

**MODELAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE POLÍTICAS DE MANTENIMIENTO DEL  
ESCANER DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON FALLAS  
ESTOCÁSTICAS**

**Andrés Felipe Cardona Ortegón**

**Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito  
Decanatura de Ingeniería Industrial  
Maestría en Ingeniería Industrial  
Bogotá D.C., Colombia  
2018**

MODELAMIENTO Y OPTIMIZACIÓN DE POLÍTICAS DE MANTENIMIENTO DEL  
ESCANER DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON FALLAS  
ESTOCÁSTICAS

**Andrés Felipe Cardona Ortegón**

Trabajo de grado para optar al título de  
Magíster en Ingeniería Industrial

Director  
William Javier Guerrero Rueda

Co-director  
Ignacio Pérez Vélez

**Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito  
Decanatura de Ingeniería Industrial  
Maestría en Ingeniería Industrial  
Bogotá D.C., Colombia  
2018**

© Únicamente se puede usar el contenido de las publicaciones para propósitos de información. No se debe copiar, enviar, recortar, transmitir o redistribuir este material para propósitos comerciales sin la autorización de la Escuela Colombiana de Ingeniería. Cuando se use el material de la Escuela se debe incluir la siguiente nota “Derechos reservados a Escuela Colombiana de Ingeniería” en cualquier copia en un lugar visible. Y el material no se debe notificar sin el permiso de la Escuela.

Publicado en 2019 por la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Avenida 13 No  
205-59 Bogotá. Colombia  
TEL: +57 – 1 668 36 00



## **Resumen**

*La definición de políticas de mantenimiento en la mayoría de empresas se realiza basada en conocimiento empírico y dependiendo del ámbito o lugar donde se encuentre el equipo. Teniendo en cuenta restricciones presupuestales y de capacidad de la maquinaria que tienen las entidades públicas y privadas en la administración del equipo médico, es crucial encontrar un camino adecuado que sirva como herramienta para el diseño de políticas de mantenimiento. Es por ello que el objeto de este trabajo de investigación es plantear un modelo de optimización que permita tomar mejores decisiones al momento de elaborar las políticas de mantenimiento. El equipo médico estudiado es el escáner de tomografía computarizada. Esta es una herramienta utilizada en varios procesos de diagnóstico, de diferentes especialidades, por ser una exploración no invasiva del cuerpo. El equipo sirve para la toma de imágenes de cabeza, tórax y extremidades. Se emplea un modelo de cadenas de markov de tiempo continuo para modelar el estado (funcionando, funcionando que requieren mantenimiento, detenidas que requieren mantenimiento correctivo) de las máquinas en el tiempo. Se propone un modelo de optimización que tiene como función objetivo maximizar el beneficio generado por las máquinas funcionando y requiriendo mantenimiento preventivo; sin exceder el presupuesto de la organización. Se emplean dos métodos para dar solución al modelo de optimización propuesto: un algoritmo exhaustive search para entender el comportamiento de la superficie solución generada por la función objetivo y una meta-heurística basada en gradient-ascent para hallar una buena solución (cercana al óptimo) en un tiempo razonable.*

## **Abstract**

*The definition of maintenance policies in most companies is based on empirical knowledge and depending on the area or place where the equipment is located. Taking into account the budget restrictions and capacity of the equipment that public and private entities have in the administration of medical equipment, it is crucial to find an adequate path that serves as a tool for the design of maintenance policies. That's why that the object of this research work is to propose an optimization model that allows making better decisions when preparing maintenance policies. The medical equipment studied is the computerized tomography scanner. This is a tool used in various diagnostic processes, of different specialties, as it is a non-invasive exploration of the body. The equipment is used to take images of the head, chest and extremities. A model of continuous-time markov chains is used to model the state (running, running requiring maintenance, stopped requiring corrective maintenance) of the machines over time. An optimization model is proposed whose objective function is to maximize the benefit generated by the operating equipment and requiring preventive maintenance; without exceeding the budget of the organization. Two methods are used to solve the proposed optimization model: an exhaustive search algorithm to understand the behavior of the solution surface generated by the objective function and a meta-heuristic based on gradient-ascent to find a good solution (close to the optimum) in a reasonable time.*

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>5</b>
1.1	PROBLEMÁTICA ESTUDIADA Y MOTIVACIÓN.....	5
1.2	OBJETIVOS .....	6
1.2.1	<i>Objetivo General</i> .....	6
1.2.2	<i>Objetivos Específicos</i> .....	6
1.3	METODOLOGÍA:.....	7
1.3.1	<i>Modelo de cadenas de markov de tiempo continuo:</i> .....	7
1.3.2	<i>Verificación del modelo:</i> .....	7
1.3.3	<i>Método de solución:</i> .....	7
1.4	CONTRIBUCIONES DE LA TESIS: .....	7
<b>2</b>	<b>ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>MODELO DE CADENA DE MARKOV.....</b>	<b>12</b>
3.1	SUPUESTOS:.....	12
3.2	NOTACIÓN:.....	12
3.3	VARIABLES DE ESTADO: .....	13
3.4	EJEMPLO NUMÉRICO PARA EL CASO DE 3 ESCÁNERES DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA .....	14
<b>4</b>	<b>MODELO DE OPTIMIZACIÓN .....</b>	<b>16</b>
4.1	PARÁMETROS:.....	16
4.2	VARIABLES: .....	16
4.2.1	<i>Variables de decisión:</i> .....	16
4.2.2	<i>Variables de decisión auxiliares:</i> .....	16
4.3	FUNCIÓN OBJETIVO: .....	17
4.4	RESTRICCIONES:.....	17
4.4.1	<i>Presupuesto:</i> .....	17
4.4.2	<i>Mantenimiento correctivo mayor a cero:</i> .....	17
4.4.3	<i>No negatividad</i> .....	17
<b>5</b>	<b>MÉTODOS DE SOLUCIÓN.....</b>	<b>18</b>
5.1	ALGORITMO EXHAUSTIVE SEARCH.....	18
5.2	META-HEURÍSTICA PROPUESTA BASADA EN GRADIENT-ASCENT .....	18
<b>6</b>	<b>RESULTADOS COMPUTACIONALES.....</b>	<b>20</b>
6.1	DESCRIPCIÓN DE LAS INSTANCIAS, LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN Y ESTACIÓN DE TRABAJO.....	20
6.2	VERIFICACIÓN DEL MODELO DE MARKOV PROPUESTO.....	21
6.3	MÉTODO EXHAUSTIVE SEARCH .....	22
6.4	CALIBRACIÓN DE LA META-HEURÍSTICA BASADA EN GRADIENT ASCENT .....	23
6.5	EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO.....	26
<b>7</b>	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>LISTA DE PRODUCTOS DERIVADOS DE LA TESIS .....</b>	<b>30</b>
8.1	ARTÍCULOS DERIVADOS DE RESULTADOS PARCIALES DE LA TESIS.....	30

8.2 PARTICIPACIONES EN CONGRESOS PARA LA SOCIALIZACIÓN DE RESULTADOS DE AVANCES Y RESULTADOS PARCIALES DE LA TESIS.....	30
8.3 POSTERS DERIVADOS DE RESULTADOS PARCIALES Y AVANCES DE LA TESIS.....	30
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>31</b>

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 3.4-1	Matriz R de tasas transición
Figura 3.4-2	Red de tasas transición
Figura 5.1-1	Pseudo-código exhaustive search
Figura 5.2-1	Pseudo-código meta-heurística basada en gradient-ascent
Figura 6.3-1	Tiempo empleado vs número de máquinas
Figura 6.3-2	Número de estados vs número de máquinas
Figura 6.4-1	Comparación de tiempo (en segundos) de computo meta-heurística
Figura 6.5-1	Análisis del desempeño computacional

## **Lista de Tablas**

Tabla 6.1-1	Muestra de una instancia de 5 escenarios
Tabla 6.1-2	Muestra de una instancia de 5 escenarios
Tabla 6.2-1	comparación del modelo de simulación contra la cadena de markov
Tabla 6.2-2	desempeño de la simulación con distintas distribuciones vs cadena de markov
Tabla 6.4-1	Comparación de función objetivo meta-heurística
Tabla 6.4-2	Comparación de tiempo (en segundos) de computo meta-heurística
Tabla 6.5-1	Comparación del valor de la función objetivo
Tabla 6.5-2	Comparación de tiempo de computo



# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Problemática estudiada y motivación

Los equipos médicos son de alta relevancia para la medicina y la calidad de los servicios de salud prestados a las personas. El tiempo muerto por: reparación, mantenimiento y daño en los equipos médicos cobra gran importancia, debido al poco número de equipos disponibles, los costos que esto genera y al uso del equipo médico para el apoyo de los médicos en cualquier proceso de diagnóstico.

Este tiempo cobra importancia, cuando se habla de los problemas que acarrea un diagnóstico tardío el cual al final terminará afectando al médico y al paciente, ya que en el peor de los escenarios el paciente puede morir por falta del correcto tratamiento. En otras palabras, como lo describe Mosadeghrad (2014) la calidad del servicio de salud podría verse afectado por la disponibilidad de los equipos médicos. Adicionalmente, se pueden generar errores de diagnóstico por problemas con los equipos como lo menciona Graber ML et al (2005).

En el contexto colombiano, conociendo las políticas de ley que concierne al servicio médico, donde los médicos tienen poco tiempo; 20 minutos de acuerdo al artículo 97 de la resolución 5261 (1994), para la atención y revisión de los pacientes, los hospitales cuentan con pocos equipos, bien sea porque la infraestructura no les permite tener más o por el presupuesto que manejan (el equipamiento médico es costoso), y el alto número de personas que requieren de un diagnóstico oportuno para el tratamiento de sus dolencias, es de vital importancia que las máquinas del hospital sirvan de apoyo para el diagnóstico oportuno, para ello es importante y necesario que éstas tengan un tiempo de utilización mayor.

Es allí donde la optimización en las políticas de mantenimiento de equipo médico cobra relevancia para el apoyo de todo el sistema, ya que el uso eficaz y mantenimiento oportuno del equipamiento médico permitirá aumentar el tiempo de uso del mismo, lo que se traduce en una reducción del tiempo muerto del equipo y porque no un mayor número de personas atendidas por las mismas máquinas.

Para enfrentar de manera adecuada esta problemática la optimización es crucial por la mejora en el uso de los recursos que ésta puede brindar. Lamentablemente como lo señalan en sus estudios, Jamshidi et al (2014), de 34 documentos producto de investigación 64% de ellos son empíricos, 19% son de priorización y tan solo el 17% son de modelos de optimización. Razón por la cual hay lugar para realizar estudios en el campo de la optimización de políticas de mantenimiento de equipos médicos.

El equipo médico estudiado es el escáner de tomografía computarizada. Esta es una herramienta utilizada en varios procesos de diagnóstico, de diferentes

especialidades, por ser una exploración no invasiva del cuerpo. El equipo sirve para la toma de imágenes de cabeza, tórax y extremidades.

Generalmente los hospitales no cuentan con un gran número de escáneres de tomografía computarizada, considerando que el valor de compra de este equipo; dependiendo de la marca y el tipo, supera los US 800,000 de acuerdo Asc Communications. (2012). Debido a que todas las personas requieren un diagnóstico oportuno, es necesario que los equipos médicos del hospital se encuentren disponibles para apoyar el proceso de diagnóstico la mayor cantidad de tiempo posible.

Los tiempos de falla del escáner de tomografía computarizada y del equipo médico en general son aleatorios e impredecibles. Así mismo, los tiempos de reparación y mantenimiento son aleatorios y dependen en el primer caso si ocurre algún fallo y en el segundo caso del momento en el que se agende el mantenimiento.

Se toma como supuesto que una nueva falla no dependerá de lo ocurrido en el pasado sino a partir del momento en el que se reparó o realizó mantenimiento. De acuerdo a esto, las cadenas de Markov logran representar la situación considerando que poseen la propiedad de Markov, que consiste en que el valor que puede tomar en el futuro o su posición futura no depende del pasado, sino de su presente o posición actual, es decir, carece de memoria (J.R. Norris, 1998).

En consecuencia, a lo anterior expuesto, las preguntas de investigación planteadas son las siguientes: ¿Cómo puede un modelo de optimización basado en cadenas de Markov ser concebido para diseñar políticas de mantenimiento de equipos médicos? ¿Es posible la reducción del tiempo muerto en el servicio médico del hospital? ¿Cuáles son las posibles medidas de desempeño de las políticas de mantenimiento que son afectadas por el modelo?

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo General

Diseñar modelos y métodos de optimización para las políticas de mantenimiento de escáner de tomografía computarizada de los establecimientos médicos, basados en cadenas de Markov.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Generar un modelo de cadenas de Markov valido para representar la vida útil de un equipo médico
- Verificar el modelo de cadenas de Markov.

- Generar un método de optimización para las decisiones de políticas de mantenimiento de equipos.

### 1.3 Metodología:

A continuación se expone la metodología que se lleva a cabo en el desarrollo de este proyecto de investigación:

#### 1.3.1 Modelo de cadenas de markov de tiempo continuo:

Primero se construye un modelo de cadenas de markov que represente el estado de un grupo de escáneres de tomografía computarizada iguales, teniendo en cuenta que solo se cuenta con un único técnico.

#### 1.3.2 Verificación del modelo:

Luego, se valida el modelo propuesto de cadenas de markov simulando diferentes escenarios; con una distribución de probabilidad diferente en cada uno, verificando que los resultados obtenidos por la cadena se encuentren dentro del intervalo de confianza del 95% del resultado arrojado por la simulación.

#### 1.3.3 Método de solución:

Finalmente, se revisa la función del modelo de optimización, se concluye que ésta es cóncava, por esta razón se implementa una meta-heurística basada en gradient-ascent.

### 1.4 Contribuciones de la tesis:

Esta tesis genera las siguientes contribuciones en el área de gestión de operaciones:

- Se logra modelar el estado de un grupo de máquinas empleando cadenas de markov de tiempo continuo.
- Se propone un modelo de optimización que tiene como objetivo aumentar el beneficio generado por el estado del grupo de máquinas.
- Se describe el espacio solución del modelo de optimización propuesto.
- Se propone un método de cálculo que entregue una buena solución en un tiempo razonable.

## **2 ESTADO DEL ARTE**

Para Romero et al (2013) y Jiménez et al (2008) existe una relación entre las problemáticas que presenta el sector productivo y el sector hospitalario, por lo cual es posible adecuar los instrumentos que se emplean en las empresas a los hospitales esto con la idea de mejorar el uso de sus recursos, brindar un mejor servicio y salvar vidas.

Para Carnero (2014) tanto la cantidad como la complejidad de la indumentaria empleada en la industria han aumentado en los últimos años, y así mismo estos requieren mantenimientos más complejos como también más costosos. Además, las organizaciones por el entorno tan agresivo al cual se enfrentan deben ser más competitivos brindando un mejor servicio al cliente, que implica un menor tiempo de atención, mejor calidad en el servicio, entre otros.

Jafari y Makis (2016) encuentran que, de acuerdo con los resultados obtenidos, un ahorro substancial en los costos puede ser alcanzado introduciendo en el problema condiciones de monitoreo (CM) las cuales proveen valiosa información sobre la condición de la planta de producción al final de cada ciclo o corrida de producción. Resultado trasladables y aplicables al sector hospitalario, por lo mencionado por Jiménez et al (2008), donde expresa el común que tienen este sector y el sector de la industria.

Teniendo en cuenta lo mencionado por Romero et al (2013), Jiménez et al (2008) y por Carnero (2014), la necesidad de brindar un mejor servicio no solo existe en la industria, como tampoco es la única que debe ser competitiva, el sector hospitalario también serlo. Por ello surgen diferentes trabajos para mejorar la toma de decisiones en el sector hospitalario como los realizados por Aguilar, V.G. et al (2013), Aguilar, V.G. et al (2012), Hernandez, A. et al (2014), Guerrero, W. J., et al (2008), Giedelman, N (2017). Un ejemplo de esto lo presenta Guerrero, W. J. et al (2013) usando cadenas de markov minimiza el costo de inventario a la mano de un centro médico sin afectar el servicio. Desde esta perspectiva, las políticas de mantenimiento cobran una importancia mayor para la mejora de sus servicios y la reducción de costos en sus operaciones.

Es pertinente dar la definición de mantenimiento preventivo y la definición de mantenimiento correctivo. De acuerdo con Orozco Alzate, Nelson. (1981) mantenimiento preventivo es una técnica especialmente dirigida al soporte de actividades en todo tipo de empresas, para ello se realiza revisión de manera periódica del equipo para evitar paros imprevistos y mantenimiento correctivo es poner en marcha un equipo luego de que éste se encuentre descompuesto, se realiza solamente cuando el equipo ha fallado.

De acuerdo con Arm Abd Rani et al (2015), encuentran como resultado que la principal estrategia de mantenimiento, por ser la preferida dentro de los hospitales encuestados, con un valor promedio de 4.52 es la estrategia de mantenimiento preventivo, seguido se encuentra el mantenimiento proactivo con un valor promedio de 4.30, el mantenimiento predictivo con valor promedio de 4.29, mantenimiento correctivo con un valor promedio de 4.13 y por último se encuentra la política de mantenimiento por descompuesto con el menor valor promedio de 3.91.

Según Xiang (2013) para cada uno de los casos testeados en su investigación, la política óptima es aquella que maneja calendario de mantenimiento, es decir, mantenimiento programado y un proceso de control estadístico. También menciona el potencial de ahorro en los costos que se incurre al emplear información resultado de procesos de control estadístico. Así mismo, muestra que de acuerdo al modelo que plantea y a sus variables de entrada, hay una interdependencia entre el proceso de control estadístico y los procedimientos de mantenimiento, lo que justifica el atractivo que representa considerar ambos criterios de manera conjunta.

Reuniendo los resultados presentados por Arm Abd Rani et al (2015), Xiang (2013) y Jafari y Makis (2016), la estrategia principal que emplean los hospitales como la que brinda mejores resultados y beneficios es aquella que es preventiva, empleando un calendario de mantenimiento producto de una observación continua dada por condiciones de monitoreo que permiten obtener valiosa información que lo retroalimenta y mejora.

Adicional a los resultados anteriores, Khalaf et al (2013), concluyen que la edad del equipo no influye en que la máquina se mantenga o no en funcionamiento, esto debido a que los equipos analizados tienen una expectativa de vida útil de 15 años, pero el tiempo en servicio del mismo es de aproximadamente solo 5 años. En consecuencia, la utilidad del equipo se puede ver afectada de manera directa por la edad, debido a la relación de la vida útil con el tiempo de servicio del equipo.

Para el análisis y solución de las problemáticas que conllevan las políticas de mantenimiento se tienen diferentes maneras y modelos aplicables dependiendo del marco en el que se encuentre el equipo. Es por ello que no existe un modelo maestro que permita encontrar siempre la mejor opción. Como lo señala Jamshidi et al (2014), la mayoría de metodologías empleadas para la solución de este problema son empíricas, seguidas por priorización y finalmente modelos de optimización. También menciona que las investigaciones en este campo han aumentado en la última década, en su mayoría producto de papeles de investigación, seguido por libros y las tesis de grado.

Dentro de los modelos de optimización que existen para la solución de estos problemas, principalmente se emplean dos, los modelos de programación entera

mixta y los modelos basados en procesos de decisión de Markov. Donde la diferencia sustancial entre ambos es la naturaleza de la información, determinística y estocástica respectivamente. Sin embargo, la problemática de las políticas de mantenimiento no debe ser abordada de manera determinística debido a que los tiempos de las fallas no siguen un patrón dado, sino por el contrario son probabilísticas, por ello como lo describe Kulkarni (2011), un proceso estocástico es un modelo de probabilidad que describe la evolución de un sistema que se desarrolla de manera aleatoria en el tiempo, razón por lo que un proceso estocástico se ajusta mejor para el estudio.

Un ejemplo de esto es el estudio realizado por Tomasevicz y Asgarpoor (2009), donde emplean procesos de decisión semi-markovianos para la optimización de políticas de mantenimiento. En el cual emplea un proceso de Markov estándar y lo ponen a otro nivel permitiéndole al tiempo que se gasta en cada estado tomar cualquier posible tiempo variable positivo y no solo exponencial. Y aunque por simplicidad es muy útil el proceso de Markov estándar, regularmente son preferidos los modelos semi-markovianos.

Así mismo, Papakonstantinou y Shinozuka (2014), también emplean como base de su modelo un proceso de decisión Markov que como bien ellos describen, “los procesos de decisión de Markov (MDP) controlan los procesos estocásticos en el que un decisor no conoce con certeza el efecto exacto de ejecutar alguna acción específica”. La idea que plantean Papakonstantinou y Shinozuka (2014, 94), es “la solución del problema requiere que el decisor encuentre una secuencia de acciones que optimice en función de la recompensa y en el largo plazo”.

Finalmente, como lo hecho por los anteriores autores para encontrar una solución adecuada al problema es necesario no solo emplear procesos de decisión de Markov, sino también, adecuar dicho modelo al contexto que se quiere mejorar, determinando las características que tienen las máquinas, los equipos y las políticas de mantenimiento, así el modelo podrá ajustarse mejor.

Elegir cadenas de Markov para este tipo de problema es adecuado, dado que como lo menciona Mark A. Boyd (1998) el modelamiento de Markov puede modelar el comportamiento de diferentes tipos de sistemas por medio de modelos combinatorios, como también puede modelar reparaciones de manera natural (reparaciones de componentes individuales o grupales, un número variable de técnicos que reparen, reparación secuencial o parcial), adicionalmente puede modelar el manejo de equipos de manera detallada.

Existe otro método que también podría emplearse, la simulación. Tal como lo describe Azarang M. y Garcia E. (1998) simulación es el desarrollo de un modelo

lógico-matemático de un sistema de tal forma que se obtiene una imitación de la operación de un proceso de la vida real o de un sistema a través del tiempo.

El uso de la simulación acarrea ventajas y desventajas las cuales enumeran Azarang M. y Garcia E. (1998), así:

**Ventajas:** una vez el modelo es construido, es posible realizar cambios de manera rápida para analizar diferentes políticas y escenarios. Por lo general es más barato mejorar el sistema vía simulación, que hacerlo de manera directa en el sistema real. Es más sencillo comprender y visualizar los métodos de simulación que los métodos puramente analíticos. Los modelos de simulación pueden analizar sistemas de mayor complejidad o mayor detalle. En algunos casos, la simulación es el único medio para lograr una solución.

**Desventajas:** los modelos de simulación en una computadora son costosos y requieren mucho tiempo para desarrollarse y validarse. Se requieren un gran número de corridas computacionales para encontrar “soluciones óptimas”, lo cual repercute en altos costos. Es difícil aceptar los modelos de simulación. Los modelos de simulación no dan soluciones óptimas. La solución de un modelo de simulación puede dar al analista un falso sentido de seguridad.

Acorde a lo anteriormente expuesto, se agrega que la simulación no resuelve de manera óptima el problema, esto se convierte en la razón más fuerte por la que no se elige simulación como método de solución para este problema.

En conclusión, no hemos encontrado en la literatura un trabajo asociado al modelamiento y optimización de políticas de mantenimiento de equipos médicos que sean difícilmente reemplazables y que sean vitales para la operación de un centro médico, con fallas estocásticas, que utilice cadenas de markov para modelar su estado de funcionamiento, ni meta-heurísticas para resolver problemas en este contexto. Por lo tanto, se abre un nuevo panorama de investigación para evaluar el ajuste de este tipo de modelos respecto a la realidad.

### 3 MODELO DE CADENA DE MARKOV

A continuación, se describe la cadena de markov de tiempo continuo que representa el sistema de daño de las máquinas y su reparación:

#### 3.1 Supuestos:

Los supuestos del modelo de cadena de markov son los siguientes:

- La cadena tendrá un número fijo de máquinas, es decir, se asume que las máquinas no se compran ni se venden.
- Sólo hay un técnico para reparar el grupo de máquinas y realiza una reparación a la vez.
- El tiempo de desplazamiento del técnico es cero.
- Las fallas de las máquinas son aleatorias con propiedad de no memoria.
- El grupo de máquinas es idéntico.
- Se da prioridad al mantenimiento correctivo sobre el mantenimiento preventivo.
- No se realizan reparaciones parciales.
- Mantenimiento preventivo reduce la posibilidad de fallas.
- Una vez la máquina es reparada queda en perfecto estado.
- No se realiza mantenimiento de actualización.

#### 3.2 Notación:

La notación del modelo de cadena de markov es la siguiente:

$n$  = número de máquinas

$\gamma$  = tasa de daño total de una máquina en perfecto estado [mes<sup>-1</sup>]

$\delta$  = tasa de daño parcial de una máquina [mes<sup>-1</sup>]

$\theta$  = tasa de daño total de una máquina que requiere mantenimiento preventivo [mes-1]

$\beta$  = tasa de mantenimiento preventivo [mes-1]

$\alpha$  = tasa de mantenimiento correctivo [mes-1]

### 3.3 Variables de estado:

Las variables de estado del modelo de cadena de markov son los siguientes:

Sea  $(X_t, Y_t, Z_t)$  una cadena de markov de tiempo continuo.

$X_t$  = número de máquinas en funcionamiento en el instante t.

$Y_t$  = número de máquinas en funcionamiento que requieren mantenimiento preventivo en el instante t.

$Z_t$  = número de máquinas detenidas que requieren mantenimiento correctivo en el instante t.

El espacio de estados es el siguiente:  $S = \{(X, Y, Z) / X + Y + Z = n\} \text{ y } \{X, Y, Z \geq 0\}$

La matriz de tasas de cambio de estado es la siguiente:

$$R_{(X_1(t), Y_1(t), Z_1(t)), (X_2(t), Y_2(t), Z_2(t))} \left\{ \begin{array}{l} \delta X_1(t) \quad \text{si } X_2(t) = X_1(t) - 1, Y_2(t) = Y_1(t) + 1, Z_2(t) = Z_1(t) \\ \gamma X_1(t) \quad \text{si } X_2(t) = X_1(t) - 1, Y_2(t) = Y_1(t), Z_2(t) = Z_1(t) + 1 \\ \theta Y_1(t) \quad \text{si } X_2(t) = X_1(t), Y_2(t) = Y_1(t) - 1, Z_2(t) = Z_1(t) + 1 \\ \beta \cdot \min(Y_1(t), N - Z_1(t)) \quad \text{si } N - Z_1(t) > 0 \\ \text{y } X_2(t) + 1 = X_1(t), Y_2(t) = Y_1(t) - 1, Z_2(t) = Z_1(t) \\ \alpha \text{ si } X_2(t) + 1 = X_1(t), Y_2(t) = Y_1(t), Z_2(t) = Z_1(t) - 1 \\ 0 \text{ de lo contrario} \end{array} \right.$$

En el primer renglón de la ecuación anterior, se representa la transición en la que el número de máquinas en funcionamiento se reduce y el número de máquinas en funcionamiento que requieren mantenimiento preventivo aumenta se asigna la tasa delta multiplicada por el número de máquinas en funcionamiento antes de la transición. En el segundo renglón, la transición en la que el número de máquinas en funcionamiento se reduce y el número de máquinas que requieren mantenimiento correctivo aumenta se asigna la tasa gamma multiplicada por el número de máquinas en funcionamiento antes de la transición. En el tercer renglón, la

transición en la que el número de máquinas en funcionamiento que requieren mantenimiento preventivo se reduce y el número de máquinas que requieren mantenimiento correctivo aumenta se asigna la tasa teta multiplicada por el número de máquinas en funcionamiento que requieren mantenimiento preventivo antes de la transición. En el cuarto renglón, la transición en la que el número de máquinas en funcionamiento que requieren mantenimiento preventivo se reduce y el número de máquinas en funcionamiento aumenta se asigna la tasa beta multiplicada por el número de técnicos que no estén asignados a mantenimiento correctivo antes de la transición. Y en el quinto renglón la transición en la que el número de máquinas que requieren mantenimiento correctivo se reduce y el número de máquinas en funcionamiento aumenta se asigna la tasa alfa multiplicada por el mínimo entre el número de técnicos y máquinas que requieren mantenimiento correctivo antes de la transición.

### 3.4 Ejemplo numérico para el caso de 3 escáneres de tomografía computarizada

A continuación, se presenta el siguiente ejemplo numérico:

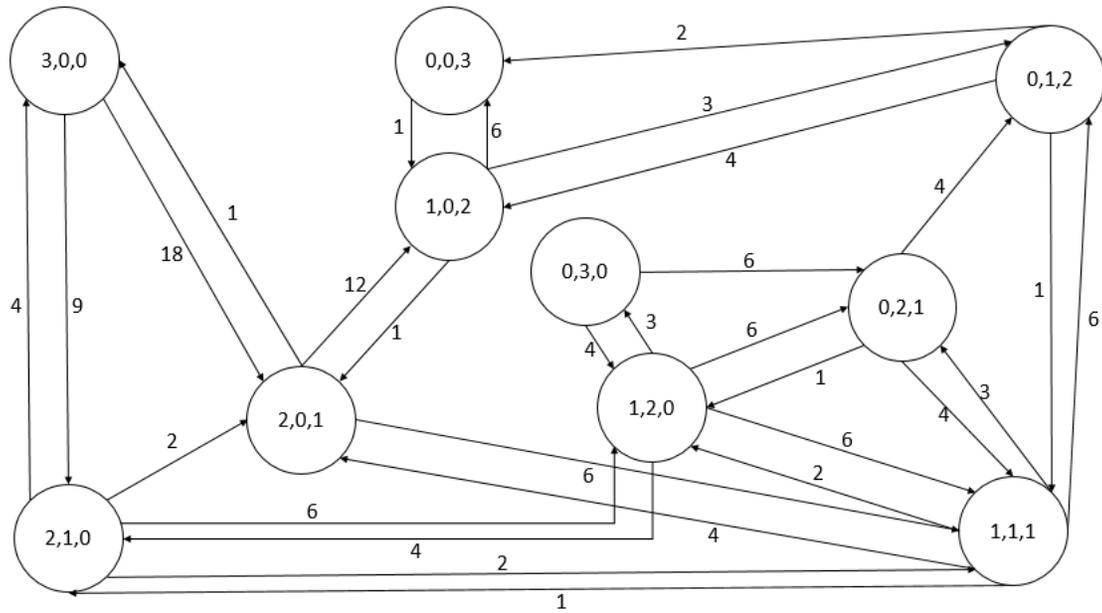
Sea  $(X_t, Y_t, Z_t)$  una cadena de markov de tiempo continuo con espacio de estados  $S = \{(X, Y, Z) / X + Y + Z = 3\}$  Con los siguientes parámetros:  $n = 3$ ,  $\gamma = 6$  [mes-1],  $\delta = 3$  [mes-1],  $\theta = 2$  [mes-1],  $\beta = 1$  [mes-1],  $\alpha = 4$  [mes-1]

A continuación, se presenta la matriz R de tasas de transición para el ejemplo numérico:

Figura 3.4-1 Matriz R de tasas transición

R		X	Y	Z										
		X	Y	Z	0	1	2	3	2	1	0	0	1	
3	0	0	0	0	0	0	0	9	18	0	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4	6	0	0	0
0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	4	0	0	0	2	6	0	0	0	2
2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	12	0	6
1	2	0	0	0	0	3	0	4	0	0	6	0	0	4
0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4	4
1	0	2	0	0	0	0	6	0	1	0	0	0	3	0
0	1	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	4	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	4	0	3	2	6	0

Figura 3.4-2 Red de tasas transición



De la red anterior se puede concluir que tiene una sola clase, tiene estados no nulos y es aperiódica, por lo anterior esta red es ergódica (Kulkarni, 2011).

## 4 MODELO DE OPTIMIZACIÓN

A continuación, se describe el modelo de optimización para el sistema de daño de las máquinas y su reparación:

### 4.1 Parámetros:

A continuación, se presentan los parámetros del modelo de optimización, adicionales a los definidos en la sección anterior:

$C_1$  = beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento. [\\$]

$C_2$  = beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento pero requiriendo mantenimiento preventivo. [\\$]

$C_3$  = costo por unidad de tiempo de tener una máquina no funcionando por requerir mantenimiento correctivo. [\\$]

$C_4$  = costo por unidad de tiempo de realizar mantenimiento correctivo. [\\$]

$C_5$  = costo por unidad de tiempo de realizar mantenimiento preventivo. [\\$]

$Q$  = presupuesto por unidad de tiempo destinado a realizar mantenimiento. [\\$]

### 4.2 Variables:

A continuación, se presentan las variables de decisión del modelo de optimización:

#### 4.2.1 Variables de decisión:

$\beta$  = tasa de mantenimiento preventivo [mes<sup>-1</sup>]

$\alpha$  = tasa de mantenimiento correctivo [mes<sup>-1</sup>]

#### 4.2.2 Variables de decisión auxiliares:

$X_t$  = número de máquinas en funcionamiento en el instante  $t$ .

$Y_t$  = número de máquinas en funcionamiento que requiriendo mantenimiento preventivo en el instante  $t$ .

$Z_t$  = número de máquinas detenidas que requieren mantenimiento correctivo en el instante  $t$ .

#### 4.3 Función objetivo:

La función objetivo se calcula a partir de: el producto entre el número esperado de máquinas funcionando ( $\bar{X}$ ) y el beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento ( $C_1$ ), más el producto entre número esperado de máquinas en funcionamiento requiriendo mantenimiento preventivo ( $\bar{Y}$ ) y el beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento pero requiriendo mantenimiento preventivo ( $C_2$ ), menos el producto entre número esperado de máquinas detenidas que requieren mantenimiento correctivo ( $\bar{Z}$ ) y costo por unidad de tiempo de tener una máquina no funcionando por requerir mantenimiento correctivo ( $C_3$ ), menos el producto entre la tasa de mantenimiento preventivo ( $\beta$ ) y costo por unidad de tiempo de realizar mantenimiento preventivo ( $C_5$ ), menos el producto entre la tasa de mantenimiento preventivo ( $\alpha$ ) y costo por unidad de tiempo de realizar mantenimiento correctivo ( $C_4$ ).

$$\text{Max } C_1 \cdot \bar{X} + C_2 \cdot \bar{Y} - C_3 \bar{Z} - C_4 \alpha - C_5 \beta$$

#### 4.4 Restricciones:

A continuación, se presentan las restricciones del modelo de optimización.

##### 4.4.1 Presupuesto:

Esta restricción tiene como finalidad evitar que la decisión que se tome exceda el presupuesto de la organización.

$$\alpha C_4 + \beta C_5 \leq Q$$

##### 4.4.2 Mantenimiento correctivo mayor a cero:

Esta restricción tiene como finalidad hacer que la decisión que se tome evite poner en cero el mantenimiento correctivo, ya que en caso contrario en el estado estable de la cadena de markov el total de máquinas estaría dañado.

$$0 < \alpha$$

##### 4.4.3 No negatividad

Esta restricción tiene como finalidad evitar que la tasa de mantenimiento preventivo tome valores negativos.

$$0 \leq \beta$$

## 5 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Se evalúan y comparan dos metodologías de solución. La primera encuentra la solución óptima, pero requiere importantes recursos computacionales y un tiempo importante de cálculo. La segunda metodología propuesta halla una buena solución en un tiempo razonable.

### 5.1 Algoritmo exhaustive search

El método exhaustive search, recorre todo el espacio solución y garantiza encontrar una solución óptima. Evaluando la función objetivo ( $FO$ ), partiendo de  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0$  hasta  $\beta = \alpha = 500$ , almacenando cada valor de la función objetivo en el vector  $\vec{FO}$  y guardando el máximo  $Z^*$ . Una vez termina de recorrer los valores posibles de  $\alpha$  y  $\beta$ , entrega  $Z^*$  como respuesta.

Figura 5.1-1 Pseudo-código exhaustive search

```
1:  $Z^* \leftarrow$  Solución inicial
2: Repetir
3:   Repetir
4:      $\vec{FO}(\alpha, \beta) \leftarrow FO(\alpha, \beta)$ 
5:     Si  $Z^* < FO(\alpha, \beta)$ 
6:        $Z^*(\alpha, \beta) \leftarrow FO(\alpha, \beta)$ 
7:     Hasta  $\beta = 500$ 
8: Hasta  $\alpha = 500$ 
9: Respuesta  $Z^*$ 
```

Primero se calcula una solución inicial en el punto  $(\alpha = 0.05, \beta = 0)$ , ésta se almacena. Después se actualiza la función objetivo (FO) en el siguiente punto  $(\alpha, \beta)$ , se almacena este nuevo valor y se compara si este es máximo, si lo es se actualiza ( $Z^*$ ) sino continua al siguiente punto  $(\alpha, \beta)$ . Se repite el paso anterior hasta alcanzar los límites de  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 5.2 Meta-heurística propuesta basada en gradient-ascent

La meta-heurística propuesta, parte de una solución inicial  $FO_0$ . Antes de realizar cada transición, se evalúa la función objetivo aumentando  $\alpha$  en 0.5, ésta se guarda como  $FO_1$  y se evalúa la función objetivo aumentando  $\beta$  en 0.5, ésta se guarda como  $FO_2$ . Luego compara los resultados obtenidos de  $FO_0, FO_1$  y  $FO_2$ , elige la opción que genera el mayor crecimiento, con esta actualiza  $FO_0$  y repite el proceso hasta que en dos transiciones seguidas la solución no mejore o hasta el límite de iteraciones propuesto.

Este método requiere de la calibración de sus parámetros para tener un buen desempeño. Esta calibración se describe en la sección 6.4.

*Figura 5.2-1 Pseudo-código meta-heurística basada en gradient-ascent*

<p>1: <math>FO_0 \leftarrow</math> Solución inicial 2: <b>Repetir</b> 3:       <math>FO_1 \leftarrow FO(\alpha\Delta, \beta)</math> 4:       <math>FO_2 \leftarrow FO(\alpha, \beta\Delta)</math> 5:       <math>FO \leftarrow MAX\{FO_0, FO_1, FO_2\}</math> 6: <b>Hasta</b> <math>FO</math> es la mejor solución o hasta límite de iteraciones 7: <b>Respuesta</b> <math>FO</math></p>
--

La solución inicial es una solución obtenida en un punto  $(\alpha, \beta)$ . Este primer punto depende de los resultados de la calibración descrita en la sección 6.4.

Se eligió el método meta-heurística basada en gradient-ascent debido a que la función objetivo del modelo de optimización es cóncava, es decir, tiene un único máximo.

## 6 RESULTADOS COMPUTACIONALES

### 6.1 Descripción de instancias, lenguaje de programación y estación de trabajo.

Se empleó el lenguaje R en su versión i386 3.4.1. La estación de trabajo fue un computador con procesador Intel® Core™ 2 DUO E7500 @2.93GHz con memoria RAM de 2.00 GB DDR2.

Se construyeron 2 tipos de instancias: la primera tiene en cuenta el número de máquinas, la tasa de daño total de una máquina, la tasa de daño parcial de una máquina en perfecto estado, la tasa de daño total de una máquina que requiere mantenimiento preventivo, la tasa de mantenimiento preventivo, la tasa de mantenimiento correctivo, el beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento, el beneficio por unidad de tiempo de tener una máquina en funcionamiento pero requiriendo mantenimiento preventivo, los costos por unidad de tiempo por tener una máquina no funcionando por requerir mantenimiento preventivo y los costos por unidad de tiempo de realizar mantenimiento preventivo y correctivo, y un presupuesto, la cual se empleó para realizar la calibración de la meta-heurística y estimación del rendimiento de los métodos de solución. A continuación, se presenta un ejemplo de las instancias:

*Tabla 6.1-1 Muestra de una instancia de 5 escenarios*

Test	$n$	$\delta$	$\gamma$	$\theta$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$Q$
1	4	17	11	33	6	4	2	0.04	0.19	200
2	17	18	12	22	9	5	3	0.67	0.72	200
3	20	7	6	10	2	1	9	0.78	0.81	200
4	8	18	7	33	5	3	7	0.68	0.78	200
5	10	7	5	13	4	3	2	0.21	0.5	200

El segundo tipo instancia tiene en cuenta el número de máquinas, la tasa de daño total de una máquina, la tasa de daño parcial de una máquina en perfecto estado, la tasa de daño total de una máquina que requiere mantenimiento preventivo, la tasa de mantenimiento preventivo, la tasa de mantenimiento correctivo, la cual se empleó para realizar la verificación del modelo. A continuación, se presenta un ejemplo de las instancias:

*Tabla 6.1-2 Muestra de una instancia de 5 escenarios*

Test	$n$	$\delta$	$\gamma$	$\theta$	$\alpha$	$\beta$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	5	4	6	0.5	1.5
3	1	10	4	16	1	0.5
4	1	18	14	33	0.5	1
5	1	14	10	16	0.5	1.5

## 6.2 Verificación del modelo de markov propuesto

Para verificar el modelo de cadenas de markov de tiempo continuo propuesto, primero se construyó un modelo de simulación que describe el estado de  $n$  máquinas en el tiempo y a partir de esto poder calcular el número esperado de máquinas en cada estado de funcionamiento.

Para verificar que la simulación sigue el mismo proceso de la cadena de markov, se realizan pruebas con la instancia descrita en la sección 6.1 empleando la distribución exponencial. A continuación, se presenta una tabla resumen que describe el error que tiene la simulación respecto a la cadena de markov:

*Tabla 6.2-1 comparación del modelo de simulación contra la cadena de markov*

Test	Parámetros						Modelo simulación			Cadena de markov			Error promedio
	$n$	$\delta$	$\gamma$	$\theta$	$\alpha$	$\beta$	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	
1	1	1	1	1	1	1	0.3334	0.1667	0.4998	0.3333	0.1667	0.5000	0.03%
2	1	5	4	6	0.5	1.5	0.1332	0.1024	0.7645	0.1331	0.1024	0.7645	0.02%
3	1	10	4	16	1	0.5	0.0352	0.0207	0.9442	0.0352	0.0207	0.9441	0.06%
4	1	18	14	33	0.5	1	0.0300	0.0162	0.9538	0.0301	0.0162	0.9538	0.14%
5	1	14	10	16	0.5	1.5	0.0570	0.0483	0.8947	0.0569	0.0483	0.8948	0.05%

La tabla anterior presenta el error que tienen los valores obtenidos por el modelo de simulación contra los valores obtenidos por la cadena de markov. Acorde a lo anterior se concluye que el error de la simulación es inferior al 1% en todos los casos. Con este modelo de simulación se realizó la verificación de la cadena de markov, empleando la distribución gamma con parámetro  $k=2$ ,  $k=3$ , la distribución F y la distribución normal. Como resultado de la simulación se obtuvo lo siguiente:

*Tabla 6.2-2 desempeño de la simulación con distintas distribuciones vs cadena de markov*

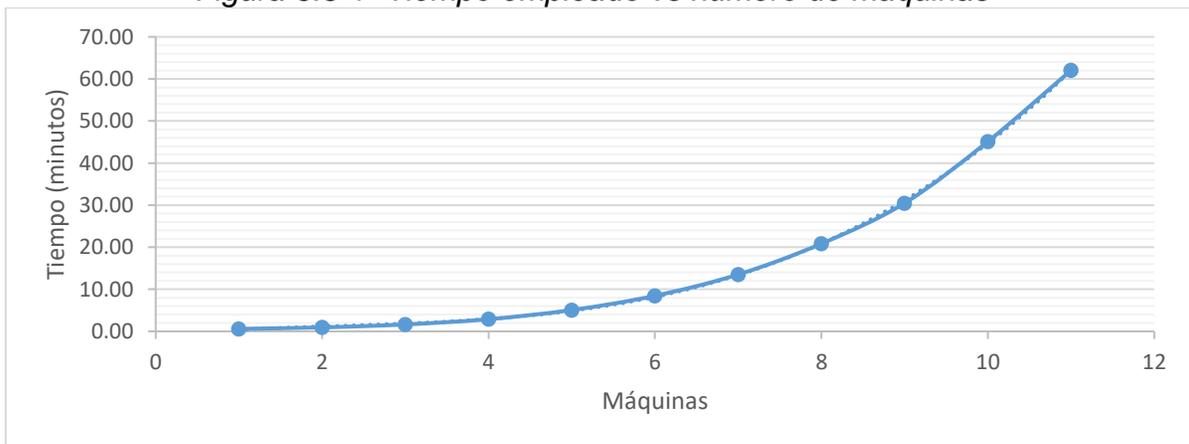
test	$n$	$\delta$	$\gamma$	$\theta$	$\alpha$	$\beta$	Gamma (k=2)	Gamma (k=3)	Distribución F	Distribución Normal
							Error porcentual promedio	Error porcentual promedio	Error porcentual promedio	Error porcentual promedio
1	1	1	1	1	1	1	11.09%	15.73%	77.17%	19.74%
2	1	5	4	6	2	1.5	8.24%	12.15%	27.37%	204.20%
3	1	10	4	16	1	2	9.71%	14.36%	99.75%	871.46%
4	1	18	14	33	2	1	9.39%	14.46%	175.05%	1065.25%
5	1	14	10	16	2	1.5	9.52%	14.46%	41.51%	538.26%

De acuerdo a la tabla anterior se concluye que la distribución de los fallos de las máquinas debe ser exponencial para que el modelo de cadena de markov pueda representar apropiadamente el sistema de máquinas. La distribución F y la distribución normal no representan apropiadamente el sistema debido a que los errores promedio son altos. Sin embargo, teniendo un error permisible de máximo el 15% los fallos también pueden distribuirse gamma con parámetros  $K=2$  y  $k=3$ , y de esta forma la cadena de markov representará adecuadamente el sistema.

### 6.3 Método exhaustive search

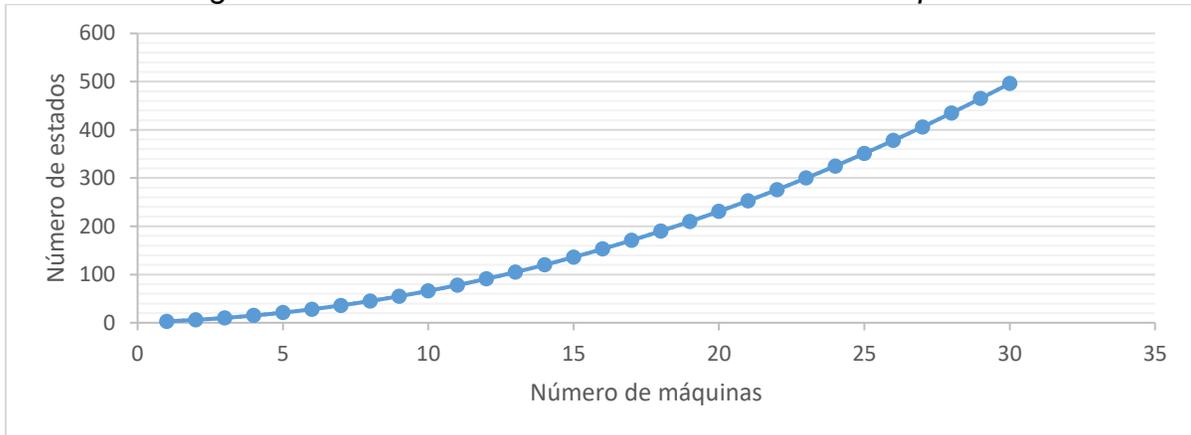
Este método tiene como objetivo encontrar el óptimo de la función objetivo para luego poder comparar éste resultado con la meta-heurística. El pseudo-código y funcionamiento de éste método esta explicado en la sección 5.1. A continuación se presentan los resultados obtenidos por el método en las instancias descritas en la sección 6.1:

Figura 6.3-1 Tiempo empleado vs número de máquinas



El gráfico anterior presenta el tiempo computacional que emplea el método contra el número de máquinas del sistema. Se observa que a medida que aumenta el número de máquinas, el tiempo computacional aumenta de acuerdo a la función  $tiempo\ computacional = 0.08n^3 - 0.52n^2 + 1.78n - 0.94$ ; con un ajuste  $R^2 = 0.999$ .

Figura 6.3-2 Número de estados vs número de máquinas



El aumento del tiempo se puede explicar debido al aumento del número de estados de la cadena de markov, al aumentar el número de máquinas del sistema. Lo cual aumenta la dimensión de la matriz R de tasas de transición (lo que se ve en la figura 6.3-2). El aumento del número de estados que aparecen a partir de n máquinas sigue la siguiente expresión: *número de estados* =  $0.5n^2 + 1.5n + 1$ ; con un ajuste  $R^2 = 1$ .

Se concluye que el método llega al óptimo al ser un algoritmo de búsqueda exhaustiva. Sin embargo, el tiempo computacional empleado por este es significativo al aumentar el número de máquinas.

#### 6.4 Calibración de la meta-heurística basada en gradient ascent

El pseudo-código y funcionamiento de éste método esta explicado en la sección 5.2. Los parámetros de la meta-heurística que se calibraron son: el punto en el cual se inicializa y el tamaño o longitud de paso. Para ello se emplearon las instancias mencionadas en la sección 6.1. Se tomaron como punto de inicio de las variables de decisión  $\alpha$  y  $\beta$ : el origen "(0,0]", el punto "(3000,3000)" y un punto aleatorio. En el caso del tamaño de paso se tomaron: una longitud de 0.5 y una de 1; que se iba reduciendo en la medida que aumentaban las iteraciones.

A continuación, se presentan las tablas resumen con los resultados obtenidos por la heurística en cada configuración:

*Tabla 6.4-1 Comparación de función objetivo meta-heurística*

Test	Inicio (0,0]	Inicio (0,0]	Inicio (3000,3000)	Inicio (3000,3000)	Inicio aleatorio	Inicio aleatorio
	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5
1	0.29	0.29	0.08	0.29	0.08	0.29
2	-43.35	-43.31	-43.56	-43.31	-43.56	-43.31
3	-157.69	-157.69	-157.85	-157.69	-157.85	-157.69
4	-46.78	-46.75	-46.99	-46.75	-46.99	-46.75
5	-5.76	-5.76	-5.82	-5.76	-5.82	-5.76
6	-8.93	-8.92	-9.10	-8.92	-9.10	-8.92
7	-71.50	-71.48	-71.49	-71.47	-71.48	-71.47
8	-100.07	-100.04	-100.18	-100.04	-100.17	-100.04
9	27.94	27.94	27.74	27.94	27.74	27.94
10	-145.33	-145.33	-145.38	-145.33	-145.38	-145.33
GAP Promedio	0,03%	0,00%	7,76%	0,00%	7,76%	0,00%

La tabla anterior presenta el valor de la función objetivo obtenido por cada configuración, en cada test. De estos resultados se concluye que en todos los casos la configuración con inicio en (3000,3000), con tamaño de paso 0.5 y la configuración con inicio aleatorio, con tamaño de paso 0.5, obtienen el valor máximo de la función objetivo en cada test. También se observa que en todos los casos la configuración con inicio en (3000,3000), con tamaño de paso 1 y la configuración con inicio aleatorio, con tamaño de paso 1, obtienen los peores resultados; obteniendo un GAP de un poco más del 70% en algunos casos. La configuración con inicio en (0,0], con tamaño de paso 1, a pesar de no lograr en algunos test el valor máximo su GAP es inferior al 11%. La configuración con inicio en (0,0], con tamaño de paso 0.5, a pesar de no lograr en algunos test el valor máximo su GAP es inferior al 1%.

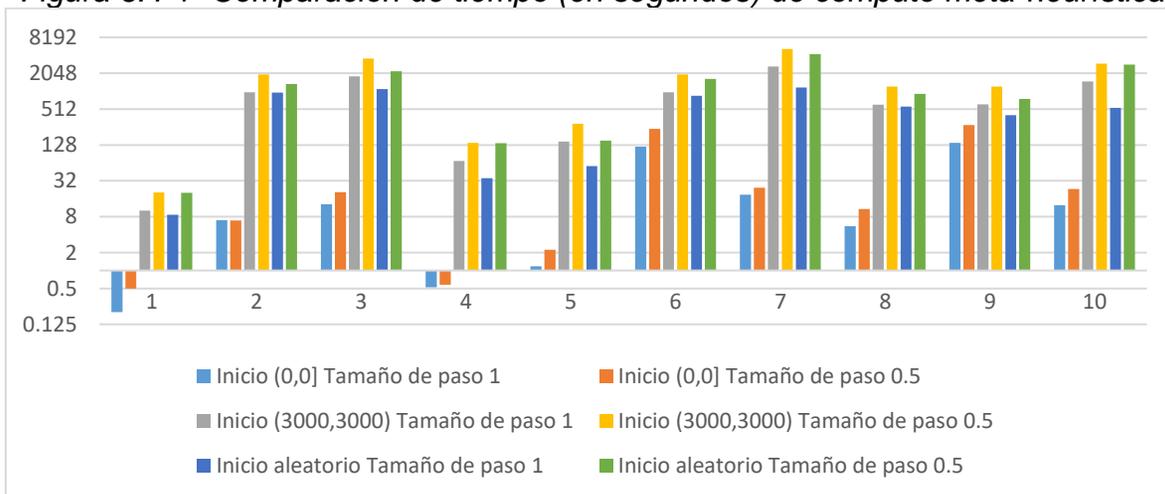
**Tabla 6.4-2 Comparación de tiempo (en segundos) de computo meta-heurística**

Test	Inicio (0,0]	Inicio (0,0]	Inicio (3000,3000)	Inicio (3000,3000)	Inicio aleatorio	Inicio aleatorio
	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5
1	0.2	0.5	10.11	20.29	8.63	20.22
2	6.98	6.88	976.61	1958.16	966.82	1347.99
3	12.94	20.65	1824.71	3625.26	1105.8	2202.29
4	0.52	0.58	69.17	139.25	35.69	136.74
5	1.17	2.24	145.25	291.88	56.59	151.58
6	120.34	239.12	976.23	1955.58	852.55	1650.17
7	18.64	24.5	2664.36	5250.92	1182.39	4269.68
8	5.52	10.81	611.58	1225.2	567.92	926.33
9	139.06	277.63	612.25	1225	404	755.89
10	12.44	23.25	1489.22	2974.77	534.3	2866.49
Promedio	31,78	60,62	937,95	1866,63	571,47	1432,74

La tabla anterior presenta el tiempo computacional, en segundos, empleado por cada configuración en cada prueba. De estos resultados se concluye que en todos los casos las configuraciones con inicio en (0,0], con tamaño de paso 1 y tamaño de paso 0.5, obtienen los menores tiempos computacionales en cada prueba. También se observa que en todos los casos las demás configuraciones tardan más tiempo.

Lo descrito anteriormente se puede apreciar mejor en la siguiente figura:

**Figura 6.4-1 Comparación de tiempo (en segundos) de computo meta-heurística**



Teniendo en cuenta los resultados y el análisis realizado anteriormente en los test de calibración de la meta-heurística, se define como punto de inicio (0,0] y tamaño de paso 1. Debido a que, de todas las configuraciones, ésta es la que obtiene mejores resultados empleando la menor cantidad de tiempo computacional.

### 6.5 Evaluación del desempeño

En esta sección se busca comparar el desempeño de la meta-heurística basada en gradient ascent calibrada contra el desempeño del exhaustive search. A continuación, se presenta una tabla resumen de las funciones objetivo calculadas a partir de cada método contra el número de máquinas.

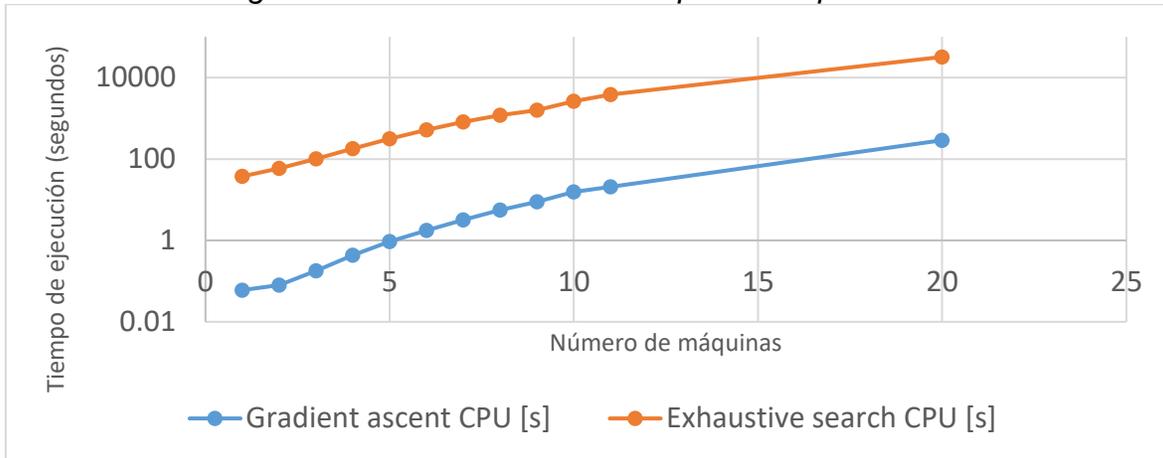
*Tabla 6.5-1 Comparación del valor de la función objetivo*

<b><i>n</i></b>	Gradient ascent	Exhaustive search	GAP
	FO [\$]	FO [\$]	
1	0.2005	0.2006	0.05348%
2	0.8300	0.8301	0.00957%
3	1.4802	1.4803	0.00349%
4	2.1432	2.1433	0.00169%
5	2.8251	2.8251	0.00067%
6	3.5269	3.5269	0.00092%
7	4.2468	4.2468	0.00041%
8	4.9818	4.9819	0.00035%
9	5.7293	5.7293	0.00008%
10	6.4870	6.4870	0.00009%
11	7.2529	7.2529	0.00007%
20	14.3669	14.3669	0.00009%

Se puede observar que el GAP para todos los casos es inferior al 0.5%, lo que se traduce en un buen desempeño de la meta-heurística.

A continuación, se presenta el gráfico que representa el tiempo computacional de cada método:

Figura 6.5-1 Análisis del desempeño computacional



A partir de la figura anterior se concluye que el desempeño en tiempo computacional de la meta-heurística es significativamente mejor al del método exhaustive search. Lo anterior se evidencia en la tabla 6.5-2, la cual muestra la diferencia porcentual que hay entre el tiempo empleado por la meta-heurística contra el exhaustive search.

La columna diferencia porcentual de la siguiente tabla se calcula a partir de la siguiente expresión:  $\frac{|CPU\ gradient\ ascent - CPU\ Exhaustive\ search|}{CPU\ Exhaustive\ search} * 100\%$ . Es decir, se tiene como base de comparación el tiempo obtenido por el método exhaustive search.

Tabla 6.5-2 Comparación de tiempo de computo

<i>n</i>	Gradient ascent	Exhaustive search	Diferencia porcentual
	CPU [s]	CPU [s]	
1	0.06	37.46	99.83983%
2	0.08	59.05	99.86452%
3	0.18	101.3	99.82231%
4	0.43	178.64	99.75929%
5	0.93	312.31	99.70222%
6	1.77	521.84	99.66082%
7	3.19	816.39	99.60926%
8	5.53	1186.71	99.53400%
9	8.94	1595.97	99.43984%
10	15.56	2622.87	99.40676%
11	20.83	3852.17	99.45927%
20	288.95	32192.61	99.10243%

De los resultados anteriores se concluye que el método meta-heurística basada en gradient ascent entrega excelentes resultados en poco tiempo, en comparación al método exhaustive search que entrega el valor óptimo del problema, tardando más tiempo.

## 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se ha diseñado un modelo de cadenas de markov de tiempo continuo que representa el comportamiento del estado de los escáneres de tomografía computarizada (objetivo específico # 1), un modelo de optimización que tiene como objetivo maximizar el beneficio generado por las máquinas, y dos métodos de solución; una meta-heurística basada en gradient ascent y un algoritmo de exhaustive search (objetivo específico # 3).

Durante la calibración de la meta-heurística propuesta se encontró que los mejores parámetros para implementar son un tamaño de paso de 1 y un inicio en el origen " $(\alpha = 0, \beta \approx 0)$ " para las instancias analizadas.

Se encontró que el tiempo computacional de la meta-heurística es significativamente menor que el de exhaustive search. Adicionalmente, el GAP que tiene la meta-heurística respecto al óptimo calculado con el exhaustive search es pequeño (inferior a 1%).

Se generó un modelo de cadenas de markov de tiempo continuo válido para representar la vida útil de un grupo de escáneres de tomografía y se verificó el modelo de cadenas de markov a partir de simulación (objetivo específico # 2). El error porcentual promedio del modelo de simulación respecto a la cadena de markov, es inferior al 15%.

Se plantea como investigación futura diseñar un modelo de optimización bi-objetivo que maximice el beneficio generado por las máquinas y minimice la varianza. También diseñar un modelo de cadenas de markov que tenga en cuenta diferentes tipos de máquinas. Estudiar el deterioro de las máquinas. Aplicar el modelo en otros sectores. Implementar simheuristics como método de solución.

## 8 LISTA DE PRODUCTOS DERIVADOS DE LA TESIS

### 8.1 Artículos derivados de resultados parciales de la Tesis

- Victoria Eugenia Ospina, Andres Felipe Cardona, William J. Guerrero. (2017) Information Technologies and Analytics as Decision Support Systems in Hospital Logistics: Four Research Experiences in the Colombian Case. International Journal of Internet of Things and Web Services, 2, 136-141 <https://www.iaras.org/iaras/home/caijitws/information-technologies-and-analytics-as-decision-support-systems-in-hospital-logistics-four-research-experiences-in-the-colombian-case>

### 8.2 Participaciones en congresos para la socialización de resultados de avances y resultados parciales de la tesis.

- Andrés Felipe Cardona, William J. Guerrero, Ignacio P. Vélez. (2017). Modelamiento y optimización de políticas de mantenimiento de equipo médico con tiempos de falla estocásticos. En II congreso de la asociación colombiana de investigación operativa - ASOCIO. Bogotá, Colombia. 22 de agosto de 2017.
- Victoria Eugenia Ospina, Andres Felipe Cardona, William J. Guerrero. (2017) Information Technologies and Analytics as Decision Support Systems in Hospital Logistics: Four Research Experiences in the Colombian Case. End 22nd International Conference on applied mathematics (amath '17). Roma, Italia. 15- de diciembre de 2017.

### 8.3 Posters derivados de resultados parciales y avances de la tesis.

- Victoria Eugenia Ospina, Andres Felipe Cardona, William J. Guerrero. (2017). Information Technologies and Analytics as Decision Support Systems in Hospital Logistics: Four Research Experiences in the Colombian Case. En ECiencia: agrotecnología y desarrollo sostenible. Bogotá, Colombia. 28 de octubre de 2017.
- Victoria Eugenia Ospina, Andres Felipe Cardona, William J. Guerrero, Ignacio P. Vélez. (2017). Programación y optimización de recursos hospitalarios en una IPS de nivel 4 Mantenimiento de Equipo Médico. En ECiencia: agrotecnología y desarrollo sostenible. Bogotá, Colombia. 28 de octubre de 2017.
- Andres Felipe Cardona, William J. Guerrero, Ignacio P. Vélez (2018) Modelamiento y optimización de políticas de mantenimiento de equipo médico con tiempos de falla estocásticos. En international conference on production research - ICPR. Bogotá, Colombia. 17 de Julio de 2018.

## **Bibliografía**

Mosadeghrad, A.M. (2014). Factors Affecting Medical Service Quality. Iranian Journal of Public Health. 210-220.

Graber ML, Franklin N, Gordon R. (2005). Diagnostic error in internal medicine. Archives of Internal Medicine. 1493–1499

Asc Communications. (2012). 12 statistics on CT scanner costs. Becker's Hospital review. Recuperado de <https://www.beckershospitalreview.com/hospital-key-specialties/12-statistics-on-ct-scanner-costs.html>

Aguilar, V.G., Garrido, P. y Godino, N. (2013). Mejorando la cadena de suministro en un hospital mediante la gestión. Revista de calidad asistencial. 337 – 344.

Aguilar, V.G. y Garrido, P. (2012). Gestión Lean en logística de hospitales: estudio de un caso. Revista de calidad asistencial. 42 – 49.

Hernandez, A., Medina, A., Nogueira, D., Negrin, E. y Marques, M. (2014). La caracterización y clasificación de sistemas, un paso necesario en la gestión y mejora de procesos. Particularidades en organizaciones hospitalarias. DYNA. 193 – 200.

Giedelman, N., Diseño de un método meta-heurístico para resolver el problema de asignación de turnos de enfermería (NSP) con soft-constraints. Tesis de Maestría. Escuela colombiana de Ingeniería Julio Garavito. (2017).

Guerrero, W. J., Velasco, N., y Amaya, C. (2008). Modelo de Programación Multi – Objetivo en el Sistema de Remisión de Pacientes entre Hospitales de Bogotá. Cuadernos de PyLo.

Arm Abd Rani, N., Rizal, M., Rosniza, A. y Hadi, A. (2015). Perception of Maintenance Management Strategy on Healthcare Facilities. Procedia - Social and Behavioral Sciences 170. 272 – 281.

Carnero, M. (2014). Multicriteria model for maintenance benchmarking. Journal of Manufacturing Systems 33. 303–321.

Artículo 97. Consulta general (1994). Resolución número 5261 de 1994. Ministerio de salud, Bogotá, Colombia, 5 de agosto de 1994

Guerrero, W. J., Young, T. G., & Guéret, C. (2013). Joint-optimization of inventory policies on a multi-product multi-echelon pharmaceutical system with batching and ordering constraints. European Journal of Operational Research, 231(1), 98-108.

Jafari, L. Y Makis, V. (2016). Optimal lot-sizing and maintenance policy for a partially observable production system. *Computers & Industrial Engineering* 93. 88–98.

Jamshidi, A., Abbasgholizadeh, A., Ait-kadi, D. y Bartolome A. (2014). Medical devices Inspection and Maintenance; A Literature Review. *Proceedings of the 2014 Industrial and Systems Engineering Research Conference*. 3895 – 3904.

Jiménez, A. M., Guerrero, J. G., Amaya, C. A., y Velasco, N. (2008). Optimización de los recursos en los hospitales: revisión de la literatura sobre logística hospitalaria. *Universidad de los Andes*. 21-Jan-2008.

Khalaf, A.B., Hamam, Y., Alayli, Y. y Djouani, K. (2013). The effect of maintenance on the survival of medical equipment. *Journal of Engineering, Design and Technology* 11. 142-157.

Papakonstantinou, K.G. y Shinozuka, M. (2014). Optimum inspection and maintenance policies for corroded structures using partially observable Markov decision processes and stochastic, physically based models. *Probabilistic Engineering Mechanics* 37. 93–108.

Romero, D., Sierra, A., Daza, J. y Ferrer, M. (2013) Revisión de los desafíos en las operaciones logísticas de los hospitales. *Congreso Internacional de Ingeniería corporación Politécnico Costa Atlántica CIIPCA 2013*. 75-78.

Tomasevicz, C. y Asgarpoor, S. (2009). Optimum maintenance policy using semi-Markov decision processes. *Electric Power Systems Research* 79. 1286–1291.

Xiang, Y. (2013) Joint optimization of X control chart and preventive maintenance policies: A discrete-time Markov chain approach. *European Journal of Operational Research* 229. 382–390.

Kulkarni, V.G. (2011) Introduction. *Eds G. Casella, I.Olkin y S. Fienberg (Eds). Introduction to modeling and analysis of stochastic systems (Second Edition), (pp 1). New York. Springer.*

Mark A. Boyd (1998) *An Introduction to Markov Modeling: Concepts and Uses*. *End Reliability and Maintainability Symposium, January 16-19, Anahiem.*

Azarang M. y Garcia E (1998). Simulación. *En A. García, M. M. García y Z. García(Eds). Simulación y análisis de modelos estocásticos. (pp 63). México. McGraw Hill.*

J.R. Norris (1998). Introduction. Ed. J. Norris (Eds). Markov Chains, (pp1). Cambridge. Cambridge University Press

Orozco Alzate, Nelson. (1981). Conceptos básicos sobre mantenimiento preventivo y mantenimiento correctivo. Medellín, Colombia: Bdigital Repositorio Institucional UN. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/794/>

**Anexos:**

A continuación, se presenta el conjunto completo de Instancias, con los mejores valores arrojados por la meta-heurística ( $\beta$ : tasa mantenimiento preventivo y  $\alpha$ : tasa mantenimiento correctivo):

Test	$n$	$\delta$	$\gamma$	$\theta$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$Q$	$\beta$	$\alpha$
1	4	17	11	33	6	4	2	0.04	0.19	200	0.5	34.5
2	17	18	12	22	9	5	3	0.67	0.72	200	0.5	6.5
3	20	7	6	10	2	1	9	0.78	0.81	200	0.5	16.5
4	8	18	7	33	5	3	7	0.68	0.78	200	0.5	10.5
5	10	7	5	13	4	3	2	0.21	0.5	200	0.5	21.5
6	17	13	8	20	8	5	9	0.18	0.25	200	0.5	366.5
7	22	4	4	6	4	2	4	0.17	0.66	200	0.5	12.5
8	15	3	1	4	5	3	9	0.27	0.97	200	0.5	24.5
9	15	10	10	13	5	4	7	0.01	0.02	200	0.5	679.5
10	19	9	3	16	6	3	9	0.43	0.65	200	0.5	22.5
11	6	16	15	28	2	1	10	0.16	0.31	200	0.5	59.5
12	18	5	1	10	3	2	9	0.09	0.1	200	0.5	493.5
13	4	7	1	8	4	2	5	0.2	0.35	200	0.5	31.5
14	9	11	4	12	7	4	2	0.01	0.6	200	0.5	8.5
15	17	4	4	8	5	4	3	0.15	0.24	200	0.5	204.5
16	30	12	2	21	7	4	9	0.25	0.78	200	0.5	24.5
17	2	4	3	7	4	3	8	0.01	0.04	200	0.5	88.5
18	27	13	11	17	10	5	7	0.07	0.27	200	0.5	453.5

<b>19</b>	25	2	1	4	6	3	3	0.04	0.72	200	0.5	21.5
<b>20</b>	24	2	2	4	10	5	2	0.15	0.78	200	0.5	35.5
<b>21</b>	5	19	5	28	6	3	9	0.46	0.57	200	0.5	30.5
<b>22</b>	23	19	13	34	10	5	10	0.08	0.66	200	0.5	256.5
<b>23</b>	18	19	7	22	3	2	2	0.47	0.73	200	0.5	2.5
<b>24</b>	13	18	10	32	2	1	3	0.1	0.43	200	0.5	6.5
<b>25</b>	9	19	12	35	5	3	6	0.1	0.67	200	0.5	20.5
<b>26</b>	12	6	5	9	5	4	7	0.11	0.39	200	0.5	116.5
<b>27</b>	6	20	10	35	2	1	10	0.08	0.09	200	0.5	123.5
<b>28</b>	11	20	5	24	2	1	3	0.06	0.93	200	0.5	2.5
<b>29</b>	17	20	15	35	7	4	2	0.15	0.52	200	0.5	12.5
<b>30</b>	27	15	4	30	4	2	8	0.3	0.49	200	0.5	20.5
<b>31</b>	26	7	1	14	4	3	9	0.41	0.53	200	0.5	37.5
<b>32</b>	18	15	9	27	2	1	7	0.6	0.91	200	0.5	8.5
<b>33</b>	19	12	11	21	10	5	10	0.4	0.87	200	0.5	22.5
<b>34</b>	26	16	3	27	5	3	10	0.67	0.89	200	0.5	16.5
<b>35</b>	15	20	5	23	4	3	8	0.4	0.84	200	0.5	10.5
<b>36</b>	16	20	8	38	4	2	6	0.25	0.3	200	0.5	161.5
<b>37</b>	26	11	10	16	7	4	2	0.02	0.05	200	0.5	483.5
<b>38</b>	18	11	3	20	5	4	5	0.06	0.39	200	0.5	62.5
<b>39</b>	12	16	8	32	6	5	9	0.6	0.81	200	0.5	25.5

<b>40</b>	21	5	4	7	6	5	10	0.02	0.2	200	0.5	541.5
<b>41</b>	13	5	3	6	2	1	8	0.04	0.09	200	0.5	332.5
<b>42</b>	13	2	1	3	7	4	9	0.1	0.26	200	0.5	177.5
<b>43</b>	7	2	2	4	8	4	2	0.2	0.22	200	0.5	58.5
<b>44</b>	5	12	10	14	8	4	6	0.45	0.8	200	0.5	10.5
<b>45</b>	26	18	7	26	5	3	10	0.73	0.79	200	0.5	14.5
<b>46</b>	7	17	8	25	2	1	10	0.12	0.32	200	0.5	66.5
<b>47</b>	3	9	1	14	4	2	9	0.01	0.4	200	0.5	22.5
<b>48</b>	25	14	4	18	3	2	7	0.41	0.84	200	0.5	23.5
<b>49</b>	20	19	19	35	4	3	7	0.31	0.77	200	0.5	12.5
<b>50</b>	15	2	1	4	2	1	7	0.15	0.67	200	0.5	42.5
<b>51</b>	18	15	13	16	7	5	3	0.19	0.24	200	0.5	48.5
<b>52</b>	6	12	6	20	5	3	6	0.41	0.45	200	0.5	41.5
<b>53</b>	3	20	19	34	2	1	4	0.08	0.25	200	0.5	21.5
<b>54</b>	9	10	10	16	2	1	10	0.28	0.51	200	0.5	66.5
<b>55</b>	17	6	1	11	7	4	6	0.03	0.2	200	0.5	234.5
<b>56</b>	8	17	16	27	3	2	3	0.01	0.02	200	0.5	270.5
<b>57</b>	19	2	2	4	2	1	10	0.03	0.12	200	0.5	363.5
<b>58</b>	10	2	2	3	9	5	5	0.67	0.9	200	0.5	19.5
<b>59</b>	12	15	14	16	3	2	8	0.2	0.29	200	0.5	120.5
<b>60</b>	4	19	12	20	8	4	9	0.5	0.81	200	0.5	12.5

<b>61</b>	26	7	2	11	2	1	7	0.43	0.57	200	0.5	18.5
<b>62</b>	22	20	20	22	2	1	9	0.77	0.82	200	0.5	146.5
<b>63</b>	1	5	4	6	6	3	9	0.23	0.35	200	0.5	0.5
<b>64</b>	11	4	3	6	3	2	6	0.11	0.79	200	0.5	16.5
<b>65</b>	2	11	9	18	10	5	10	0.06	0.47	200	0.5	16.5
<b>66</b>	3	17	11	26	2	1	5	0.56	0.67	200	0.5	8.5
<b>67</b>	5	6	5	8	2	1	4	0.26	0.55	200	0.5	6.5
<b>68</b>	22	6	3	12	10	5	4	0.05	0.12	200	0.5	425.5
<b>69</b>	17	16	15	22	10	5	10	0.002	0.01	200	0.5	698.5
<b>70</b>	10	12	12	15	8	4	6	0.42	0.54	200	0.5	16.5
<b>71</b>	3	4	1	5	5	3	3	0.06	0.88	200	0.5	4.5
<b>72</b>	30	11	11	14	4	2	4	0.22	0.67	200	0.5	18.5
<b>73</b>	10	2	2	4	7	5	4	0.27	0.51	200	0.5	34.5
<b>74</b>	16	14	4	18	8	4	5	0.44	0.99	200	0.5	10.5
<b>75</b>	2	4	1	8	4	2	7	0.05	0.09	200	0.5	41.5
<b>76</b>	8	13	9	23	10	5	10	0.02	0.22	200	0.5	122.5
<b>77</b>	3	13	4	25	3	2	9	0.44	0.45	200	0.5	18.5
<b>78</b>	1	10	4	16	4	2	2	0.86	0.97	200	0.5	0.5
<b>79</b>	3	13	10	18	7	5	5	0.02	0.24	200	0.5	30.5
<b>80</b>	25	9	3	16	7	4	3	0.28	0.77	200	0.5	10.5
<b>81</b>	22	6	3	10	3	2	8	0.13	0.53	200	0.5	267.5

<b>82</b>	3	6	4	10	3	2	10	0.04	0.84	200	0.5	14.5
<b>83</b>	30	4	3	8	3	2	5	0.13	0.33	200	0.5	79.5
<b>84</b>	26	5	4	10	3	2	8	0.38	0.71	200	0.5	18.5
<b>85</b>	5	16	16	20	2	1	3	0.44	0.45	200	0.5	8.5
<b>86</b>	15	8	2	13	3	2	6	0.22	0.77	200	0.5	10.5
<b>87</b>	14	11	4	22	8	5	9	0.04	0.31	200	0.5	211.5
<b>88</b>	17	8	1	14	6	4	6	0.02	0.8	200	0.5	23.5
<b>89</b>	2	5	4	6	2	1	4	0.06	0.11	200	0.5	33.5
<b>90</b>	12	4	4	5	3	2	2	0.34	0.55	200	0.5	6.5
<b>91</b>	28	9	7	10	3	2	10	0.1	0.2	200	0.5	512.5
<b>92</b>	8	6	1	9	6	5	9	0.24	0.36	200	0.5	111.5
<b>93</b>	19	18	4	21	6	3	6	0.39	0.67	200	0.5	12.5
<b>94</b>	12	8	5	12	6	5	6	0.36	0.39	200	0.5	137.5
<b>95</b>	11	3	2	5	6	4	10	0.4	0.5	200	0.5	109.5
<b>96</b>	29	7	7	14	4	2	6	0.12	0.86	200	0.5	10.5
<b>97</b>	17	5	5	6	3	2	8	0.4	0.72	200	0.5	36.5
<b>98</b>	1	18	14	33	3	2	8	0.24	0.61	200	0.5	0.5
<b>99</b>	21	8	2	14	2	1	5	0.35	0.53	200	0.5	30.5
<b>100</b>	4	20	19	29	5	3	8	0.02	0.1	200	0.5	91.5

A continuación, se presenta el conjunto de tiempos (en segundos) empleados en la solución de las instancias por la meta-heurística, empleando diferentes parámetros (tamaño de paso, punto de inicio):

Test	Inicio (0,0)	Inicio (0,0)	Inicio (3000,3000)	Inicio (3000,3000)	Inicio aleatorio	Inicio aleatorio
	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5
1	0.2	0.5	10.11	20.29	8.63	20.22
2	6.98	6.88	976.61	1958.16	966.82	1347.99
3	12.94	20.65	1824.71	3625.26	1105.8	2202.29
4	0.52	0.58	69.17	139.25	35.69	136.74
5	1.17	2.24	145.25	291.88	56.59	151.58
6	120.34	239.12	976.23	1955.58	852.55	1650.17
7	18.64	24.5	2664.36	5250.92	1182.39	4269.68
8	5.52	10.81	611.58	1225.2	567.92	926.33
9	139.06	277.63	612.25	1225	404	755.89
10	12.44	23.25	1489.22	2974.77	534.3	2866.49
11	0.59	1.15	28.44	57.15	12.12	45.22
12	200.45	398.79	1211.98	2422.05	424.71	1965.07
13	0.11	0.21	9.83	19.77	6.73	19.44
14	0.71	0.71	101.7	204.56	6.45	138.24
15	67.39	134.2	975.94	1956.02	682.75	1783.5
16	83.53	157.95	9254.41	18448.15	7399.3	8546.31
17	0.11	0.21	3.31	6.6	2.02	4.76
18	908.9	1798.31	5977.08	11912.12	1683.46	4091.99
19	34.99	68.05	4378.92	8725.78	2941.63	7459.86
20	47.01	90.95	3708.11	7410.47	1517	6267.51
21	0.19	0.37	17.11	34.56	0.48	13.72
22	270.21	534.88	3126.84	6257.24	1742.25	5355.57
23	8.43	8.47	1205.41	2423.87	450.27	1435.45
24	2.55	2.51	363.04	730.85	344.59	716.4
25	0.78	1.57	101.68	204.92	10.69	127.83
26	10.81	21.37	272.93	549.56	176.19	420.63
27	1.19	2.38	28.46	57.31	23.83	33.4
28	1.44	1.42	201.14	405.21	20.36	345.88
29	6.8	9.4	973.11	1956.26	669.61	1465.19
30	45.87	87.05	5976.98	11897.74	2999.03	8425.87
31	68.66	132.17	5132.14	10212.79	2933.47	7891.75

32	8.42	8.49	1203.24	2420.96	1187.25	1106.58
33	12.37	23.69	1479.92	2975.21	1067.25	2515.48
34	35.96	61.04	5133.01	10212.36	4289.98	9669.46
35	4.28	4.85	609.17	1226.77	223.45	1006.78
36	42.29	84.07	773.49	1558.94	324.86	962.48
37	831.74	1642.07	5141.12	10211.61	3123.85	8532.07
38	26.03	51.59	1203.64	2420.4	1191.61	995.25
39	2.53	5	272.82	549.55	219.64	536.67
40	395.56	789.91	2186.59	4383.59	362.67	3815
41	40.47	80.75	362.75	731.02	281.95	541.22
42	21.74	43.18	362.7	730.87	315.63	289.68
43	0.92	1.83	45.29	91.3	44.5	47.88
44	0.12	0.14	17.12	34.49	7.78	18.9
45	35.89	54.33	5135.77	10228.54	4251.48	3378.55
46	1.04	2.09	45.31	91.66	43.47	88.16
47	0.04	0.08	5.58	11.26	3.02	10.03
48	37.89	70.83	4380.25	8742.94	2351.2	2347.91
49	12.64	17.44	1803.78	3623.85	1080.72	3554.89
50	9.13	17.89	609.75	1228.12	505.92	1168.14
51	20.44	40.08	1203.28	2423.33	744.66	1037.51
52	0.42	0.81	28.45	57.28	21.95	46.92
53	0.05	0.09	5.6	11.22	5.05	4.39
54	2.34	4.61	101.73	204.84	61.61	197.96
55	76.72	152.99	973.08	1957	804.76	1123.94
56	6.28	12.51	69.09	139.36	58.72	93.14
57	180.23	359.61	1480.36	2977.41	676.5	806.82
58	1.07	2	145.2	292.34	91.89	216.72
59	11.18	22.19	272.9	549.44	134.11	72.07
60	0.07	0.09	9.84	19.78	5.31	3.2
61	35.92	66.13	5130.76	10214.08	5000.75	7395.39
62	129.92	258.73	2618.69	5250.12	1255.42	4067.19
63	0.02	0.02	2.19	4.39	2.08	1.56
64	1.4	2.4	201.48	405.14	123.78	226.53
65	0.02	0.04	3.27	6.6	1.16	1.23
66	0.04	0.04	5.59	11.22	3.25	10.47
67	0.11	0.11	17.16	34.48	13.92	21.68
68	372.78	743.16	2619.33	5249.64	2505.36	1791.2
69	226.77	453.15	972.47	1955.61	602.95	1323.2

<b>70</b>	1.03	1.71	145.12	292.1	70.43	201.91
<b>71</b>	0.05	0.04	5.58	11.23	3.4	9.56
<b>72</b>	64.87	118.46	9331.75	18285.09	2938.72	14399.25
<b>73</b>	1.82	3.5	145.05	292.08	113.72	231.89
<b>74</b>	5.4	6.45	773.78	1558.86	550.45	1086.05
<b>75</b>	0.06	0.09	3.29	6.59	1.92	6.2
<b>76</b>	2.88	5.68	69.1	139.47	56.41	122.27
<b>77</b>	0.03	0.07	5.56	11.24	4.28	9.2
<b>78</b>	0.02	0.02	2.2	4.39	2.17	3.3
<b>79</b>	0.06	0.11	5.57	11.23	3.72	9.73
<b>80</b>	30.59	33.3	4373.82	8717.61	3918.69	7428.2
<b>81</b>	235.42	467.61	2618.43	5249.39	1041.31	3179
<b>82</b>	0.04	0.06	5.57	11.22	4.66	5.69
<b>83</b>	253.45	493.73	9257.24	18473.17	6079.22	12174.31
<b>84</b>	35.94	67.74	5130.95	10203.55	4632.48	4150.08
<b>85</b>	0.11	0.12	17.1	34.2	11.58	10.41
<b>86</b>	4.26	4.89	609.53	1216.31	591.2	649.48
<b>87</b>	33.7	67.21	473.61	945.29	272.24	742.02
<b>88</b>	8.44	16.54	972.82	1939.6	893.5	1600.15
<b>89</b>	0.05	0.08	3.27	6.55	1.94	2.93
<b>90</b>	1.91	1.94	272.83	544.55	255.89	486.18
<b>91</b>	1195.17	2354.09	6979.94	14174.9	1075.46	2553.77
<b>92</b>	2.64	5.24	69.09	137.93	38.1	131.36
<b>93</b>	10.37	13.84	1479.53	2955.37	1151.73	1208.86
<b>94</b>	12.71	25.36	272.67	544.47	249.08	327.7
<b>95</b>	7.51	14.89	201.1	401.64	154.24	273.99
<b>96</b>	56.35	58.33	8091.93	16026.5	3300.1	15835.06
<b>97</b>	12.62	24.95	974.64	1940.88	923.75	1861.56
<b>98</b>	0.02	0.02	2.18	4.39	0.66	4.19
<b>99</b>	24.01	45.79	2183.39	4351.65	1342.99	1799.31
<b>100</b>	0.3	0.6	9.83	19.61	9.25	10.89

A continuación, se presenta el conjunto de funciones objetivo de las instancias obtenidas por la meta-heurística, empleando diferentes parámetros (tamaño de paso, punto de inicio):

Test	Inicio (0,0)	Inicio (0,0)	Inicio (3000,3000)	Inicio (3000,3000)	Inicio aleatorio	Inicio aleatorio
	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5	Tamaño de paso 1	Tamaño de paso 0.5
1	0.29	0.29	0.08	0.29	0.08	0.29
2	-43.35	-43.31	-43.56	-43.31	-43.56	-43.31
3	-157.69	-157.69	-157.85	-157.69	-157.85	-157.69
4	-46.78	-46.75	-46.99	-46.75	-46.99	-46.75
5	-5.76	-5.76	-5.82	-5.76	-5.82	-5.76
6	-8.93	-8.92	-9.10	-8.92	-9.10	-8.92
7	-71.50	-71.48	-71.49	-71.47	-71.48	-71.47
8	-100.07	-100.04	-100.18	-100.04	-100.17	-100.04
9	27.94	27.94	27.74	27.94	27.74	27.94
10	-145.33	-145.33	-145.38	-145.33	-145.38	-145.33
11	-32.25	-32.25	-32.32	-32.25	-32.31	-32.25
12	-25.80	-25.80	-25.95	-25.80	-25.95	-25.80
13	-3.56	-3.54	-3.75	-3.54	-3.75	-3.54
14	-12.39	-12.40	-12.65	-12.40	-12.62	-12.39
15	57.53	57.54	57.30	57.54	57.30	57.54
16	-238.48	-238.47	-202.17	-202.05	-202.17	-202.05
17	4.01	4.02	4.00	4.02	4.00	4.02
18	22.95	22.95	22.87	22.95	22.87	22.95
19	-48.37	-48.35	-48.36	-48.35	-48.36	-48.35
20	4.44	4.45	4.26	4.46	4.26	4.46
21	-30.16	-30.16	-30.30	-30.15	-30.30	-30.15
22	-92.34	-92.33	-92.35	-92.33	-92.35	-92.33
23	-32.50	-32.33	-32.60	-32.33	-32.54	-32.33
24	-35.72	-35.72	-35.84	-35.72	-35.84	-35.72
25	-36.92	-36.91	-36.97	-36.91	-36.97	-36.90
26	-20.39	-20.39	-20.56	-20.39	-20.56	-20.39
27	2.15	2.15	2.06	2.15	2.06	2.15
28	-31.17	-31.26	-31.58	-31.26	-31.24	-31.17
29	-22.80	-22.77	-22.93	-22.77	-22.93	-22.77
30	-196.39	-196.39	-196.40	-196.39	-196.40	-196.39
31	-193.65	-193.65	-193.69	-193.65	-193.69	-193.65

32	-113.53	-113.49	-109.86	-109.83	-113.52	-109.83
33	-155.99	-155.98	-156.22	-155.97	-156.22	-155.97
34	-233.83	-233.82	-230.78	-230.61	-230.78	-230.61
35	-106.52	-106.49	-106.56	-106.48	-106.56	-106.48
36	-43.06	-43.06	-43.32	-43.06	-43.32	-43.06
37	112.54	112.54	112.30	112.54	112.30	112.54
38	-55.29	-55.29	-53.52	-53.40	-53.52	-53.40
39	-79.31	-79.30	-79.38	-79.30	-79.38	-79.30
40	9.14	9.14	9.09	9.14	9.09	9.14
41	16.48	16.48	16.38	16.48	16.38	16.48
42	12.47	12.47	12.36	12.47	12.36	12.47
43	24.45	24.46	24.26	24.46	24.26	24.46
44	-23.44	-23.42	-23.66	-23.42	-23.66	-23.42
45	-237.74	-237.73	-237.94	-237.72	-237.94	-237.72
46	-48.77	-48.77	-48.99	-48.77	-48.99	-48.77
47	-15.07	-15.05	-15.25	-15.05	-15.24	-15.05
48	-141.88	-141.88	-136.05	-135.84	-136.05	-135.84
49	-121.98	-121.94	-122.12	-121.94	-122.10	-121.94
50	-44.25	-44.24	-44.28	-44.24	-44.28	-44.24
51	-38.52	-38.52	-35.27	-35.20	-35.27	-35.20
52	-14.29	-14.29	-14.49	-14.29	-14.49	-14.29
53	-5.74	-5.73	-5.98	-5.73	-5.97	-5.73
54	-53.02	-53.02	-53.05	-53.02	-53.05	-53.02
55	-32.77	-32.77	-32.83	-32.77	-32.83	-32.77
56	10.59	10.59	10.46	10.59	10.46	10.59
57	-32.28	-32.28	-32.46	-32.28	-32.45	-32.28
58	-26.08	-26.08	-26.28	-26.08	-26.26	-26.08
59	-25.79	-25.78	-25.96	-25.78	-25.96	-25.78
60	-28.87	-28.85	-29.05	-28.85	-29.05	-28.85
61	-161.40	-161.40	-161.61	-161.40	-161.62	-161.40
62	-142.89	-142.88	-142.99	-142.88	-142.98	-142.87
63	-9.13	-9.10	-9.26	-9.10	-9.26	-9.10
64	-46.91	-46.91	-46.94	-46.90	-46.94	-46.90
65	-13.32	-13.32	-13.38	-13.32	-13.38	-13.32
66	-11.04	-11.04	-11.18	-11.04	-11.18	-11.04
67	-18.53	-18.53	-18.66	-18.53	-18.66	-18.52
68	64.62	64.62	64.39	64.62	64.39	64.62
69	58.60	58.60	58.42	58.60	58.42	58.60

<b>70</b>	-49.10	-49.10	-49.17	-49.10	-49.17	-49.10
<b>71</b>	-7.78	-7.78	-7.92	-7.78	-7.97	-7.76
<b>72</b>	-96.63	-96.63	-96.76	-96.63	-96.76	-96.63
<b>73</b>	-6.95	-6.94	-7.17	-6.94	-7.17	-6.94
<b>74</b>	-63.26	-63.22	-67.28	-67.20	-67.28	-67.20
<b>75</b>	-7.84	-7.83	-8.02	-7.83	-8.03	-7.83
<b>76</b>	-11.59	-11.59	-11.60	-11.59	-11.60	-11.59
<b>77</b>	-16.05	-16.05	-16.22	-16.05	-16.23	-16.05
<b>78</b>	-2.33	-2.33	-2.67	-2.33	-3.18	-2.55
<b>79</b>	-2.36	-2.36	-2.40	-2.36	-2.40	-2.36
<b>80</b>	-59.36	-59.36	-59.38	-59.36	-59.40	-59.36
<b>81</b>	-57.75	-57.75	-57.90	-57.75	-57.89	-57.75
<b>82</b>	-18.69	-18.65	-18.73	-18.65	-18.73	-18.65
<b>83</b>	-87.38	-87.38	-87.58	-87.38	-87.58	-87.38
<b>84</b>	-180.95	-180.94	-181.02	-180.94	-181.02	-180.94
<b>85</b>	-11.75	-11.73	-11.95	-11.73	-11.95	-11.73
<b>86</b>	-75.90	-75.88	-75.91	-75.87	-75.91	-75.87
<b>87</b>	3.08	3.08	3.04	3.08	3.04	3.08
<b>88</b>	-74.68	-74.67	-73.95	-73.89	-73.95	-73.89
<b>89</b>	-0.87	-0.86	-1.07	-0.86	-1.07	-0.86
<b>90</b>	-18.86	-18.84	-18.90	-18.84	-18.95	-18.84
<b>91</b>	25.68	25.68	25.46	25.68	25.46	25.68
<b>92</b>	-19.73	-19.73	-19.86	-19.73	-19.86	-19.73
<b>93</b>	-99.84	-99.83	-100.06	-99.83	-100.06	-99.83
<b>94</b>	2.99	2.99	2.92	2.99	2.92	2.99
<b>95</b>	-5.15	-5.15	-5.32	-5.15	-5.31	-5.15
<b>96</b>	-156.96	-156.97	-157.24	-156.96	-157.24	-156.96
<b>97</b>	-87.18	-87.17	-87.40	-87.17	-87.40	-87.17
<b>98</b>	-8.09	-8.09	-8.19	-8.09	-8.28	-8.11
<b>99</b>	-78.81	-78.81	-78.22	-78.05	-78.22	-78.05
<b>100</b>	1.11	1.11	1.05	1.11	1.05	1.11