las demás ciencias aprendidas puede ser beneficioso para el estudiante permitiéndole desarrollar experiencias que se salen del tradicional libro de la clase. Por ende se propone la implementación de un complemento a los medios clásicos de enseñanza que haga uso de la masificación tecnológica en la que está inmersa la humanidad, para que por medio de la interacción y la experimentación el estudiante pueda darle sentido a lo aprendido.

Ya que en parte lo que se busca con el proyecto es desarrollar un Ambiente de aprendizaje se puede hacer referencia a una gran cantidad de proyectos en distintas áreas del saber, desde geometría hasta música, pasando por programación y matemáticas, algunos de estos son:

MuseScore

Editor de partitura que permite importar, editar y exportar archivos de audio todo esto a través de una interfaz limpia y de fácil uso.

GeoGebra

Es software de matemáticas dinámicas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar.

Scratch

Es un lenguaje de programación visual, VPL por sus siglas en inglés (visual programming language) con el que se puede crear desde animaciones hasta juegos por medio de una interfaz intuitiva que facilita la comprensión de lo que se está haciendo.

Universe Sandbox

Es tanto un simulador espacial como un simulador gravitacional, que permite ver o bien la interacción gravitacional entre dos objetos en el espacio, la colisión entre dos galaxias y sus efectos o el estallido de una súper nova.

Dr. Geo

Es un software para el diseño y la manipulación de esquemas geométricos que ayuda a los estudiantes a explorar la geometría.

SageMath

Conocido anteriormente como SAGE (System for Algebra and Geometry Experimentation) es un software de cálculo simbólico (álgebra computacional o computación técnica) que cubre varios aspectos de la matemática como álgebra, combinatorias, análisis numérico y cálculo. A diferencia

de software como Wolfram Mathematica es de código abierto y está escrito en python lo que permite realizar modificaciones y mejoras de una manera más asequible.

Wolfram Mathematica

Es un software de cálculo simbólico que permite la manipulación de diversos objetos matemáticos en un entorno altamente dinámico. Es la herramienta con la que se realiza este proyecto, iniciándose con la versión 11.2, además cuenta con un servidor donde almacena una enorme cantidad de demostraciones que personas de todo el mundo han logrado realizar usando esta herramienta, estas demostraciones están divididas en temas y en subtemas para su fácil acceso, pero no necesariamente muestran una coherencia entre ellas. Por eso se busca realizar un gran libro interactivo donde tanto las demostraciones como la teoría sigan un hilo conductor con el único fin de servir de ayuda al estudiante.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

La propuesta del proyecto se dividió en dos grandes partes que serían divididas en los periodos 2018-1 y 2018-2 respectivamente, la primera parte del proyecto se enfocaría en el estudio de los temas relacionados con la factorización y sus diferentes formas de aplicarla según la geometría permita, y la segunda llevaría al estudio del origen de la geometría y su importancia en las civilizaciones antiguas como Sumeria, Grecia y Egipto.



MODULO AMBFAC (FACTORIZACION)

La factorización es una técnica matemática que consiste en la descomposición de una expresión aritmética. Antes que todo, tenemos que decir que todo polinomio se puede factorizar utilizando números reales, si se consideran números complejos. Existen métodos de factorización para algunos casos especiales, los cuales iremos revisando en el transcurso del tiempo por ahora empezaremos con algunas conceptos claves para entender más este tema.

Introducción a factores y divisibilidad

Un **monomio** es una expresión que es el producto de constantes y potencias enteras no negativas de x , por ejemplo,

$$5x^2$$

Un **polinomio** es una expresión que consiste en la suma o resta de monomios, por ejemplo,

$$4x^2 + 2x - 1$$

Normalmente, dos enteros que se multiplican para obtener un número se consideran **factores** de ese número.

Por ejemplo, ya que $24 = 3 \cdot 8$, sabemos que 3 y 8 son factores de 14

Un número es **divisible** entre otro número si el resultado de la división es un entero.

Por ejemplo, como $\frac{14}{2} = 7$ y $\frac{14}{7} = 2$, entonces 14 es divisible entre 7 y 2.

Pero, ya que $\frac{14}{3} = 4.66$, entonces 14 no es divisible entre 3.

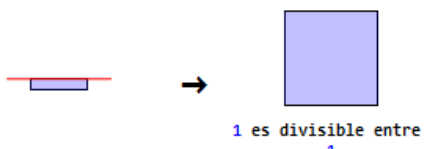
Escoge dos numero y observaremos la relacion de sus factores y divisores

Número entero inicial $j = 1$

Dividido por $k = 1$

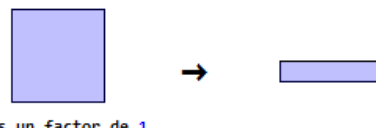
Si k es un factor de j , entonces j es divisible entre k y viceversa

$1 \div 1 = 1$



1 es divisible entre 1

$1 \times 1 = 1$



1 es un factor de 1

Métodos de factorización

El objetivo de la factorización es simplificar un expresión o reescribirla en términos de factores, esto se puede lograr de diferentes maneras y utilizando diferentes métodos. Para la factorización de números enteros, se utiliza el teorema fundamental de la aritmética y para la factorización de polinomios se usa el teorema fundamental del álgebra.

En este ambiente nos enfocaremos en revisar y explicar los siguientes métodos ya que se consideran los mas relevantes e importantes para la factorización tanto para monomio y polinomios:



El método gráfico es uno de los agregados de nuestro proyecto ya que se presenta una forma no habitual de factorizar trinomios

Factorización por medio de Áreas

Ejemplos: 1 $x^2 + 3x - 10$ Solución:

Componentes: 1

La interfaz muestra un panel de control a la izquierda con un ejemplo de factorización y un botón de solución. A la derecha hay un área de trabajo con una cuadrícula de puntos verdes y ejes azules para el método gráfico.

Aquí podemos encontrar en el ambiente ejercicios dinámicos que buscan plantear nuevas maneras de enseñar los ya conocidos métodos de factorización.

MODULO Mesopotamia y Grecia

En estos módulos encontraremos información relevante sobre el inicio de las matemáticas y la geometría como método de demostración de propiedades matemáticas.

Para comenzar hablar del origen de las matemáticas tenemos que remontarnos al comienzo de las civilizaciones, a la antigua Mesopotamia atribuida como una de las primeras civilizaciones de la humanidad, su nombre en griego significa tierra entre dos ríos, el río Tigris y Éufrates, se trata de una amplia llanura con forma de media luna que tenía tierras fértiles un clima cálido y una gran reserva de agua que provenía de las montañas al norte de esta, hoy las aguas de estos dos ríos que abrazan el origen de la historia recorren los países de Turquía, Siria, e Irak hasta desembocar en el golfo Pérsico.

Los Sumerios la primera civilización

Uno de los pueblos más importantes que llegaron a establecerse a Mesopotamia fueron los Sumerios, esto entre 4000 A.C - 2400 A.C, construyendo varias ciudades como, Uruk, Ur, Nippur, Umma y Lagash. Parece posible que los sumerios fuesen una tribu proveniente de fuera, posiblemente de las estepas, pero su origen concreto es desconocido. Esto es lo que se ha venido denominando desde el siglo XX como el "problema sumerio".



La humanidad le debe a los sumerios un enorme conjunto de avances que significaron una gran transformación en todos los aspectos de la vida. Quizá los más importantes fueron la invención de la rueda en torno al año 3500 a.C y la invención de la escritura cuneiforme en torno al año 3300 a.C, pero no podemos olvidar que los sumerios nos dejaron las primeras leyes escritas, fueron los inventores del sistema sexagesimal, de los inicios de la medicina, además de elaborar un calendario lunar de 12 meses divididos en semanas de siete días, los cuales cada día representaba uno de los cinco planetas que descubrieron junto con la luna y el sol, fueron los primeros en acreditarse construcciones con ladrillos de adobe y realizar arcos arquitectónicos. Muchas culturas son herederas de una u otra forma de la civilización sumeria.

Se presenta el sistema numérico empleado en babilonia.

Unidades	<input type="checkbox"/>	0
Decenas	<input type="checkbox"/>	0
Sesentas	<input type="checkbox"/>	0
seiscientos	<input type="checkbox"/>	0
Cero incluido <input type="checkbox"/>		
0		
1		∩
2		∩∩
3		∩∩∩
4		∩∩∩∩
5		∩∩∩∩∩
6		∩∩∩∩∩∩
7		∩∩∩∩∩∩∩
8		∩∩∩∩∩∩∩∩
9		∩∩∩∩∩∩∩∩∩

Después se presentan las diferentes formas de como las civilizaciones de Mesopotamia manejaban sus problemas matemáticos, y por último la forma de cómo estos ya tenían el conocimiento de las raíces y su forma de resolverlas, este último se presenta con un ejercicio dinámico que le permite al estudiante indagar y cuestionarse por su propia cuenta acompañado de un componente grafico que adquiere una gran importancia.

Ancho del rectangulo

Alto del rectangulo

Itera

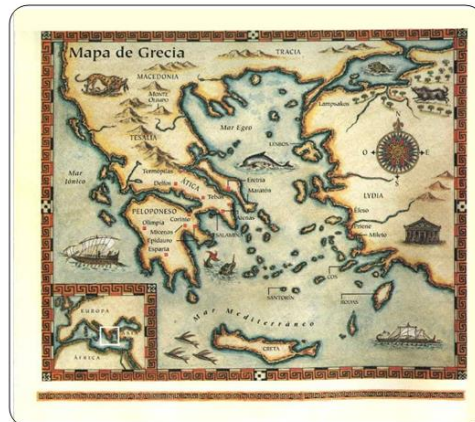
Estamos calculando la raiz de \rightarrow 60 que es $= 7.74597$

Recuerda $\rightarrow a(n) = \frac{(a_{(n-1)} + b_{(n-1)})}{2}$ $b(n) = \frac{area}{a(n)}$

Por ultimo de esta sección se presentó la civilización Griega, junto con uno de sus más grandes pensadores y matemáticos de toda la historia de la humanidad Euclides.

ANTIGUA GRECIA

La antigua Grecia es junto con el cristianismo el germen de la cultura occidental, su historia se divide en cuatro periodos, "edad oscura", "época Arcaica", "periodo clásico" y "periodo Helenístico". Su civilización tiene origen de la civilización Cretense o Minoica de la isla de creta y de la civilización Micénica de la ciudad de micenas.



Se presenta el sistema numérico empleado en la antigua Grecia ya que esto nos presenta un contexto.

Unidades

Decimas

Centesimas

Milesimas

7	ζ	14	Ιδ	21	κα
8	η	15	Ιε	22	κβ
9	θ	16	Ις	23	κγ
10	ι	17	Ιζ	24	κδ
11	ια	18	Ιη	25	κε
12	ιβ	19	Ιθ	26	κς
13	ιγ	20	κ	27	κζ

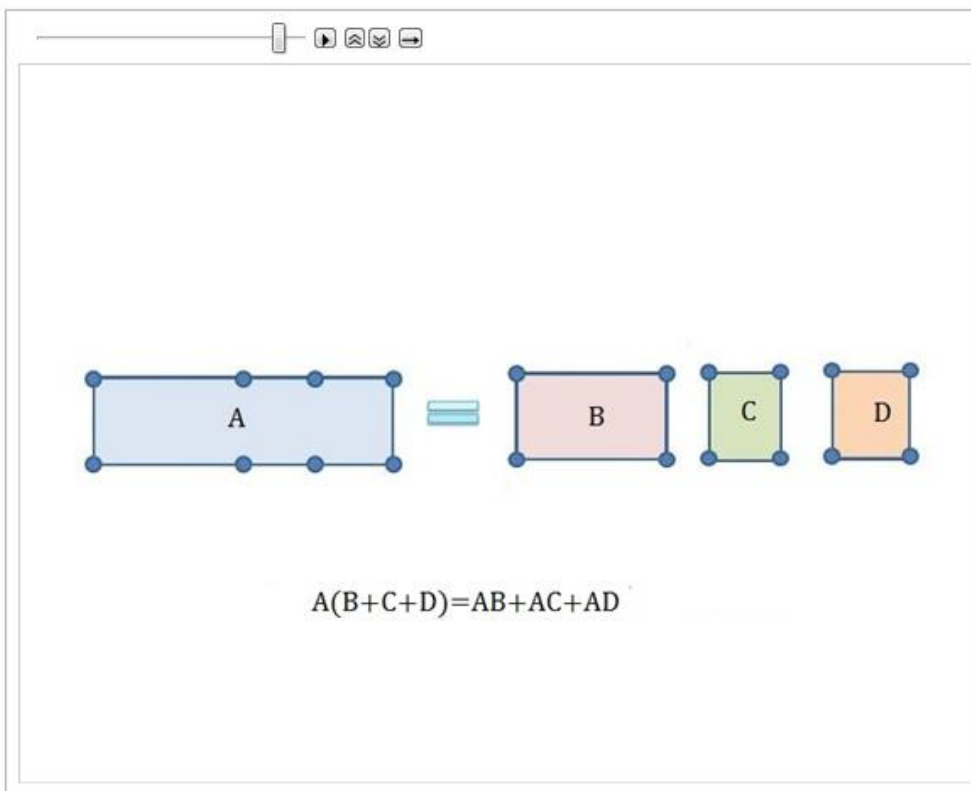
Luego se profundiza en las obras de Euclides



"Los Elementos" consta de trece libros sobre geometría y aritmética, a continuación se muestra cuantas definiciones, proposiciones, porismas, lemas, postulados y nociones comunes contiene cada libro de esta gran obra de la Geometría.

Libro	Definiciones	Proposiciones	Porismas	Lemas	Postulados	Nociones comunes
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	33	3	0	0	0
VII	22	39	1	0	0	0
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	4	11	0	0
XI	28	39	1	1	0	0
XII	0	18	2	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0
Total	130	465	19	17	5	5

Por ultimo para esta sección se abarco 4 proposiciones del libro II de "Los Elementos" de Euclides donde por medio de animación de busca mostrar la construcción y la demostración grafica de estas.



Aquí podemos observar parte de la animación de la proposición 5 del libro II, más específicamente llegando a demostrar la igualdad de las áreas sombreadas y todo esto sin ningún número.

Con las siguientes afirmaciones demostramos.

$$\overline{AD} = a, \quad \overline{DB} = b, \quad AG = GB = \frac{a+b}{2}, \quad GD = \frac{a-b}{2}$$

Para llegar a la proposición 5 del libro II.

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Por último se presenta la proposición 11 del libro II, la cual rompe un poco con el esquema de las anteriores proposiciones puesto que para esta ya se necesita tener un poco más claro propiedades geométricas como la pitagórica y las anteriores proposiciones más exactamente la sexta la cual también se expone en el ambiente

Vamos a demostrar que las areas sombreadas son iguales

CONCLUSIONES

A lo largo de la historia la humanidad se ha esforzado por entender la esencia del funcionamiento del mundo material hemos intentado descubrir las normas y las pautas que determinan las cualidades de los objetos que nos rodean y de las complejas relaciones que tienen con nosotros y entre ellos mismos, a lo largo de miles de años las sociedades de todo el mundo han descubierto que hay una disciplina por encima de todas las demás que proporciona un cierto conocimiento acerca de las realidades que nos subyacen en el mundo físico, es disciplina son las matemáticas.

Para esto es de gran importancia saber cómo abarcar esta disciplina inculcando valores y motivando a los nuevos estudiantes para que no tengan miedo de adentrarse en este mundo Matemático que tanto bien le ha hecho a nuestras civilizaciones, el abordar problemas que comúnmente se presentan con simbología algebraica con graficas geométricas donde lo único base es saber el área de estas figuras ha sido de gran diferencia en la forma de entender los temas relacionados con la factorización y la demostración de propiedades geométricas.

- Hoy en día es fundamental el uso de la tecnología como herramienta para mejorar la comprensión de temas relacionados con las Matemáticas, gracias al gran alto grado de interacción que estas pueden brindarle a temas que normalmente están representados en ecuaciones simbólicas.
- La aceptación que actualmente se tiene del uso de herramientas tecnológicas en las comunidades más contemporáneas es altísimo, aunque si no se manejan con cuidado pueden recaer en cuestiones tediosas y con poco aporte.
- Con el uso de Wolfram Mathematica como herramienta base para el desarrollo de este proyecto, se permite una fácil incorporación de elementos para la interacción y la experimentación aprovechando el motor de Mathematica y el material aportado por la comunidad.
- El trabajo dividido en Módulos es de gran importancia ya que permite que se pueda trabajar en módulos paralelamente en diferentes grupos de trabajo.

Bibliografía

- Khanacademy – algebra – curso sobre factorización. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<https://es.khanacademy.org/math/algebra/polynomial-factorization>>
- Historia de la antigua Mesopotamia. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet:< https://es.marenostrum.info/index.php?title=Antigua_Mesopotamia>
- Universe Sandbox. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<http://universesandbox.com>>
- MuseScore. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<https://musescore.org/>>
- Yousician. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]Disponible en Internet: <<http://www.sagemath.org/>>
- SageMath. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]Disponible en Internet: <<https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav>>
- Dr. Geo. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<http://www.drgeo.eu/>>
- Mathematica de Wolfram. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <https://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav>
- Programme for International Student Assessment. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Programme_for_International_Student_Assessment>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Organisation_for_Economic_Cooperation_and_Development>
- Pisa 2012 results: which country does best at reading, maths and science? [En Línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<https://www.theguardian.com/news/datablog/2013/dec/03/pisa-results-countrybest-reading-maths-science>>
- Colombia en PISA 2012 - Principales resultados. 2013. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-336001_archivo_pdf.pdf>
- GeoGebra. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<https://www.geogebra.org/about>>
- Scratch. [En línea] [Citado el 02 de marzo de 2019]. Disponible en Internet: <<https://scratch.mit.edu/about>>